

I. Mechanik

1. Physikalische Grössen und Einheiten

1.1 Physikalische Grössen

Definition der physikalischen Grösse

Physikalische Grössen sind fundamentale Elemente zur Beschreibung physikalischer Gesetze.

Beispiele:

Länge, Kraft, Geschwindigkeit, magnetische Feldstärke, Aktivität (einer radioaktiven Quelle), elektrische Spannung, ...

Eine physikalische Grösse ist quantitativ bestimmt durch das Produkt von Masszahl und Einheit

$$\text{physikalische Grösse} = \text{Masszahl} \cdot \text{Einheit}$$

Beispiel: Länge $\ell = 5.7 \cdot 1\text{m} = 5.7 \text{ m}$

1. Physikalische Grössen und Einheiten

1.2 Basiseinheiten und abgeleitete physikalische Einheiten

Basiseinheiten werden durch Eichnormale oder Messvorschriften definiert.

Abgeleitete Einheiten entstehen durch die Verknüpfung mehrerer Basiseinheiten über Definitionsgleichungen und physikalische Gesetze.

Das 'Système International d'Unités' (SI-System)

Im Laufe der Entwicklung der Physik wurde bereits eine grosse Zahl verschiedener Systeme von Basiseinheiten verwendet. Heute wird in den meisten Staaten das SI-System als verbindliches Einheitensystem verwendet. Dieses werden wir auch in dieser Vorlesung konsequent benützen.

Das SI-System basiert auf den folgenden sieben Basiseinheiten:

Basisgrösse			Einheit (Symbol)	
1	Länge	(ℓ)	Meter	(m)
2	Zeit	(t)	Sekunde	(s)
3	Masse	(m)	Kilogramm	(kg)
4	elektrische Stromstärke	(I)	Ampère	(A)
5	Temperatur	(T)	Kelvin	(K)
6	Stoffmenge	(n)	Mol	(mol)
7	Lichtstärke	(I)	Candela	(cd)

Diese sieben Basiseinheiten sind definiert durch ein Eichnormal (im Falle des Kilogramms) bzw. durch entsprechende Messvorschriften. Diese sind im Anhang wiedergegeben.

Mit den Basiseinheiten des SI – Systems können alle abgeleiteten physikalischen Größen ausgedrückt werden.

Beispiele :

Kraft	$1 \text{ m} \cdot \text{kg} / \text{s}^2$ (= 1 Newton)
Geschwindigkeit	$1 \text{ m} / \text{s}$
elektrische Ladung	$1 \text{ A} \cdot \text{s}$ (= 1 Coulomb)
elektrische Spannung	$1 \frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^3 \cdot \text{A}}$ (= 1 Volt)

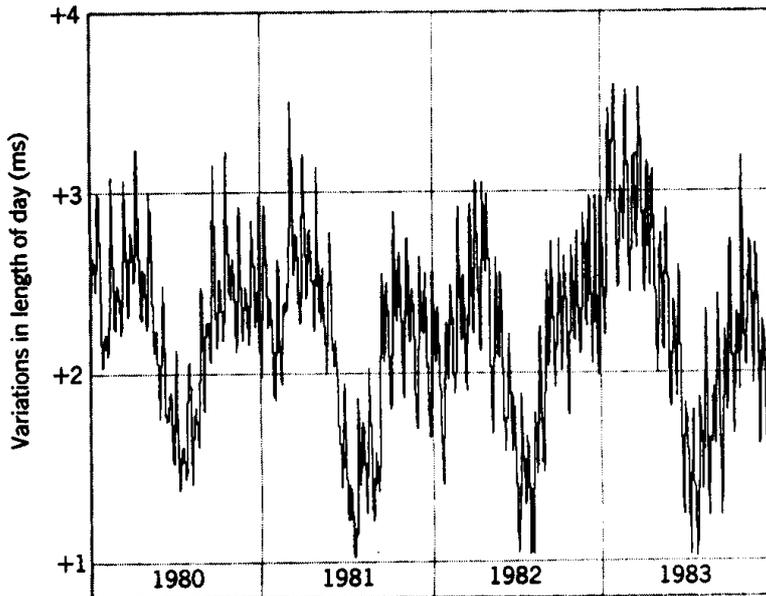
• Anforderungen an Basiseinheiten

- überall reproduzierbar (Unabhängigkeit von Eichnormalen; heute beruht nur noch die Definition der Masse auf einem Eichnormal \Rightarrow Urkilogramm)
- konstant (zeitlich unveränderlich)

1. Physikalische Grössen und Einheiten

Beispiel :

frühere Zeitdefinition beruhte auf der Dauer eines (mittleren) Sterntages. Diese unterliegt jedoch Schwankungen, die für die heutige Genauigkeitsanforderungen der Zeitdefinition zu gross sind.



Abweichungen der Tageslängen in Millisekunden ($1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s}$) in den Jahren 1980 - 1983

Warum gerade diese (sieben) Basiseinheiten ?

Das System der Basiseinheiten könnte auch anders gewählt werden.

Beispiel:

Basisgrösse/ Einheit	abgeleitete Grösse/ Einheit
Geschwindigkeit / Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum, c	Länge / 1 Lichtsekunde, $1 c \cdot s$ 1 Lichtjahr: Weg, den das Licht in einem Jahr zurücklegt. (Anwendung in der Astronomie)
Zeit Sekunde, s	

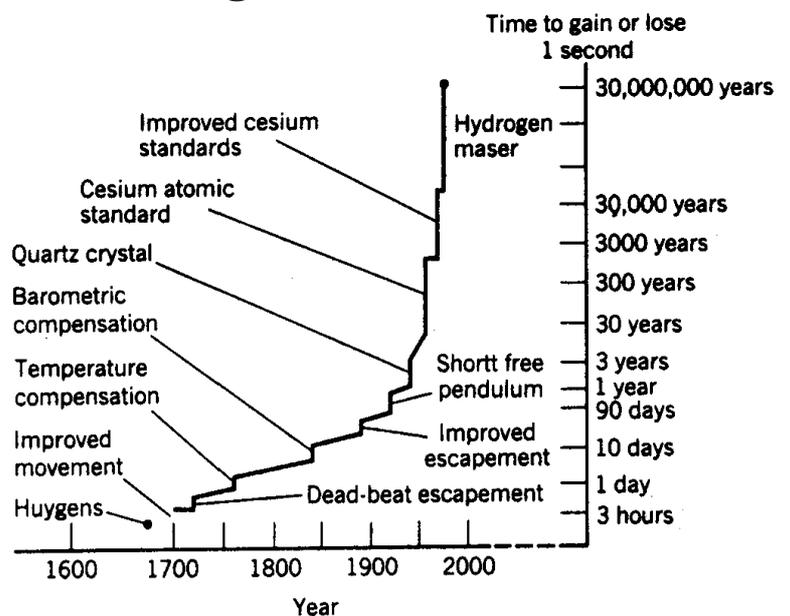
- 'erlaubte' Einheiten

neben den SI-Einheiten gibt es eine Reihe von alten Einheiten, die weiter verwendet werden dürfen.

Beispiel: Temperatur °C (Grad Celsius)
 Länge Å (Angström, $1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$)

- Genauigkeit der physikalischen Messungen

Beispiel:
 die Grafik zeigt die Entwicklung der Genauigkeit der Zeitmessung. Aufgetragen ist die Zeit, die verstreicht, bis die betreffende Uhr eine Abweichung von einer Sekunde aufweist.



1.3 Die Dimension einer physikalischen Grösse

Die Dimension einer physikalischen Grösse ist ihre Darstellung als Produkt von Basisgrössen.

Beispiele:

Dimension der Geschwindigkeit $[v] = [\ell/t]$

Dimension der Kraft $[F] = [\ell \cdot m/t^2]$

Es existieren auch dimensionslose Grössen:

Beispiel: Brechungsindex eines Mediums $[n] = 1$

1. Physikalische Grössen und Einheiten

Schreibweise physikalischer Grössen**International eingeführte Vorsätze für Einheiten**

1'000'000'000'000'000	10^{15}	Peta	P
1'000'000'000'000	10^{12}	Tera	T
1'000'000'000	10^9	Giga	G
1'000'000	10^6	Mega	M
1'000	10^3	Kilo	K
100	10^2	Hekto	h
10	10^1	Deka	da
0.1	10^{-1}	Dezi	d
0.01	10^{-2}	Zenti	c
0.001	10^{-3}	Milli	m
0.000'001	10^{-6}	Mikro	μ
0.000'000'001	10^{-9}	Nano	n
0.000'000'000'001	10^{-12}	Piko	p
0.000'000'000'000'001	10^{-15}	Femto	f

Beispiele :

$$0.000'001'27 \text{ m} = 1.27 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1.27 \mu\text{m}$$

$$2'450'000'000 \text{ Hz} = 2.45 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 2.45 \text{ GHz}$$

└── Hertz (1 Hz = 1 s⁻¹)

1.4 Skalare und vektorielle physikalische Grössen

Skalare Grössen sind durch Angabe der **Masszahl** und **Einheit** eindeutig definiert.

Vektorielle physikalische Grössen sind erst dann eindeutig definiert, wenn neben Masszahl und Einheit auch noch die **Richtung** im Raum definiert ist.

Beispiele :

Skalare physikalische Grössen :

Zeit, Masse, Energie, elektrische Ladung, Stoffmenge, Aktivität, Strahlendosis

Vektorielle physikalische Grössen :

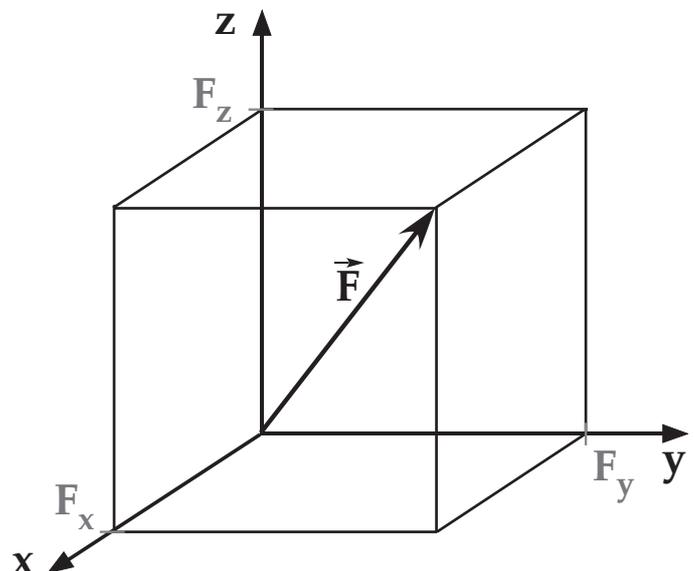
Weg, Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, elektrische Feldstärke

Schreibweise :

Kraft : $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

Betrag der Kraft : $|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}$

wobei F_x, F_y, F_z die Komponenten der Kraft F im dreidimensionalen Raum darstellen.



2. Kinematik

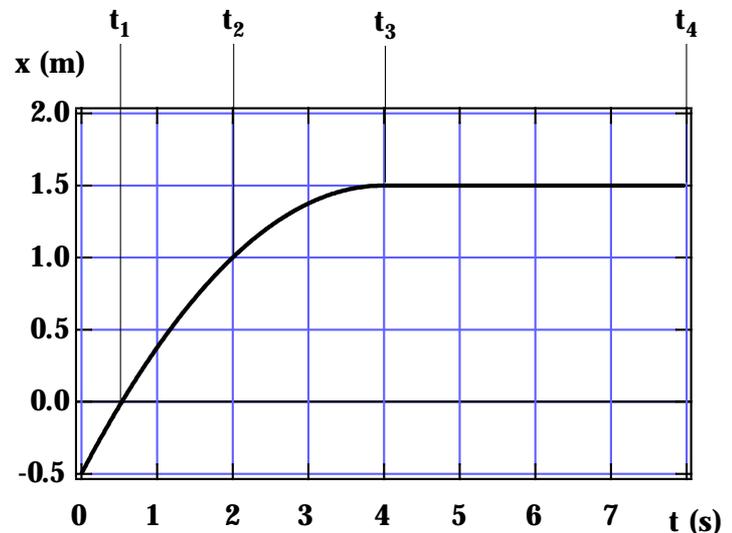
Bewegungslehre, Beschreibung von Bewegungen

2.1 Bewegung eines Punktes

Ein Punkt führt auf einer Geraden x eine Bewegung aus. Die Bewegung wird beschrieben durch die Ortsangabe x für jeden Zeitpunkt t , oder anders ausgedrückt, durch die Funktion $x(t)$.



Durch die Angabe der Funktion $x(t)$ im betrachteten Zeitintervall (z.B. von $t_0 = 0$ bis $t_4 = 8$ s) ist die Bewegung des Punktes eindeutig definiert. Für die Beschreibung des Bewegungszustandes zu einem bestimmten Zeitpunkt werden die physikalischen Größen **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** definiert.



2.2 Geschwindigkeit

Legt ein Punkt im Zeitintervall $\Delta t (= t_2 - t_1)$ die Strecke $\Delta x (= x_2 - x_1)$ zurück, dann beträgt die **mittlere Geschwindigkeit** in diesem Zeitintervall

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

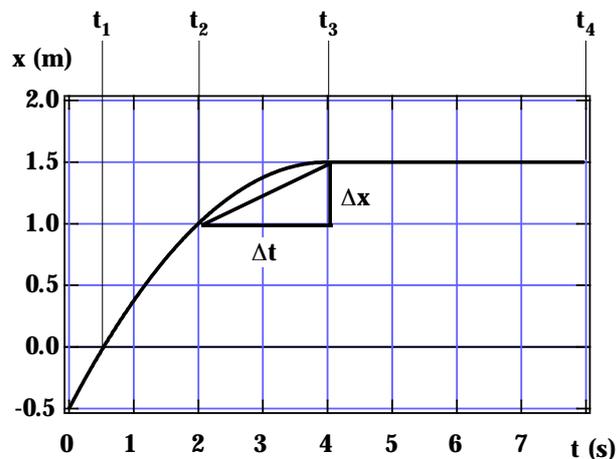
Einheit: 1 m/s

2. Kinematik

Beispiel:

in obiger Bewegung beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $\Delta t = t_3 - t_2 = 2\text{s}$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.5}{2} = 0.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Momentangeschwindigkeit**

Im Grenzübergang für $\Delta t \rightarrow 0$ erhalten wir aus dem Differenzenquotienten $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ den

Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ und wir erhalten die allgemeine Definition für die Geschwindigkeit:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Die Geschwindigkeit $v(t)$ ist die Ableitung des Weges $x(t)$ nach der Zeit t .

Beispiel:

Die Bewegung in obigem Beispiel kann durch die Funktionen beschrieben werden

Ortsfunktion
(Annahme für unser Beispiel)

im Zeitintervall

$$x = -0.5 + t - 0.125 t^2$$

$$t_0 \dots t_3$$

und

$$x = 1.5$$

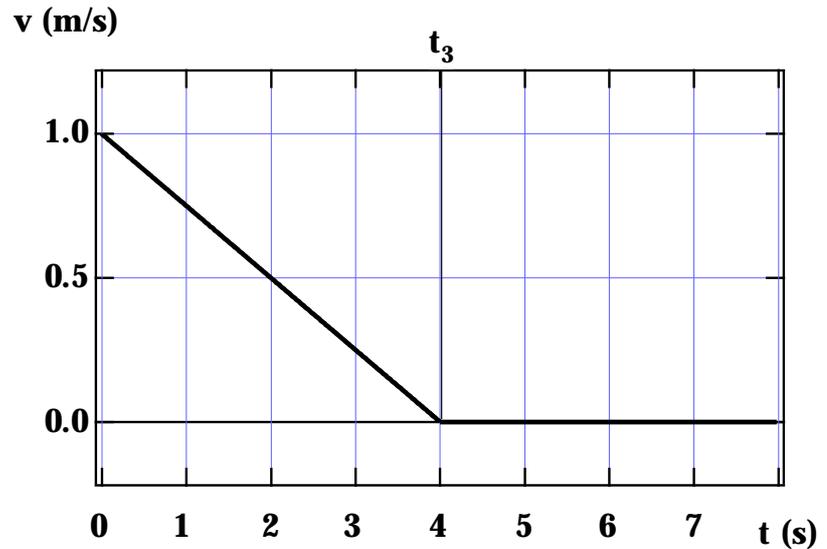
$$t_3 \dots t_4$$

Die Geschwindigkeit kann nun für jeden Zeitpunkt berechnet werden:

$$t = 2.5 \text{ s} \quad v(2.5) = \frac{dx}{dt} = 1 - 0.25 \cdot t = 0.375 \text{ m/s}$$

$$t = 5 \text{ s} \quad v(5) = \frac{dx}{dt} = 0 \text{ m/s}$$

und graphisch dargestellt



2.3 Die Beschleunigung

Analog zu obigen Geschwindigkeitsdefinitionen lässt sich die mittlere Beschleunigung und die momentane Beschleunigung definieren.

Mittlere Beschleunigung

Ändert sich im Zeitintervall Δt ($= t_2 - t_1$) die Geschwindigkeit um Δv ($= v_2 - v_1$), dann beträgt die mittlere Beschleunigung in diesem Zeitintervall

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Einheit: 1 m/s^2

Momentanbeschleunigung

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

Die Beschleunigung a ist die Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$ nach der Zeit t .

2. Kinematik

Im obigen Beispiel gilt im Intervall

$$\Delta t = (t_3 - t_0) = 4 \text{ s} :$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-1}{4} = -0.25 \text{ m/s}^2$$

oder durch ableiten der
Geschwindigkeits-Zeit Funktion

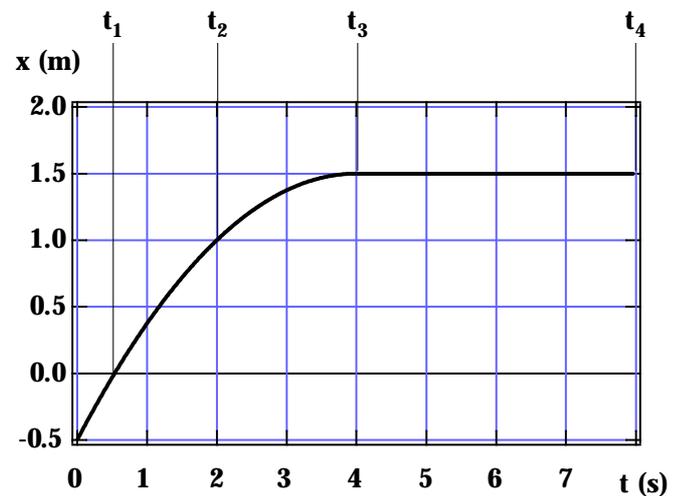
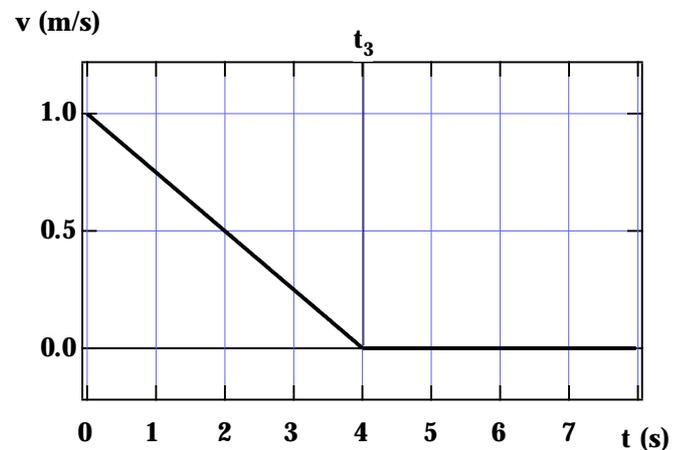
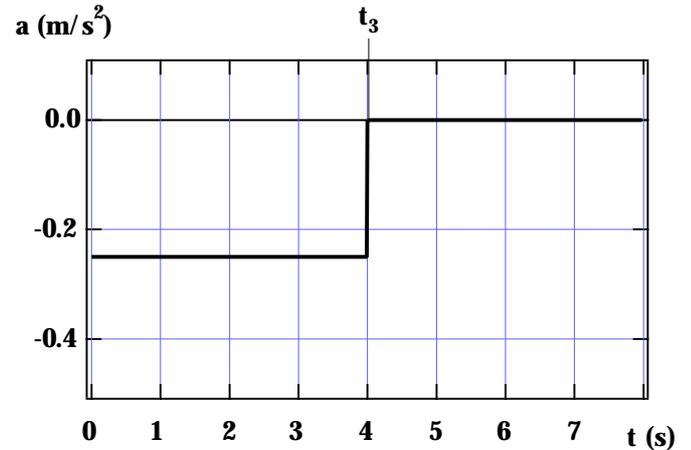
$$v = 1 - 0.25 t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.25 \text{ m/s}^2$$

Im Intervall $t_3 \dots t_4$ ist $\Delta v = 0$

und demnach $a = 0 \text{ m/s}^2$

Die Orts-, Geschwindigkeits- und
Beschleunigungsfunktion sind in
den nebenstehenden Diagrammen
nochmals dargestellt.



2.4 Bewegung im dreidimensionalen Raum

In den Abschnitten 2.2 und 2.3 wurden die Geschwindigkeit und die Beschleunigung als skalare physikalische Grössen definiert. Für eine Bewegung im dreidimensionalen Raum werden diese Grössen als Vektoren definiert.

Die Bewegung eines Punktes in einem dreidimensionalen Raum werde beschrieben durch den Ortsvektor $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ ist definiert

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

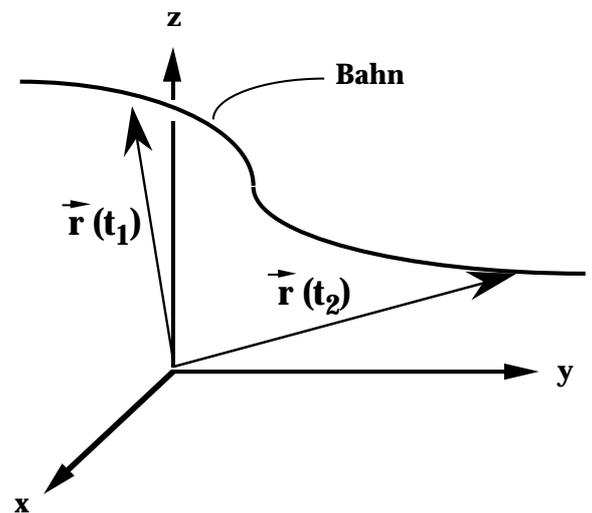
und analog die Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = (\dot{v}_x(t), \dot{v}_y(t), \dot{v}_z(t))$$

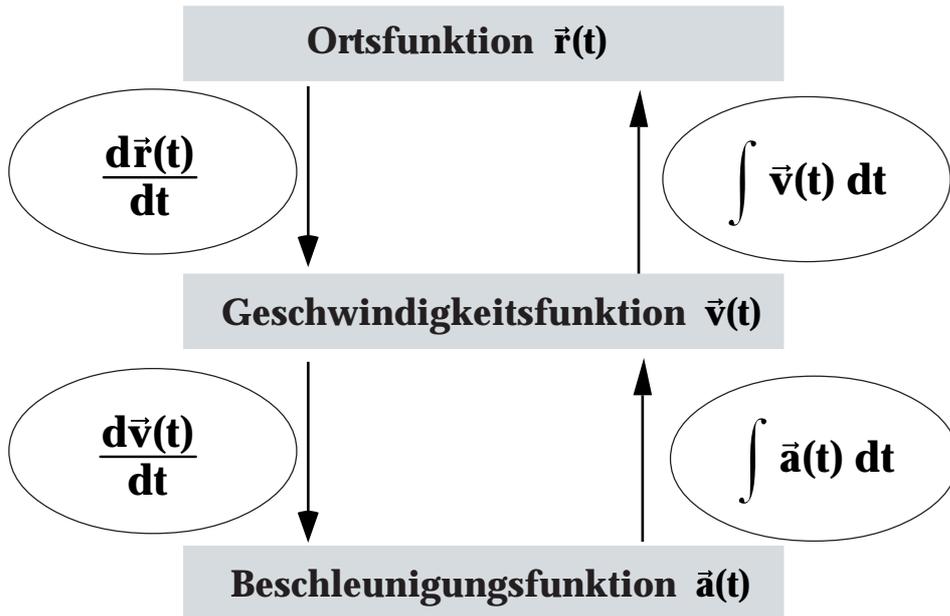
oder

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Die Ableitung der Orts- oder Geschwindigkeitsfunktion nach der Zeit erfolgt komponentenweise. Jede Raumrichtung kann getrennt behandelt werden.



Zusammenfassung der mathematischen Zusammenhänge



denn aus

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

folgt

$$d\vec{r}(t) = \vec{v}(t) \cdot dt$$

und

$$\int d\vec{r}(t) = \vec{r}(t) = \int \vec{v} \cdot dt$$

und analog für die Geschwindigkeit gilt

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a} \cdot dt$$

2.5 Spezielle Bewegungen

2.5.1 Die gleichmässig beschleunigte Bewegung

Eine gleichmässig beschleunigte Bewegung liegt dann vor, wenn $\vec{a} = \text{konstant}$ ist.

1. Beispiel:

eindimensionale Bewegung auf x - Achse mit Beschleunigung $\vec{a} = \text{konstant}$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} d\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a} \cdot dt$$

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 = \mathbf{a} \cdot t$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot t$$

und

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v \cdot dt$$

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 = \int_0^t (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot t) dt = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

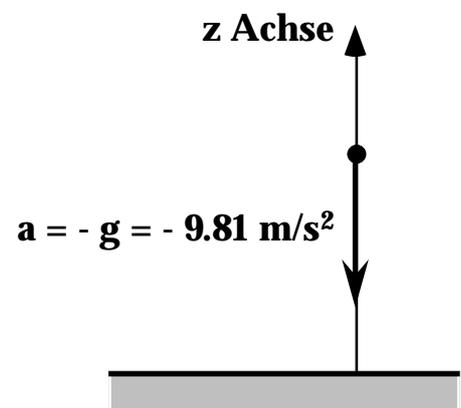
2. Beispiel: freier Fall (ohne Reibung)

Beschleunigung beim freien Fall auf Erdoberfläche

$$\mathbf{a} = -\mathbf{g} = -9.81 \text{ m/s}^2$$

Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0 = -5 \text{ m/s}$ aus einer Höhe $z_0 = 100 \text{ m}$ zur Zeit $t_0 = 0$ senkrecht nach unten geworfen.

Auf welcher Höhe z befindet er sich nach $t_1 = 3 \text{ s}$?

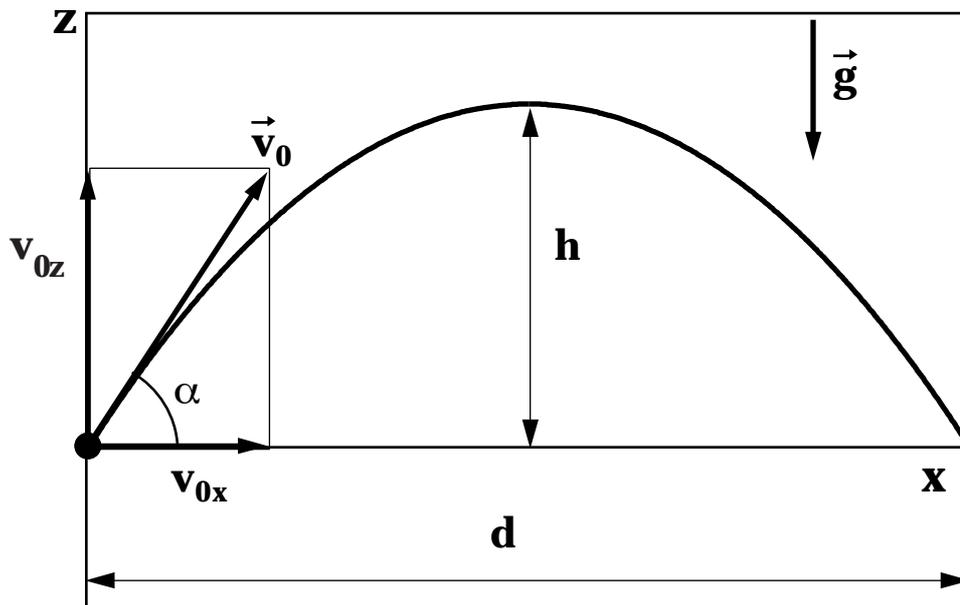


2. Kinematik

$$z = z_0 + v_0 t + 1/2 a t^2 = z_0 + v_0 t - 1/2 g t^2$$

$$z(3s) = 100 - 5 \cdot 3 - 1/2 \cdot 9.81 \cdot 3^2 = 40.85 \text{ m}$$

3. Beispiel: Schiefer Wurf (ohne Reibung)



Ein Körper wird mit v_0 geworfen.

$$|\vec{v}_0| = 10 \text{ m/s}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\vec{a} = (0, 0, -g) = (0, 0, -9.81) \text{ m/s}^2$$

Berechne den Ort $\vec{r} = (x, y, z)$

und die Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ für $t_1 = 1.5 \text{ s}$

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= (v_0 \cdot \cos \alpha, 0, v_0 \sin \alpha) &= (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) \text{ m/s} \\ & &= (5, 0, 8.66) \text{ m/s}\end{aligned}$$

getrennte Behandlung der Raumrichtungen :

Berechnung der Geschwindigkeit : $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x dt = v_{0x}$$

$$v_y(t) = v_{0y} + \int_0^t a_y dt = v_{0y} = 0$$

$$v_z(t) = v_{0z} + \int_0^t a_z dt = v_{0z} - \int_0^t g dt = v_{0z} - g t$$

Berechnung des Ortes : $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t) dt = x_0 + \int_0^t v_{0x} dt = v_{0x} t \quad (x_0 = 0)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t) dt = 0 \quad (y_0 = 0)$$

$$z(t) = z_0 + \int_0^t v_z(t) dt = z_0 + \int_0^t (v_{0z} - g t) dt = v_{0z} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (z_0 = 0)$$

$$\begin{aligned}\vec{r}(1.5 \text{ s}): x(1.5 \text{ s}) &= v_{0x} \cdot t = 5 \cdot 1.5 = 7.5 \text{ m} \\ y(1.5 \text{ s}) &= 0 \\ z(1.5 \text{ s}) &= v_{0z} \cdot t - 1/2 g t^2 = 8.66 \cdot 1.5 - 1/2 \cdot 9.81 \cdot (1.5)^2 \\ &= 1.95 \text{ m} \\ \vec{r}(1.5 \text{ s}) &= (7.5, 0, 1.95) \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}(1.5 \text{ s}): v_x(1.5 \text{ s}) &= v_{0x} = 5 \text{ m/s} \\ v_y(1.5 \text{ s}) &= 0 \\ v_z(1.5 \text{ s}) &= v_{0z} - g t = 8.66 - 9.81 \cdot 1.5 = -6.06 \text{ m/s} \\ \vec{v}(1.5 \text{ s}) &= (5, 0, -6.06) \text{ m/s}\end{aligned}$$

2.5.2 Kreisbewegung und harmonische Schwingung

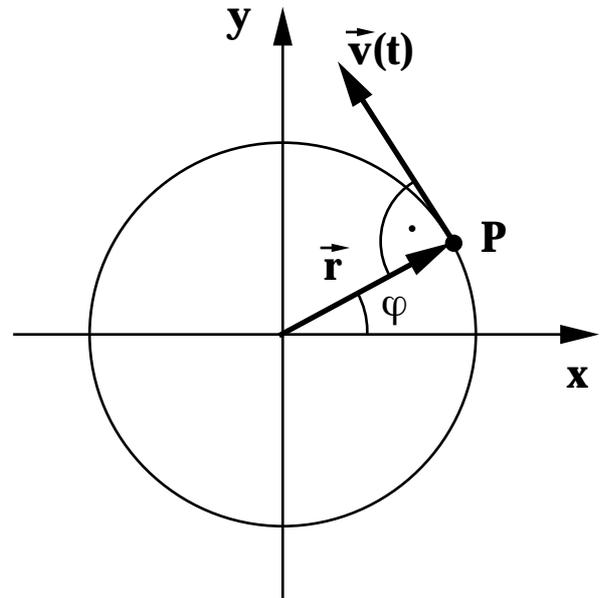
Gleichförmige Bewegung

Ein Punkt bewege sich mit konstanter Bahngeschwindigkeit auf einer Kreisbahn in der x/y Ebene.

Ort des Punktes : $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$$x(t) = r \cdot \cos \varphi(t)$$

$$y(t) = r \cdot \sin \varphi(t)$$



Definition der Winkelgeschwindigkeit :

$$\text{Winkelgeschwindigkeit} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Einheit : $1/s = 1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz}$

φ immer im Bogenmass (rad) (360° entsprechen 2π)

aus der Definition folgt :

$$d\varphi = \omega dt$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t \omega dt$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega \cdot t \quad \text{für } \omega = \text{konstant}$$

Ort des Punktes auf Kreisbahn :

$$x(t) = r \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y(t) = r \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

oder für $\varphi_0 = 0$

$$\vec{r}(t) = (r \cdot \cos(\omega t), r \cdot \sin(\omega t))$$

Geschwindigkeit des Punktes :

$$\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

$$\vec{v}(t) = (-\omega r \sin(\omega t), \omega r \cos(\omega t))$$

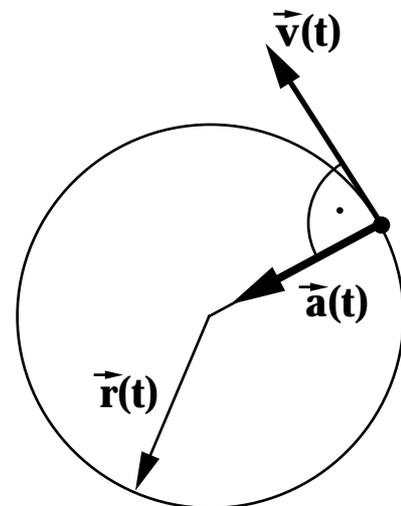
$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\omega^2 r^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]} = \omega r$$

Beschleunigung des Punktes :

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$$

$$\vec{a}(t) = (-\omega^2 r \cos(\omega t), -\omega^2 r \sin(\omega t))$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{\omega^4 r^2 [\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)]} = \omega^2 r$$



zusammengefasst:

$$|\vec{v}(t)| = \omega \cdot r \quad \text{Richtung} \quad \vec{v}(t) \perp \vec{r}(t)$$

$$|\vec{a}(t)| = \omega^2 \cdot r \quad \text{Richtung} \quad \vec{a}(t) \updownarrow \vec{r}(t)$$

Zusammenhang zwischen Umdrehungszeit T , Frequenz ν und Winkelgeschwindigkeit

Zeit T für eine Umdrehung :

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Anzahl Umdrehungen pro Zeit :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

bezeichnen wir als Frequenz (ν) der Bewegung.
Einheit: $1/s = 1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz}$

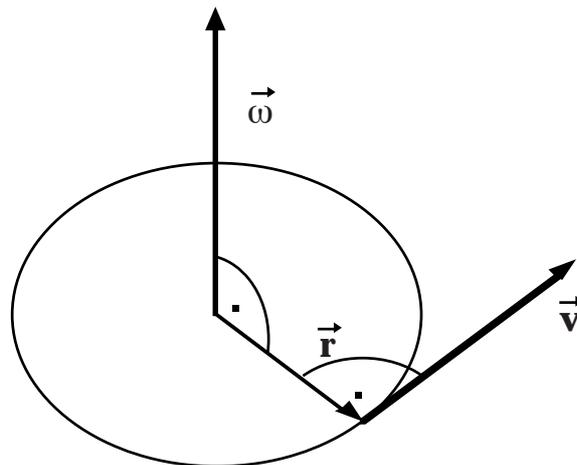
Die Winkelgeschwindigkeit ω bezeichnen wir auch als **Kreisfrequenz**.

Winkelgeschwindigkeit als vektorielle Grösse

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ kann als Vektor definiert werden :

$$|\vec{\omega}| = 2\pi\nu = \dot{\varphi}$$

Richtung von $\vec{\omega}$: \perp auf Ebene (\vec{r}, \vec{v})
 \vec{r} , \vec{v} und $\vec{\omega}$ bilden ein Rechtssystem



Damit ergeben sich folgende Zusammenhänge :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

und
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r^2} \vec{r}$$

Harmonische Schwingung

Die Projektionen der Kreisbewegung auf die x- bzw. y- Achse stellen **harmonische Schwingungen** dar.

Definition der harmonischen Schwingung:

Eine harmonische Schwingung wird beschrieben durch :

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

oder

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

auch hier gilt :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

T bezeichnen wir hier als **Schwingungsdauer**

Die harmonische Schwingung werden wir in Kapitel 8 ausführlich behandeln.

3. Die Dynamik

Masse und Kraft

3.1 Träge und schwere Masse

Träge Masse ist eine Eigenschaft der Materie. Träge Masse hat die Eigenschaft einer Änderung des Bewegungszustandes entgegenzuwirken.

Schwere Masse äussert sich in der Anziehungskraft zweier Massen, der Gravitationskraft.

Grundsätzlich könnten träge Masse und schwere Masse zwei verschiedene Eigenschaften der Materie sein. Experimentell ist jedoch mit einer Genauigkeit von 10^{-10} erwiesen, dass sich träge und schwere Massen nicht unterscheiden.

Das Kilogramm ist definiert durch die Masse des Eichnormals (Urkilogramm, Pt - Ir Block, der in Sèvres bei Paris aufbewahrt wird)
Einheit der Masse: 1 Kilogramm = 1kg

Die Relativitätstheorie von A. Einstein zeigt, dass die Masse eine Grösse ist, die vom Bewegungszustand abhängig ist.

Es gilt :

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

wobei m die Masse ist, die ein nicht mitbewegter Beobachter sieht, m_0 ist die Ruhemasse (Masse, die ein mitbewegter Beobachter feststellt), v die Geschwindigkeit des Körpers und c die Lichtgeschwindigkeit ($c = 2.997'942 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$) bedeuten.

Beachte, dass für $v \rightarrow c$ die Masse $m \rightarrow \infty$.

3.2 Newtonsche Axiome

Kräfte, die auf Körper einwirken, können verschiedene Auswirkungen haben :

- **Deformation des Körpers**
- **Beschleunigung des Körpers**

Die Wirkung von Kräften, die an einem Körper angreifen werden durch die 3 Axiome von Newton (Isaac Newton, 1642 - 1727) beschrieben:

1. Trägheitsprinzip

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung, falls er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird diesen Bewegungszustand zu ändern.

2. Aktionsprinzip

Einwirkende Kräfte sind die Ursache für die Änderung des Bewegungszustandes.

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

3. Reaktionsprinzip

Jede Krafteinwirkung bewirkt eine gleichgrosse, entgegengesetzt wirkende Gegenkraft ('Actio = Reactio').

Der Impuls

Definition: Der Impuls \vec{p} einer Masse m mit der Geschwindigkeit \vec{v} beträgt

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Einheit: 1 kg·m/s

Das Aktionsprinzip $\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt}$

lässt sich unter der Annahme $m = \text{konst.}$ auch schreiben als

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Aus dem 2. Newtonschen Axiom folgt auch die **Einheit der Kraft**:

$$1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ Newton} = 1 \text{ N}$$

3.3 Abgeschlossene Systeme, Impuls und Impulssatz

Ein abgeschlossenes System erfährt keine Krafteinwirkung von aussen. Da nach dem 3. Newtonschen Axiom alle Kräfte paarweise auftreten, muss gelten:

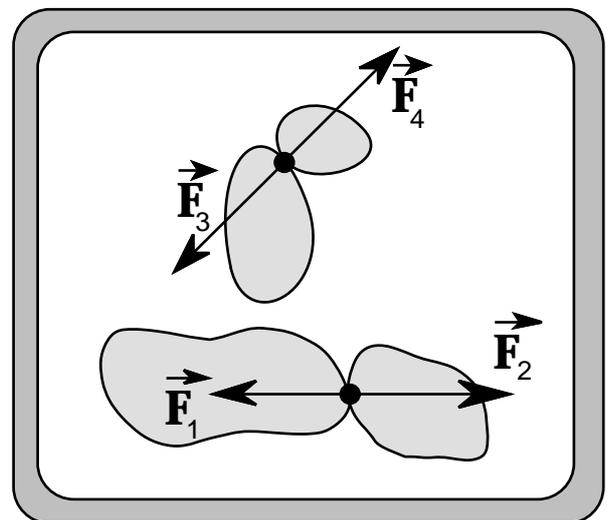
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

nach dem Aktionsprinzip muss dann gelten:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}}_{\text{tot}} = 0$$

und somit $\vec{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$



3. Dynamik

Das bedeutet, dass der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems konstant ist.

Impulssatz

In einem abgeschlossenen System gilt :

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$$

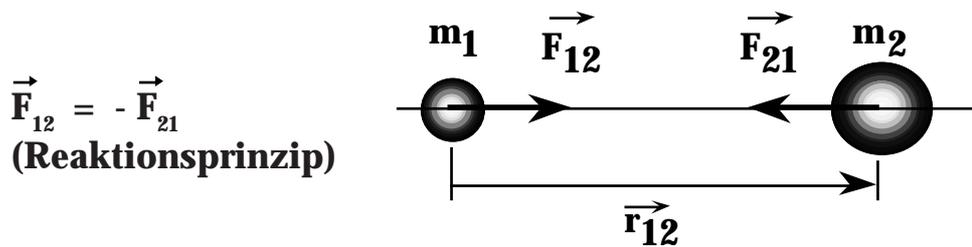
3.4 Die Gravitationskraft

Experimentelle Beobachtung:

Massen üben aufeinander anziehende Kräfte aus

Beispiele :

Erde - Sonne, Gravitationswaage von Cavendish



Gravitationsgesetz von Newton

$$|\vec{F}| = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

γ : Gravitationskonstante

oder vektoriell geschrieben

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

m_1, m_2 bedeuten hier 'schwere' Massen.

Wie bereits oben erwähnt sind jedoch 'schwere' und 'träge' Massen (experimentell) identisch.

Das Gravitationsfeld

Der Begriff 'Feld' bedeutet, dass jedem Punkt im Raum ein Wert einer physikalischen Grösse (Skalar oder Vektor) zugeordnet wird.

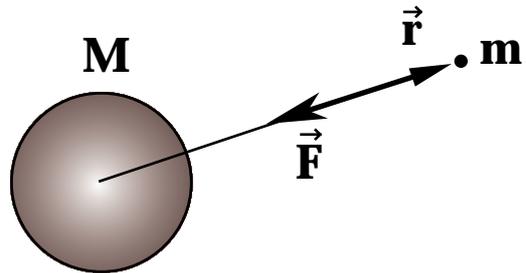
Beispiele von Feldern :

Kraft, Geschwindigkeit, Temperatur, Druck, elektrische Feldstärke

Definition des Gravitationsfelds \vec{G} einer Masse M :

$$\vec{G} = \frac{\text{Gravitationskraft auf Probemasse } m}{\text{Probemasse } m}$$

$$|\vec{G}| = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2 m} = \gamma \frac{M}{r^2}$$



Richtung von \vec{G} : Richtung $-\vec{r}$

Die Masse M verändert den sie umgebenden Raum durch das Gravitationsfeld. Dieses kann mit einer Probemasse (m) nachgewiesen werden.

Gravitationsfeld der Erde

Gravitationskraft auf m :

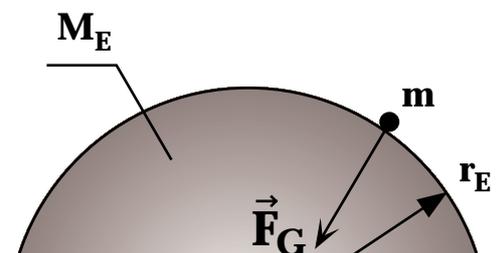
$$F_G = \gamma \frac{m M_E}{r_E^2}$$

Gravitationsfeld von M_E auf Erdoberfläche:

$$G(r_E) = \gamma \frac{M_E}{r_E^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6.4 \cdot 10^6)^2} \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right]$$

$$G(r_E) = 9.8 \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right] \equiv \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Das Gewicht einer Masse $m = 1 \text{ kg}$ beträgt somit 9.8 N .



3. Dynamik

Andererseits wissen wir, dass alle Körper (ohne Reibung) gleich schnell fallen. Die 'Erdbeschleunigung' beträgt $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

$$F_{\text{Gravitation}} = F_{\text{Newton II}}$$

$$\gamma \frac{M_E m_s}{r_E^2} = m_t g \quad g = 9.8 \frac{m_s}{m_t} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

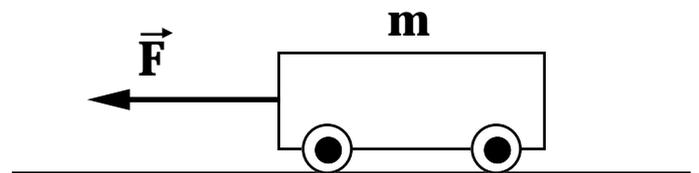
$$\text{Experiment: } \underbrace{\left(\frac{m_s}{m_t} - 1 \right)} < 10^{-10}$$

3.5 Trägheitskräfte

Eine Masse m wird beschleunigt. Ein ruhender Beobachter stellt fest:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} \quad (m = \text{konst.})$$

(\vec{F} besitzt gleiche Richtung wie \vec{a})



Ein mitbewegter Beobachter stellt fest:

Auf ihn wirkt eine (Trägheits-) Kraft, die der Beschleunigungsrichtung entgegengesetzt ist.

Nach dem dritten Newtonschen Axiom (Actio = Reactio) ist die Summe von äußerer Kraft und Trägheitskraft gleich null.

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0$$

Die Trägheitskraft $-m\vec{a}$ verspürt nur der mitbewegte Beobachter.

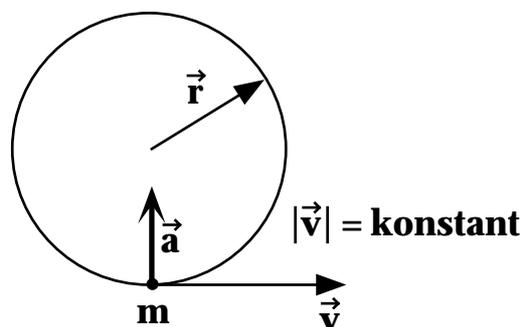
Kräfte bei der Kreisbewegung

aus der Kinematik wissen wir:

$$|\vec{a}| = \omega^2 \cdot r$$

oder vektoriell

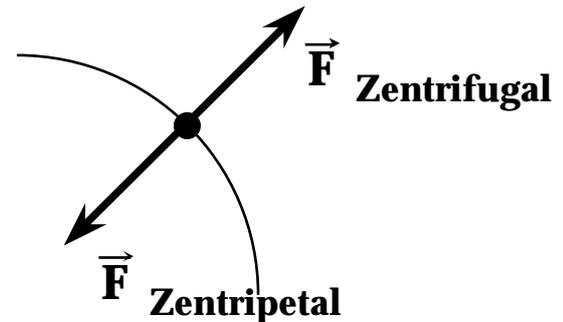
$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$



Um die Masse m auf der Kreisbahn zu halten ist die Kraft notwendig:

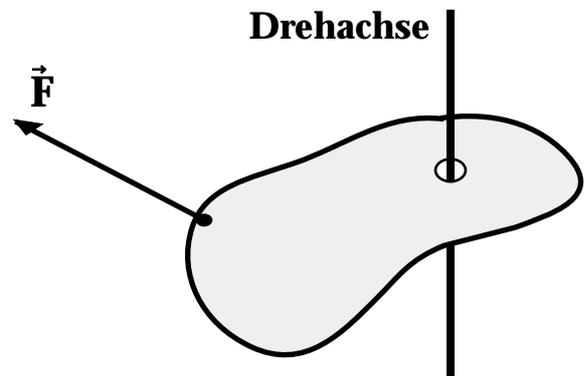
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r} \quad \text{'Zentripetalkraft'}$$

Für einen mitbewegten Beobachter ist während der Kreisbewegung die Zentripetalkraft im Gleichgewicht mit der Trägheitskraft $+m\omega^2\vec{r}$. Diese Kraft (welche ein mitbewegter Beobachter real verspürt) nennen wir **Zentrifugalkraft**.



3.6 Dynamik der Rotationsbewegung

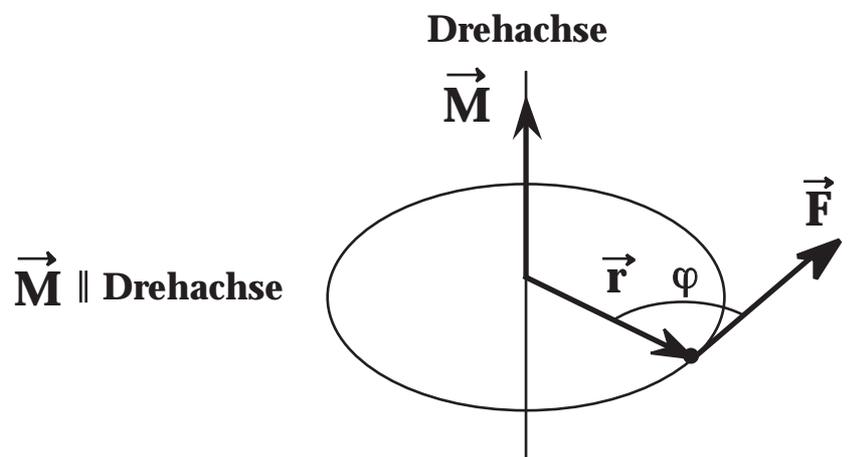
Fragestellung: an einem Körper mit einer Drehachse greift die Kraft \vec{F} an. Welche Wirkung hat \vec{F} ?



Definition des Drehmoments:

Das Drehmoment \vec{M} einer Kraft \vec{F} im Abstand \vec{r} von einer Drehachse ist gegeben durch das Vektorprodukt :

$$\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Einheit } (\vec{M}): 1\text{Nm}$$



3. Dynamik

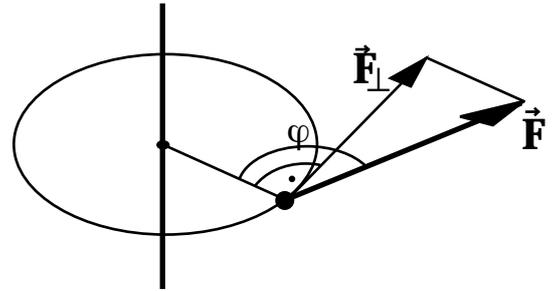
Rotationsbewegung eines Massenpunktes mit konstanter Richtung der Drehachse:

Beträge

$$\begin{aligned}
 M &= r \cdot F \cdot \sin \varphi \\
 &= r \cdot F_{\perp} \\
 &= r \cdot m \cdot \frac{dv}{dt} \\
 &= r \cdot m \cdot \frac{d(\omega r)}{dt} \\
 M &= m \cdot r^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}
 \end{aligned}$$

Vektoren

$$\begin{aligned}
 \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\
 &= \vec{r} \times m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 &= \vec{r} \times m \cdot \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} \\
 \vec{M} &= m \cdot r^2 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}
 \end{aligned}$$



Analogie zur Translationsbewegung

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{M} = \underbrace{m \cdot r^2}_{\text{Trägheitsmoment}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\text{'Winkelbeschleunigung'}}$$

Trägheitsmoment ————— 'Winkelbeschleunigung'

Definition des Trägheitsmoments:

Das Trägheitsmoment der Masse m im Abstand r von einer Drehachse beträgt:
 $J = mr^2$

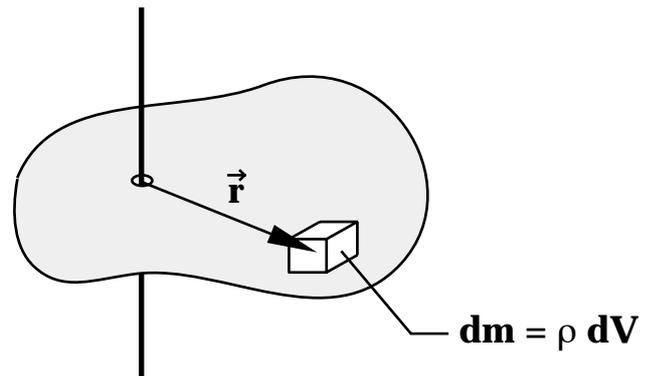
analog definiert man das Trägheitsmoment eines ausgedehnten Körpers:

$$dJ = r^2 dm$$

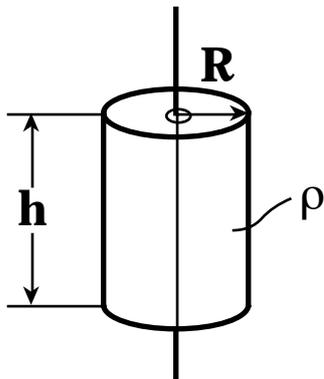
$$J = \int dJ = \int r^2 \rho dV$$

Definition des Trägheitsmoments eines beliebigen Körpers:

$$J = \int_{\text{Körper}} dJ = \int r^2 \rho(\vec{r}) dV$$



ρ : Dichte des Körpers (\equiv Masse / Volumen)

Beispiele (ohne Herleitung):**dünnwandiger Hohlzylinder**

$$J_{\text{HZ}} = mR^2$$

Vollzylinder

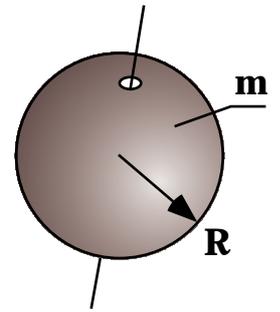
$$J_{\text{Z}} = 1/2 mR^2$$

Hohlkugel

$$J_{\text{HK}} = 2/3 mR^2$$

Vollkugel

$$J_{\text{K}} = 2/5 mR^2$$

**Der Satz von Steiner**

Die hier berechneten Trägheitsmomente beziehen sich überwiegend auf Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen. Es ist indessen häufig notwendig, das Trägheitsmoment eines Körpers auch in Bezug auf eine nicht durch den Schwerpunkt gehende Achse zu kennen. Bezeichnet J_S das Trägheitsmoment um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse und J_A das Trägheitsmoment desselben Körpers um eine zu dieser Schwerpunktsachse parallele Achse, so gilt der Steinersche Satz:

$$J_A = J_S + mr^2$$

wenn m die Gesamtmasse und r der Abstand der beiden Achsen bedeutet.

Impuls und Kraftstoss

Der Impuls \vec{p} wurde bereits früher definiert (s. zweites Newtonsches Axiom)

Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ Einheit: $1 \text{ kgms}^{-1} = 1 \text{ Ns}$

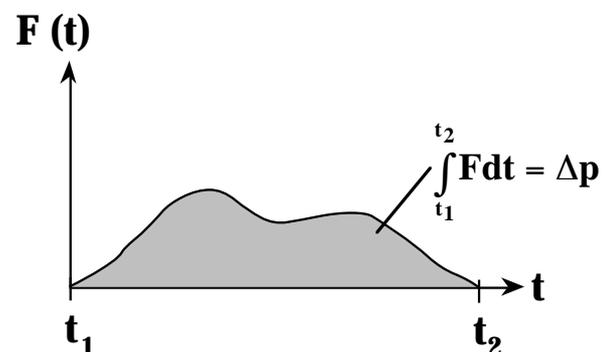
Eine andere Interpretation des Impuls ergibt sich aus dem 2. Newtonschen Axiom:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\int d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

wird als Kraftstoss bezeichnet



3. Dynamik

Definition des Drehimpulses:

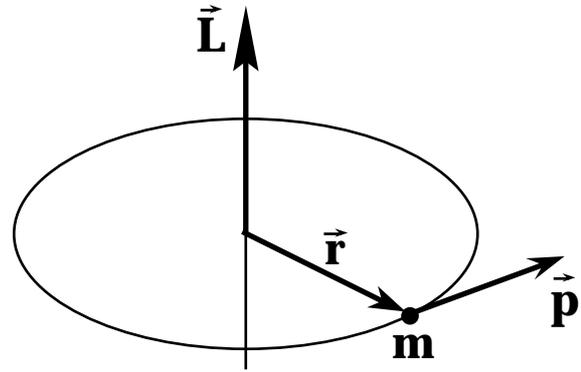
Der Drehimpuls (oder Drall)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{v} \\ &= m\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] \\ &= m r^2 \vec{\omega}\end{aligned}$$

$$\vec{L} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega}$$

entspricht $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

der Translationsbewegung

und andererseits

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

entspricht $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

der Translationsbewegung

Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegung

Translation		Rotation	
Weg	\vec{s}	Winkel	φ
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{s}}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{s}}$	Winkelbeschleunigung	$\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Masse	m	Trägheitsmoment	\mathbf{J}
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega}$
Kraft	$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$	Drehmoment	$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$
kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$	kinetische Energie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mathbf{J} \omega^2$

3.7 Gleichgewichtsbedingungen

Ein Körper ist genau dann im Gleichgewicht wenn die zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \mathbf{0}$$

und

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \mathbf{0}$$

Falls die erste Bedingung nicht erfüllt ist, wird der Körper beschleunigt.

Falls (nur) die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, wird der Körper in eine Rotationsbewegung versetzt.

Die Drehmomente der Kräfte \vec{F}_i können bezüglich einer beliebigen Drehachse berechnet werden.

Beispiel:

Gegeben: $\vec{F}_1, d_1, d_2, \vec{F}_2$ und \vec{F}_3 sind parallel zu \vec{F}_1

Wie gross müssen $|\vec{F}_2|$ und $|\vec{F}_3|$ sein, damit der Balken im Gleichgewicht ist?

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \mathbf{0}$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_1$$

wählen Drehpunkt D:

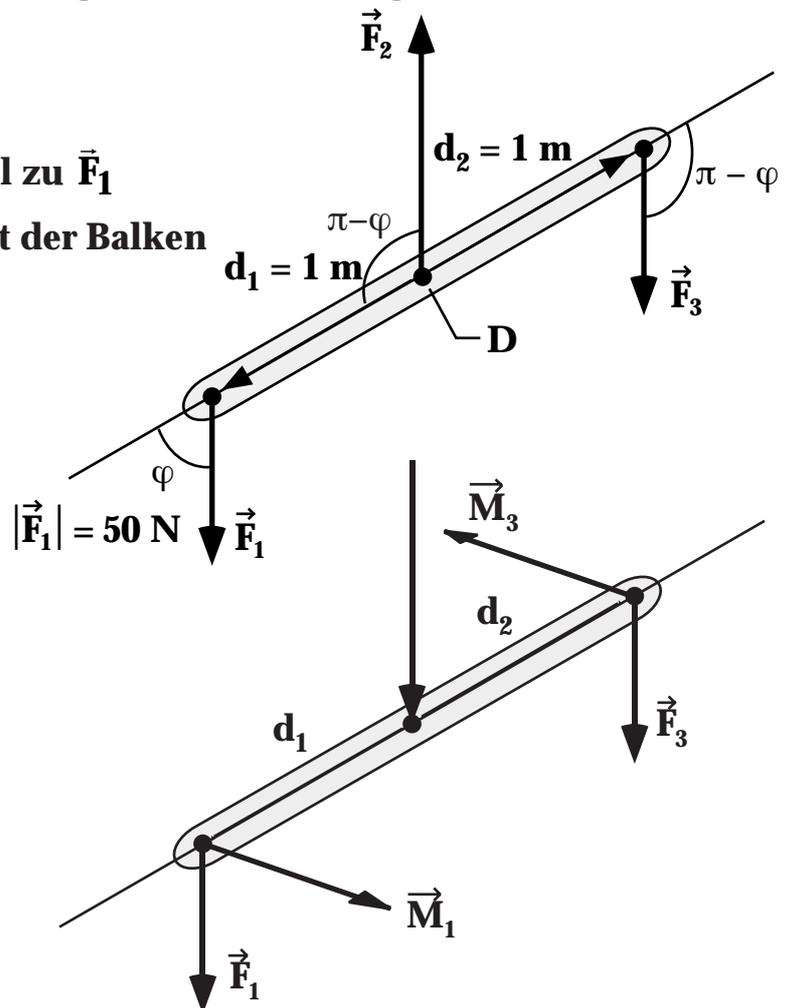
$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \mathbf{0}$$

Beträge:

$$d_1 F_1 \sin \varphi - d_2 F_3 \sin(\pi - \varphi) = 0$$

$$F_3 = \frac{d_1}{d_2} F_1$$

$$\rightarrow \vec{F}_2 = -\left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right) \vec{F}_1 = -2\vec{F}_1 = -100\text{N}, \quad \vec{F}_3 = \vec{F}_1 = 50\text{N}$$



3 Arten von Gleichgewicht

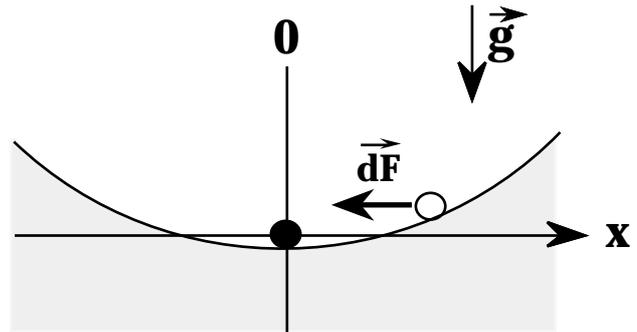
1. Stabiles Gleichgewicht

Gleichgewichtslage $x = 0$

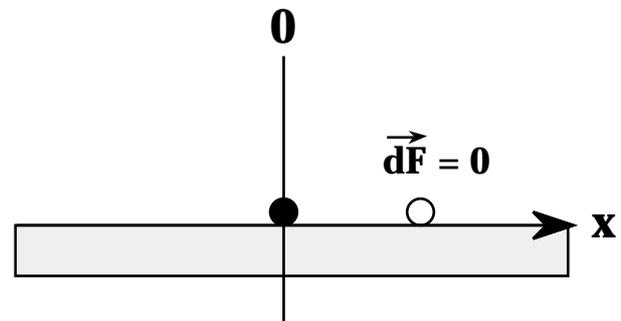
Auslenkung um dx bewirkt eine rücktreibende Kraft \vec{F}

$$dF = -\alpha dx$$

Modell

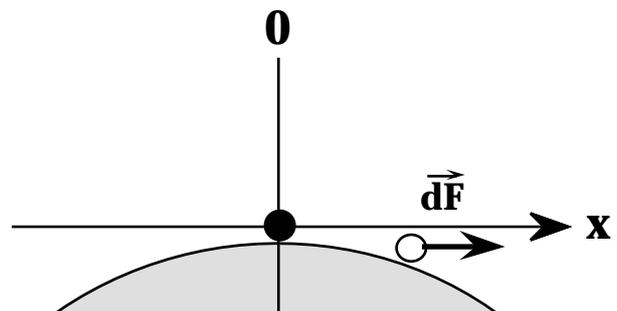


2. indifferentes Gleichgewicht



es existieren unendlich viele Gleichgewichtslagen. Eine Auslenkung um Δx bewirkt keine Kraftwirkung.

3. labiles Gleichgewicht



Gleichgewichtslage $x = 0$

Auslenkung um dx bewirkt eine Kraft in Richtung dx : $dF = \alpha dx$

Neben diesen drei Gleichgewichtsarten existiert noch das metastabile Gleichgewicht.

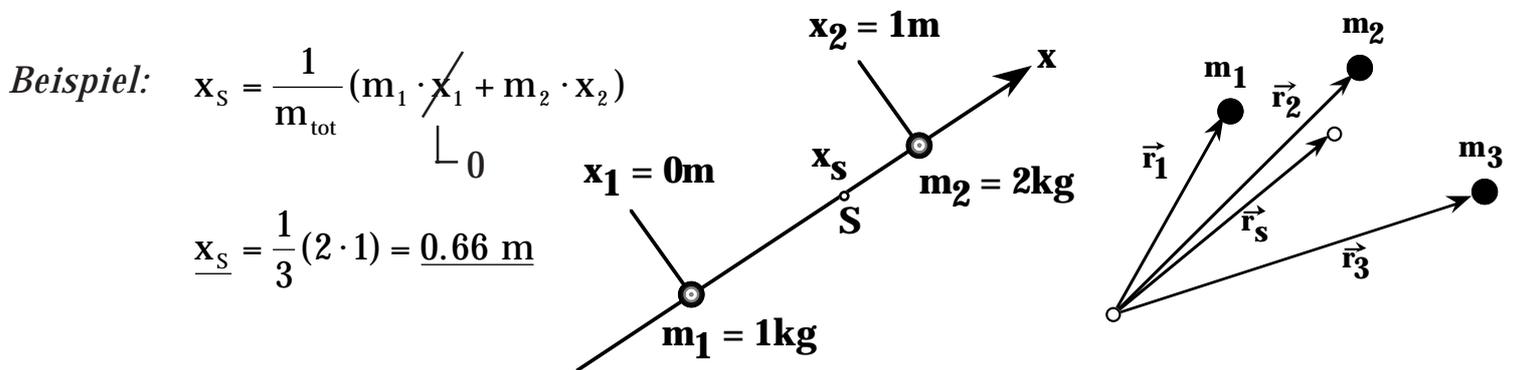
3.8 Der Schwerpunkt

Definition des Schwerpunkts:

Der Schwerpunkt \vec{r}_s von einem System von n Massenpunkten (m_i, \vec{r}_i) ist gegeben durch :

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum m_i \vec{r}_i$$

analog für eine homogene Massenverteilung : $\vec{r}_s = \frac{1}{\int \rho(\vec{r}) dV} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) dV$



Eigenschaften des Schwerpunktes

a) Ein Körper, der im Schwerpunkt S unterstützt wird, ist im Gleichgewicht.

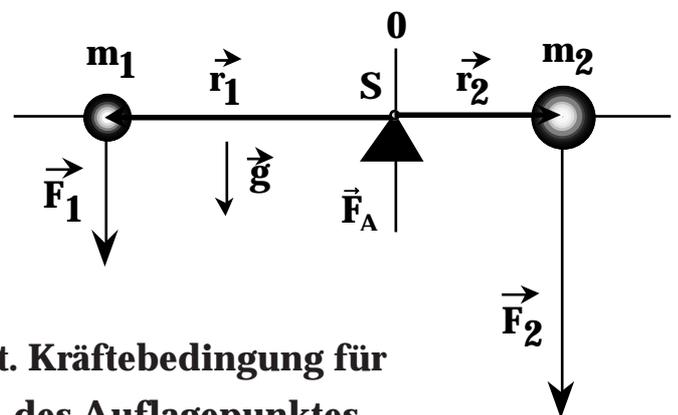
Beweis:

Schwerpunktsdefinition

$$\vec{r}_s m_{\text{tot}} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_s (m_1 + m_2) = \vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2$$

$$\vec{r}_s \times (m_1 + m_2) \vec{g} = \underbrace{\vec{r}_1 \times m_1 \vec{g}}_{\vec{M}_1} + \underbrace{\vec{r}_2 \times m_2 \vec{g}}_{\vec{M}_2} = 0$$



System ist bezüglich Rotation im Gleichgewicht. Kräftebedingung für Gleichgewicht wird erfüllt durch Gegenkraft \vec{F}_A des Auflagepunktes.

$$\vec{F}_A + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

3. Dynamik

b) Gesamtimpuls \vec{p}_{tot} des Systems von n Massenpunkten:

$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \vec{r}_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \vec{r}_i \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \cdot \vec{v}_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \vec{v}_i \quad (*)$$

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{tot}}$$

Der Gesamtimpuls des Systems (\vec{p}_{tot}) ist gleich dem Schwerpunktsimpuls $\mathbf{m}_{\text{tot}} \vec{v}_s$.

c) Schwerpunktssatz

benützen obige Gleichung (*) und leiten nach der Zeit ab

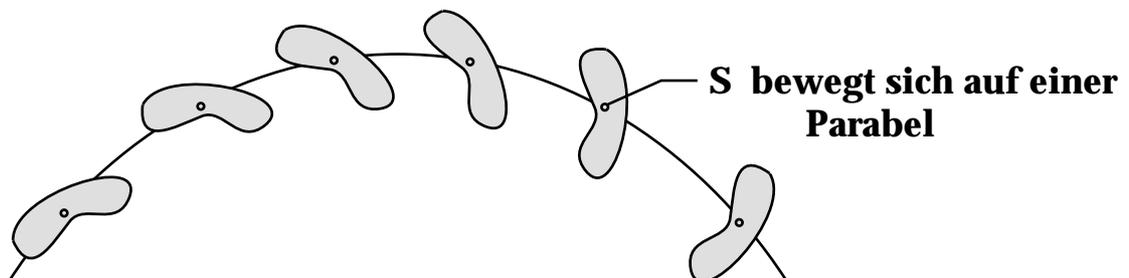
$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \vec{a}_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_{\text{total}}}_{\text{Summe der von aussen einwirkenden Kräfte}}$$

Falls $\vec{F}_{\text{tot}} = \mathbf{0} \rightarrow \vec{a}_s = \mathbf{0}$ der Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

Die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt (Schwerpunktssatz) $\mathbf{m}_{\text{tot}} \vec{a}_s = \vec{F}_{\text{tot}}$ besagt, dass der Schwerpunkt sich so bewegt, als ob in ihm die gesamte Masse konzentriert wäre.

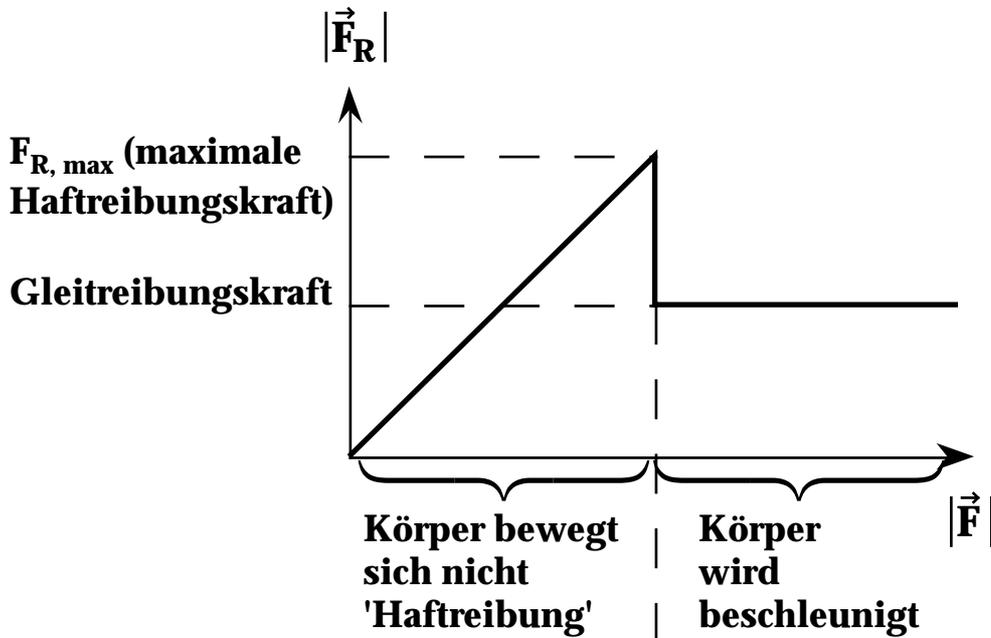
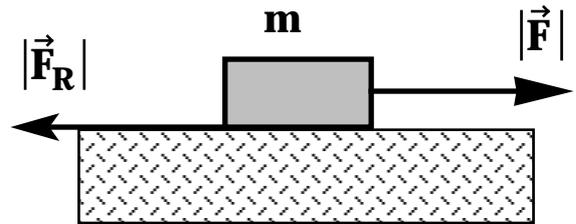
Beispiel: schiefer Wurf eines Körpers mit gleichzeitiger Rotation.



3.9 Reibung

Bei der Reibung handelt es sich um Kräfte, die der Verschiebungsrichtung entgegengesetzt gerichtet sind.

Die Reibungskraft \vec{F}_R entsteht an der Grenzfläche zwischen Körper und Unterlage.

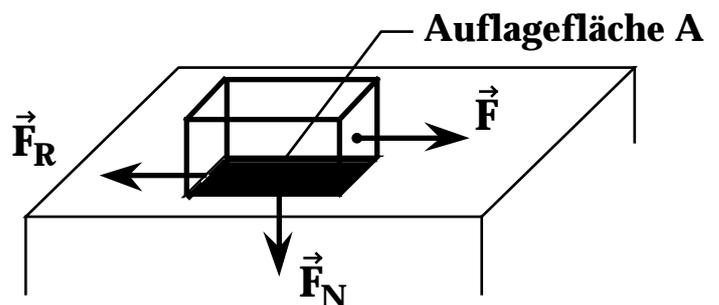


\vec{F} : Kraft, die in Verschiebungsrichtung wirkt

\vec{F}_R : Reibungskraft

\vec{F}_N : Normalkraft (wirkt senkrecht zur Unterlage)

A: Auflagefläche des Körpers



Das Experiment zeigt, von welchen Größen die Reibung abhängt

3. Dynamik

Im Falle der Gleitreibung hängt $|\vec{F}_R|$ ab von:

- | | | |
|--|---|---|
| (1) Materialien (Körper, Unterlage) | } | beschrieben durch
Gleitreibungskoeffizienten μ_g |
| (2) Oberflächenbeschaffenheit | | |
| (3) Normalkraft \vec{F}_N (z. B. Gewicht bei horizontaler Unterlage) | | |

im Falle der Haftreibung hängt $|\vec{F}_R|$ zusätzlich ab von der

- (4) angreifenden Kraft \vec{F}

Dagegen hängt $|\vec{F}_R|$ nicht ab von der Grösse der Auflagefläche A !

Es gilt für die **Gleitreibung**:

$$|\vec{F}_R| = \mu_g \cdot |\vec{F}_N|$$

Es gilt für die **Haftreibung**:

die maximale Haftreibung beträgt

$$|\vec{F}_{R,\max}| = \mu_h \cdot |\vec{F}_N|$$

und für $|\vec{F}| < |\vec{F}_{R,\max}|$:

$$|\vec{F}_R| = |\vec{F}|$$

Im Allgemeinen gilt: $\mu_g < \mu_h$

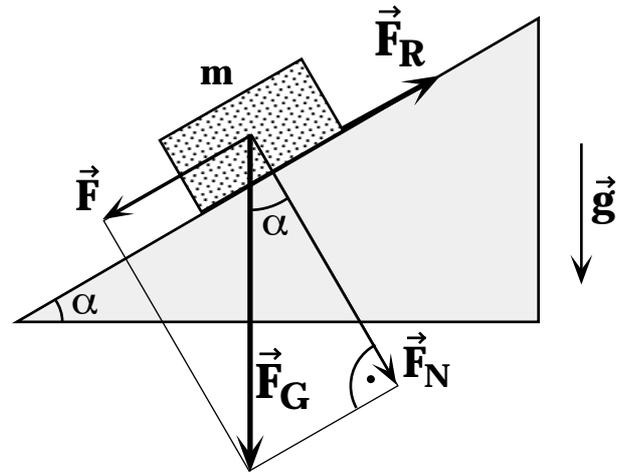
Gleichgewicht auf der schiefen Ebene

m : Masse des Körpers

\vec{F}_G : Gewicht

\vec{F}_N : Normalkraft (auf Unterlage)

\vec{F} : Kraft in Verschiebungsrichtung



Körper ist im Gleichgewicht solange :

$$|\vec{F}_R| = |\vec{F}|$$

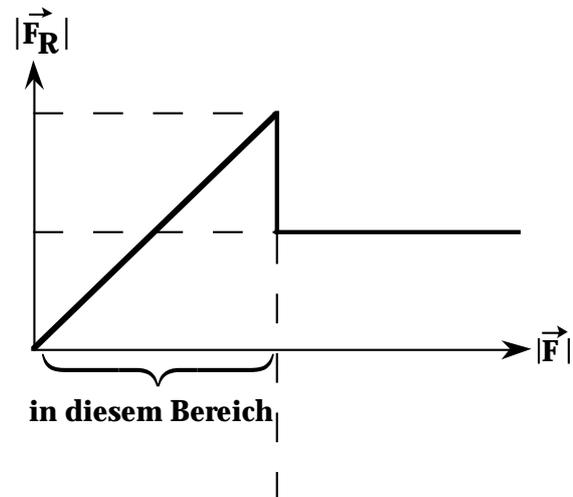
Körper beginnt zu rutschen wenn :

$$|\vec{F}| \geq |\vec{F}_{R, \max}|$$

$$m g \sin \alpha \geq \mu_h |\vec{F}_N| = \mu_h m g \cos \alpha$$

Daraus ergibt sich die Grenzbedingung für Haftreibung :

$$\mu_h = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$



3. Dynamik

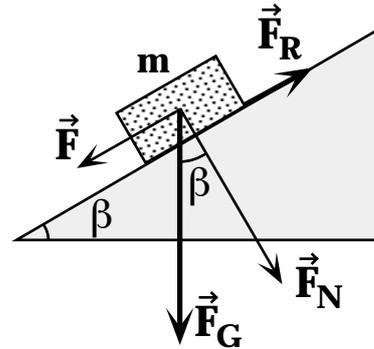
Analog lässt sich die Bedingung für gleichförmiges Rutschen ($|\vec{v}| = \text{konst.}$) angeben :

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_R|$$

$$m g \sin\beta = \mu_g m g \cos\beta$$

Bedingung für gleichförmiges Rutschen :

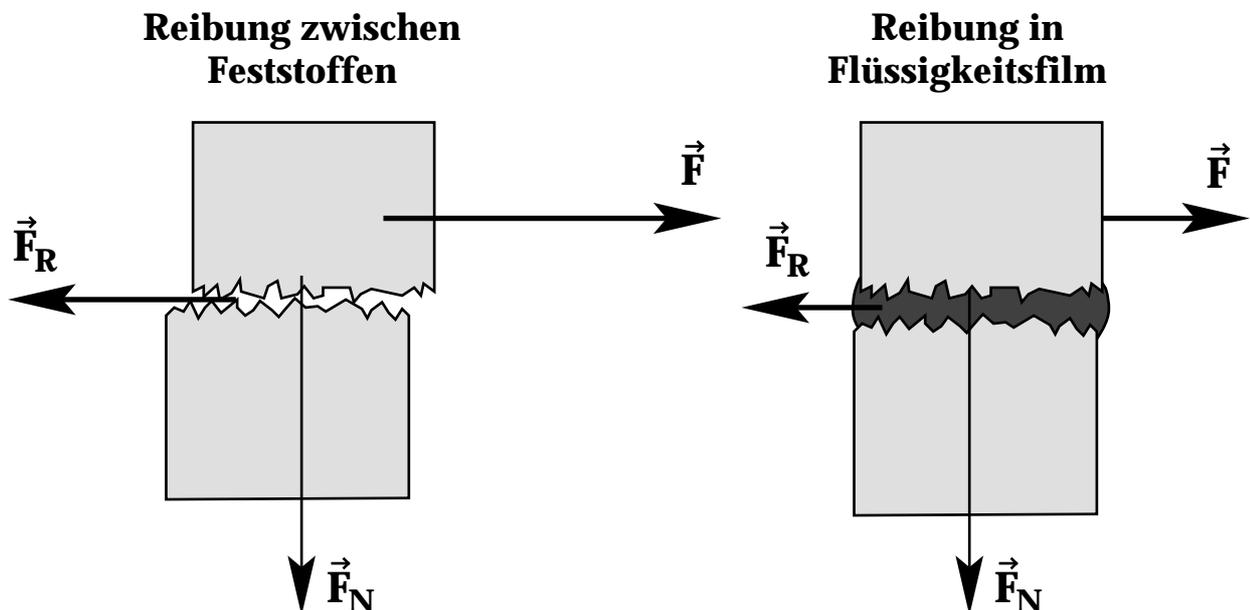
$$\mu_g = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \text{tg}\beta$$



Reibungskoeffizienten

Oberflächen	Haftreibung	Gleitreibung	
	trocken	trocken	geölt
Stahl / Stahl	0.74	0.57	0.01
Stahl / Eis	0.027	0.014	
Holz / Stein	0.7	0.3	
Stahl / Bremsbeläge		0.6	0.3
Stahl / Glas	0.6	0.1	
Teflon / Teflon	0.04	0.02	
Gummi / Asphalt	0.8 - 1.1	0.7 - 0.9	0.2 - 0.5

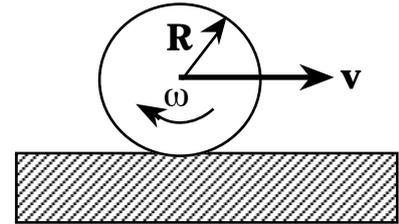
Durch eine Schmierung wird die Reibung in ein anderes Medium verlagert (z.B. in Oel oder einen Feststoff)



Rollreibung

Um die Rollbewegung aufrecht zu erhalten ist ein Drehmoment \vec{M} notwendig, welches das Reibungsdrehmoment \vec{M}_R kompensiert :

$$|\vec{M}| = |\vec{M}_R|$$



$|\vec{M}_R|$ hängt von mehreren Faktoren ab :

- Normalkraft $|\vec{F}_N|$
- Rollreibungszahl μ_R [m]
- Schlupf (bedeutet $\omega \cdot R \neq v$)

$$|\vec{M}_R| = \mu_R \cdot |\vec{F}_N|$$

Die Rollreibung ist um mindestens um eine Größenordnung kleiner als die Gleitreibung (diesen Vorteil nutzen die Kugellager)

Beispiel: rollendes Stahlrad ($R = 1$ m) auf Stahl ($\mu_R = 5 \cdot 10^{-4}$ m)

$$|\vec{F}_{R,rollen}| = \frac{|\vec{M}_R|}{R} = \frac{\mu_R \cdot |\vec{F}_N|}{R}$$

Gleiten ($\mu_g = 0.57$)

$$|\vec{F}_R| = \mu_g \cdot |\vec{F}_N|$$

$$\frac{|\vec{F}_{R,rollen}|}{|\vec{F}_R|} = \frac{\mu_R}{R \cdot \mu_g} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 0.57} \cong 10^{-3}$$

3. Die Dynamik

Masse und Kraft

3.1 Träge und schwere Masse

Träge Masse ist eine Eigenschaft der Materie. Träge Masse hat die Eigenschaft einer Änderung des Bewegungszustandes entgegenzuwirken.

Schwere Masse äussert sich in der Anziehungskraft zweier Massen, der Gravitationskraft.

Grundsätzlich könnten träge Masse und schwere Masse zwei verschiedene Eigenschaften der Materie sein. Experimentell ist jedoch mit einer Genauigkeit von 10^{-10} erwiesen, dass sich träge und schwere Massen nicht unterscheiden.

Das Kilogramm ist definiert durch die Masse des Eichnormals (Urkilogramm, Pt - Ir Block, der in Sèvres bei Paris aufbewahrt wird)
Einheit der Masse: 1 Kilogramm = 1kg

Die Relativitätstheorie von A. Einstein zeigt, dass die Masse eine Grösse ist, die vom Bewegungszustand abhängig ist.

Es gilt :

$$m = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

wobei m die Masse ist, die ein nicht mitbewegter Beobachter sieht, m_0 ist die Ruhemasse (Masse, die ein mitbewegter Beobachter feststellt), v die Geschwindigkeit des Körpers und c die Lichtgeschwindigkeit ($c = 2.997'942 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$) bedeuten.

Beachte, dass für $v \rightarrow c$ die Masse $m \rightarrow \infty$.

3.2 Newtonsche Axiome

Kräfte, die auf Körper einwirken, können verschiedene Auswirkungen haben :

- **Deformation des Körpers**
- **Beschleunigung des Körpers**

Die Wirkung von Kräften, die an einem Körper angreifen werden durch die 3 Axiome von Newton (Isaac Newton, 1642 - 1727) beschrieben:

1. Trägheitsprinzip

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung, falls er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird diesen Bewegungszustand zu ändern.

2. Aktionsprinzip

Einwirkende Kräfte sind die Ursache für die Änderung des Bewegungszustandes.

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

3. Reaktionsprinzip

Jede Krafteinwirkung bewirkt eine gleichgrosse, entgegengesetzt wirkende Gegenkraft ('Actio = Reactio').

Der Impuls

Definition: Der Impuls \vec{p} einer Masse m mit der Geschwindigkeit \vec{v} beträgt

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Einheit: 1 kg·m/s

Das Aktionsprinzip $\vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt}$

lässt sich unter der Annahme $m = \text{konst.}$ auch schreiben als

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Aus dem 2. Newtonschen Axiom folgt auch die **Einheit der Kraft** :

$$1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ Newton} = 1 \text{ N}$$

3.3 Abgeschlossene Systeme, Impuls und Impulssatz

Ein abgeschlossenes System erfährt keine Krafteinwirkung von aussen. Da nach dem 3. Newtonschen Axiom alle Kräfte paarweise auftreten, muss gelten :

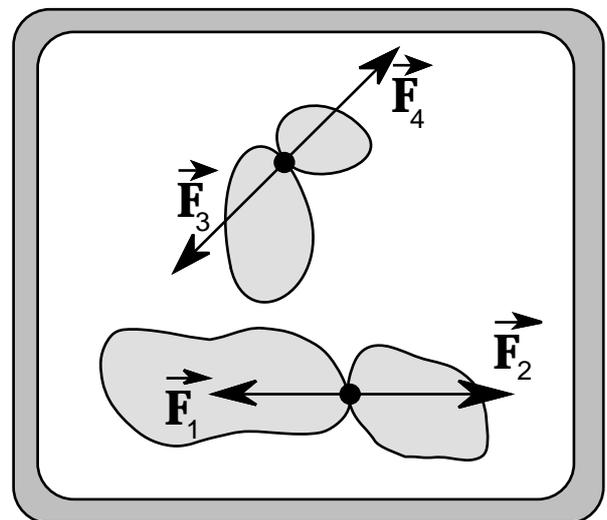
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

nach dem Aktionsprinzip muss dann gelten :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}}_{\text{tot}} = 0$$

und somit $\vec{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$



3. Dynamik

Das bedeutet, dass der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems konstant ist.

Impulssatz

In einem abgeschlossenen System gilt :

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$$

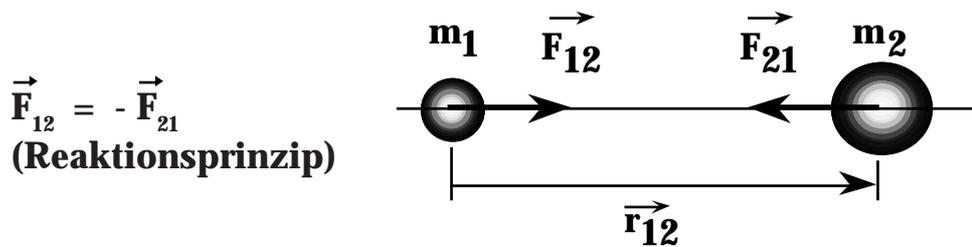
3.4 Die Gravitationskraft

Experimentelle Beobachtung:

Massen üben aufeinander anziehende Kräfte aus

Beispiele :

Erde - Sonne, Gravitationswaage von Cavendish



Gravitationsgesetz von Newton

$$|\vec{F}| = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

γ : Gravitationskonstante

oder vektoriell geschrieben

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$

m_1, m_2 bedeuten hier 'schwere' Massen.

Wie bereits oben erwähnt sind jedoch 'schwere' und 'träge' Massen (experimentell) identisch.

Das Gravitationsfeld

Der Begriff 'Feld' bedeutet, dass jedem Punkt im Raum ein Wert einer physikalischen Grösse (Skalar oder Vektor) zugeordnet wird.

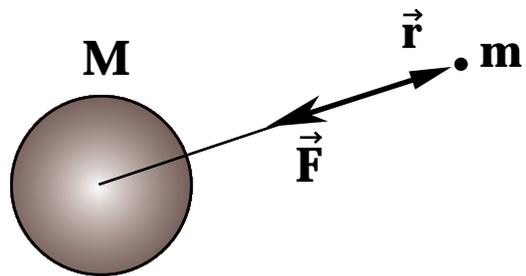
Beispiele von Feldern :

Kraft, Geschwindigkeit, Temperatur, Druck, elektrische Feldstärke

Definition des Gravitationsfelds \vec{G} einer Masse M :

$$\vec{G} = \frac{\text{Gravitationskraft auf Probemasse } m}{\text{Probemasse } m}$$

$$|\vec{G}| = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2 m} = \gamma \frac{M}{r^2}$$



Richtung von \vec{G} : Richtung $-\vec{r}$

Die Masse M verändert den sie umgebenden Raum durch das Gravitationsfeld. Dieses kann mit einer Probemasse (m) nachgewiesen werden.

Gravitationsfeld der Erde

Gravitationskraft auf m :

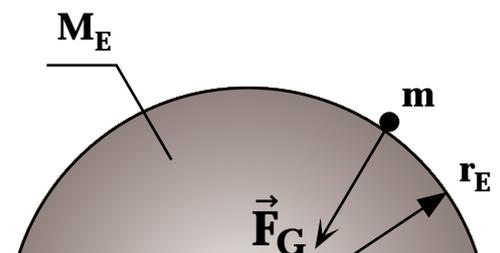
$$F_G = \gamma \frac{m M_E}{r_E^2}$$

Gravitationsfeld von M_E auf Erdoberfläche:

$$G(r_E) = \gamma \frac{M_E}{r_E^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6.4 \cdot 10^6)^2} \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right]$$

$$G(r_E) = 9.8 \left[\frac{\text{N}}{\text{kg}} \right] \equiv \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Das Gewicht einer Masse $m = 1 \text{ kg}$ beträgt somit 9.8 N .



3. Dynamik

Andererseits wissen wir, dass alle Körper (ohne Reibung) gleich schnell fallen. Die 'Erdbeschleunigung' beträgt $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

$$F_{\text{Gravitation}} = F_{\text{Newton II}}$$

$$\gamma \frac{M_E m_s}{r_E^2} = m_t g \quad g = 9.8 \frac{m_s}{m_t} \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

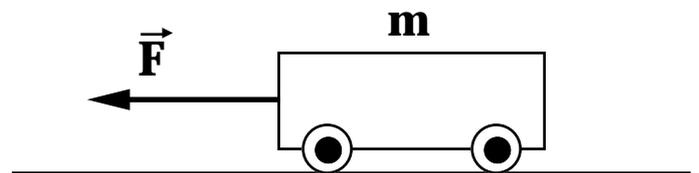
$$\text{Experiment: } \underbrace{\left(\frac{m_s}{m_t} - 1 \right)} < 10^{-10}$$

3.5 Trägheitskräfte

Eine Masse m wird beschleunigt. Ein ruhender Beobachter stellt fest:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} \quad (m = \text{konst.})$$

(\vec{F} besitzt gleiche Richtung wie \vec{a})



Ein mitbewegter Beobachter stellt fest:

Auf ihn wirkt eine (Trägheits-) Kraft, die der Beschleunigungsrichtung entgegengesetzt ist.

Nach dem dritten Newtonschen Axiom (Actio = Reactio) ist die Summe von äußerer Kraft und Trägheitskraft gleich null.

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0$$

Die Trägheitskraft $-m\vec{a}$ verspürt nur der mitbewegte Beobachter.

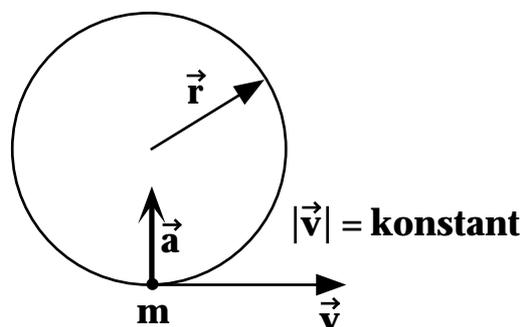
Kräfte bei der Kreisbewegung

aus der Kinematik wissen wir:

$$|\vec{a}| = \omega^2 \cdot r$$

oder vektoriell

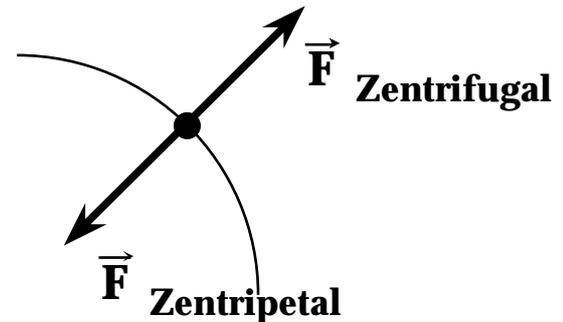
$$\vec{a} = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$



Um die Masse m auf der Kreisbahn zu halten ist die Kraft notwendig:

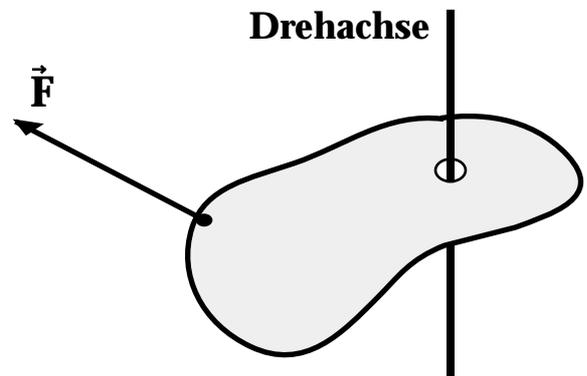
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r} \quad \text{'Zentripetalkraft'}$$

Für einen mitbewegten Beobachter ist während der Kreisbewegung die Zentripetalkraft im Gleichgewicht mit der Trägheitskraft $+m\omega^2\vec{r}$. Diese Kraft (welche ein mitbewegter Beobachter real verspürt) nennen wir **Zentrifugalkraft**.



3.6 Dynamik der Rotationsbewegung

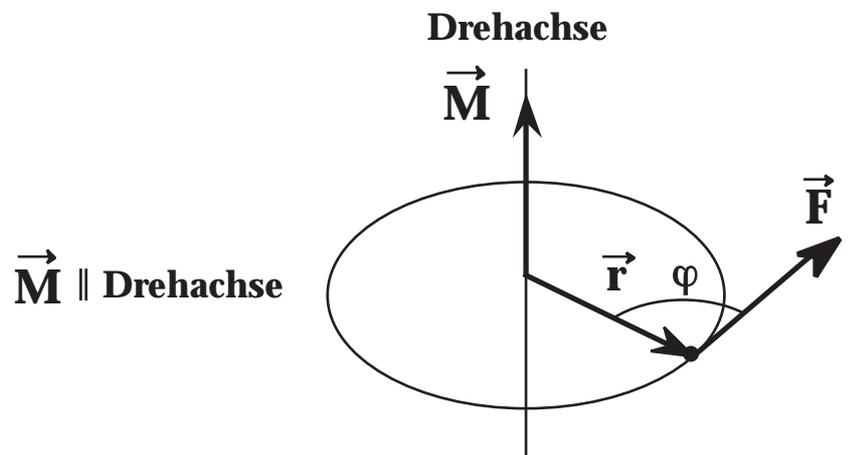
Fragestellung: an einem Körper mit einer Drehachse greift die Kraft \vec{F} an. Welche Wirkung hat \vec{F} ?



Definition des Drehmoments:

Das Drehmoment \vec{M} einer Kraft \vec{F} im Abstand \vec{r} von einer Drehachse ist gegeben durch das Vektorprodukt :

$$\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Einheit } (\vec{M}): 1\text{Nm}$$



3. Dynamik

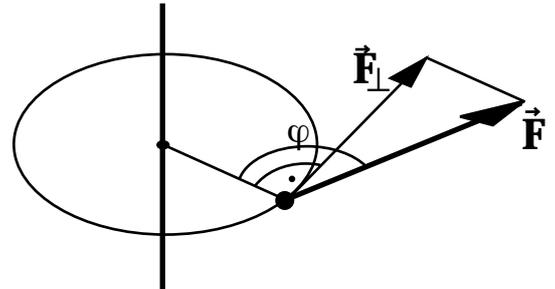
Rotationsbewegung eines Massenpunktes mit konstanter Richtung der Drehachse:

Beträge

$$\begin{aligned}
 M &= r \cdot F \cdot \sin \varphi \\
 &= r \cdot F_{\perp} \\
 &= r \cdot m \cdot \frac{dv}{dt} \\
 &= r \cdot m \cdot \frac{d(\omega r)}{dt} \\
 M &= m \cdot r^2 \cdot \frac{d\omega}{dt}
 \end{aligned}$$

Vektoren

$$\begin{aligned}
 \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\
 &= \vec{r} \times m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 &= \vec{r} \times m \cdot \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} \\
 \vec{M} &= m \cdot r^2 \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}
 \end{aligned}$$



Analogie zur Translationsbewegung

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{M} = \underbrace{m \cdot r^2}_{\text{Trägheitsmoment}} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\text{'Winkelbeschleunigung'}}$$

Trägheitsmoment ————— 'Winkelbeschleunigung'

Definition des Trägheitsmoments:

Das Trägheitsmoment der Masse m im Abstand r von einer Drehachse beträgt:
 $J = mr^2$

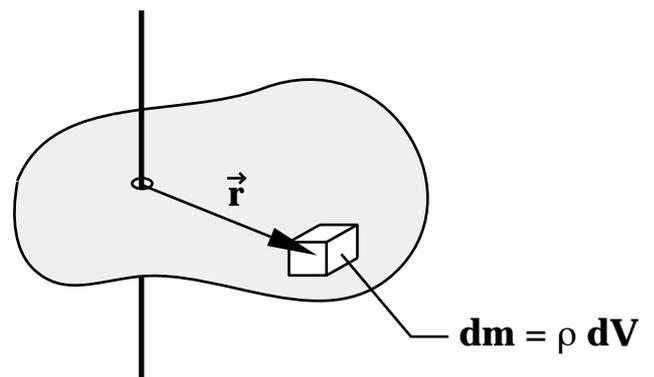
analog definiert man das Trägheitsmoment eines ausgedehnten Körpers:

$$dJ = r^2 dm$$

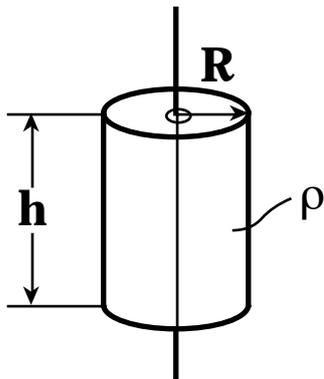
$$J = \int dJ = \int r^2 \rho dV$$

Definition des Trägheitsmoments eines beliebigen Körpers:

$$J = \int_{\text{Körper}} dJ = \int r^2 \rho(\vec{r}) dV$$



ρ : Dichte des Körpers (\equiv Masse / Volumen)

Beispiele (ohne Herleitung):**dünnwandiger Hohlzylinder**

$$J_{\text{HZ}} = mR^2$$

Vollzylinder

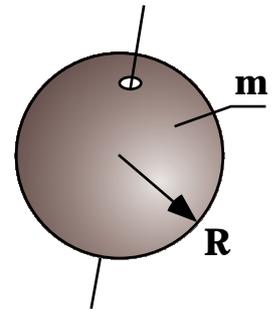
$$J_z = 1/2 mR^2$$

Hohlkugel

$$J_{\text{HK}} = 2/3 mR^2$$

Vollkugel

$$J_K = 2/5 mR^2$$

**Der Satz von Steiner**

Die hier berechneten Trägheitsmomente beziehen sich überwiegend auf Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen. Es ist indessen häufig notwendig, das Trägheitsmoment eines Körpers auch in Bezug auf eine nicht durch den Schwerpunkt gehende Achse zu kennen. Bezeichnet J_S das Trägheitsmoment um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse und J_A das Trägheitsmoment desselben Körpers um eine zu dieser Schwerpunktsachse parallele Achse, so gilt der Steinersche Satz:

$$J_A = J_S + mr^2$$

wenn m die Gesamtmasse und r der Abstand der beiden Achsen bedeutet.

Impuls und Kraftstoss

Der Impuls \vec{p} wurde bereits früher definiert (s. zweites Newtonsches Axiom)

Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ Einheit: $1 \text{ kgms}^{-1} = 1 \text{ Ns}$

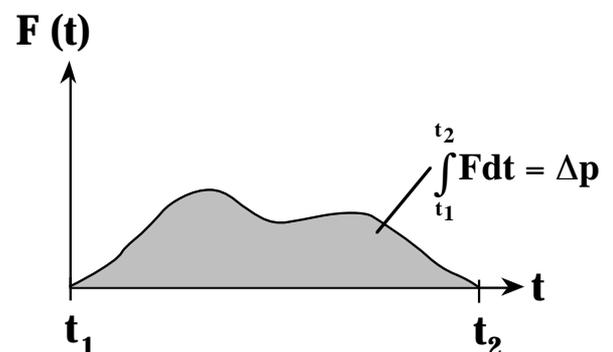
Eine andere Interpretation des Impuls ergibt sich aus dem 2. Newtonschen Axiom:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\int d\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

wird als Kraftstoss bezeichnet



3. Dynamik

Definition des Drehimpulses:

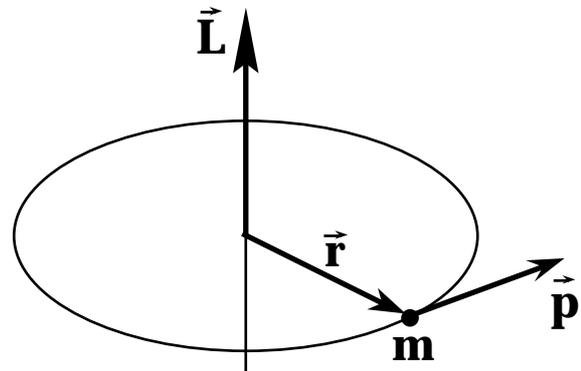
Der Drehimpuls (oder Drall)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times m\vec{v} \\ &= m\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] \\ &= m r^2 \vec{\omega}\end{aligned}$$

$$\vec{L} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega}$$

entspricht $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

der Translationsbewegung

und andererseits

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

entspricht $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
der Translationsbewegung

Analogie zwischen Translations- und Rotationsbewegung

Translation		Rotation	
Weg	\vec{s}	Winkel	φ
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{s}}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{s}}$	Winkelbeschleunigung	$\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Masse	m	Trägheitsmoment	\mathbf{J}
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega}$
Kraft	$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$	Drehmoment	$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$
kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$	kinetische Energie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \mathbf{J} \omega^2$

3.7 Gleichgewichtsbedingungen

Ein Körper ist genau dann im Gleichgewicht wenn die zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \mathbf{0}$$

und

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \mathbf{0}$$

Falls die erste Bedingung nicht erfüllt ist, wird der Körper beschleunigt.

Falls (nur) die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, wird der Körper in eine Rotationsbewegung versetzt.

Die Drehmomente der Kräfte \vec{F}_i können bezüglich einer beliebigen Drehachse berechnet werden.

Beispiel:

Gegeben: $\vec{F}_1, d_1, d_2, \vec{F}_2$ und \vec{F}_3 sind parallel zu \vec{F}_1

Wie gross müssen $|\vec{F}_2|$ und $|\vec{F}_3|$ sein, damit der Balken im Gleichgewicht ist?

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \mathbf{0}$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_1$$

wählen Drehpunkt D:

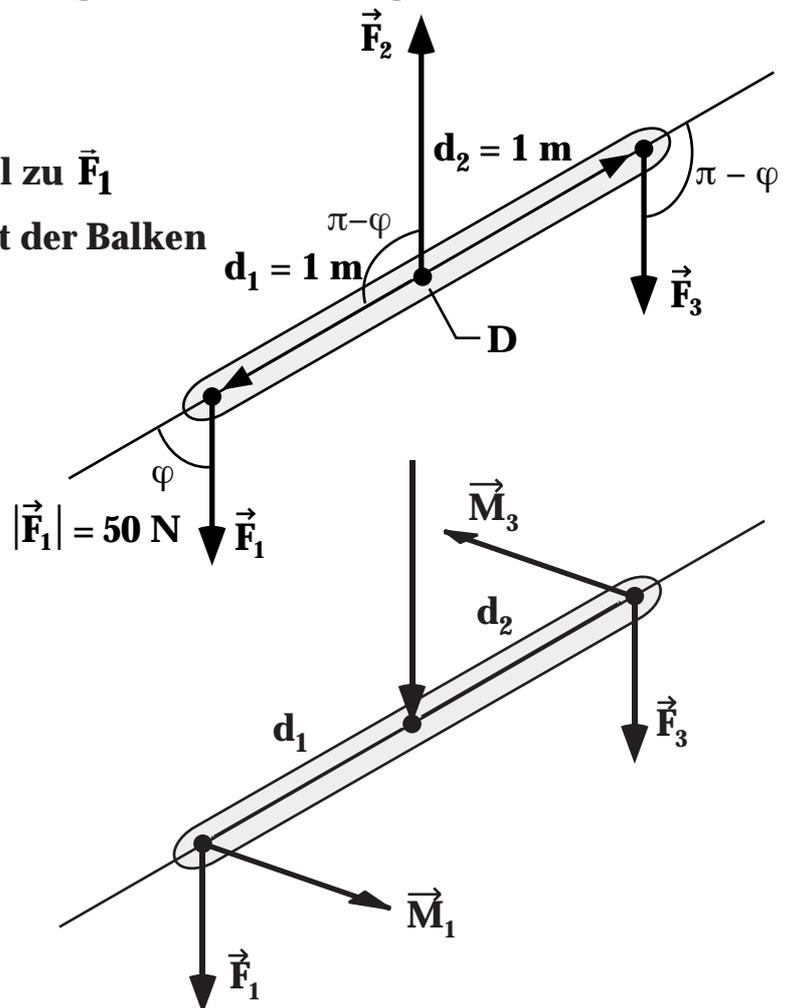
$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \mathbf{0}$$

Beträge:

$$d_1 F_1 \sin \varphi - d_2 F_3 \sin(\pi - \varphi) = 0$$

$$F_3 = \frac{d_1}{d_2} F_1$$

$$\rightarrow \vec{F}_2 = -\left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right) \vec{F}_1 = -2\vec{F}_1 = -100\text{N}, \quad \vec{F}_3 = \vec{F}_1 = 50\text{N}$$



3 Arten von Gleichgewicht

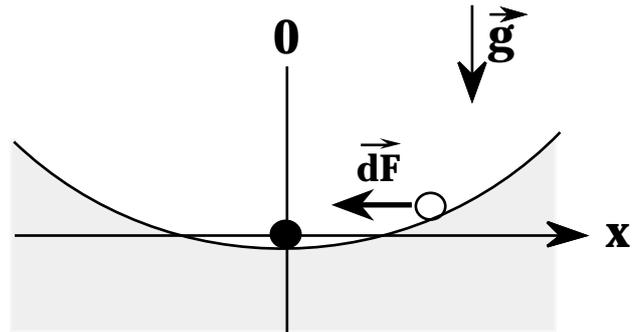
1. Stabiles Gleichgewicht

Gleichgewichtslage $x = 0$

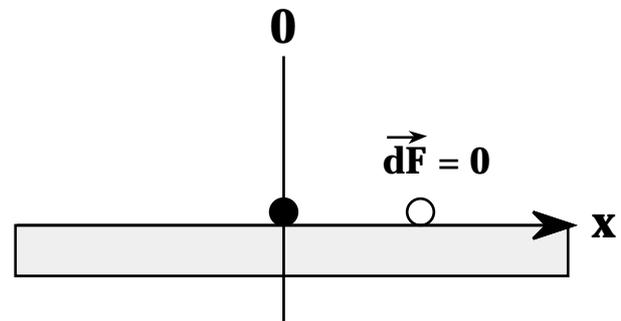
Auslenkung um dx bewirkt eine rücktreibende Kraft \vec{F}

$$dF = -\alpha dx$$

Modell

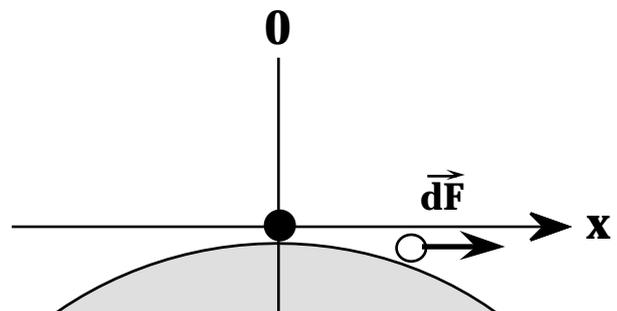


2. indifferentes Gleichgewicht



es existieren unendlich viele Gleichgewichtslagen. Eine Auslenkung um Δx bewirkt keine Kraftwirkung.

3. labiles Gleichgewicht



Gleichgewichtslage $x = 0$

Auslenkung um dx bewirkt eine Kraft in Richtung dx : $dF = \alpha dx$

Neben diesen drei Gleichgewichtsarten existiert noch das metastabile Gleichgewicht.

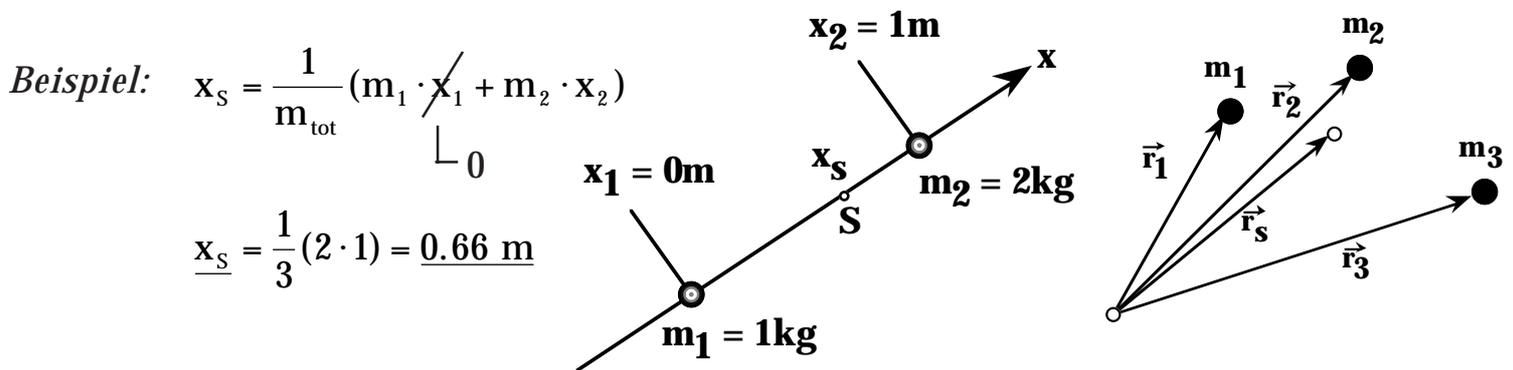
3.8 Der Schwerpunkt

Definition des Schwerpunkts:

Der Schwerpunkt \vec{r}_s von einem System von n Massenpunkten (m_i, \vec{r}_i) ist gegeben durch :

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum m_i \vec{r}_i$$

analog für eine homogene Massenverteilung : $\vec{r}_s = \frac{1}{\int \rho(\vec{r}) dV} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) dV$



Eigenschaften des Schwerpunktes

a) Ein Körper, der im Schwerpunkt S unterstützt wird, ist im Gleichgewicht.

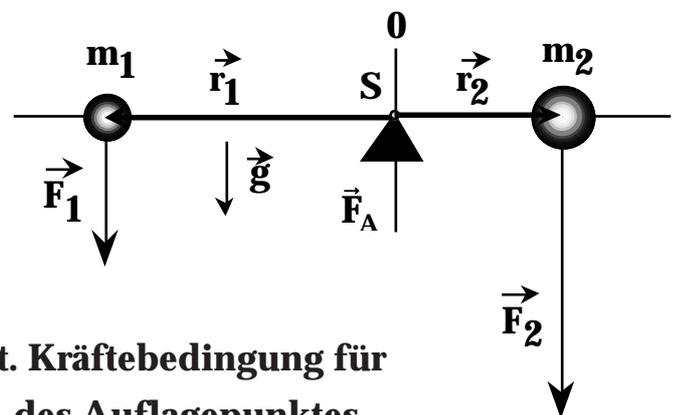
Beweis:

Schwerpunktsdefinition

$$\vec{r}_s m_{\text{tot}} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_s (m_1 + m_2) = \vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2$$

$$\vec{r}_s \times (m_1 + m_2) \vec{g} = \underbrace{\vec{r}_1 \times m_1 \vec{g}}_{\vec{M}_1} + \underbrace{\vec{r}_2 \times m_2 \vec{g}}_{\vec{M}_2} = 0$$



System ist bezüglich Rotation im Gleichgewicht. Kräftebedingung für Gleichgewicht wird erfüllt durch Gegenkraft \vec{F}_A des Auflagepunktes.

$$\vec{F}_A + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

3. Dynamik

b) Gesamtimpuls \vec{p}_{tot} des Systems von n Massenpunkten:

$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \vec{r}_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \vec{r}_i \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \cdot \vec{v}_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \vec{v}_i \quad (*)$$

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{tot}}$$

Der Gesamtimpuls des Systems (\vec{p}_{tot}) ist gleich dem Schwerpunktsimpuls $\mathbf{m}_{\text{tot}} \vec{v}_s$.

c) Schwerpunktssatz

benützen obige Gleichung (*) und leiten nach der Zeit ab

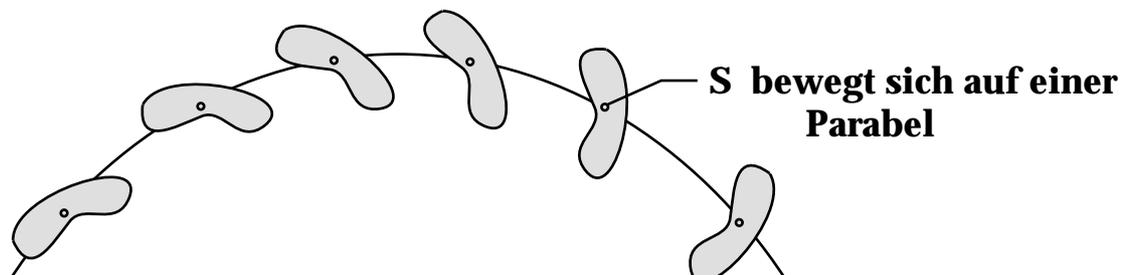
$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

$$\mathbf{m}_{\text{tot}} \vec{a}_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_{\text{total}}}_{\text{Summe der von aussen einwirkenden Kräfte}}$$

Falls $\vec{F}_{\text{tot}} = \mathbf{0} \rightarrow \vec{a}_s = \mathbf{0}$ der Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

Die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt (Schwerpunktssatz) $\mathbf{m}_{\text{tot}} \vec{a}_s = \vec{F}_{\text{tot}}$ besagt, dass der Schwerpunkt sich so bewegt, als ob in ihm die gesamte Masse konzentriert wäre.

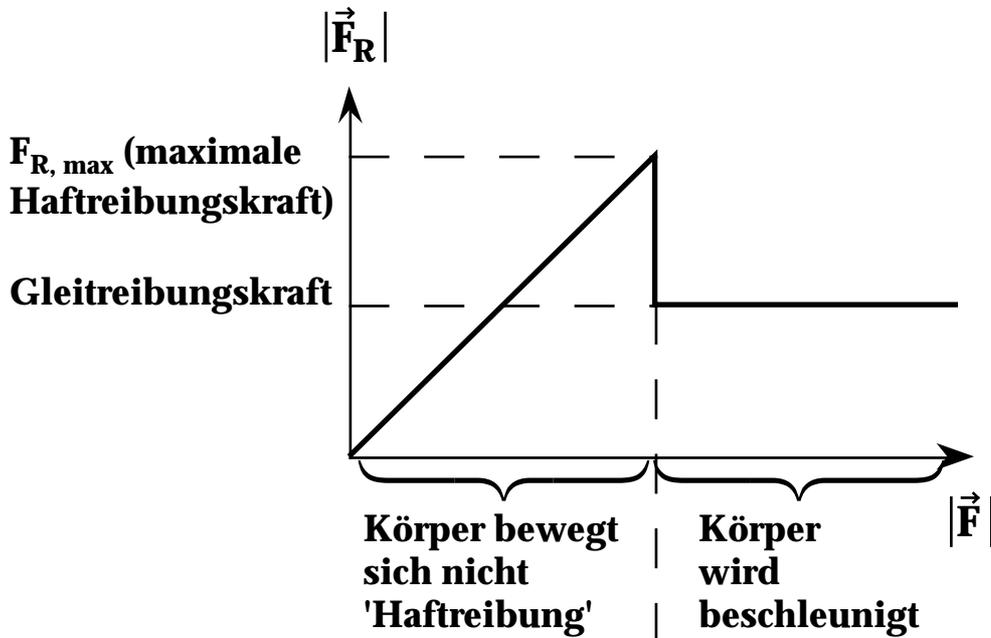
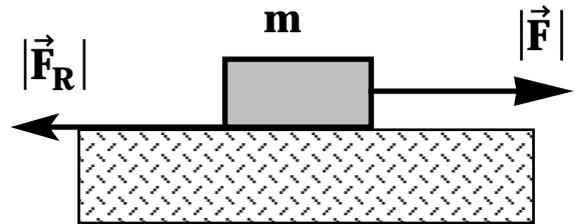
Beispiel: schiefer Wurf eines Körpers mit gleichzeitiger Rotation.



3.9 Reibung

Bei der Reibung handelt es sich um Kräfte, die der Verschiebungsrichtung entgegengesetzt gerichtet sind.

Die Reibungskraft \vec{F}_R entsteht an der Grenzfläche zwischen Körper und Unterlage.

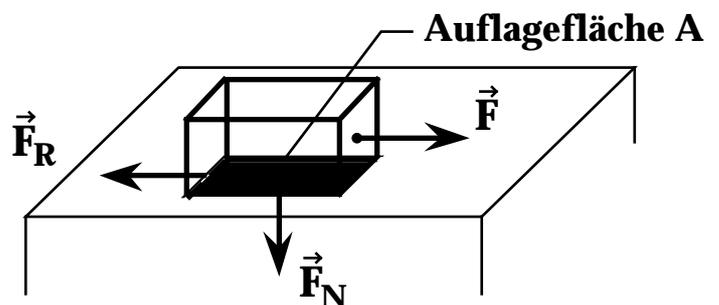


\vec{F} : Kraft, die in Verschiebungsrichtung wirkt

\vec{F}_R : Reibungskraft

\vec{F}_N : Normalkraft (wirkt senkrecht zur Unterlage)

A: Auflagefläche des Körpers



Das Experiment zeigt, von welchen Größen die Reibung abhängt

3. Dynamik

Im Falle der Gleitreibung hängt $|\vec{F}_R|$ ab von:

- | | | |
|--|---|---|
| (1) Materialien (Körper, Unterlage) | } | beschrieben durch
Gleitreibungskoeffizienten μ_g |
| (2) Oberflächenbeschaffenheit | | |
| (3) Normalkraft \vec{F}_N (z. B. Gewicht bei horizontaler Unterlage) | | |

im Falle der Haftreibung hängt $|\vec{F}_R|$ zusätzlich ab von der

- (4) angreifenden Kraft \vec{F}

Dagegen hängt $|\vec{F}_R|$ **nicht** ab von der Grösse der Auflagefläche A !

Es gilt für die **Gleitreibung**:

$$|\vec{F}_R| = \mu_g \cdot |\vec{F}_N|$$

Es gilt für die **Haftreibung**:

die maximale Haftreibung beträgt

$$|\vec{F}_{R,\max}| = \mu_h \cdot |\vec{F}_N|$$

und für $|\vec{F}| < |\vec{F}_{R,\max}|$:

$$|\vec{F}_R| = |\vec{F}|$$

Im Allgemeinen gilt: $\mu_g < \mu_h$

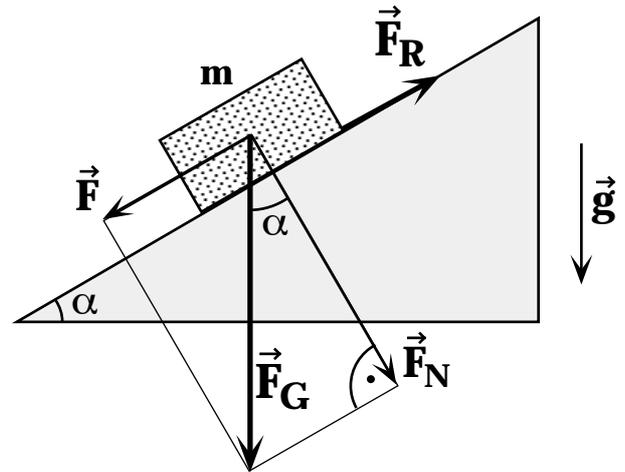
Gleichgewicht auf der schiefen Ebene

m : Masse des Körpers

\vec{F}_G : Gewicht

\vec{F}_N : Normalkraft (auf Unterlage)

\vec{F} : Kraft in Verschiebungsrichtung



Körper ist im Gleichgewicht solange :

$$|\vec{F}_R| = |\vec{F}|$$

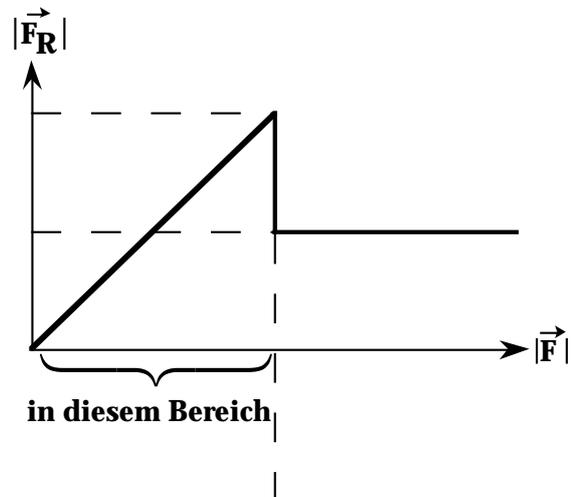
Körper beginnt zu rutschen wenn :

$$|\vec{F}| \geq |\vec{F}_{R, \max}|$$

$$m g \sin \alpha \geq \mu_h |\vec{F}_N| = \mu_h m g \cos \alpha$$

Daraus ergibt sich die Grenzbedingung für Haftreibung :

$$\mu_h = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$



3. Dynamik

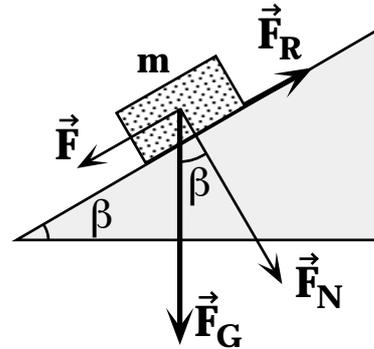
Analog lässt sich die Bedingung für gleichförmiges Rutschen ($|\vec{v}| = \text{konst.}$) angeben :

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_R|$$

$$m g \sin\beta = \mu_g m g \cos\beta$$

Bedingung für gleichförmiges Rutschen :

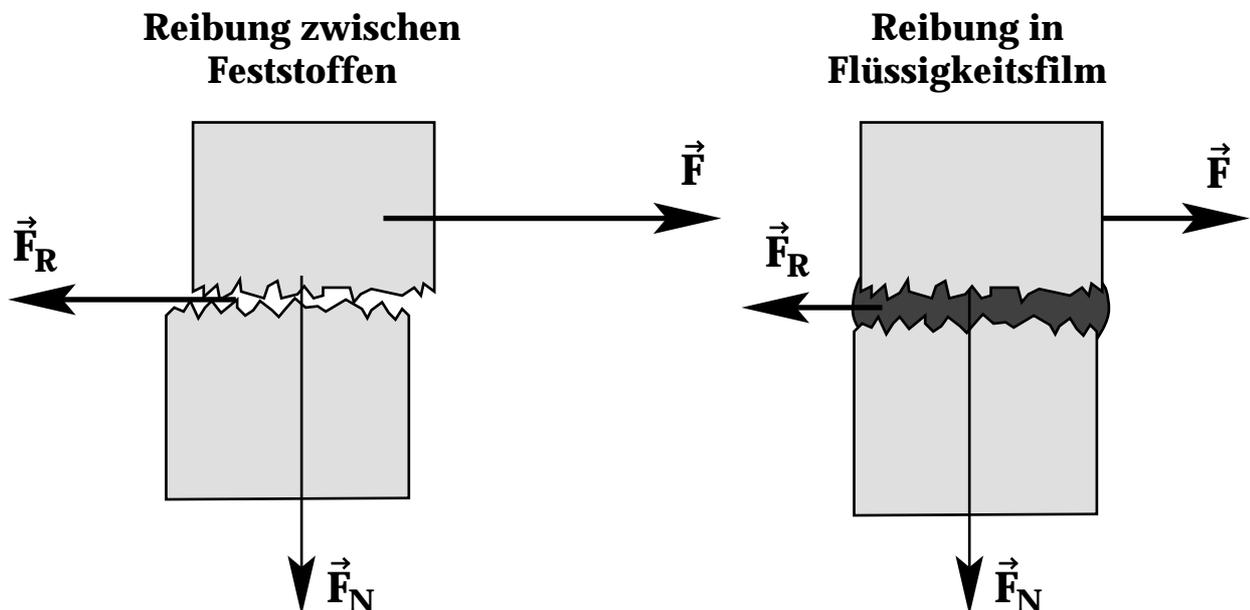
$$\mu_g = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \text{tg}\beta$$



Reibungskoeffizienten

Oberflächen	Haftreibung	Gleitreibung	
	trocken	trocken	geölt
Stahl / Stahl	0.74	0.57	0.01
Stahl / Eis	0.027	0.014	
Holz / Stein	0.7	0.3	
Stahl / Bremsbeläge		0.6	0.3
Stahl / Glas	0.6	0.1	
Teflon / Teflon	0.04	0.02	
Gummi / Asphalt	0.8 - 1.1	0.7 - 0.9	0.2 - 0.5

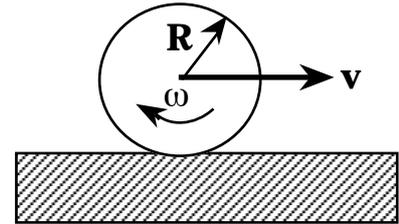
Durch eine Schmierung wird die Reibung in ein anderes Medium verlagert (z.B. in Oel oder einen Feststoff)



Rollreibung

Um die Rollbewegung aufrecht zu erhalten ist ein Drehmoment \vec{M} notwendig, welches das Reibungsdrehmoment \vec{M}_R kompensiert :

$$|\vec{M}| = |\vec{M}_R|$$



$|\vec{M}_R|$ hängt von mehreren Faktoren ab :

- Normalkraft $|\vec{F}_N|$
- Rollreibungszahl μ_R [m]
- Schlupf (bedeutet $\omega \cdot R \neq v$)

$$|\vec{M}_R| = \mu_R \cdot |\vec{F}_N|$$

Die Rollreibung ist um mindestens um eine Größenordnung kleiner als die Gleitreibung (diesen Vorteil nutzen die Kugellager)

Beispiel: rollendes Stahlrad ($R = 1$ m) auf Stahl ($\mu_R = 5 \cdot 10^{-4}$ m)

$$|\vec{F}_{R,rollen}| = \frac{|\vec{M}_R|}{R} = \frac{\mu_R \cdot |\vec{F}_N|}{R}$$

Gleiten ($\mu_g = 0.57$)

$$|\vec{F}_R| = \mu_g \cdot |\vec{F}_N|$$

$$\frac{|\vec{F}_{R,rollen}|}{|\vec{F}_R|} = \frac{\mu_R}{R \cdot \mu_g} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 0.57} \cong 10^{-3}$$

4. Arbeit, Energie und Leistung

4.1 Arbeit

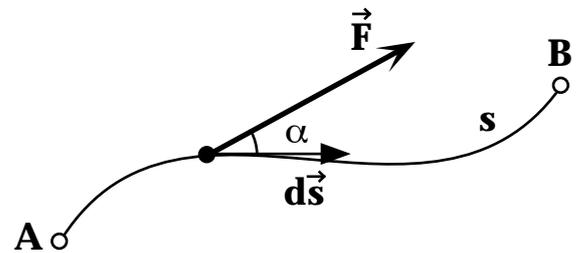
Eine Kraft \vec{F} verschiebt einen Körper längs eines Weges s . Dabei verrichtet die Kraft eine Arbeit W .

Definition der Arbeit:

$$\text{Arbeit } dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos\alpha$$

Einheit: 1 Nm = 1 Joule (nach J. P. Joule 1818-1889)

(alte Einheit: 1 cal = 4.187 J)



W ist eine skalare Grösse.

Längs des ganzen Weges $A \rightarrow B$ wird die Arbeit verrichtet:

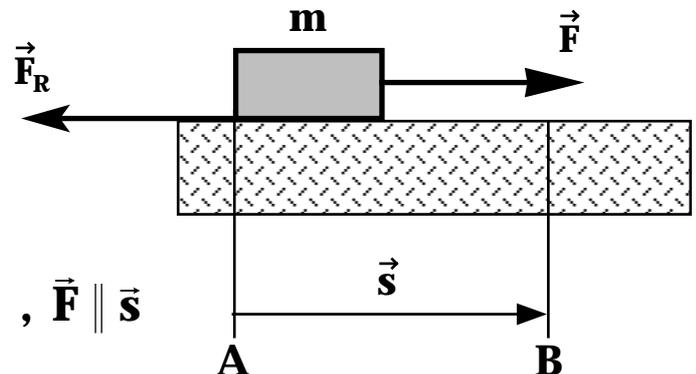
$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Beispiele:

1. Verschiebung eines Körpers

Masse m auf einer Unterlage gegen die Reibung μ_g :

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= \int \mu_g \cdot F_N \cdot ds \\ &= \underbrace{\mu_g \cdot m \cdot g}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{s}_{\text{Weg}} \quad \leftarrow \text{gilt wenn } \vec{F} = \text{konst.}, \vec{F} \parallel \vec{s} \end{aligned}$$



2. Hubarbeit

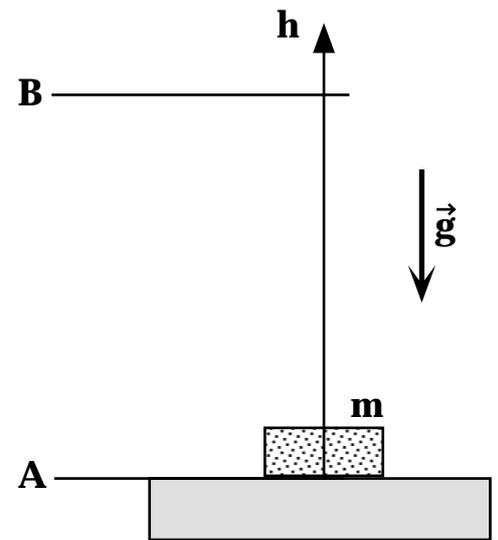
$$\vec{F} = -m\vec{g} = \text{konst.}$$

$$\vec{F} \parallel \text{Weg}$$

$$W = m|\vec{g}|h$$

z.B. heben einer Masse $m = 100 \text{ kg}$ um die Höhe $h = 100 \text{ m}$

$$W = 100 \cdot 9.8 \cdot 100 = 9.8 \cdot 10^4 \text{ J} = 98 \text{ kJ} = 23.4 \text{ kcal}$$



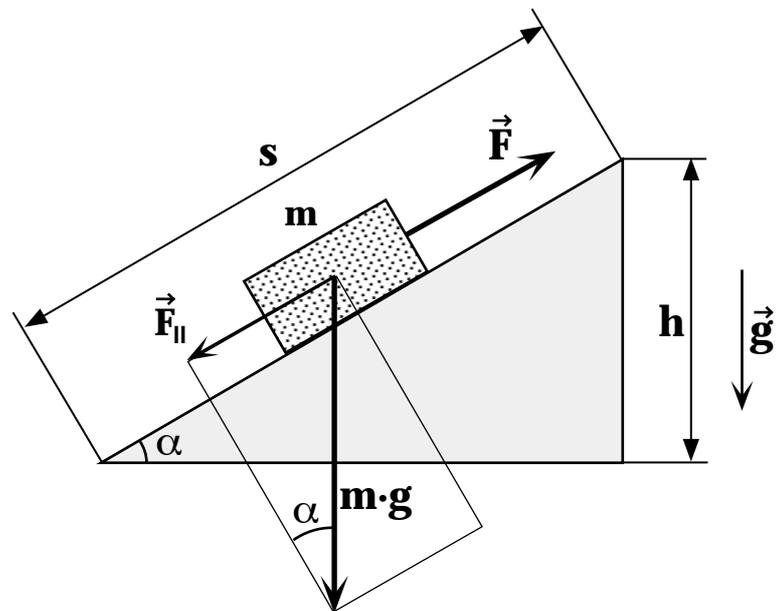
Hubarbeit längs einer schiefen Ebene (ohne Reibung)

$$|\vec{F}_{\parallel}| = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_{\parallel}| \Rightarrow W = |\vec{F}_{\parallel}| \cdot s$$

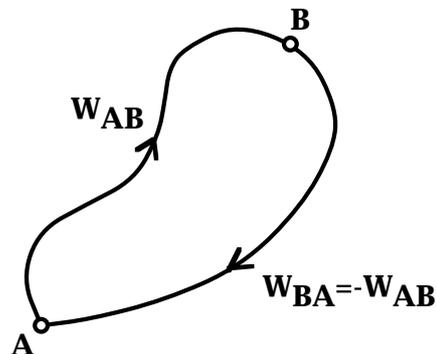
$$W = m \cdot g \cdot \underbrace{s \cdot \sin \alpha}_h = mgh$$

Die Hubarbeit hängt nur von der überwundenen Höhe h und nicht vom Weg ab.



Die Wegunabhängigkeit der Arbeit bedeutet auch, dass in diesem Fall die Arbeit längs eines geschlossenen Weges null ist.

$$\begin{aligned} W_{ABA} &= W_{AB} + W_{BA} \\ &= W_{AB} - W_{AB} = 0 \end{aligned}$$



Diese Eigenschaft besitzen konservative Kraftfelder.

Definition: Ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ lässt sich darstellen als:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{pot}} = -\left(\frac{dE_{\text{pot}}}{dx}, \frac{dE_{\text{pot}}}{dy}, \frac{dE_{\text{pot}}}{dz}\right)$$

E_{pot} ist die Potentielle Energie (skalares Feld)

Im eindimensionalen Fall gilt:

$$F_x = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dx}$$



3. Beschleunigungsarbeit

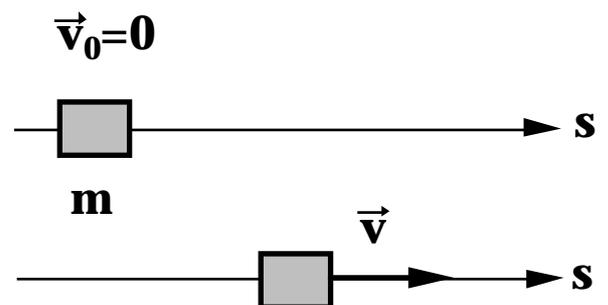
Ein Körper mit Masse m wird aus der Ruhe auf eine Geschwindigkeit v beschleunigt. Welche Arbeit ist dazu nötig?

$$W = \int F ds, \quad ds = v dt, \quad F = m \frac{dv}{dt} \quad (m = \text{konst.})$$

$$W = \int m \frac{dv}{dt} v dt = m \int_0^v v dv$$

$$W = \frac{1}{2} m v^2$$

Beschleunigungsarbeit



$$\text{falls } v_0 \neq 0: \quad W = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$$

4. Beschleunigungsarbeit bei Rotationsbewegung

Ein Körper mit dem Trägheitsmoment J wird auf die Winkelgeschwindigkeit ω beschleunigt

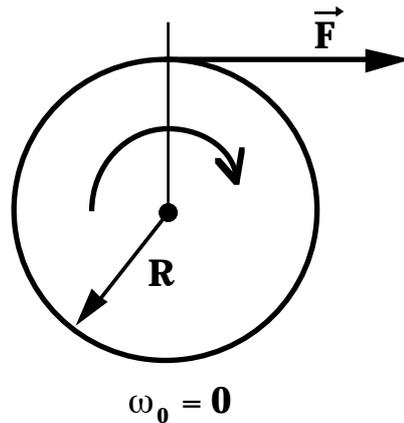
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$d\vec{s} = R d\varphi \quad ; \quad d\varphi = \omega dt$$

$$d\vec{s} = R \omega dt$$

$$|\vec{F}| = \frac{|\vec{M}|}{R} = \frac{J d\omega}{R dt}$$

$$= \int \frac{J d\omega}{R dt} \cdot R \cdot \omega dt = J \int_0^\omega \omega d\omega$$



$$W = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Beschleunigungsarbeit bei Rotationsbewegung

5. Deformationsarbeit

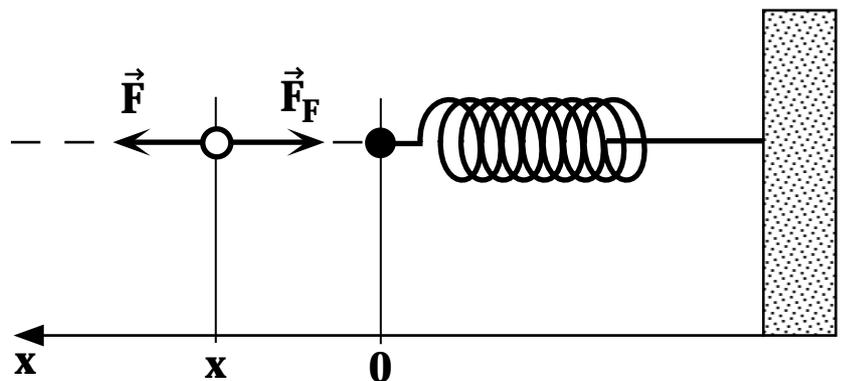
Spannen einer Feder

Das Federgesetz beschreibt das Verhalten der Feder:

Federkraft:

$$F_F = -D x$$

D : ist die Federkonstante mit der Einheit N/m



Arbeit zum Spannen einer Feder:

$$W = \int_0^x F dx = - \int_0^x F_F dx = D \int_0^x x dx$$

$$W = \frac{1}{2} D x^2$$

Deformationsarbeit der Feder

falls Deformation bei $x_0 \neq 0$ startet:

$$W = \frac{1}{2} D x^2 - \frac{1}{2} D x_0^2 = \frac{1}{2} D (x^2 - x_0^2)$$

4.2 Energie

Wird an einem Körper die Arbeit W verrichtet, so erhöht sich die Energie E des Körpers um die Grösse W .

$$\Delta E = W$$

W : am Körper verrichtete Arbeit

Die Energie befähigt den Körper selbst wieder Arbeit zu verrichten.

'Energie ist gespeicherte Arbeit'.

Die kinetische und potentielle Energie sind zwei Hauptformen der Energie:

Kinetische Energie

('Energie der Bewegung')

Translationsbewegung:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Rotationsbewegung:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Potentielle Energie

('Energie der Lage')

- potentielle Energie im Schwerfeld der Erde

$$E_{\text{pot}} = m g h$$

- potentielle Energie der gespannten Feder

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D x^2$$

4. Arbeit, Energie und Leistung

Welcher Art ist ΔE bei der Reibungsarbeit ?

Für die Verschiebung eines Körpers mit Reibung ist die Arbeit

$$W = \mu_g \cdot m \cdot g \cdot s$$

notwendig. W wird in Wärmeenergie umgewandelt.

$$\Delta E_{\text{Wärme}} = W$$

andere Formen potentieller Energie:

• Chemische Energie

elektromagnetische Energie der Lage von Atomen und Molekülen
Verbrennung, galvanische Elemente (Batterien)

• Kernenergie

Energie der Lage in den Feldern zwischen den Bausteinen der Atomkerne
(Nukleonen)
Kernfusion (Sonne), Kernspaltung in Kernkraftwerken

• Wärmeenergie

Schwingungsenergie von Atomen und Molekülen

• Elektrische Energie

Elektromagnetische Energie der Lage von Ladungen und magnetischen Dipolen.
Energie in elektromagnetischen Feldern.
elektrisch geladener Kondensator, Energie elektromagnetischer Wellen

4.3 Äquivalenz von Masse und Energie

Aus der Relativitätstheorie von Albert Einstein folgt die **Äquivalenz** von Masse und Energie.

$$E = mc^2$$

$c = 2.997924 \cdot 10^8$ m/s ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Beispiel:

Bei der Verbrennung von 2 Mol H_2 (= 4 g) und 1 Mol O_2 (= 32 g) wird die Energie $E = 4.85 \cdot 10^5$ J frei. Nach der Äquivalenz von Masse und Energie ist also mit der Energieabgabe eine **Massenabgabe** Δm verbunden.

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{4.85 \cdot 10^5 \text{ Js}^2}{(3 \cdot 10^8)^2 \text{ m}^2}$$

$$\Delta m = 5.4 \cdot 10^{-12} \text{ kg}$$

(entspricht einer Masse von

$$\frac{5.4 \cdot 10^{-12} \text{ kg}}{9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 5.9 \cdot 10^{18} \text{ Elektronen})$$

4.4 Leistung

Definition der Leistung:

Die Leistung ist die Ableitung der Arbeit nach der Zeit.

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ Watt}$$

Watt: nach James Watt (1736-1819)

alte Leistungseinheit: Pferdestärke 1PS = 735.3 W

Aus der Leistungseinheit W wird oft die Energieeinheit Wh (Wattstunden) oder kWh abgeleitet:

$$1 \text{ kWh} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

4. Arbeit, Energie und Leistung

Beispiel:

Ein Lift (Gesamtmasse 1200 kg) fährt mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s nach oben. Welcher Leistung entspricht das ?

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{Fds}{dt} = m \cdot g \cdot v$$

$$P = 1200 \cdot 9.81 \cdot 5 = 5.886 \cdot 10^4 \text{ W}$$

$$P = \underline{58.9 \text{ kW}} \quad (\approx 80 \text{ PS})$$

Größenordnung von Leistungen

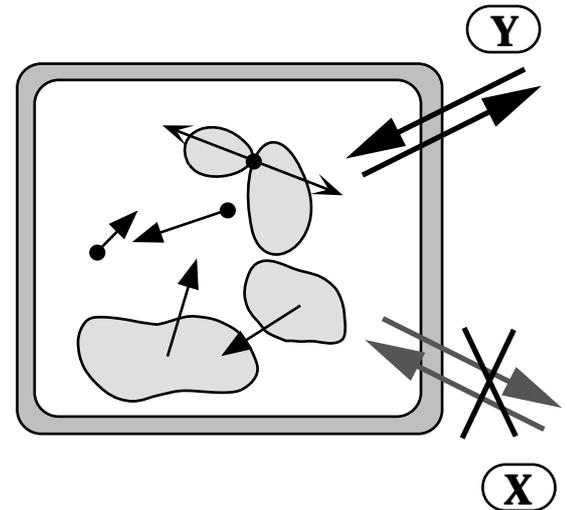
Nervenzelle	10^{-9} W	Kernkraftwerk	$9 \times 10^8 \text{ W}$
Mensch	10^2 W	Sonne	$3.6 \times 10^{29} \text{ W}$
Lokomotive	$3 \cdot 10^6 \text{ W}$	Supernova	10^{37} W
Saturnrakete	10^8 W		

5. Erhaltungssätze

Für viele physikalische Größen gelten **Erhaltungssätze**. Ein Erhaltungssatz für eine Größe X bezieht sich immer auf ein definiertes System, das nach aussen abgeschlossen ist.

System aus einzelnen Objekten,
abgeschlossen bezüglich X
nach aussen.

Kein Austausch von X mit Umgebung.
Bezüglich einer anderen Größe (z. B. Y)
kann das System offen sein.



Beispiele von erhaltenen Größen:

- **Gesamtimpuls** eines Systems (siehe 3.3)

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{konst.}$$

- **Gesamtenergie**

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{chem}} + E_{\text{elektrisch}} + \dots$$

- **Drehimpuls**

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n$$

- **elektrische Ladung**

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

- **Zahl der Baryonen**

(Baryonen: relativ schwere Elementarteilchen mit den Baryonzahlen +1 oder -1. Sie zerfallen über andere Baryonen letztlich in Protonen und Neutronen. Baryonen gehören zu den Hadronen, die Bestandteil der starken Wechselwirkung sind.)

- **Zahl der Leptonen**

(Leptonen: vermitteln die schwache Wechselwirkung. Zu den Leptonen gehören unter anderem: Neutrino, Elektron, Positron, Myon)

5. Erhaltungssätze

5.1 Energiesatz

In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aller Energien konstant.

- Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden.
- Energie kann nur von einer Form in eine andere umgewandelt werden.

Anwendungen des Energiesatzes

Wir betrachten die kinetische und potentielle Energie einer Masse m im Schwerfeld der Erde.

Das Gewicht ist gegeben durch:

$$\vec{F} = m \vec{g}$$

aus Definition der potentiellen Energie:

$$dE_{\text{pot}} = -F_x dx$$

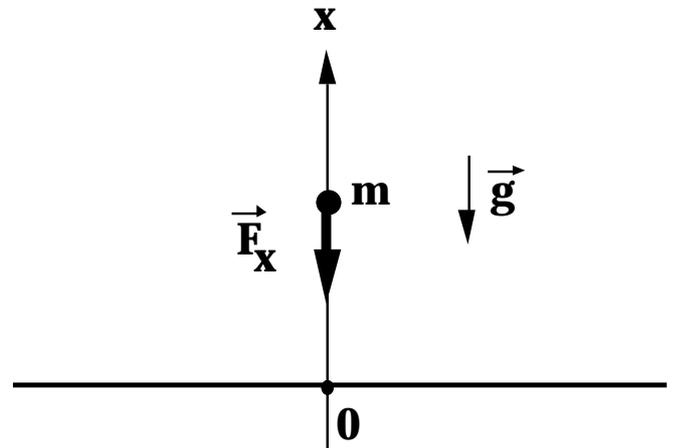
$$\text{(gilt allgemein: } \frac{dE_{\text{pot}}}{dx} = -F_x \text{)}$$

$$F_x \cdot dx = -dE_{\text{pot}}$$

$$\underbrace{F_x}_{m\dot{v}_x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} = -\frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = m\dot{v}_x \cdot v_x = \frac{dE_{\text{kin}}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{\text{kin}}}{dt} + \frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = 0$$



$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konst.}$$

Energiesatz für kinetische und potentielle Energie für konservative Kraftfelder (ohne Reibungseffekte)

Beispiele:**1. freier Fall aus Höhe h_0**

Gesucht: Geschwindigkeit \vec{v}_E vor dem Aufprall.

Bei der Anwendung von Erhaltungssätzen betrachtet man immer zwei Zustände 1 und 2.

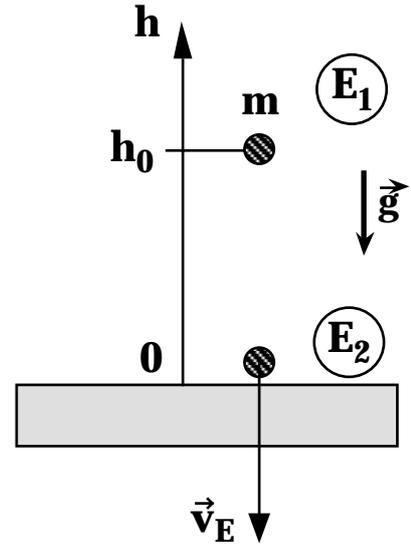
Hier gilt:

$$E_1 = E_2$$

$$E_{\text{kin}1} + E_{\text{pot}1} = E_{\text{kin}2} + E_{\text{pot}2}$$

$$0 + m g h_0 = \frac{1}{2} m v_E^2 + 0$$

$$v_E = \sqrt{2 g h_0}$$

**2. Fadenpendel**

Pendel wird auf α_0 ausgelenkt und dann losgelassen.

Wie gross ist die Geschwindigkeit v im tiefsten Punkt?

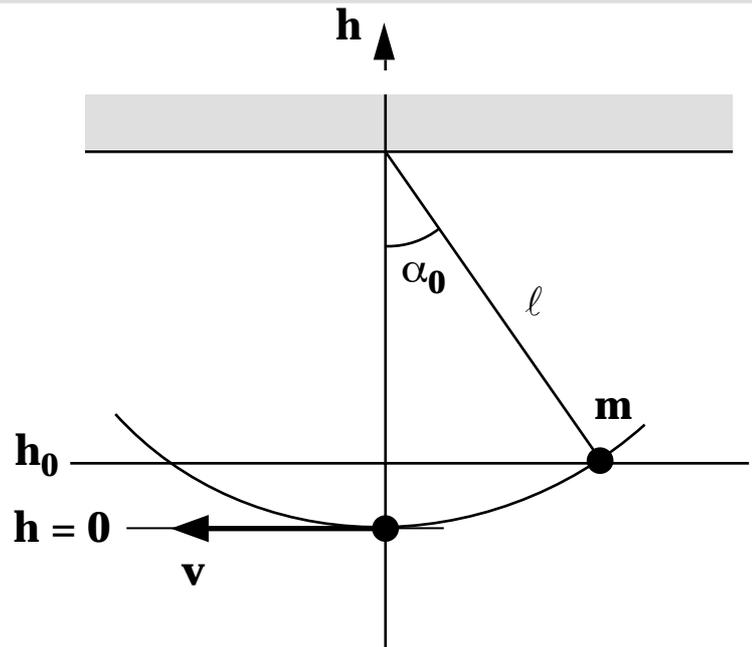
$$E_1 = E_2$$

$$E_{\text{kin}1} + E_{\text{pot}1} = E_{\text{kin}2} + E_{\text{pot}2}$$

$$0 + m g h_0 = \frac{1}{2} m v^2 + 0$$

$$h_0 = \ell - \ell \cos\alpha_0 = \ell (1 - \cos\alpha_0)$$

$$v = \sqrt{2 g \ell (1 - \cos\alpha_0)}$$



5.2 Impulssatz

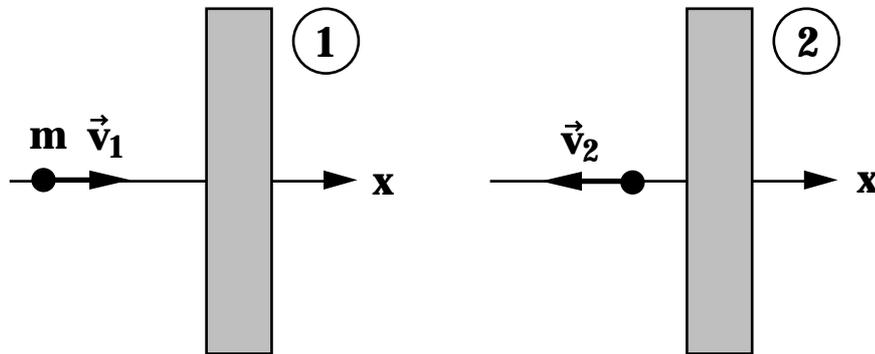
Aus Abschnitt 3.3 kennen wir den Impulssatz:

In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls erhalten.

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{konst.}$$

Beispiele:

1. Elastische Reflexion eines Teilchens an einer Wand



Welcher Impuls wird bei der elastischen Reflexion von m (d.h. Reflexion ohne Energieverlust) auf die Wand übertragen ?

Wir wenden den Energie- und Impulssatz an:

Energiesatz :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 \\ \frac{1}{2} m v_1^2 &= \frac{1}{2} m v_2^2 \\ |\vec{v}_1| &= |\vec{v}_2| \end{aligned}$$

Impulssatz :

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \vec{p}_2 \\ m v_1 + p_{\text{Wand1}} &= -m v_1 + p_{\text{Wand2}} \\ p_{\text{Wand2}} - p_{\text{Wand1}} &= \Delta p_{\text{Wand}} = 2 m v_1 \end{aligned}$$

2. Fadenpendel

Für das System Faden/Pendelmasse gilt der Impulssatz offenbar nicht:

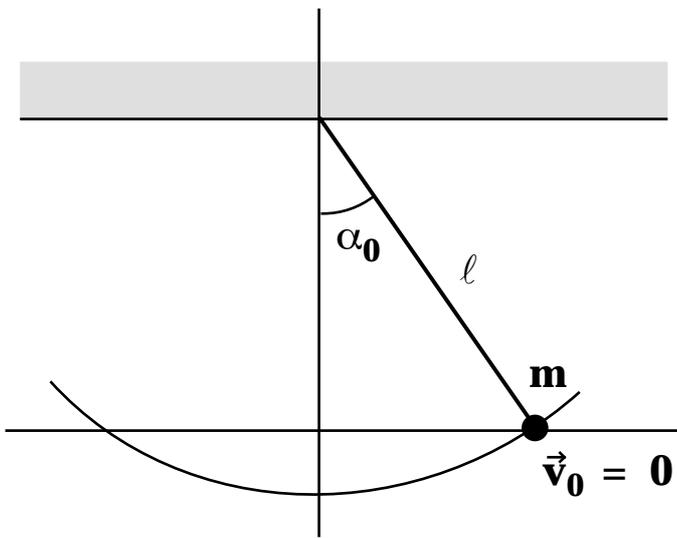
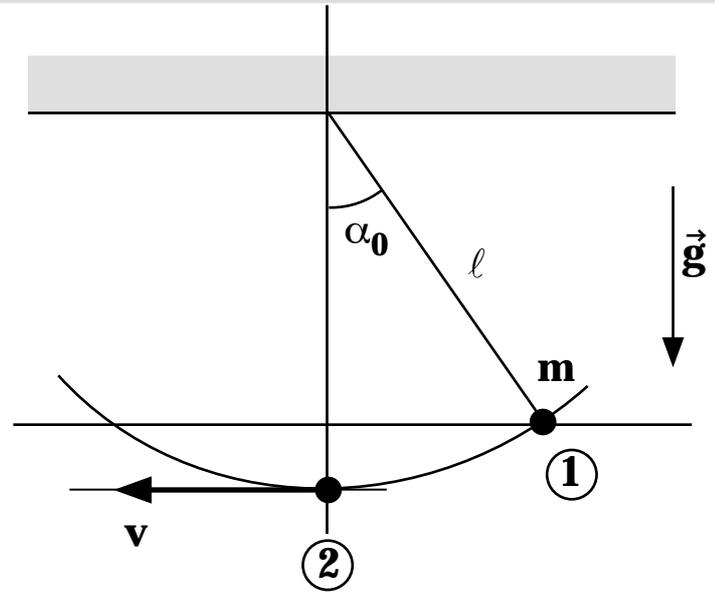
$$|\vec{p}_1| = 0$$

$$|\vec{p}_2| = m \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha_0)}$$

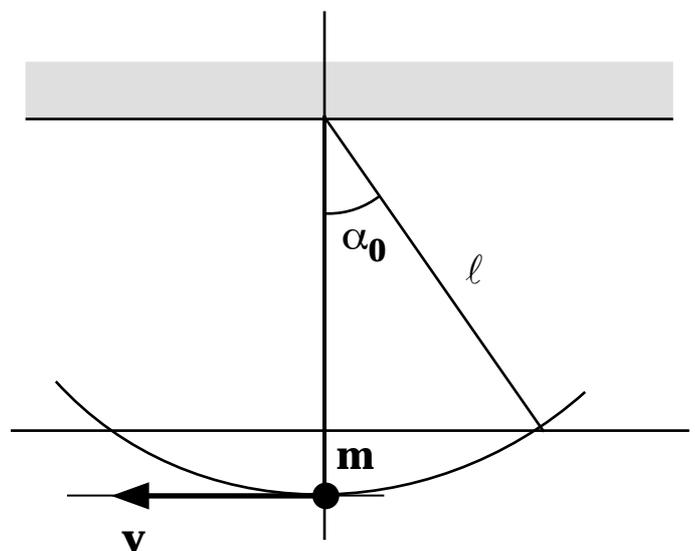
$$\vec{p}_1 \neq \vec{p}_2$$

Grund: Das Fadenpendel ist bezüglich der *Energie* ein abgeschlossenes System, nicht aber bezüglich des *Impulses*.

Vom Pendel findet eine Impulsübertragung auf die Aufhängung statt.



$$\vec{p}_{\text{Pendel}} = 0$$

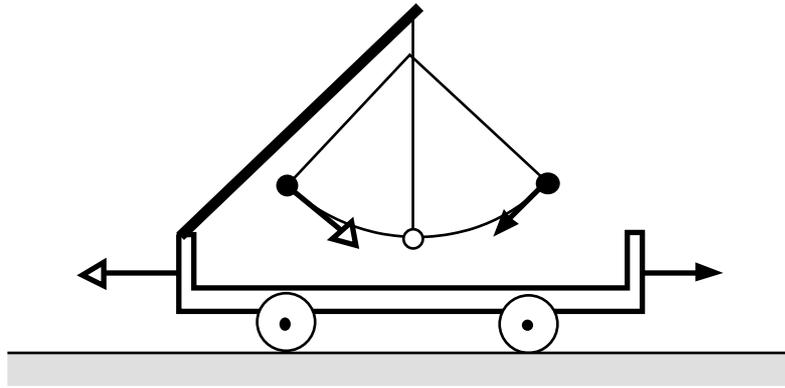


$$|\vec{p}| = m \sqrt{2 g l (1 - \cos \alpha_0)}$$

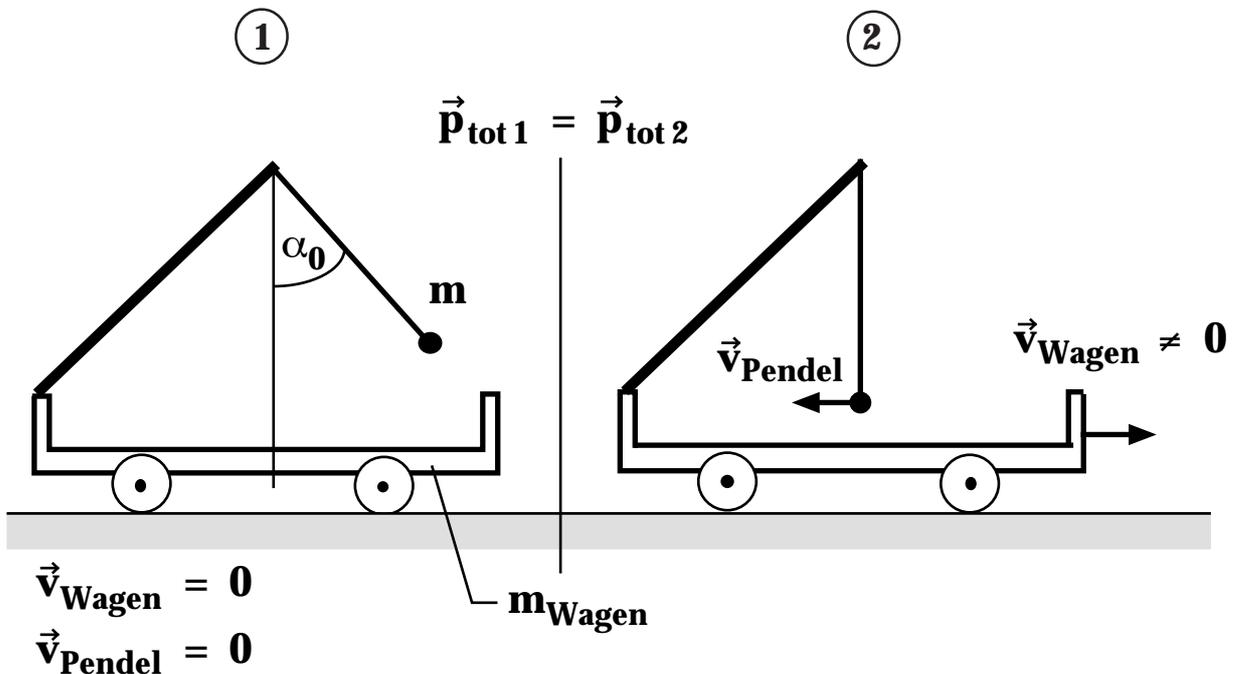
5. Erhaltungssätze

Um bezüglich des Impulses ein abgeschlossenes System zu erhalten, müssen wir die Aufhängung einbeziehen.

Im folgenden Fall erhalten wir ein Pendel, das bezüglich des Impulses in horizontaler Richtung ein abgeschlossenes System darstellt:



Aus Abschnitt 3.3 wissen wir, dass der Gesamtimpuls erhalten bleiben muss.



Wie gross ist die Geschwindigkeit der Pendelmass im tiefsten Punkt?
Energie- und Impulssatz müssen für Zustand 1 und 2 erfüllt sein:

Energiesatz:

$$m g \ell (1 - \cos\alpha_0) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_{\text{Wagen}} v_{\text{Wagen}}^2$$

Impulssatz:

$$\mathbf{0} = m \vec{v} + m_{\text{Wagen}} \vec{v}_{\text{Wagen}}$$

$$v_{\text{Wagen}} = - \frac{m}{m_{\text{Wagen}}} v$$

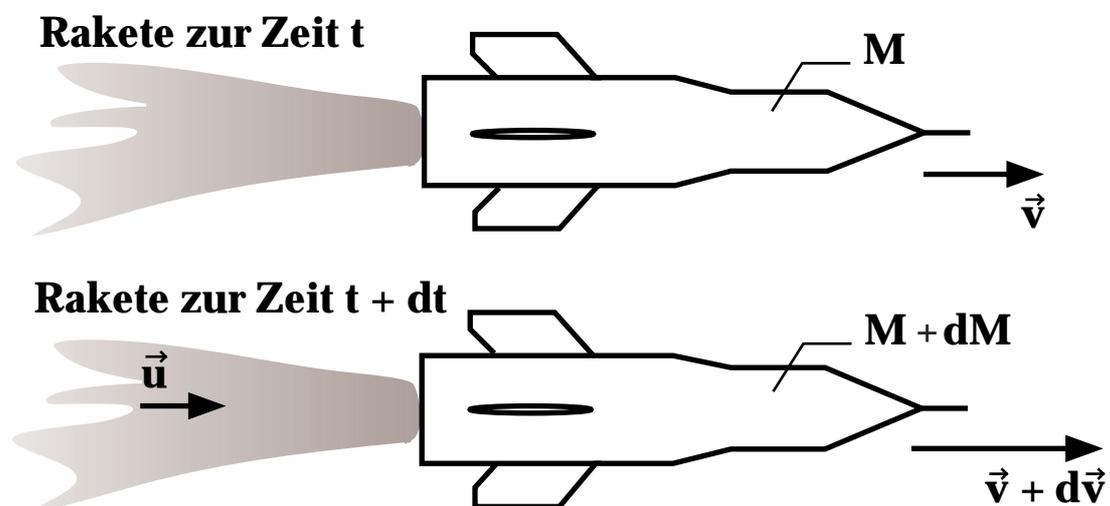
$$m g \ell (1 - \cos\alpha_0) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_{\text{Wagen}} \frac{m^2}{m_{\text{Wagen}}^2} v^2$$

$$m g \ell (1 - \cos\alpha_0) = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m^2}{m_{\text{Wagen}}} \right) v^2$$

$$v^2 = \frac{2 m g \ell (1 - \cos\alpha_0)}{m + \frac{m^2}{m_{\text{Wagen}}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 g \ell (1 - \cos\alpha_0)}{1 + \frac{m}{m_{\text{Wagen}}}}}$$

3. Rakete



5. Erhaltungssätze

Impulserhaltung (skalare Schreibweise)

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= \frac{p(t+dt) - p(t)}{dt} = 0 \\
 &= \frac{(M + dM)(v + dv) - dM \cdot u - M \cdot v}{dt} = 0 \\
 &= \frac{dM[v + dv - u]}{dt} + M \frac{dv}{dt} \quad | \quad [u - (v + dv)] = v_{\text{rel}} \\
 M \frac{dv}{dt} &= v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}
 \end{aligned}$$

\bar{v}_{rel} : Relativgeschwindigkeit der ausgestossenen Gase zur Rakete

M : Masse zur Zeit t (Raketenhülle + Treibstoff)

$\frac{dM}{dt}$: Massenausstoss pro Zeit

Berechnung der Endgeschwindigkeit v_E :

$$dv = v_{\text{rel}} \frac{1}{M} dM$$

$$\int_0^{v_E} dv = v_{\text{rel}} \int_{M_0}^{M_E} \frac{1}{M} dM$$

$$v_E = v_{\text{rel}} \log \frac{M_E}{M_0}$$

$$v_0 = v(0) = 0$$

M_0 : Gesamtmasse

M_E : Masse der ausgebrannten Rakete

$$v_E = -v_{\text{rel}} \log \frac{M_0}{M_E}$$

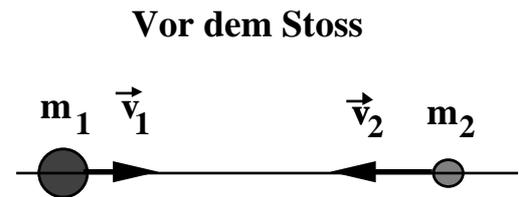
Raketengleichung

4. Stöße

Zentraler Stoß \Rightarrow Bewegung erfolgt auf einer Geraden (eindimensionaler Fall)

Gegeben: $m_1, m_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$

Gesucht: \vec{v}'_1, \vec{v}'_2



Energie- und Impulssatz müssen erfüllt sein (abgeschlossenes System)

Stoß



Energiesatz:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q$$

Impulssatz:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

3 Unbekannte ($\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, Q$), **2 Gleichungen**

falls Stoß elastisch (ohne Verlust an kinetischer Energie erfolgt)

$$Q = 0$$

falls Stoß inelastisch

$$Q > 0$$

Stoß vollständig inelastisch

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}'_2$$

(Massen m_1 und m_2 bewegen sich gemeinsam weiter)

5. Erhaltungssätze

Spezialfälle

1. elastischer Stoss (eindimensional)

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

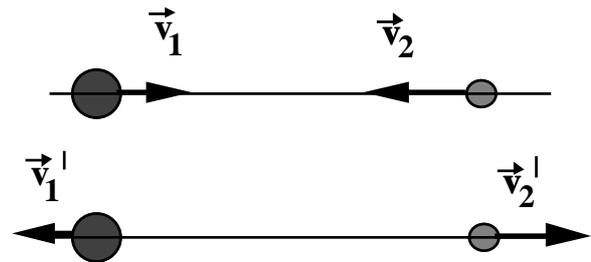
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$(1) \quad m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

$$(2) \quad m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \quad / (1) : (2) \quad (v_1 \neq v_1' \text{ und } v_2 \neq v_2')$$

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$$

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$



Die Relativgeschwindigkeiten $(v_1 - v_2)$ und $(v_2' - v_1')$ sind vor und nach dem Stoss gleich.

speziell :

2. $m_1 = m_2$

aus Impulssatz

$$(a) \quad v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$$

$$(b) \quad v_1 - v_2 = -v_1' + v_2' \quad / (a) \pm (b) \quad (\text{Gleichung (b) von oben übernommen})$$

$$v_1 = v_2'$$

$$v_2 = v_1'$$

'Austausch' der Geschwindigkeiten

3. vollständig inelastischer Stoss

$$v_1' = v_2' (\equiv v')$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 + Q$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$\Rightarrow v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$\Rightarrow Q$ kann berechnet werden

5.3 Drehimpulssatz

Betrachten System aus n Massen m_i

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i}_0 + \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{M}_i$$

abgeschlossenes System:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\text{tot}} = \text{konst}$$

Drallsatz

In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtdrehimpuls konstant.

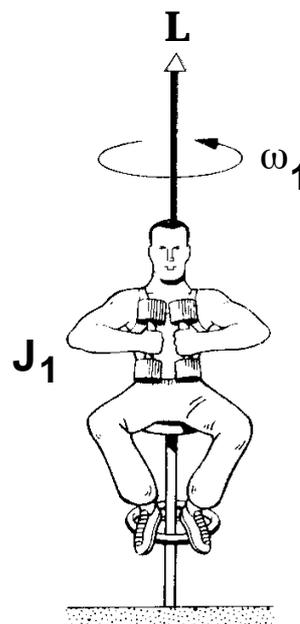
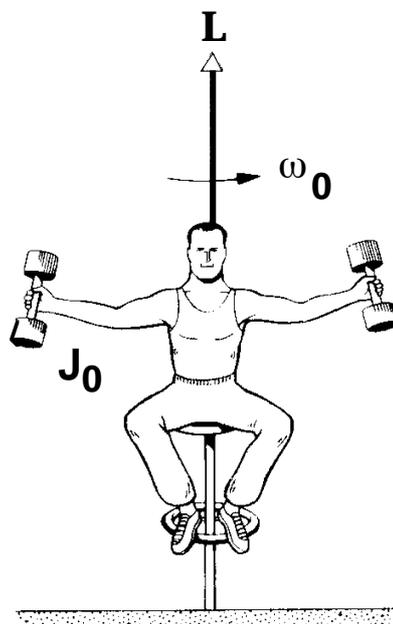
Beispiel:

Pirouette der Eiskunstläuferin

Anfangszustand $\vec{L} = J_0 \vec{\omega}_0 = \text{konst}$

Endzustand $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_0 \frac{J_0}{J_1}$

Da $J_1 < J_0$ nimmt die Winkelgeschwindigkeit beim Anziehen der Arme zu.



5. Erhaltungssätze

Zentralkräfte

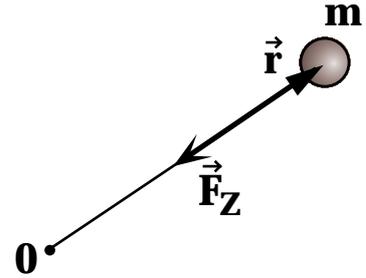
\vec{F} ist in Bezug auf das Zentrum 0 eine Zentralkraft falls $\vec{F} \parallel \vec{r}$

Das Drehmoment der Zentralkraft beträgt: $\vec{M}_Z = 0$

denn:

$$\vec{M}_Z = \vec{r} \times \vec{F}_Z = 0 \quad \text{da } \vec{r} \parallel \vec{F}_Z$$

Daraus folgt:

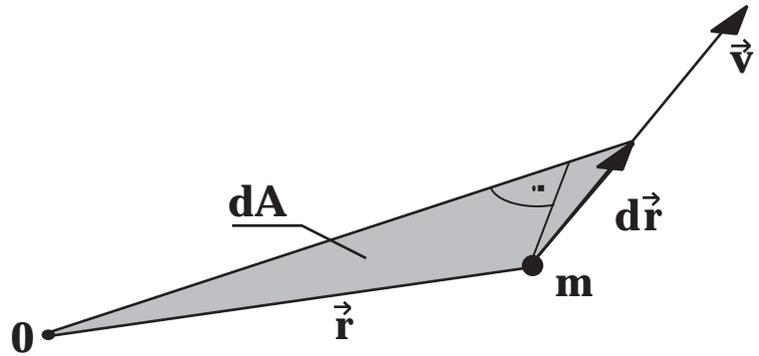


Für Zentralkräfte gilt $\vec{L} = \text{konstant}$

Flächensatz (oder 2. Keplersches Gesetz)

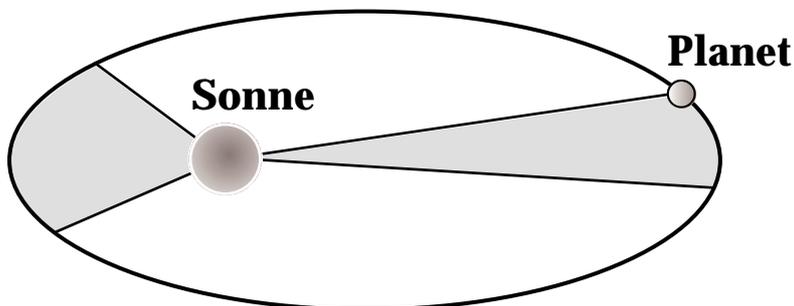
Auf m wirkt eine Zentralkraft (z. B. die Gravitationskraft)

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| \\ &= \frac{1}{2m} |\vec{L}| dt \\ A &= \frac{L}{2m} t \end{aligned}$$



2. Keplersches Gesetz

Der Radiusvektor \vec{r} überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen



6. Mechanische Eigenschaften von Festkörpern

Materie existiert in vier Aggregatzuständen als

- Festkörper (kristallin und amorph)
- Flüssigkeit
- Gas
- Plasma

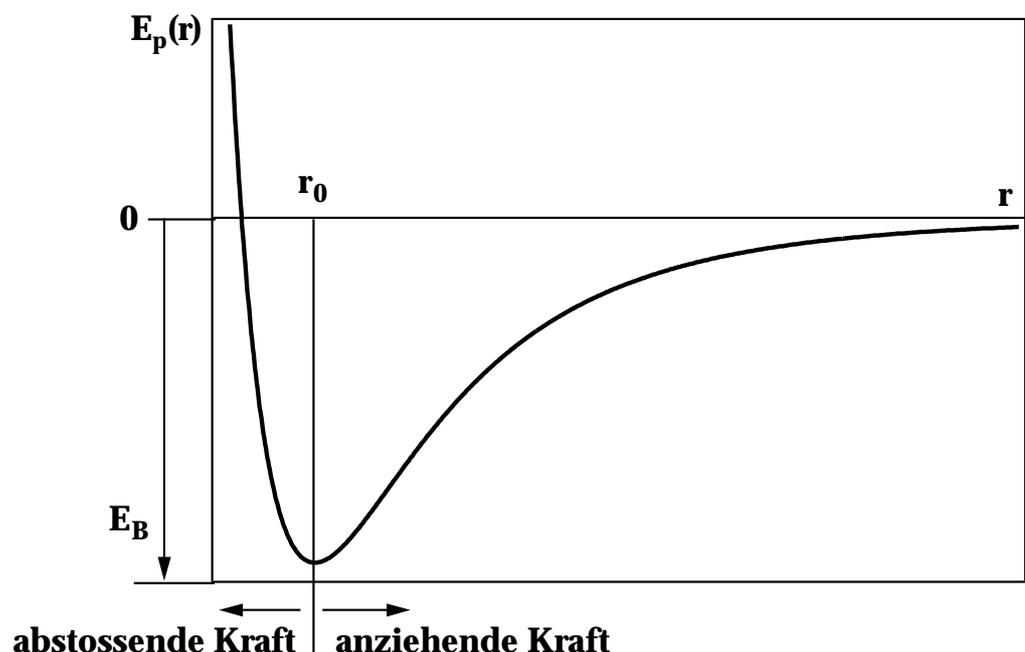
Die Wechselwirkung zwischen den Atomen und Molekülen sowie äussere Parameter wie Temperatur, Druck, elektromagnetische Felder u.a. bestimmen, in welchem Aggregatzustand ein Stoff vorliegt.

6.1 Wechselwirkungspotential

Atome befinden sich in einem Festkörper in einem gebundenen Zustand. Die Bindung zwischen zwei benachbarten Atomen lässt sich durch die potentielle Energie E_p in Abhängigkeit von der Distanz zwischen den Atomen beschreiben.
Kraft zwischen den Atomen:

$$r_0: \text{ Gleichgewichtslage } (F = - \frac{dE_p}{dr} = 0)$$

E_B : Bindungsenergie

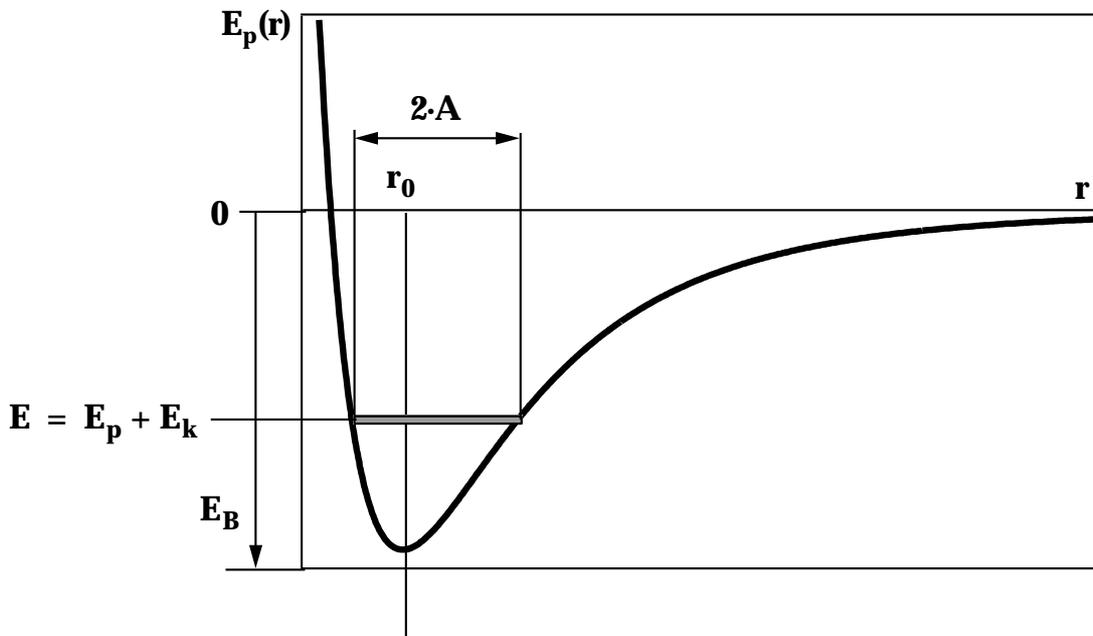


6. Mechanische Eigenschaften von Festkörpern

Die Bindung kann aufgebrochen werden indem die kinetische Energie E_k in Form von Schwingungen der Atome erhöht wird (= Erhöhung der Temperatur).

Der Festkörper schmilzt wenn $E_k \approx E_B$.

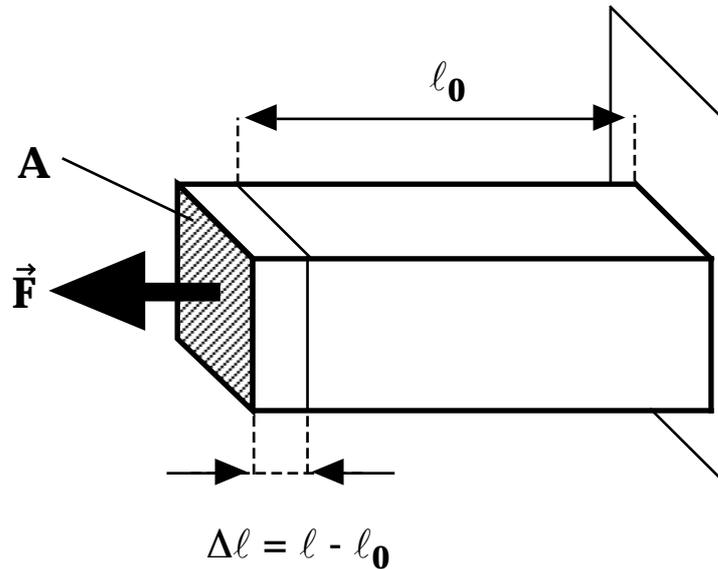
Die Energie $E = E_p + E_k$ bestimmt die mittlere Amplitude A der Schwingungen der Atome.



6.2 Mechanische Eigenschaften deformierbarer Festkörper

Das Wechselwirkungspotential bestimmt wie ein Festkörper auf äussere Kräfte reagiert.

Ein Zugversuch zeigt phänomenologisch folgendes Bild :



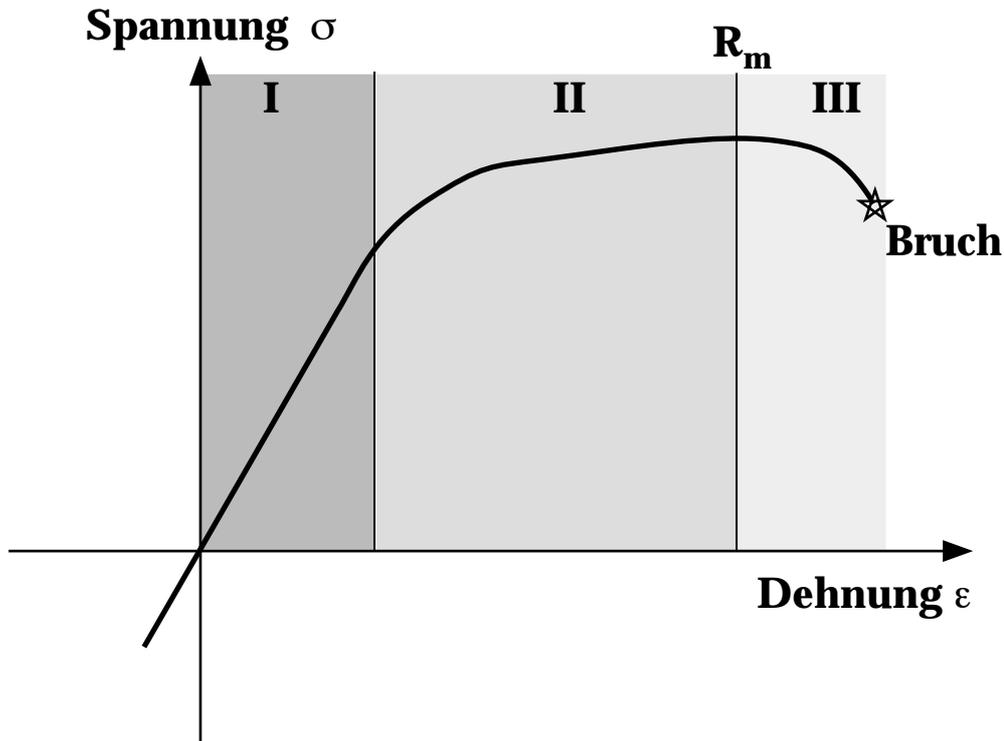
Definition:

relative Längenänderung: $\frac{\Delta l}{l_0} = \epsilon$

Spannung: $\sigma = \frac{F}{A}$

$\sigma > 0$ Zugspannung
 $\sigma < 0$ Druckspannung

6. Mechanische Eigenschaften von Festkörpern



- I : elastischer Bereich σ ist proportional zu ε , die Verformungen sind reversibel
 II : viskoeleastischer Bereich
 III : Fließbereich } Verformungen irreversibel
 R_m : Zugfestigkeit

Hookesches Gesetz

Im elastischen Bereich gilt das Hookesche Gesetz (Robert Hooke 1635-1703)

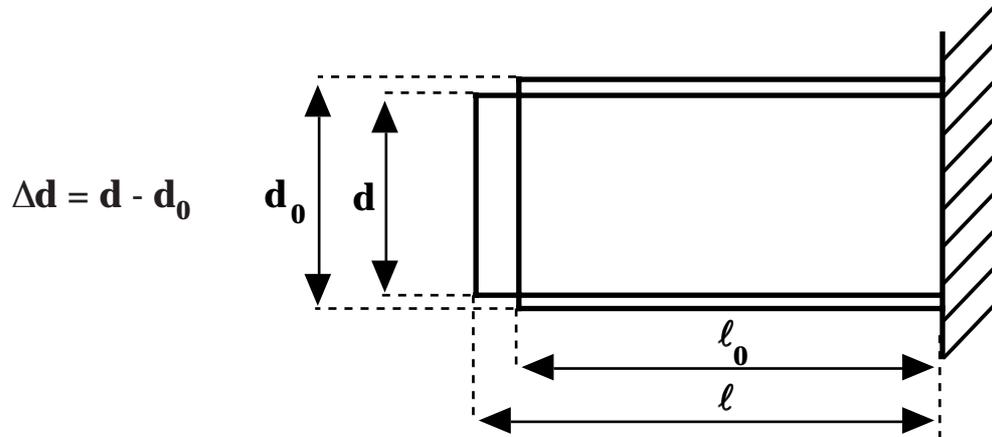
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

E : Elastizitätsmodul (Materialkonstante)

Einheit:

$$[E] = \frac{[\sigma]}{[\varepsilon]} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \equiv 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa}$$

Die Längenänderung Δl wird teilweise kompensiert durch eine Querkontraktion Δd



Die Querkontraktion $\frac{\Delta d}{d}$ und die Dehnung $\frac{\Delta l}{l}$ sind proportional zueinander:

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}$$

μ : **Poissonzahl** (Materialkonstante, nach Denis Poisson 1781-1840)
 μ sagt etwas aus über die Volumenänderung eines belasteten Festkörpers.
 μ kann maximal den Wert 0.5 annehmen.

Annahme: Volumen bleibt unter Last erhalten, dann gilt

$$\begin{aligned} V &= l d^2 = (l + \Delta l)(d + \Delta d)^2 \\ &= (l + \Delta l)(d^2 + 2 d \Delta d + \Delta d^2) & | \Delta d^2 \cong 0 \\ &= l d^2 + 2 l d \Delta d + d^2 \Delta l + 2 d \Delta l \Delta d & | : 2 l d^2, \Delta l \Delta d \cong 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} = -\mu_{\max} \frac{\Delta l}{l}$$

Kompressionsmodul

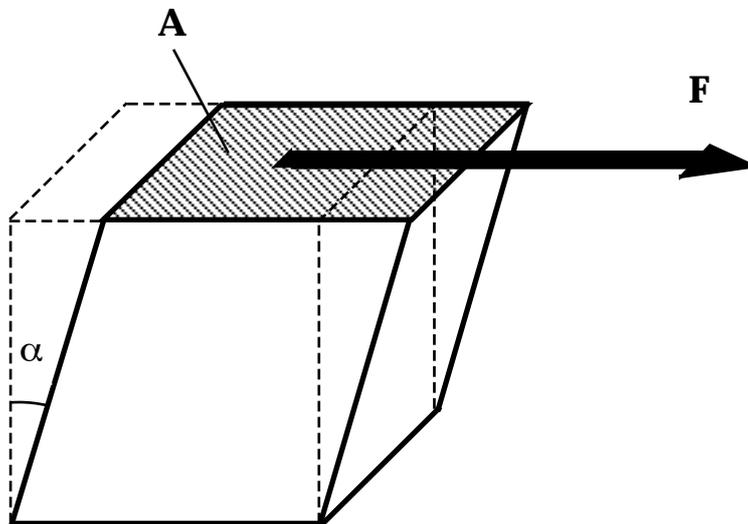
Unter einem allseitigen Druck nimmt das Volumen eines Festkörpers ab

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}$$

K : Kompressionsmodul, $[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}] = \text{Pa}$, $\frac{1}{K} = \kappa$: Kompressibilität, $[\kappa] = \text{Pa}^{-1}$

Schubmodul (Torsionsmodul)

Eine Kraft, die tangential zu einer Körperebene angreift, heisst Schubkraft oder Scherkraft



Definition:

$$\text{Schubspannung } \tau = \frac{F}{A}$$

Für den Scherwinkel α und die Schubspannung τ gilt:

$$\tau = G \alpha$$

G : Schub- oder Torsionsmodul, Einheit: $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

Zusammenhang zwischen den Materialkonstanten im elastischen Bereich (ohne Beweis)

$$\frac{E}{2G} = 1 + \mu$$

$$\frac{E}{3} = K (1 - 2\mu)$$

Einige Materialkonstanten

	Elastizitäts- modul E (10 ⁹ N/m ²)	Torsions- modul G (10 ⁹ N/m ²)	Kompressions- modul K (10 ⁹ N/m ²)	Poissonzahl
Reinaluminium	72	27	75	0.34
Federstahl	212	80	170	0.28
V2A Stahl	195	80	170	0.28
Gold	81	28	180	0.42
Weichkupfer	120	40	140	0.35
Blei	17	6	44	0.44
Quarzglas	76	33	38	0.17
Messing	100	36	125	0.38

Anisotrope Materialien

Obige Beziehungen gelten in dieser Form nur für isotrope Materialien, d.h. die Materialeigenschaften sind unabhängig von der Richtung.

Beispiele :

isotrope Materialien: Metalle, Glas

anisotrope Materialien: Holz, Knochen, Verbundwerkstoffe (faser-
verstärkte Materialien), Stahlbeton

7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

7.1 Hydrostatik

Der Druck

Definition :

Der Druck p einer Kraft F auf eine Fläche A ist gegeben durch $p = \frac{F}{A}$

Einheit : $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa}$

andere Druckeinheiten:

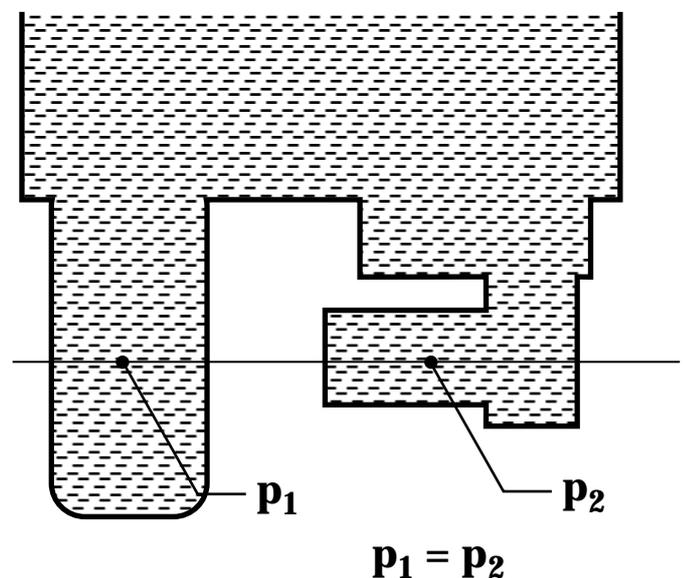
bar	$1 \text{ bar} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
physikalische Atmosphäre	$1 \text{ atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
Torr (= mm Hg-Säule)	$1 \text{ Torr} = 133.32 \text{ Pa}$

Eigenschaften von Flüssigkeiten

- Flüssigkeiten sind praktisch inkompressibel

$$(\kappa \text{ ist sehr klein}) \quad \frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p$$

- Im Gleichgewicht ist der Druck in der Flüssigkeit in gleichen Höhen gleich gross



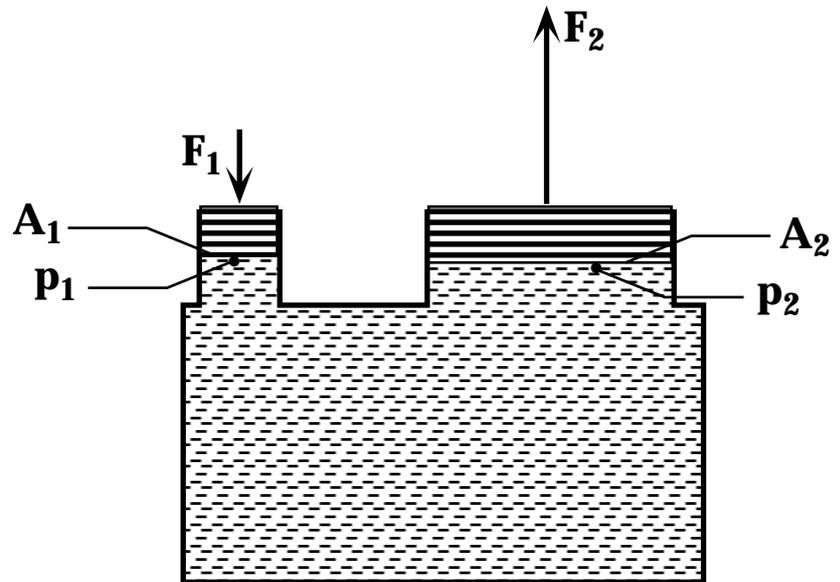
7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

• **Hydraulische Presse**

$$p_1 = p_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

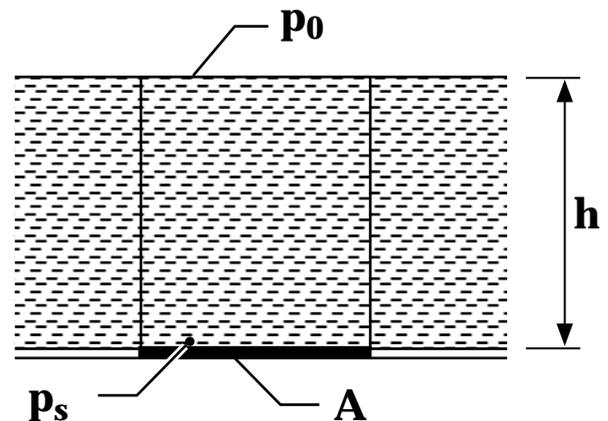
• **Schweredruck p_s**

Die Kraft auf die Fläche A am Boden ist gegeben durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule mit Querschnittsfläche A und Höhe h

$$p_s = \frac{F}{A} = \frac{m g}{A} = \frac{\rho A h g}{A}$$

$$p_s = \rho g h$$

Schweredruck in einer Flüssigkeitssäule



Beispiel :

Wassersäule $h = 10 \text{ m}$, $\rho = 10^3 \text{ kg / m}^3$:

$$p_s = \rho g h = 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10 \approx 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

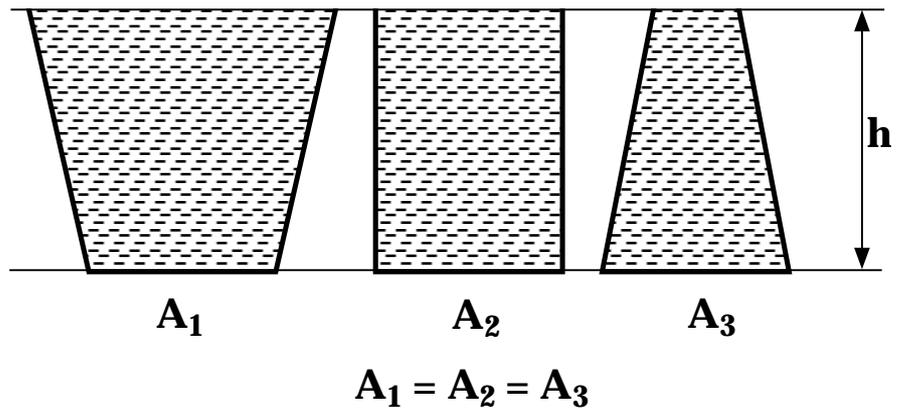
$$p_{\text{tot}} = p_0 + p_s$$

Gesamtdruck am Boden der Flüssigkeitssäule

- hydrostatisches Paradoxon

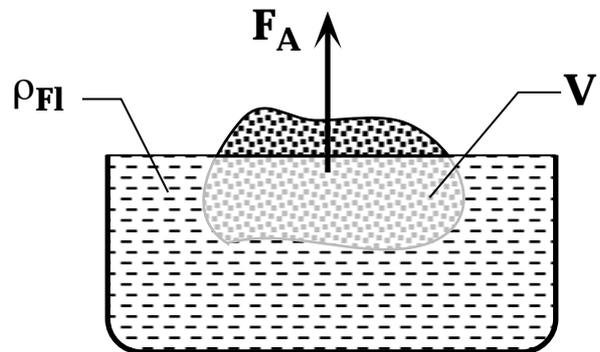
Die drei Gefäße besitzen dieselbe Bodenfläche: $A_1 = A_2 = A_3$

Die Kraft, mit der die Flüssigkeit auf den Boden drückt, ist in allen drei Gefäßen gleich gross.



- Auftrieb

Durch das Eintauchvolumen V eines Körpers in eine Flüssigkeit erfährt dieser eine Auftriebskraft F_A

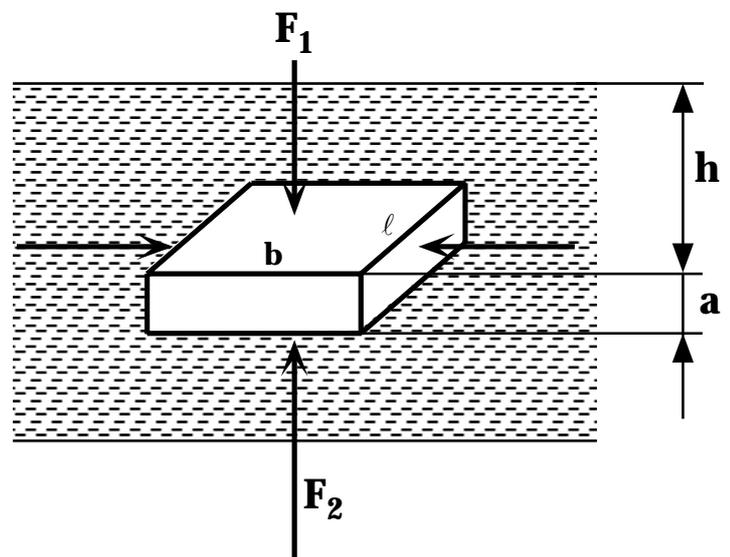


$$F_A = \rho_{Fl} g V$$

Begründung:

Wir betrachten einen eingetauchten Quader. Die Kräfte durch den Schweredruck auf die Seitenflächen kompensieren sich. Die Differenz der Kräfte auf die Grund- und Deckfläche ($|\vec{F}_2| - |\vec{F}_1|$) ist verantwortlich für den Auftrieb.

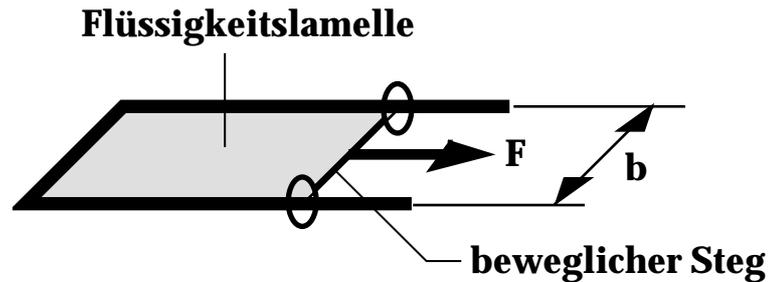
$$\begin{aligned} F_A &= F_2 - F_1 \\ &= \ell b \rho_{Fl} g (h + a) - \ell b \rho_{Fl} g h \\ &= \ell b \rho_{Fl} g a = \rho_{Fl} g V \end{aligned}$$



7.2 Oberflächenspannung

Makroskopische Phänomene

Die Flüssigkeitslamelle will sich als Folge der Oberflächenspannung zusammenziehen. Die von aussen angreifende Kraft F stellt das Gleichgewicht her.



Definition der Oberflächenspannung :

$$\sigma = \frac{F}{\ell}$$

Einheit: 1 N/m

Die Oberflächenspannung ist eine Materialkonstante

Mikroskopische Betrachtung

Die Kräfte auf die Atome bzw. Moleküle in einer Flüssigkeit sind an der Oberfläche und im Innern verschieden.

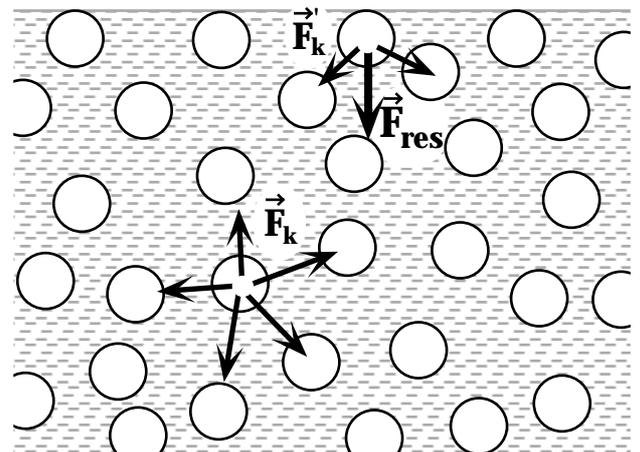
Im Innern kompensieren sich die Kräfte:

$$\Sigma \vec{F}_k = 0$$

An der Oberfläche entsteht eine resultierende Kraft, die nach innen gerichtet ist:

$$\Sigma \vec{F}'_k = \vec{F}_{res}$$

d.h. um ein Molekül an die Oberfläche zu befördern, muss gegen die Kraft \vec{F} eine Arbeit geleistet werden. Diese Arbeit erhöht die Oberflächenenergie der Flüssigkeit. Makroskopisch wird die Zunahme der Oberflächenenergie in einer Kraft \vec{F} parallel zur Flüssigkeitsoberfläche sichtbar.

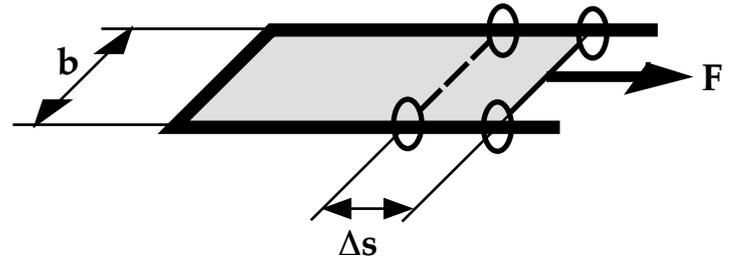


Oberflächenenergie

Falls wir in obigem Experiment die Fläche der Flüssigkeitslamelle vergrößern wollen ist die Arbeit ΔW notwendig

$$\begin{aligned}\Delta W &= F \Delta s \\ &= 2 b \Delta s \sigma\end{aligned}$$

$$\sigma = \frac{\Delta W}{2 b \Delta s}$$



Auf die Oberflächenzunahme ΔA bezogen:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

Die Oberflächenspannung kann auch als Energie pro Oberfläche interpretiert werden

Einheit: 1 J/m^2

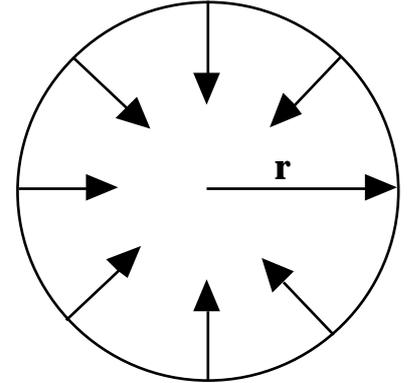
Tabelle von Oberflächenspannungen σ_{FL} bei 18°C für die Grenzschicht gegen Luft, in N/m

Hg	0.471	Benzol	0.029
Wasser	0.0729	Ethylether	0.017
Wasser (50°C)	0.0679	Glycerin	0.0625
Wasser (80°C)	0.0626	Olivenöl	0.033
Aethylalkohol	0.022		

7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

Flüssigkeitsoberflächen sind Minimalflächen; d.h. eine Flüssigkeitsmenge versucht die potentielle Energie minimal zu halten. Dies erklärt die Kugelform eines frei fallenden Wassertropfens.

Die Oberflächenspannung steht im Gleichgewicht mit dem Druck p im Tropfen.



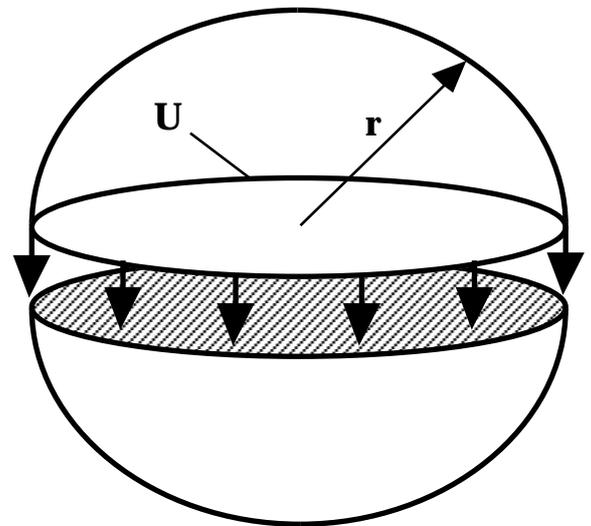
resultierende Kraft auf einen Umfang U durch Oberflächenspannung

Gegenkraft durch Druck im Tropfen

$$2 \pi r \sigma = \pi r^2 p$$

Der Druck im Tropfen beträgt

$$p = \frac{2 \sigma}{r}$$



Beispiel 1

Quecksilbertropfen, $r = 10^{-4} \text{ m}$, $\sigma_{\text{Hg}} = 0.471 \text{ N/m}$
 (Der Druck ausserhalb des Tropfens p_0 sei vernachlässigbar)

$$p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \cdot 0.471}{10^{-4}} = 9.42 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\approx 10^4 \text{ Pa}$$

Beispiel 2

Tropfenzähler (Stalagmometer)

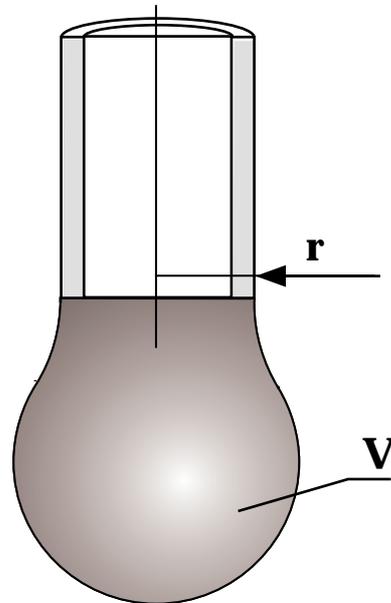
Wir berechnen das Tropfenvolumen beim Ablösen des Tropfens von der Pipette

Kräftegleichgewicht beim Abreissen :

$$2 \pi r \sigma_{\text{F,L}} = \rho g V$$

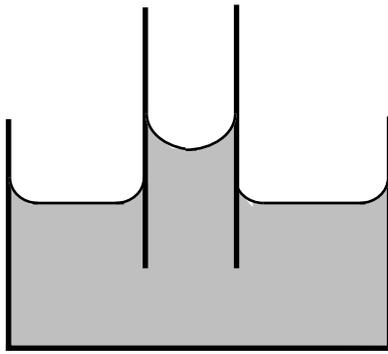
$$\Rightarrow V = \frac{2 \pi r \sigma_{\text{F,L}}}{\rho g}$$

V hängt von r , $\sigma_{\text{F,L}}$, ρ und g ab

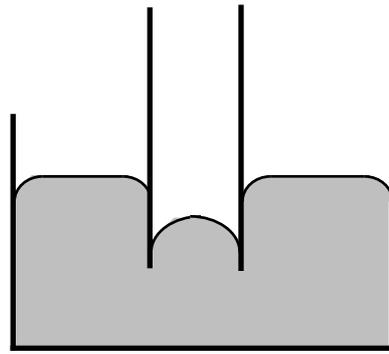


7.3 Kapillarität

Taucht man ein Röhrchen in verschiedene Flüssigkeiten ein, so beobachtet man zwei verschiedene Benetzungsverhalten:

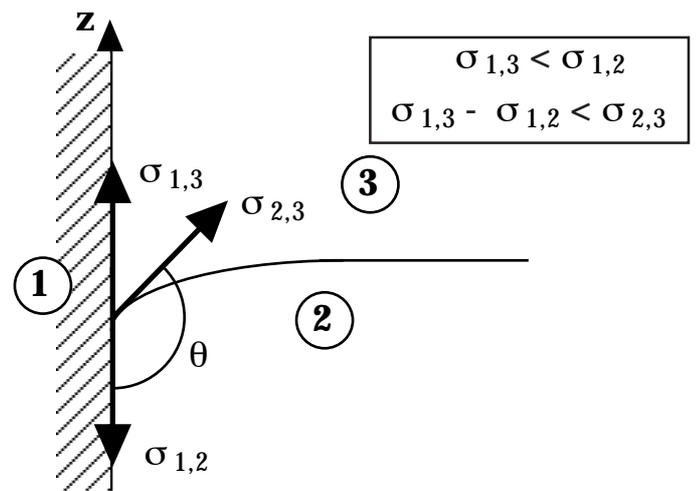
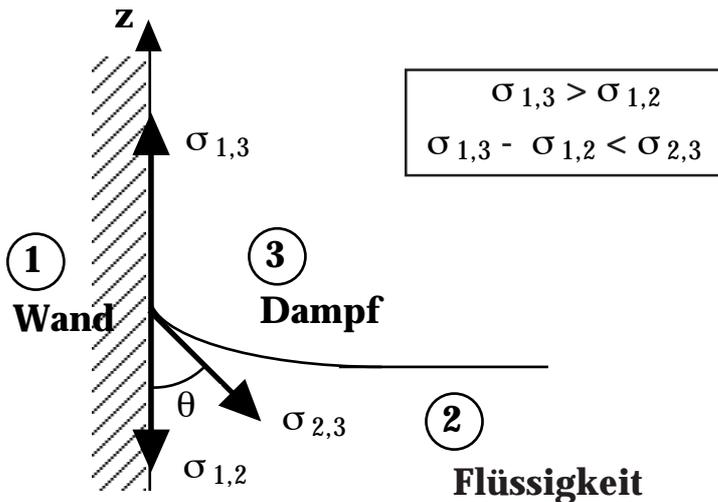


benetzend
Kapillarsension



nicht benetzend
Kapillardepresseion

Kräftegleichgewicht an der Flüssigkeitsberandung



Die Atome bzw. Moleküle an der Bewandung der Flüssigkeit müssen im Gleichgewicht sein. In z-Richtung wirken pro Länge die Kräfte:

$$\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2} - \sigma_{2,3} \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}}{\sigma_{2,3}}$$

Kapillaritätsgesetz

Berechnung der Steighöhe in einer Kapillare

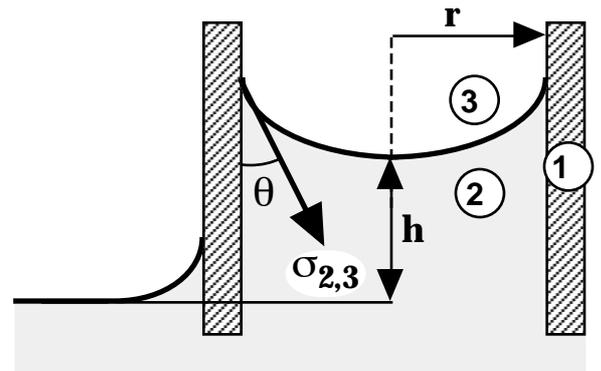
Kraft der Wand auf die Flüssigkeit F_W

$$\begin{aligned} F_W &= 2 \pi r (\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}) \\ &= 2 \pi r \sigma_{2,3} \cos \theta \end{aligned}$$

muss im Gleichgewicht mit dem Gewicht F_G der Flüssigkeitssäule sein:

$$F_G = \pi r^2 h \rho g = 2 \pi r \sigma_{2,3} \cos \theta = F_W$$

$$h = \frac{2 \sigma_{2,3} \cos \theta}{r \rho g} = \frac{2 (\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2})}{r \rho g}$$



$\sigma_{2,3}$: Oberflächenspannung der Flüssigkeit gegen Dampf.

Gilt analog auch für Kapillardepresseion ($\pi/2 < \theta < \pi$; $\cos \theta < 0$; $h < 0$).

Obige Formel für die Steighöhe h gilt auch bei vollständiger Benetzung

($\theta = 0$, $\cos \theta = 1$)

Obiges Resultat kann auch aus einer Energiebetrachtung erhalten werden.

Die Änderung der Energie durch Benetzung dE_{Ben} muss gleich der Änderung der potentiellen Energie dE_{Pot} der Flüssigkeitssäule sein:

$$\begin{aligned} dE_{\text{Ben}} &= dA (\sigma_{1,3} - \sigma_{1,2}) \\ &= 2 \pi r dh \sigma_{2,3} \cos \theta = \rho g dV h \\ &= \rho g r^2 \pi dh h = dE_{\text{pot}} \end{aligned}$$

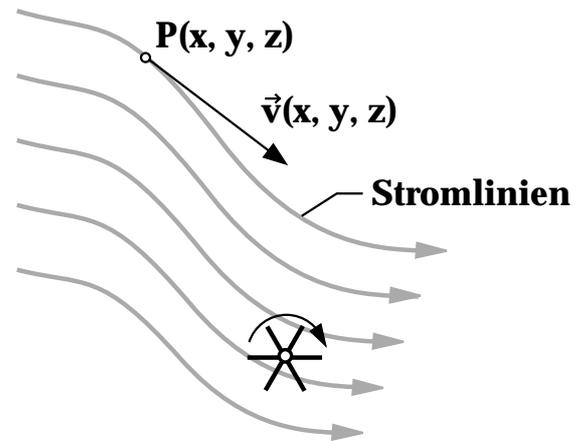
$$h = \frac{2 \sigma_{2,3} \cos \theta}{r \rho g}$$

7.4 Hydrodynamik

Beschreibung von Flüssigkeitsströmungen
Konzept der Beschreibung nach
Leonhard Euler (1707-1783)

Jedem Punkt $P(x,y,z)$ in der Strömung wird zu einem bestimmten Zeitpunkt t eine Dichte $\rho(x,y,z)$ und eine Geschwindigkeit $\vec{v}(x,y,z)$ zugeordnet.

Wir unterscheiden :



- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • stationäre und nicht stationäre Strömungen
 \vec{v} ist zeitlich konstant in jedem Punkt P der Strömung
 <i>Beispiel :</i>
 langsam fließender Strom | <ul style="list-style-type: none"> • inkompressible und kompressible Medien
 $\rho = \text{konstant}$
 <i>Beispiel :</i>
 Flüssigkeit (annähernd) |
| <ul style="list-style-type: none"> • nicht viskose Medien und viskose Medien
 ohne innere Reibung | <ul style="list-style-type: none"> • nicht stationäre Strömungen
 \vec{v} ist zeitabhängig (turbulente Strömungen)
 Wasserfall |
| <ul style="list-style-type: none"> • wirbelfreie und nicht wirbelfreie Strömungen
 <i>Beispiel :</i>
 ein frei drehbares Flügelrad in der Strömung ist in Ruhe | <ul style="list-style-type: none"> • kompressible Medien
 $\rho \neq \text{konstant}$
 Gas |
| | <ul style="list-style-type: none"> • viskose Medien
 mit innerer Reibung |
| | <ul style="list-style-type: none"> • Flügelrad rotiert |

7.4.1 Kontinuitätsgleichung

Massenfluss Δm_1 durch A_1 in der Zeit Δt :

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

muss gleich sein dem Massenfluss

$$\Delta m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

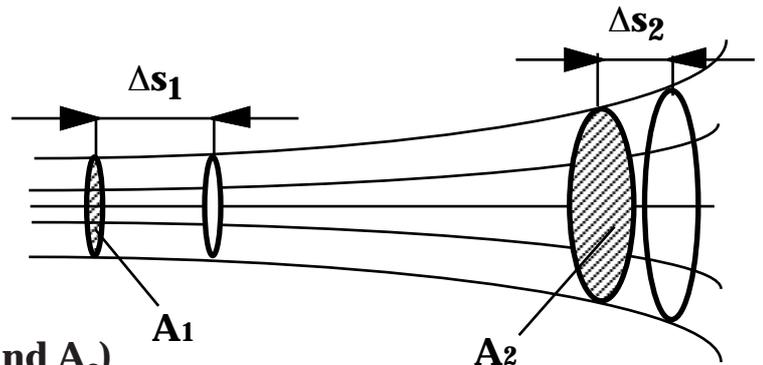
(keine 'Quellen' und 'Senken' zwischen A_1 und A_2)

$$\Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

oder

$$\rho A v = \text{konstant}$$

Kontinuitätsgleichung



Falls das Medium inkompressibel ist ($\rho = \text{konstant}$):

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

oder

$$A v = \text{konstant}$$

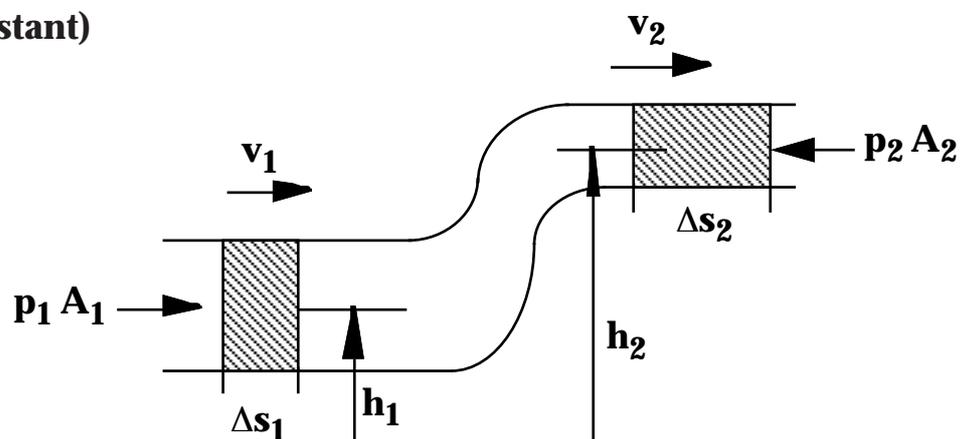
Kontinuitätsgleichung für inkompressible Medien

7.4.2 Gleichung von Bernoulli

Anwendung des Energiesatzes auf die Mechanik der Flüssigkeiten

Voraussetzung: ideale Flüssigkeit, d.h.

- inkompressibel ($\rho = \text{konstant}$)
- nicht viskos



7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

am System verrichtete Arbeit: $p_1 A_1 \Delta s_1$

vom System verrichtete Arbeit: $- p_2 A_2 \Delta s_2$

durch Gravitation vom System
verrichtete Arbeit: $- \Delta m g (h_2 - h_1)$

$$W = p_1 A_1 \Delta s_1 - p_2 A_2 \Delta s_2 - \Delta m g (h_2 - h_1)$$

oder da $A_1 \Delta s = A_2 \Delta s = \text{konstant} = \Delta V$

$$= \Delta V (p_1 - p_2) - \Delta m g (h_2 - h_1)$$

Änderung der kinetischen Energie: $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2)$

nach dem Energiesatz muss $W = \Delta E_{\text{kin}}$ sein und somit

$$\Delta V (p_1 - p_2) - \Delta m g (h_2 - h_1) = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) \quad | :\Delta V$$

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

oder

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstant}$$

Bernoulligleichung
(Energiesatz für ideale Flüssigkeiten)
Daniel Bernoulli (1700-1782)

$p + \rho g h$: 'statischer Druck',
(ist auch vorhanden wenn $v = 0$)

$\frac{1}{2} \rho v^2$: 'dynamischer Druck'

Anwendungsbeispiele**1. Venturi-Rohr zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit**

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

$$\Leftrightarrow v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

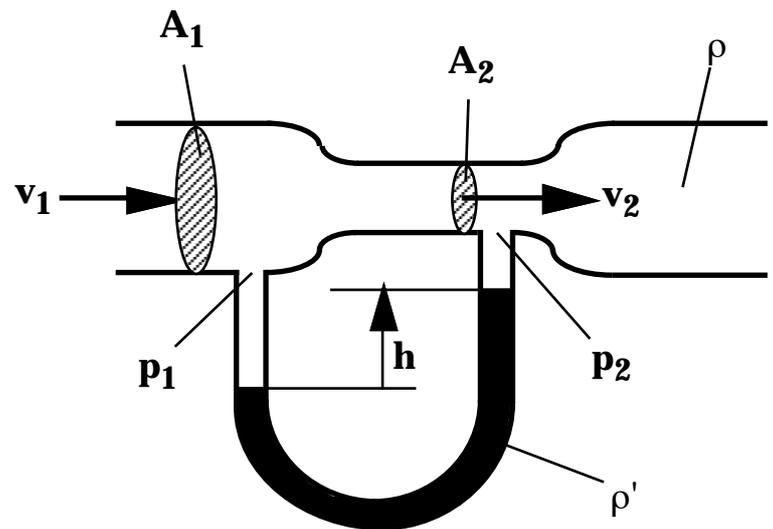
$$\text{Bernoulli: } p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$\Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}$$

$$p_1 - p_2 = \rho' g h$$

$$\Rightarrow v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2 \rho' g h}{\rho (A_1^2 - A_2^2)}}$$



7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

2. Pitot-Rohr (oder Prandtl'sches Staudruckrohr)

Messung der Strömungsgeschwindigkeit eines Gases

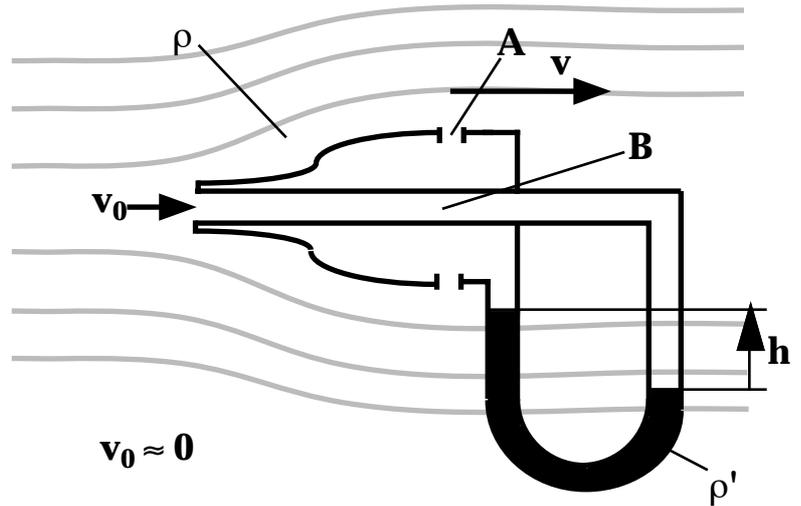
Bernoulligleichung für Punkt A und B

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_B$$

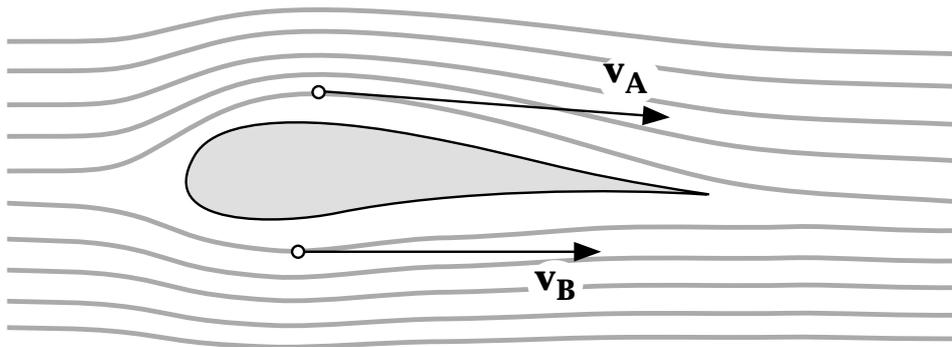
$$p_B - p_A = \rho' g h$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 = \rho' g h$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2 \rho' g h}{\rho}}$$



3. Flugzeug-Flügelprofil



Bernoulligleichung für Punkt A und B

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

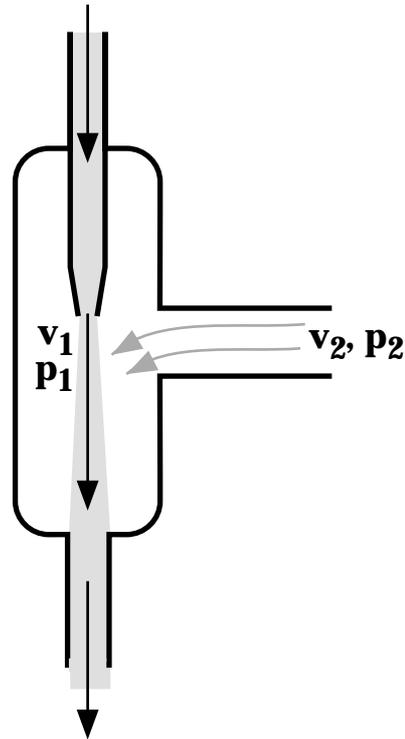
$$\Leftrightarrow p_B - p_A = \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2)$$

Es resultiert eine (dynamische) Auftriebskraft

4. Wasserstrahlpumpe

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$$

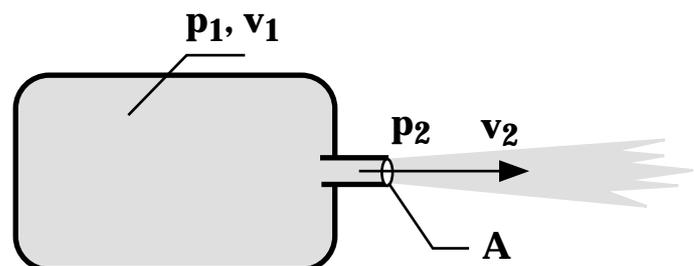


5. Gasaustritt aus kleiner Oeffnung

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$\Leftrightarrow v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + \cancel{v_1^2}$$

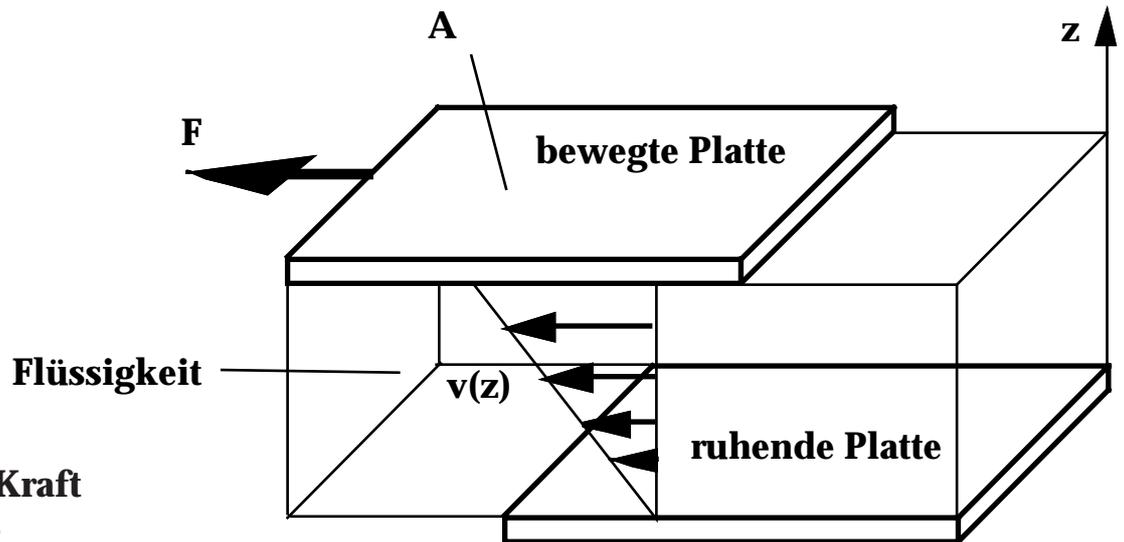
$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$



7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

7.4.3 Viskose Flüssigkeiten und innere Reibung

Wegen der Wechselwirkung zwischen den Atomen bzw. Molekülen (Kohäsion) besitzt jede reale Flüssigkeit eine innere Reibung, die mit der Grösse Viskosität η beschrieben wird.



- F** : angreifende Kraft
A : Plattenfläche
dv/dz : Geschwindigkeitsgradient
 η : dynamische Viskosität

Definition der dynamischen Viskosität η :

$$\text{im stationären Fall (v = konst.) : } F = \eta A \frac{dv}{dz}$$

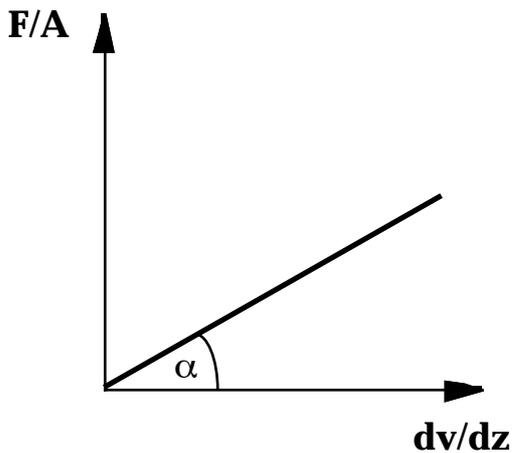
Einheit: $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{s} = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ (SI-Einheit)

Definition: $1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 10 \text{ Poise}$ nach Jean-Louis Poiseuille (1799-1869)

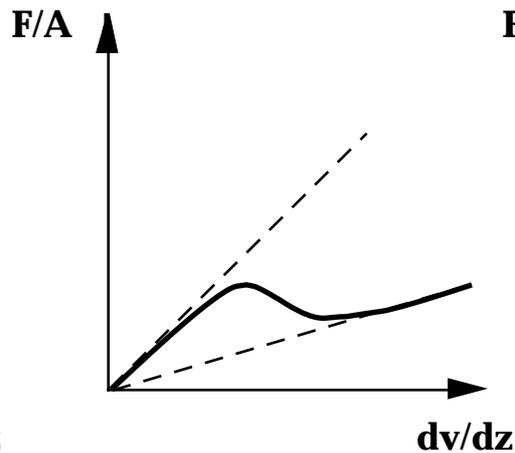
Dynamische Viskosität η [Pa·s] einiger Stoffe :

Wasser (0°C)	0.00175	Schwefelsäure	0.00254
Wasser (30°C)	0.0008	Aceton	0.000326
Wasser (100°C)	0.00028	Glycerin	1.528
Ethylalkohol	0.000248	Olivenöl	0.084
Quecksilber	0.00155		

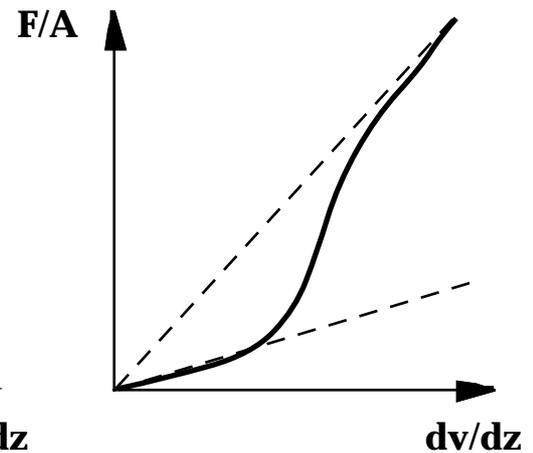
- Die Viskosität von Flüssigkeiten ist stark temperaturabhängig
Beispiel : Wasser
- Eine Flüssigkeit heisst Newtonsche Flüssigkeit falls die Viskosität unabhängig vom Geschwindigkeitsgradienten dv/dz ist.



Newtonsche Flüssigkeit
 $\text{tg}\alpha = \eta$



thixotrope
Flüssigkeiten
(z.B. makromolekulare
Lösungen, die nach dem
Schütteln dünnflüssig
werden)



Dilatanz von
Flüssigkeiten

- bei einigen Flüssigkeiten ist die Viskosität zudem von der Schubspannung $\tau = \frac{F}{A}$ abhängig
Beispiel : Blut

7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

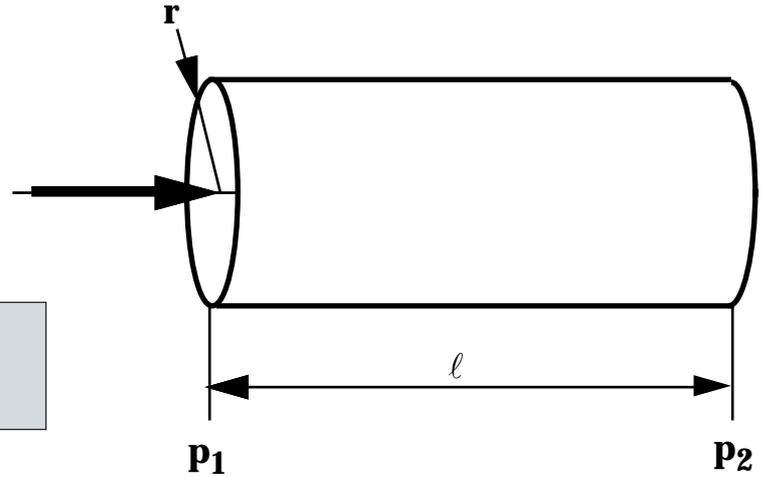
Strömungswiderstand eines Rohres

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

$$I_V: \text{Volumenfluss} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right)$$

Definition:

$$\text{Strömungswiderstand} \quad R = \frac{\Delta p}{I_V}$$



Für ein Rohr gilt nach Hagen-Poiseuille

$$R = \frac{8 \eta \ell}{\pi r^4}$$

dieses Gesetz kann wie folgt hergeleitet werden:

$$\text{Reibungskraft } F_R: \frac{F_r}{2 \pi r \ell} = \eta \frac{dv}{dr}$$

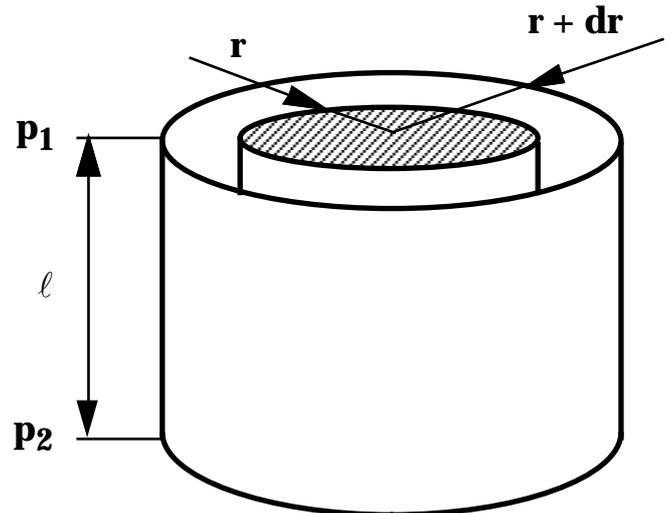
$$\text{Kraft durch Druckdifferenz } F_p:$$

$$\frac{F_p}{\pi r^2} = p_1 - p_2 = \Delta p$$

$$F_r + F_p = 0$$

$$2 \pi r \ell \eta \frac{dv}{dr} = -\pi r^2 \Delta p$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2 \eta \ell} r$$



$$\int_0^r dv = -\frac{\Delta p}{2 \eta \ell} \int_0^r r dr$$

$$v(r) - v(0) = -\frac{\Delta p}{4 \eta \ell} r^2$$

die Geschwindigkeit an der Rohrwand muss null sein:

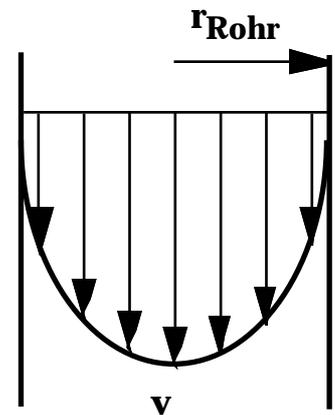
$$v(r_{\text{Rohr}}) = -\frac{\Delta p}{4 \eta \ell} r_{\text{Rohr}}^2 + v(0) = 0$$

$$v(0) = \frac{\Delta p}{4 \eta \ell} r_{\text{Rohr}}^2$$

der Volumenfluss:

$$\begin{aligned} I_V &= \int_0^{r_{\text{Rohr}}} v(r) dA \\ &= \int_0^{r_{\text{Rohr}}} \left(v(0) - \frac{\Delta p}{4 \eta \ell} r^2 \right) 2 \pi r dr \\ &= \frac{2 \pi r_{\text{Rohr}}^2}{2} v(0) - \frac{2 \Delta p \pi}{4 \eta \ell} \frac{r_{\text{Rohr}}^4}{4} \\ &= \frac{\pi r_{\text{Rohr}}^4 \Delta p}{4 \eta \ell} - \frac{\pi r_{\text{Rohr}}^4 \Delta p}{8 \eta \ell} \end{aligned}$$

$$I_V = \frac{\pi}{8} \frac{r_{\text{Rohr}}^4}{\eta \ell} \Delta p = \frac{1}{8} \frac{\Delta p}{R}$$



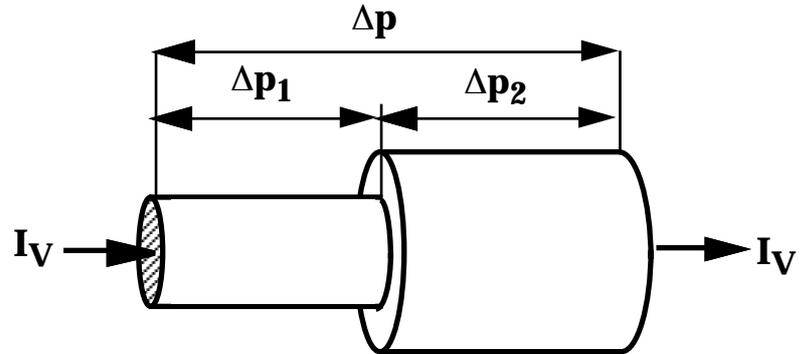
7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

Rohrsysteme

- **Serienschaltung**
Gesamtwiderstand: R

$$R = \frac{\Delta p}{I_V} = \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{I_V}$$

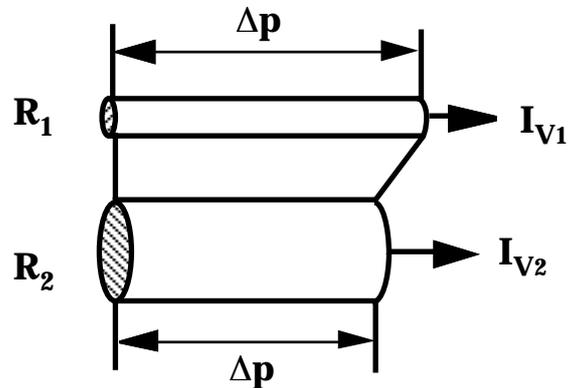
$$= \frac{\Delta p_1}{I_V} + \frac{\Delta p_2}{I_V} = \mathbf{R_1 + R_2}$$



- **Parallelschaltung**
Gesamtvolumenfluss I_V
Gesamtwiderstand R

$$I_V = \frac{\Delta p}{R} = I_{V1} + I_{V2} = \frac{\Delta p}{R_1} + \frac{\Delta p}{R_2}$$

$$\mathbf{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$



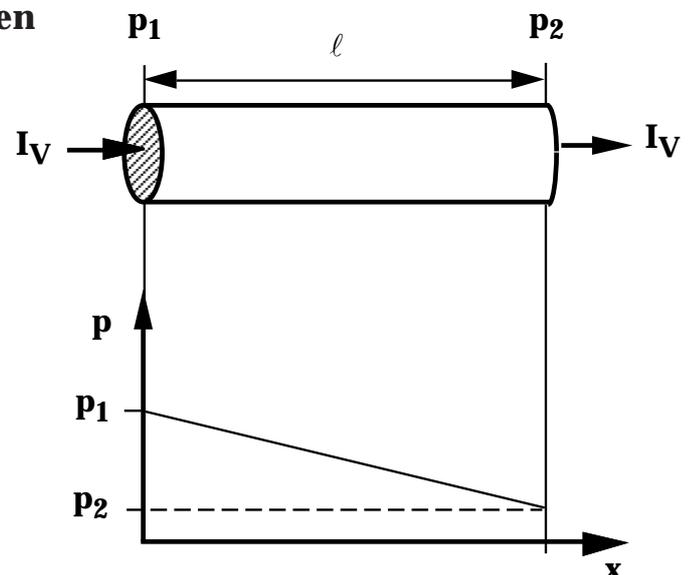
- **Druckabfall längs eines Systems von Rohren**
a) ein Rohr konstanter Dicke

$$\Delta p = R I_V$$

$$I_V = \text{konstant}$$

$$\Delta p \sim R; R \sim \ell$$

⇒ **der Druckabfall ist proportional zu ℓ**

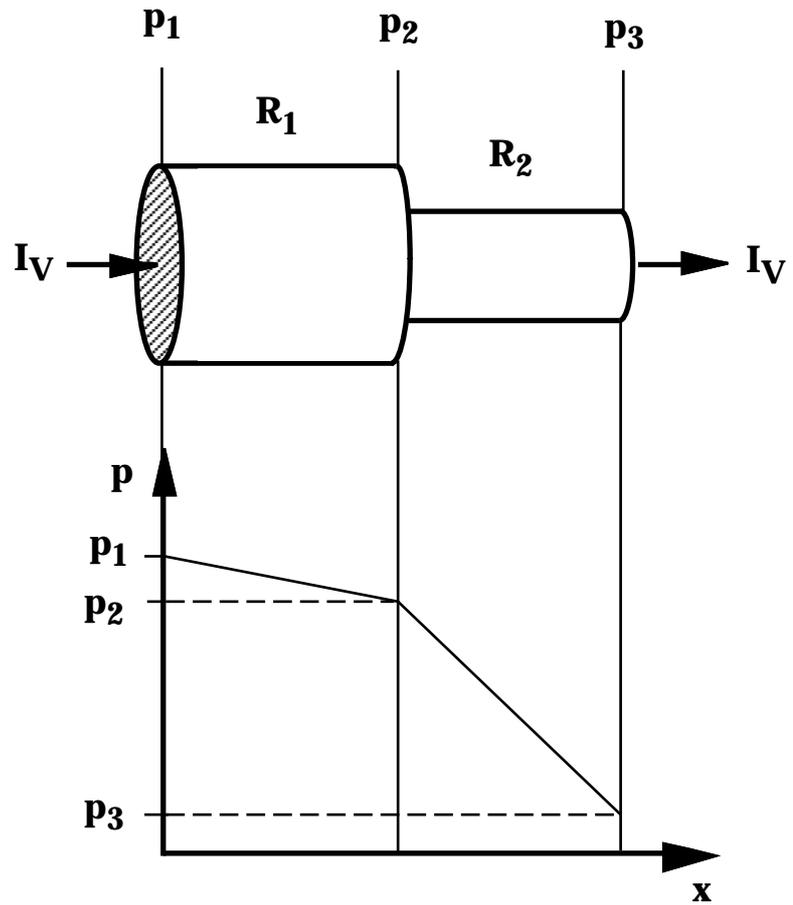


b) zwei Rohre hintereinander angeordnet

$$I_V = \frac{P_1 - P_3}{R_1 + R_2}$$

$$P_1 - P_2 = R_1 I_V$$

$$P_2 - P_3 = R_2 I_V$$



7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

Stokessche Reibung und Sedimentation

Auf einen Körper, der sich mit der Geschwindigkeit v in einer Flüssigkeit bewegt, wirkt eine Reibungskraft F_r , die bei kleinen Geschwindigkeiten proportional zu v ist.

$$\vec{F}_r = -6\pi\eta r \vec{v}$$

Stokessche Reibung (ohne Beweis)

Bei einem in einer Flüssigkeit mit der Dichte ρ_F frei fallenden Körper mit der Masse m und der Dichte ρ_K stellt sich zwischen dem Gewicht F_G , dem Auftrieb F_A und der Reibung F_r ein stationäres Gleichgewicht für die Sedimentationsgeschwindigkeit v_S ein :

$$F_G + F_A + F_r = 0$$

$$m g - \frac{m}{\rho_K} \rho_F g - 6\pi\eta r v_S = 0$$

$$v_S = m g \left(1 - \frac{\rho_F}{\rho_K}\right) \frac{1}{6\pi\eta r}$$

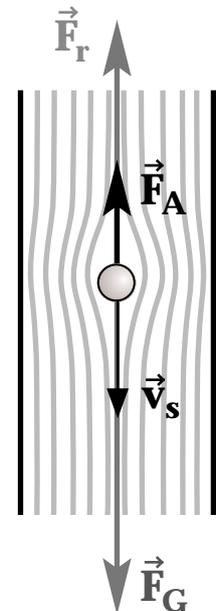
$$m = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_K$$

$$v_S = \frac{2}{9\eta} (\rho_K - \rho_F) g r^2$$

Sedimentationsgeschwindigkeit

Anwendungen der Sedimentation :

- **Bestimmung der Senkungsgeschwindigkeit der Blutkörperchen ('Blutsenkung').** Bei vielen Krankheiten ist die Senkungsgeschwindigkeit der Erythrozyten erhöht.
- **Zentrifugen**



7.4.4 Turbulente Strömungen

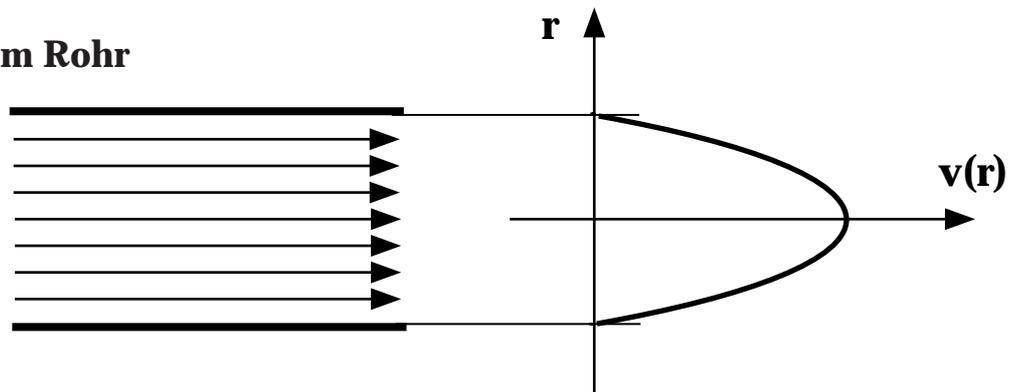
Erhöht man in einem System mit einer laminaren (= stationären) Strömung die Fließgeschwindigkeit, dann findet oberhalb eines kritischen Wertes der Uebergang zu einer turbulenten Strömung statt.

Die turbulente Strömung ist

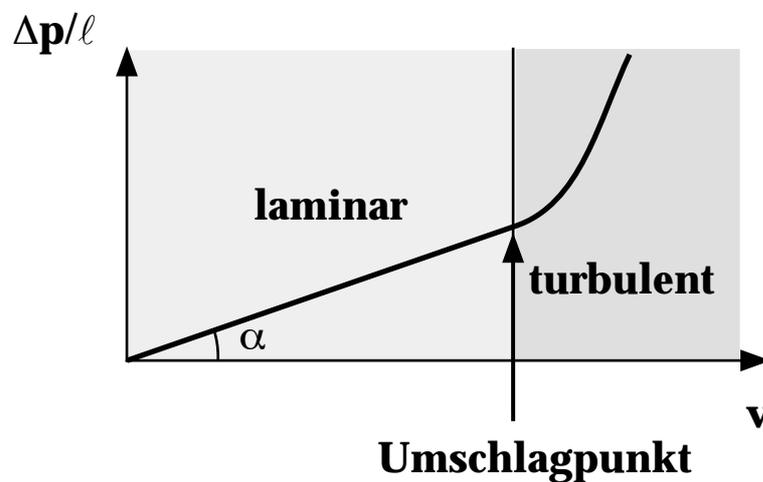
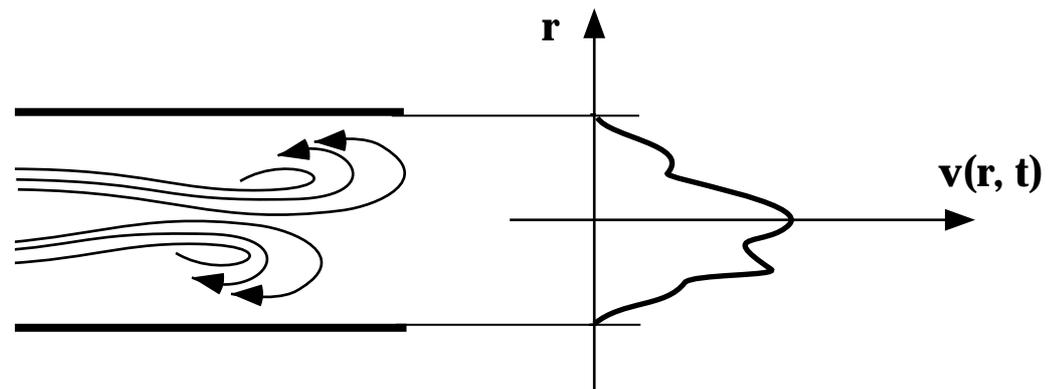
- nicht stationär, sondern zeitabhängig
- nicht wirbelfrei.

Beispiel: Strömung in einem Rohr

• laminar



• turbulent



7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

Reynoldssches Kriterium

Der Übergang laminare turbulente Strömung kann mit dem Reynoldsschen Kriterium abgeschätzt werden. Danach entsteht die turbulente Strömung falls die Reynoldssche Zahl Re einer Strömung grösser als ein kritischer Wert ($Re_{\text{krit}} \approx 1000$) wird

Reynoldssche Zahl:

$$Re = \frac{\rho \bar{v} d}{\eta}$$

(die Reynoldssche Zahl ist dimensionslos)

nach Osborne Reynolds, 1842-1912

es bedeuten:

ρ : Dichte des Mediums

η : Viskosität

\bar{v} : mittlere Strömungsgeschwindigkeit

d : charakteristische Länge

(bei einem Rohr: Durchmesser)

Beispiele :

1. Bei welcher kritischen Geschwindigkeit tritt in einer Kapillare mit $d = 1\text{mm}$ turbulente Wasserströmung auf ?

$$\eta_{\text{H}_2\text{O}} = 0.001 \text{ Pa s} ; \text{Re}_{\text{krit}} = 1000$$

$$\bar{v}_{\text{krit}} = \frac{\text{Re}_{\text{krit}} \eta}{\rho d} = \frac{10^3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{10^3 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2. Verhältnisse im Blutkreislauf

linke Herzkammer \rightarrow Aorta $\quad \bar{v}_A = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} ; d_A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Kapillargefäße (mittlerer Wert) $\quad \bar{v}_K = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}} ; d_K = 8 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$$\rho_{\text{Blut}} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ; \eta_{\text{Blut}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

Aorta :

$$\text{Re}_A = \frac{\rho \bar{v}_A d_A}{\eta_{\text{Blut}}} = \frac{10^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} = 5000$$

Kapillargefäße :

$$\text{Re}_K = \frac{\rho \bar{v}_K d_K}{\eta_{\text{Blut}}} = \frac{10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-3}} = 0.01$$

\rightarrow laminare Strömung in den Kapillaren

\rightarrow Turbulenzen in der Aorta können vorkommen

8. Schwingungen

Schwingungen sind zeitlich periodische Bewegungen. Sie lassen sich durch Funktionen, die nur von der Zeit abhängig sind, beschreiben.

Beispiele:

Pendelschwingungen, Schwingungen von Atomen in einem Festkörper (Gitterschwingungen), Schwingungen von elektrischen Ladungen in einem elektrischen Schwingkreis.

Wellen sind zeitlich und örtlich periodische Vorgänge. Für ihre mathematische Beschreibung werden Funktionen gebraucht, die von der Zeit und vom Ort abhängig sind.

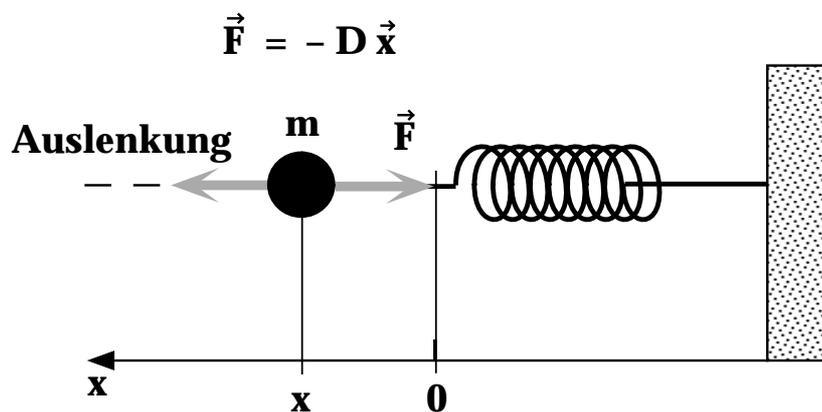
Beispiele:

Schallwellen, elektromagnetische Wellen (z.B. Licht, Wärmestrahlung, Radiowellen, Röntgenstrahlung), Materiewellen.

8.1 Harmonische Schwingungen

Wirkt auf einen Körper eine rücktreibende Kraft, die proportional zur Auslenkung ist, so führt er eine harmonische Schwingung aus.

Modell für die rücktreibende Kraft : Federkraft \vec{F}



Kräfte, die proportional zur Auslenkung sind, nennt man **elastische Kräfte**.

8. Schwingungen

Die harmonische Schwingung wird beschrieben durch

$$x(t) = a \cdot \sin \omega t$$

oder

$$x(t) = b \cdot \cos \omega t$$

oder

$$x(t) = a \cdot \sin \omega t + b \cdot \cos \omega t$$

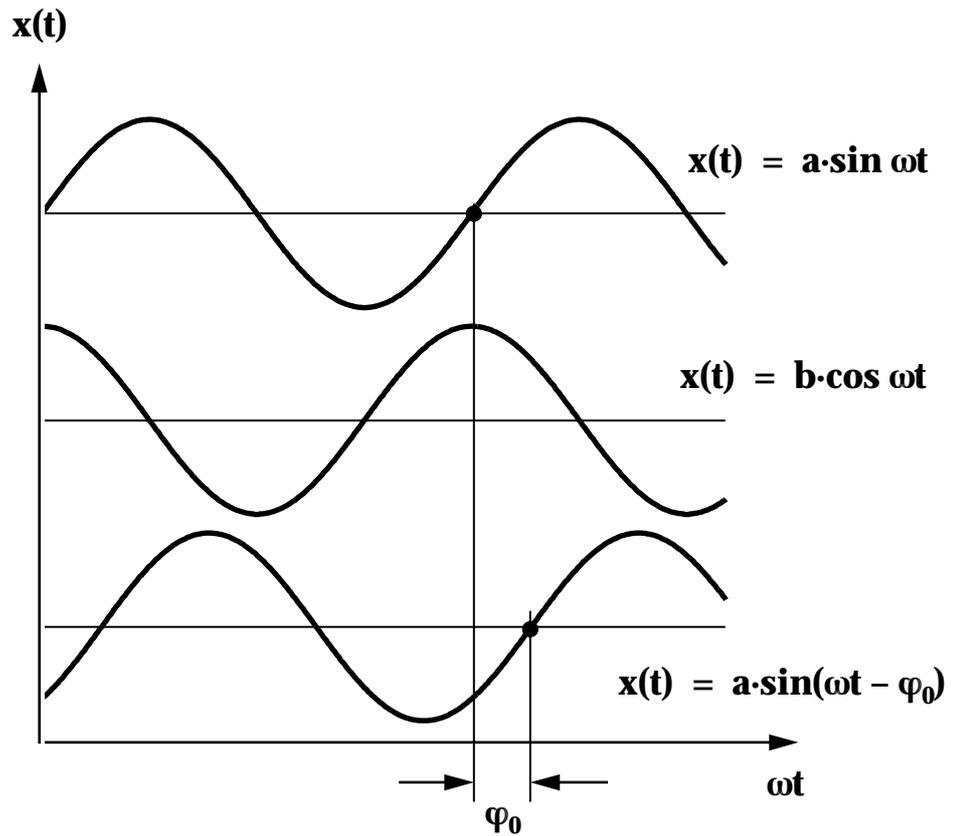
oder

$$x(t) = a \cdot \sin (\omega t - \varphi_0)$$

ferner gilt:

$$v = \frac{1}{T} \quad \text{und}$$

$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}$$



und es bedeuten:

a, b : Amplitude (Schwingungsamplitude)

ω : Kreisfrequenz der Schwingung

v : Frequenz der Schwingung

T : Periodendauer oder Schwingungsdauer

φ_0 : Phasenverschiebung

**Begründung für die Entstehung der harmonischen Schwingung beim Federpendel:
die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet für diesen Fall**

$$m \ddot{x} = -D x$$

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0 \quad \text{Differentialgleichung für das Federpendel}$$

gesucht sind nun Funktionen $x(t)$, welche die Differentialgleichung erfüllen

Lösungsansatz:

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega t - \varphi_0)$$

einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$-a \omega^2 \sin(\omega t - \varphi_0) + \frac{D}{m} a \sin(\omega t - \varphi_0) = 0$$

diese Gleichung ist für alle Zeiten t erfüllt, falls

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

somit ist

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

Die Größen a und φ_0 erhält man aus den Anfangsbedingungen der Schwingung.

Beispiel: zur Zeit $t = 0$ sei $x(0) = a_0$ und $\frac{dx}{dt} = 0$

$$\frac{dx}{dt} = a \omega \cos(\omega t - \varphi_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x(t) = a \cos \omega t \quad x(0) = a = a_0$$

somit

$$x(t) = a_0 \cos \omega t \quad \text{und} \quad v(t) = -a_0 \omega \sin \omega t$$

Energiebetrachtung

das Pendel besitzt potentielle und kinetische Energie

Der Energiesatz verlangt

$$E = E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{kin}}(t) = \text{konstant}$$

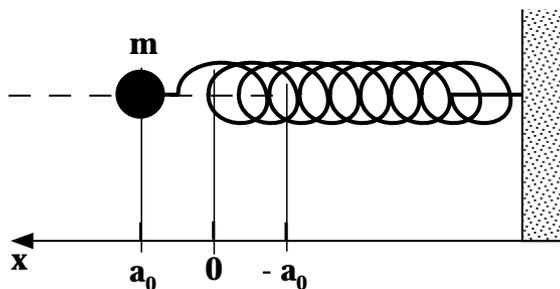
$$\frac{1}{2} D [x(t)]^2 + \frac{1}{2} m [v(t)]^2 = \text{konstant}$$

für das Federpendel gilt dann:

zur Zeit $\omega t = 0$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D a_0^2$$

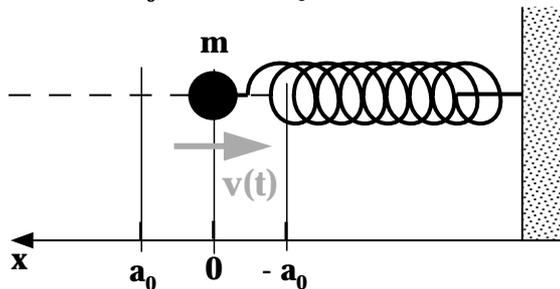
$$E_{\text{kin}} = 0$$



zur Zeit $\omega t = \pi/2$

$$E_{\text{pot}} = 0$$

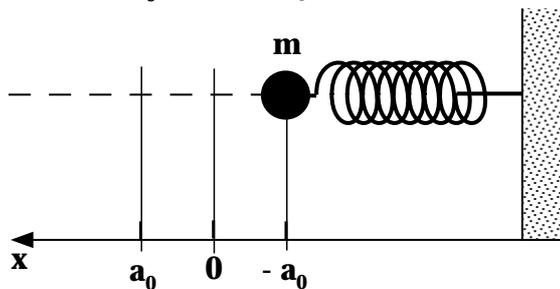
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m a_0^2 \omega^2 = \frac{1}{2} D a_0^2$$



zur Zeit $\omega t = \pi$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D a_0^2$$

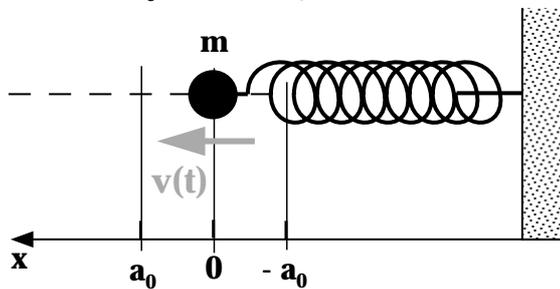
$$E_{\text{kin}} = 0$$



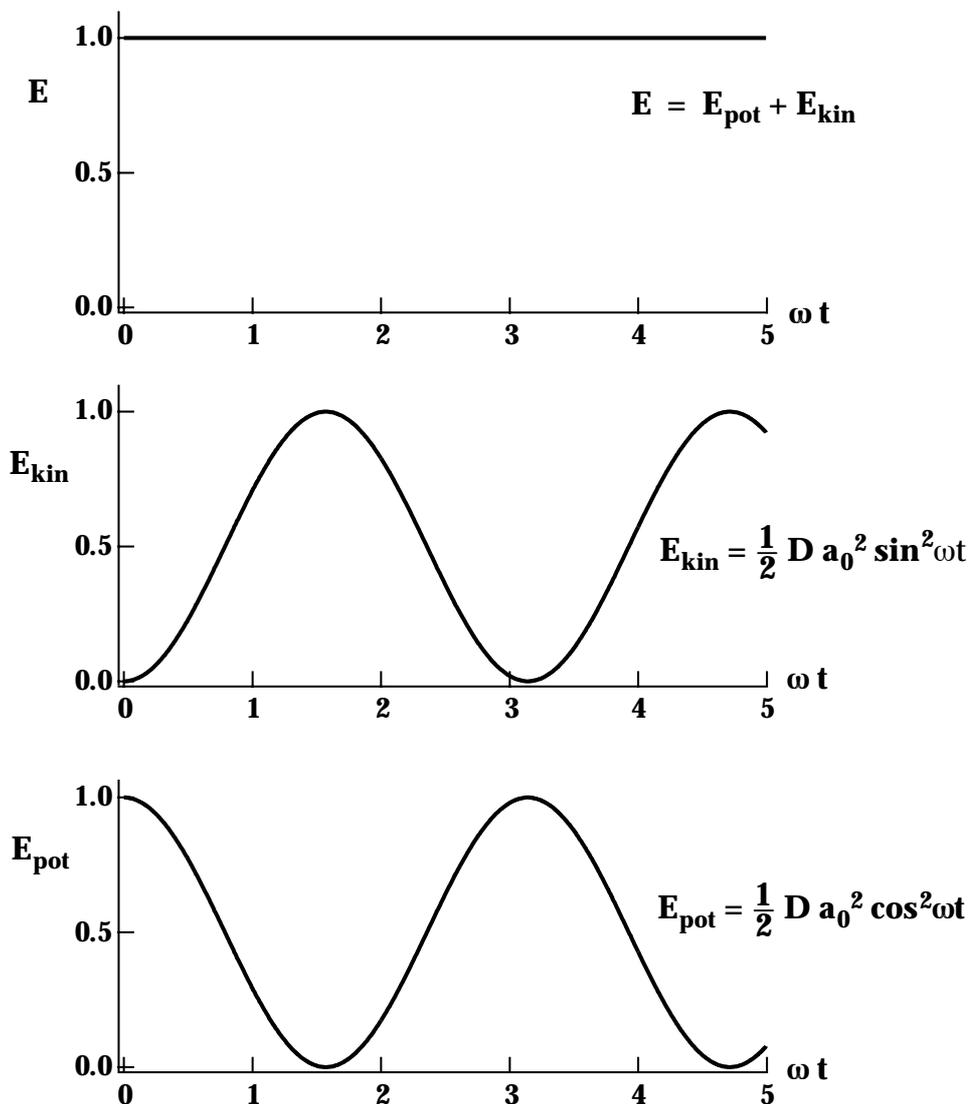
zur Zeit $\omega t = 3\pi/2$

$$E_{\text{pot}} = 0$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} D a_0^2$$



→ es findet eine ständige Umwandlung zweier Energieformen statt



Die Gesamtenergie E der Schwingung ist proportional zum Quadrat der Amplitude a_0

$$E = \frac{1}{2} D a_0^2$$

zusammengefasst:

elastische rücktreibende Kraft

$$F = - D x$$

führt auf Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

allgemeine Lösung

$$x(t) = a_0 \sin(\omega t - \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{D/m}$$

Energie

$$E = \frac{1}{2} D a_0^2$$

8. Schwingungen

Anwendung auf **mathematisches Pendel** mit kleinen Auslenkungen α

rücktreibende Kraft

$$F = -m g \sin \alpha$$

oder für kleine Winkel α

$$F = -m g \alpha$$

Bewegungsgleichung

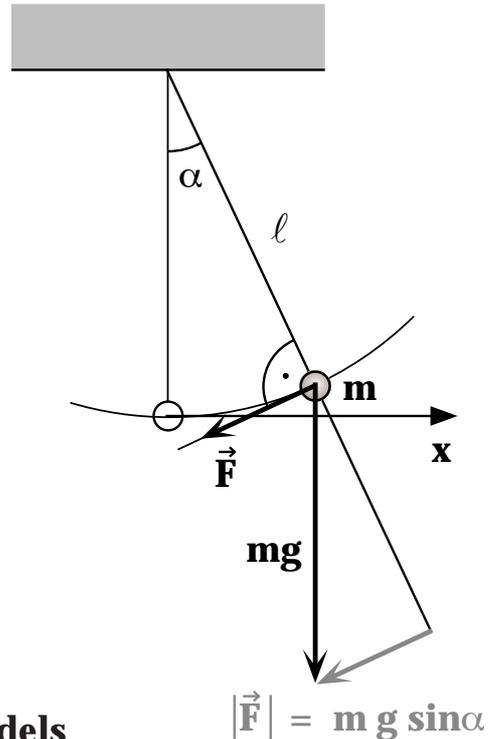
$$m \ddot{x} + m g \alpha = 0$$

oder da $\alpha \approx \frac{x}{l}$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0$$

somit ist die Eigenfrequenz des mathematischen Pendels

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



8.2 Gedämpfte Schwingungen

Reibungseffekte führen zu einer gedämpften Schwingung. Für die mathematische Behandlung führen wir eine Reibkraft ein, die proportional zur Geschwindigkeit ist:

$$F_r \sim v(t) = \dot{x}(t) \quad F_r = -2\delta m \dot{x}(t)$$

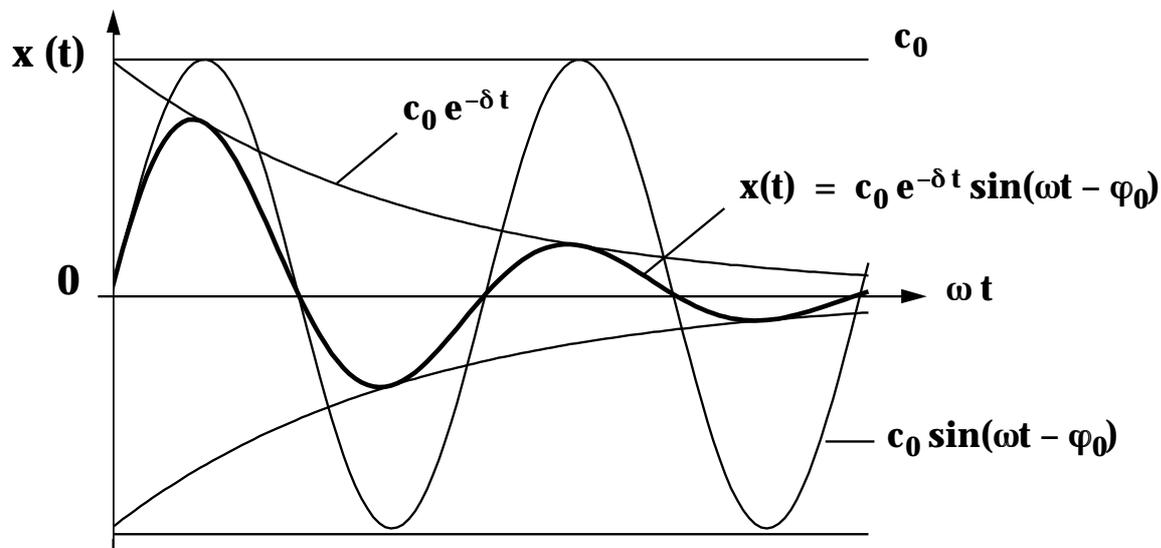
Die Grösse δ beschreibt die Dämpfung des Systems.

Die Bewegungsgleichung lautet dann :

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Lösung dieser Differentialgleichung :

$$x(t) = c_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi_0)$$



Die Amplitude nimmt exponentiell ab.

Die Lösung kann durch Einsetzen in die Differentialgleichung geprüft werden

$$\dot{x}(t) = -\delta c_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi_0) + c_0 e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t - \varphi_0)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \delta^2 c_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi_0) - \delta c_0 e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t - \varphi_0) \\ &\quad - \delta c_0 e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t - \varphi_0) - c_0 e^{-\delta t} \omega^2 \sin(\omega t - \varphi_0) \end{aligned}$$

eingesetzt in die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} &\delta^2 c_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi_0) - 2 \delta c_0 e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t - \varphi_0) - c_0 e^{-\delta t} \omega^2 \sin(\omega t - \varphi_0) \\ &- 2 \delta^2 c_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi_0) + 2 \delta c_0 e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t - \varphi_0) + c_0 e^{-\delta t} \omega_0^2 \sin(\omega t - \varphi_0) = 0 \\ &-\delta^2 - \omega^2 + \omega_0^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

ω : Kreisfrequenz des gedämpften Systems

ω_0 : Kreisfrequenz des Systems ohne Reibung

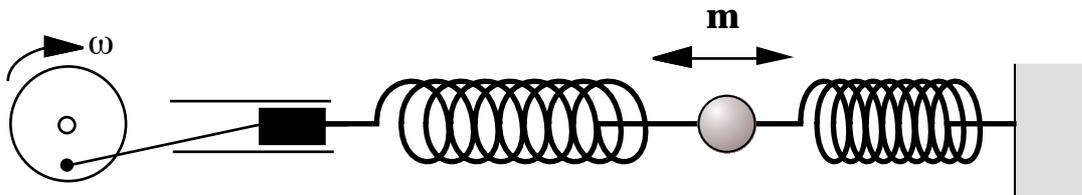
Die Kreisfrequenz des Systems nimmt mit zunehmender Dämpfung ab.

Falls $\delta = \omega_0$ ist, wird $\omega = 0$ und damit ist die Bewegung aperiodisch

→ **aperiodischer Grenzfall**, falls $\delta > \omega_0$ → **Kriechfall**.

8.3 Erzwungene Schwingungen

Wirkt auf ein schwingungsfähiges System von aussen eine periodische Kraft, z.B. $F = F_0 \cos \omega t$, so führt dieses eine **erzwungene Schwingung** aus. Nach einer Einschwingzeit schwingt das System stationär mit der Erregerfrequenz ω .



Die Bewegungsgleichung lautet nun :

$$m \ddot{x} + 2 \delta m \dot{x} + D x = F_0 \cos \omega t$$

oder

$$\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Diese Differentialgleichung wird erfüllt von der Funktion

$$x(t) = a_0 \cos(\omega t - \varphi_0)$$

Die Amplitude a_0 hängt stark von der Kreisfrequenz ω der äusseren Kraft ab.

Es gilt (ohne Beweis):

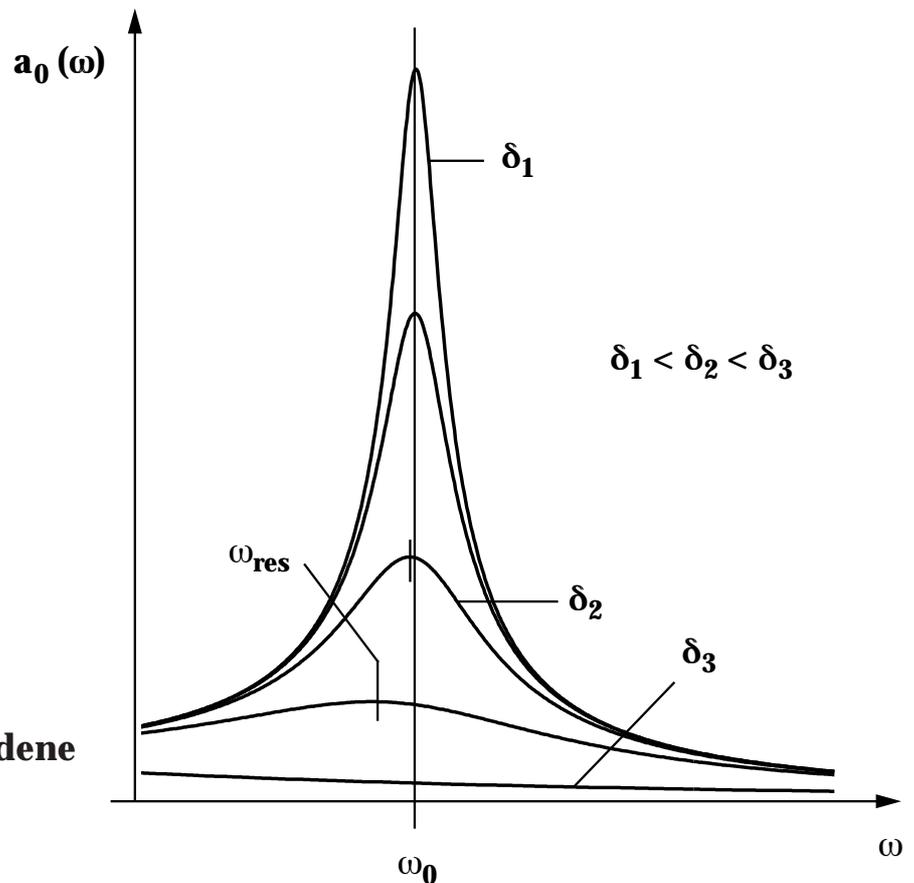
$$a_0(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta^2 \omega^2}}$$

Die Amplitude a_0 zeigt ein Maximum in der Nähe von $\omega = \omega_0$ an der Stelle ω_{Res} , der Resonanzfrequenz. Die Amplitude an der Resonanzfrequenz nimmt mit abnehmender Dämpfung zu. Ohne Dämpfung würde die Amplitude im Resonanzfall gegen unendlich streben (Resonanzkatastrophe). Wie im Fall der freien gedämpften Schwingung ist die Resonanzfrequenz gegeben durch

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

(ω_0 : Eigenfrequenz des ungedämpften Systems).

Resonanzkurven für verschiedene Dämpfungen δ



Die Phasenverschiebung φ_0 hat nun die Bedeutung der Phasendifferenz zwischen äusserer periodischer Kraft und der Schwingung $x(t)$. Sie ist gegeben durch

$$\tan \varphi_0(\omega) = \frac{2 \delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

8. Schwingungen

das bedeutet, dass für

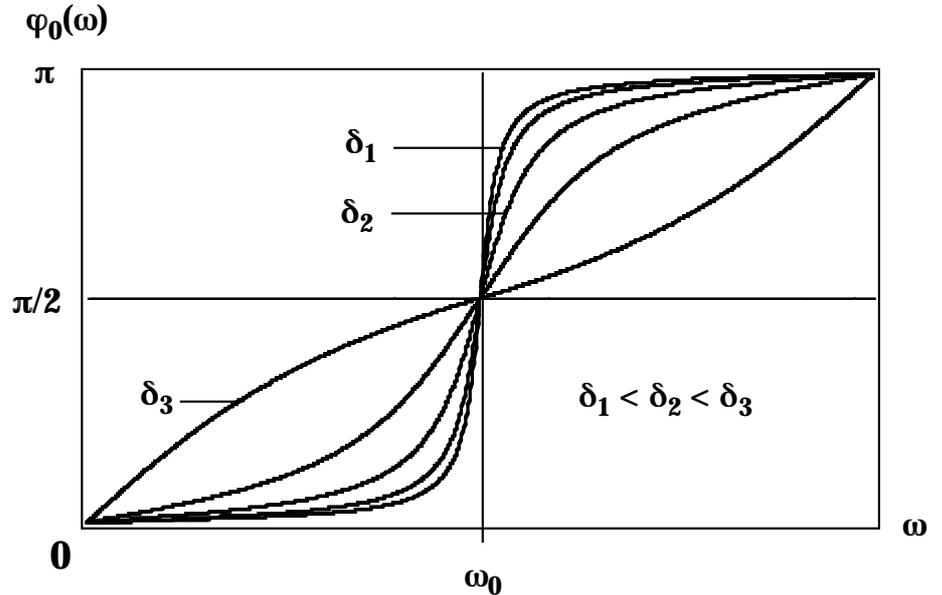
$$\omega \ll \omega_0 \rightarrow \varphi \approx 0$$

$$\omega \gg \omega_0 \rightarrow \varphi \approx \pi$$

$$\omega = \omega_0 \rightarrow \varphi = \pi/2$$

Anregung und Schwingung sind phasengleich

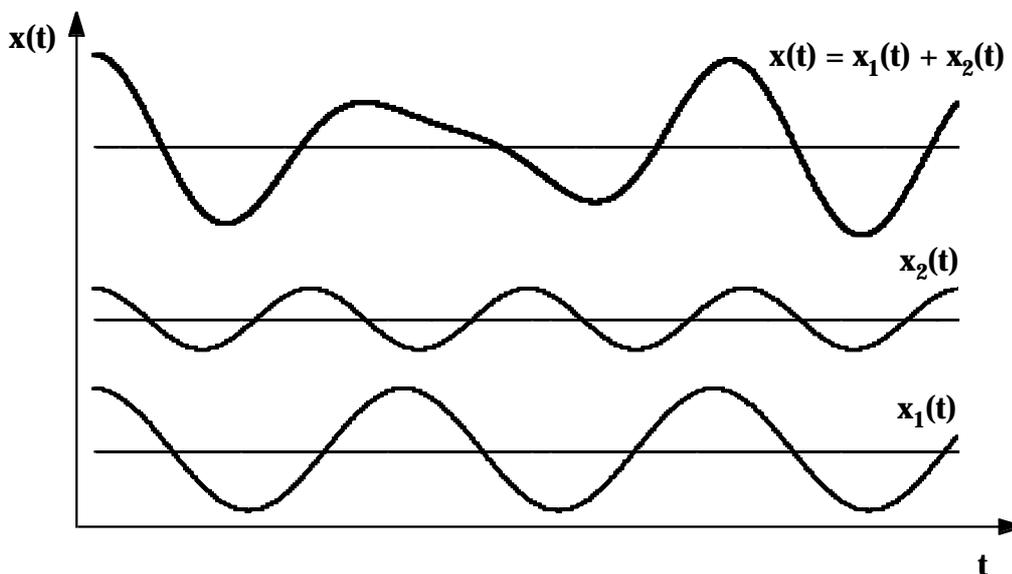
Anregung und Schwingung im Gegentakt



8.4 Überlagerung von Schwingungen

Durch die Überlagerung (oder Superposition) von harmonischen Schwingungen entsteht wiederum eine Schwingung, die jedoch i. A. **nicht harmonisch** ist.

$$x_1(t) = a_1 \cos \omega_1 t, \quad x_2(t) = a_2 \cos (\omega_2 t - \varphi_0)$$

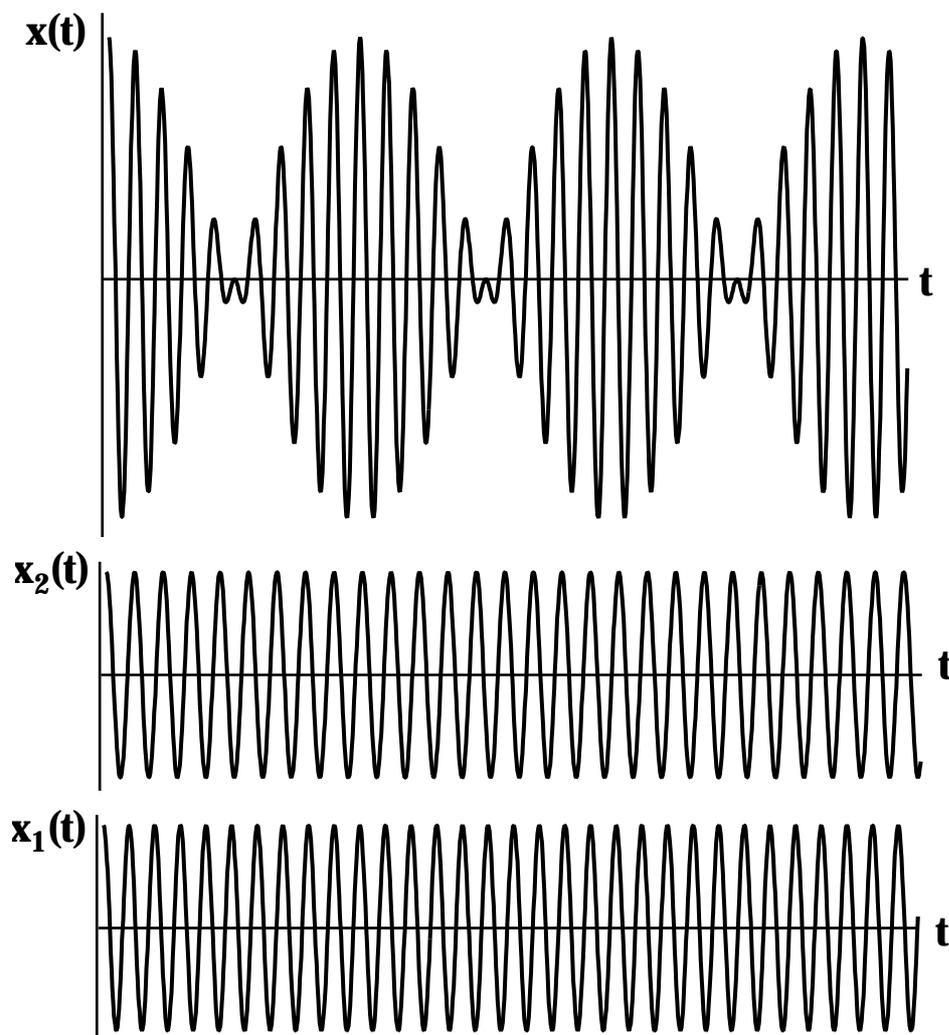


Schwebung

Eine Schwebung entsteht durch die Ueberlagerung von zwei harmonischen Schwingungen mit fast gleicher Frequenz.

$$x_1(t) = a_0 \cos \omega_1 t, \quad x_2(t) = a_0 \cos \omega_2 t$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 a_0 \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)}_{\text{hohe Frequenz}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)}_{\text{tiefe Frequenz}}$$



Fourier-Analyse

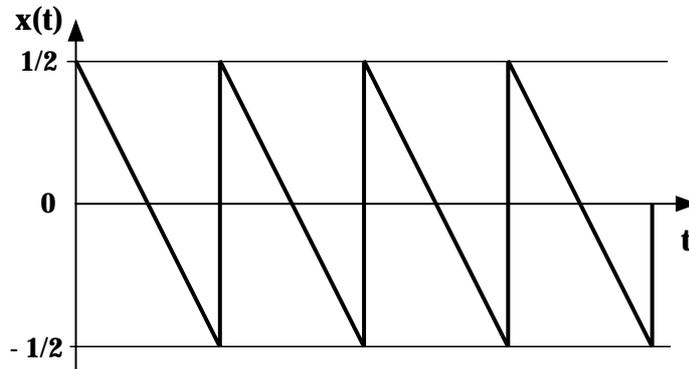
Wie wir oben gezeigt haben, ergibt die Überlagerung von harmonischen Schwingungen i.A. eine nicht harmonische Schwingung.

Nach Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) lässt sich jede periodische Schwingung mit der Periodendauer T durch eine Summe von harmonischen Schwingungen darstellen:

$$x(t) = x(t + T) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m \omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m \omega t) \quad \omega = 2\pi/T$$

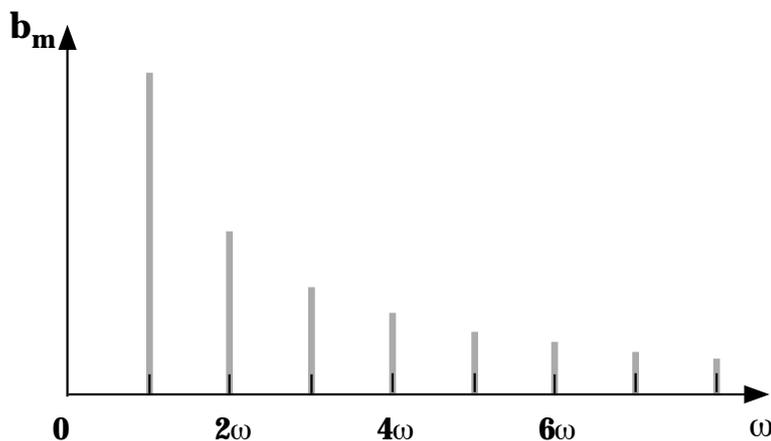
Beispiel:

Fourier-Analyse oder Fourier-Synthese einer Sägezahnswingung



$$x(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{1}{2\pi} \sin(2\omega t) + \frac{1}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{1}{4\pi} \sin(4\omega t) + \dots$$

Die Sägezahnswingung lässt sich auch durch das Frequenzspektrum beschreiben



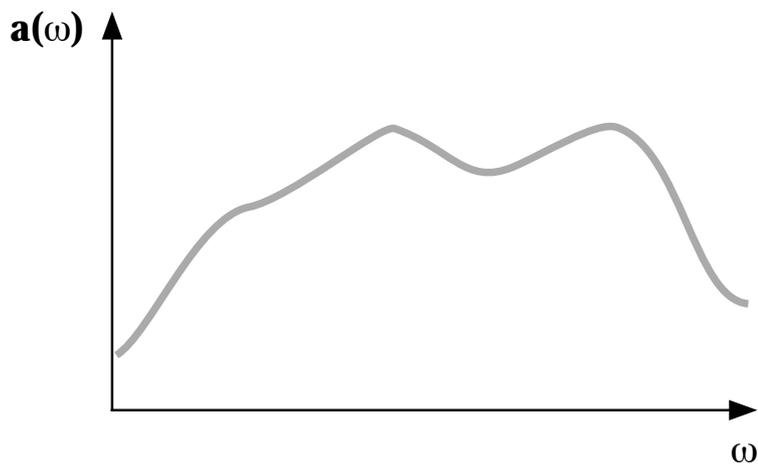
($a_m = 0$ für alle $m = 0, 1, 2, \dots$)

Periodische Vorgänge besitzen ein **diskretes** Frequenzspektrum (d. h. es besteht aus einzelnen Frequenzen).

Nicht periodische Vorgänge dagegen besitzen ein **kontinuierliches** Frequenzspektrum.

Beispiel:

Frequenzspektrum eines Knalls



8.5. Gekoppelte Oszillatoren

Zwei gekoppelte Federpendel

Bewegungsgleichungen :

$$m \ddot{x}_1 = - D x_1 - D^* (x_1 - x_2)$$

$$m \ddot{x}_2 = - D x_2 - D^* (x_2 - x_1)$$

(gekoppelte Differentialgleichungen)

Kreisfrequenz der ungekoppelten

Pendel:

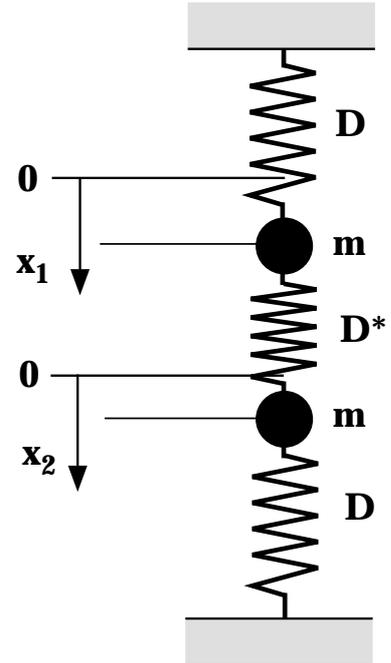
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

ω_0 ist auch die Kreisfrequenz der Schwingung der beiden Massen im Gleichtakt ($x_1 - x_2 = 0$).

Die Grösse D^*/m wird als Kopplungsparameter bezeichnet.

Wir definieren die Kopplungskreisfrequenz:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{D^*}{m}}$$



in Bewegungsgleichung eingesetzt :

$$\ddot{x}_1 = -(\omega_0^2 + \omega_k^2) x_1 + \omega_k^2 x_2$$

$$\ddot{x}_2 = +\omega_k^2 x_1 - (\omega_0^2 + \omega_k^2) x_2$$

wir führen Relativkoordinaten ein

$$q_1 = x_1 + x_2, \quad q_2 = x_1 - x_2$$

$$\ddot{q}_1 = -\omega_0^2 q_1 = -\Omega_1^2 q_1$$

$$\ddot{q}_2 = -(\omega_0^2 + 2\omega_k^2) q_2 = -\Omega_2^2 q_2$$

Ω_1, Ω_2 sind die **Eigenfrequenzen der Fundamentalschwingungen** des Systems

$$\Omega_1 = \omega_0 = \sqrt{D/m}$$

→ **Schwingung der Massen im Gleichtakt**

$$x_1 = x_{1,0} \cos \Omega_1 t, \quad x_2 = x_{2,0} \cos \Omega_1 t$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_k^2}$$

($\omega_k = \sqrt{\frac{D^*}{m}}$) → **Schwingung der Massen im Gegentakt**

$$x_1 = x_{1,0} \cos \Omega_2 t, \quad x_2 = -x_{2,0} \cos \Omega_2 t$$

Das vorliegende System besitzt zwei Eigenfrequenzen, weil sein Schwingungszustand durch zwei zeitabhängige Koordinaten beschrieben wird.

Ein System von N gekoppelten Oszillatoren besitzt N Eigenfrequenzen für jede räumliche Dimension d, in die eine Auslenkung möglich ist.

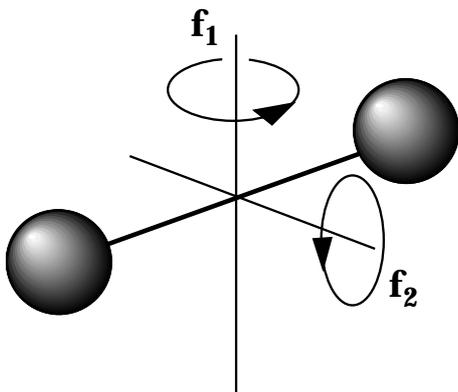
Das System besitzt dann d·N Freiheitsgrade f.

Schwingungen mehratomiger Moleküle

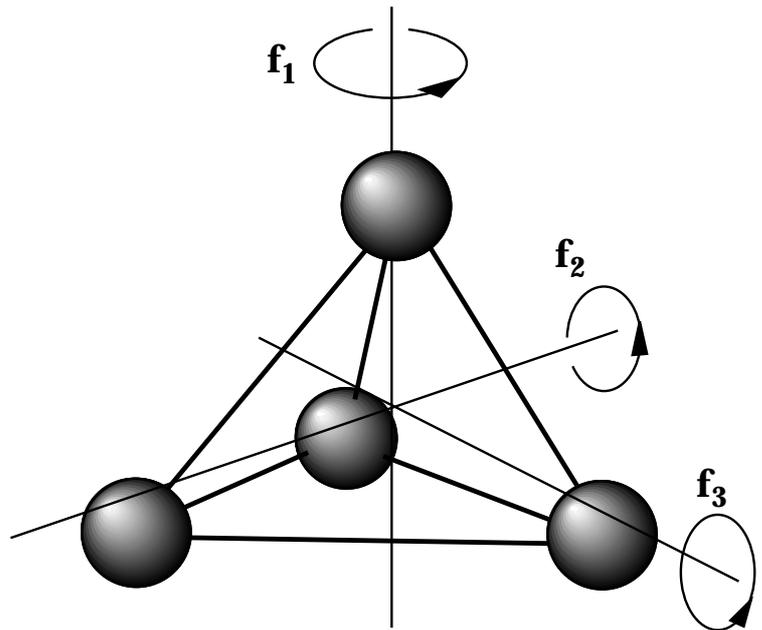
Ein Molekül mit i Atomen, das sich im dreidimensionalen Raum bewegen kann, besitzt $3 \cdot i$ Freiheitsgrade. Diese teilen sich auf die drei Anteile Translation, Rotation und Vibration auf.

Zahl der Freiheitsgrade (in drei Dimensionen):

	lineares Molekül	nicht lineares Molekül
Gesamtzahl der Freiheitsgrade	$3 i$	$3 i$
Translation	3	3
Rotation	2	3
Vibrationsfreiheitsgrade	$3 i - 5$	$3 i - 6$



Rotationsfreiheitsgrade eines linearen Moleküls



Rotationsfreiheitsgrade eines nicht linearen Moleküls

9. Wellen

9.1 Definitionen

Definition einer Welle:

Als Welle bezeichnet man die räumliche und zeitliche Ausbreitung einer Anregung oder einer Störung in einem Medium. Sie wird beschrieben durch eine Funktion, die sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängt.

$$A = A(x, y, z, t)$$

Ursache der Wellenausbreitung ist die Kopplung zwischen den lokalen Anregungen oder Auslenkungen im Medium.

Modellvorstellung: Ausbreitung einer Welle in einem System von gekoppelten Oszillatoren.

Die Ausbreitung einer Welle ist meistens mit einem Energietransport verbunden.

Beispiele von Wellen	Medium	Art der Störung
Seilwelle	elastisches Seil	seitliche Auslenkung des Seils
Wasseroberflächenwelle	Wasser	Auslenkung aus der Ruhelage (Äquipotentialfläche)
Schallwelle, akustische Welle	Materie (Gas, Flüssigkeit, Festkörper)	Druckänderungen
Elektromagnetische Welle (Radiowellen, Mikrowellen, Wärmestrahlung, Licht, Röntgenstrahlung, Gammastrahlung)	Vakuum oder Materie	elektrische und magnetische Felder (E - und B - Feld)

Wellentypen

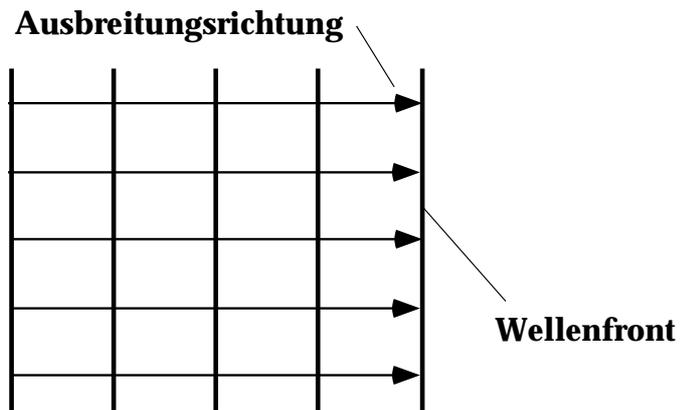
- **Die Anregung kann eine vektorielle oder skalare Grösse sein**

Beispiele: Schallwellen in Luft \Rightarrow skalare Welle
Licht im Vakuum \Rightarrow vektorielle Welle

- **ebene Wellen**

besitzen eine Ausbreitungsrichtung und damit ebene Wellenfronten.

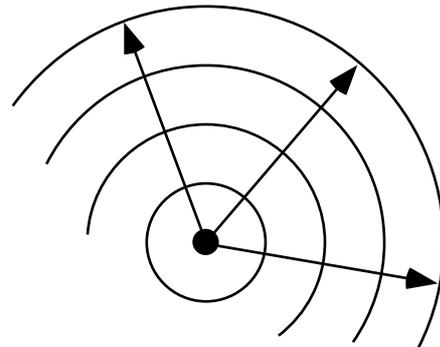
Beispiel: Sonnenlicht, das auf die Erde auftrifft, Lichtstrahl eines Lasers



- **Kugelwellen**

breiten sich radial aus. Die Wellenfronten sind Kugelflächen.

Beispiel: Knall einer Pistole im Freien



- **transversale Wellen:** Anregung erfolgt quer zur Ausbreitungsrichtung.

Beispiel: Elektromagnetische Wellen, Seilwellen

longitudinale Wellen: Anregung erfolgt längs zur Ausbreitungsrichtung.

Beispiel: Kompressionswelle in Festkörper

- **polarisierte Wellen:** sind transversale Wellen, wobei der Anregungsvektor eine konstante Richtung besitzt.

Beispiel: polarisiertes Licht

9.2 Mathematische Beschreibung von Wellen

Wellen werden durch Funktionen $A(x, y, z, t)$ beschrieben. Diese sind Lösungen einer Differentialgleichung (Wellengleichung).

Wellengleichung für Seilwellen

Betrachten Seilelement dx , die rücktreibende Kraft ist

$$F_y = F_0 \sin(\alpha + d\alpha) - F_0 \sin \alpha$$

für kleine Winkel α (wegen $\sin \alpha = \alpha$):

$$F_y = F_0(\alpha + d\alpha) - F_0 \alpha = F_0 d\alpha$$

und $\alpha = \frac{dy}{dx} \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

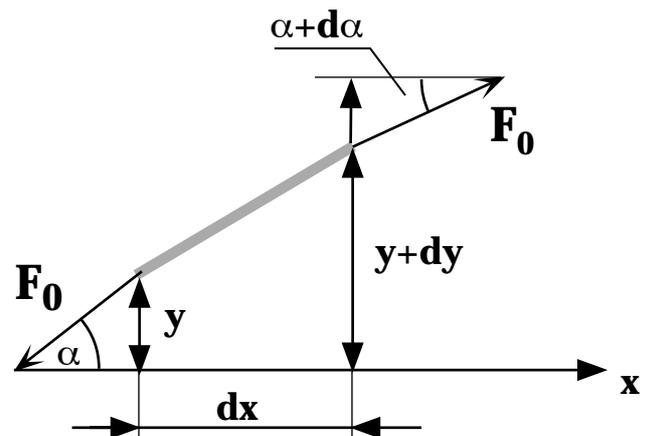
die Newtonsche Bewegungsgleichung liefert

$$\underbrace{\rho \cdot A \cdot dx}_{dm} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

ρ : Dichte des Seils

A : Querschnittsfläche des Seils

F_0 : Kraft, mit der das Seil gespannt ist



9. Wellen

aus der Newtonschen Bewegungsgleichung ergibt sich die Wellengleichung für das gespannte Seil

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F_0}{\rho \cdot A} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(die Grösse $\frac{F_0}{\rho A}$ hat die Dimension einer Geschwindigkeit im Quadrat, v^2)

Die Differentialgleichung wird erfüllt von Funktionen der Form $y = f(vt - x)$ denn

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 f''(vt - x)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(vt - x)$$

v hat die Bedeutung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
In unserem Fall ist

$$v = \pm \sqrt{\frac{F_0}{\rho \cdot A}}$$

Harmonische, ebene Wellen

Die harmonische Funktion

$$y(x, t) = y_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) \right]$$

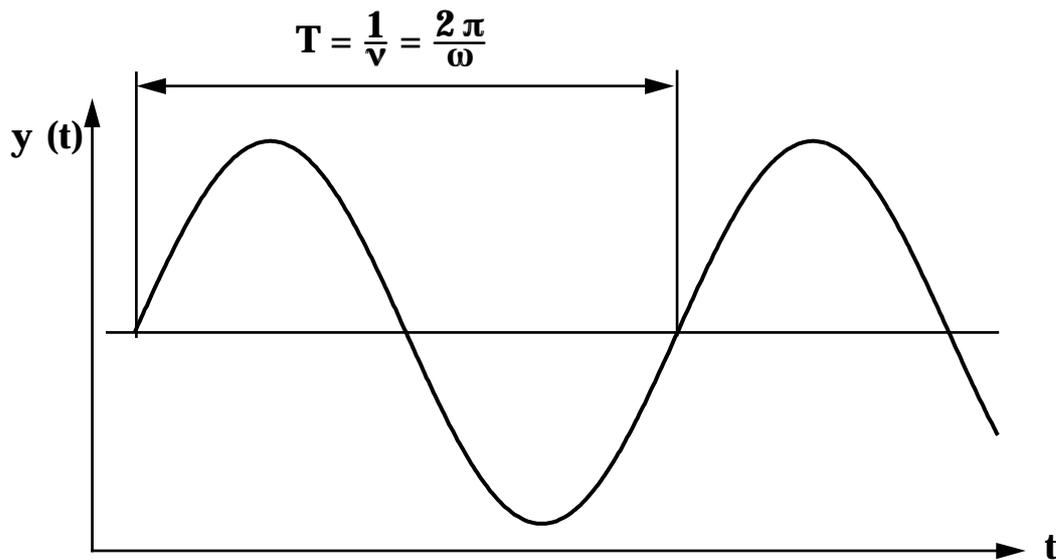
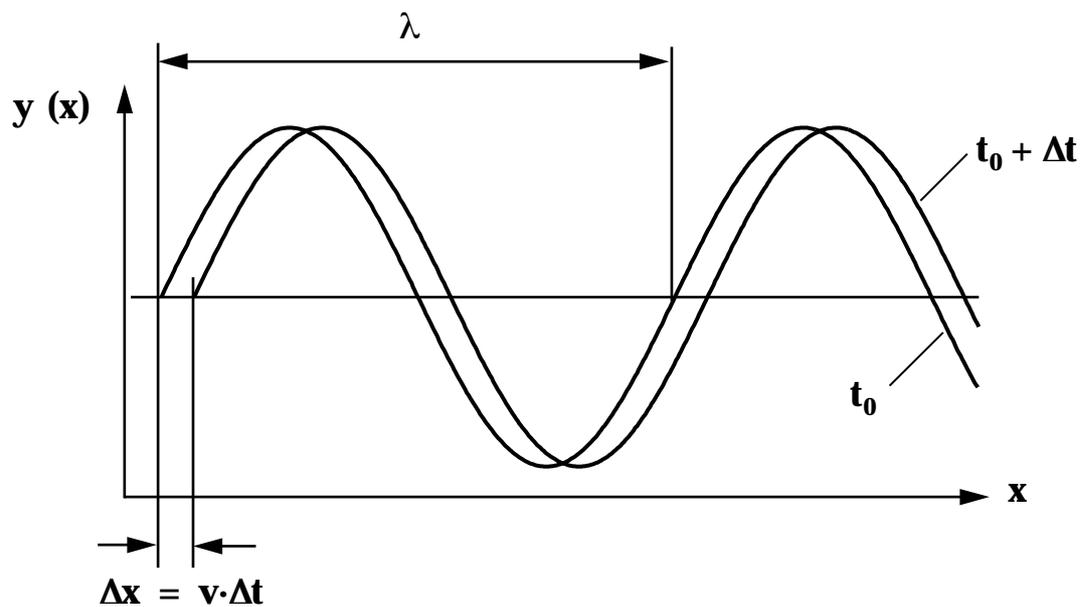
oder

$$y(x, t) = y_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (vt - x) \right]$$

erfüllen die eindimensionale Wellengleichung (z. B. Seilwelle).

v : Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

λ : Wellenlänge

Bewegung eines Seilelementes an der Stelle $x = 0$ Momentaufnahme der harmonischen Welle zur Zeit $t = t_0$ und $t_0 + \Delta t$ 

falls $\Delta t = T$: $\Delta x = \lambda = v \cdot T$

$$v = \lambda \cdot \nu$$

Die Wellenfunktion $y(x, t) = y_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (v \cdot t - x) \right]$ lässt sich damit schreiben

$$y(x, t) = y_0 \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$$

eindimensionale harmonische Welle,
die sich in positiver x-Richtung ausbreitet

die Grösse $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ heisst Wellenzahl.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v einer Welle hängt vom Medium ab.

Medium	Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schall (m / s)
CO ₂	266
N ₂	349
trockene Luft (20° C)	343
trockene Luft (0° C)	331
He	1007
H ₂	1309
Blei	1300
Wasser	1485
Aluminium	5100
Kronglas	5400
Beryllium	12'900
Diamant	17'500

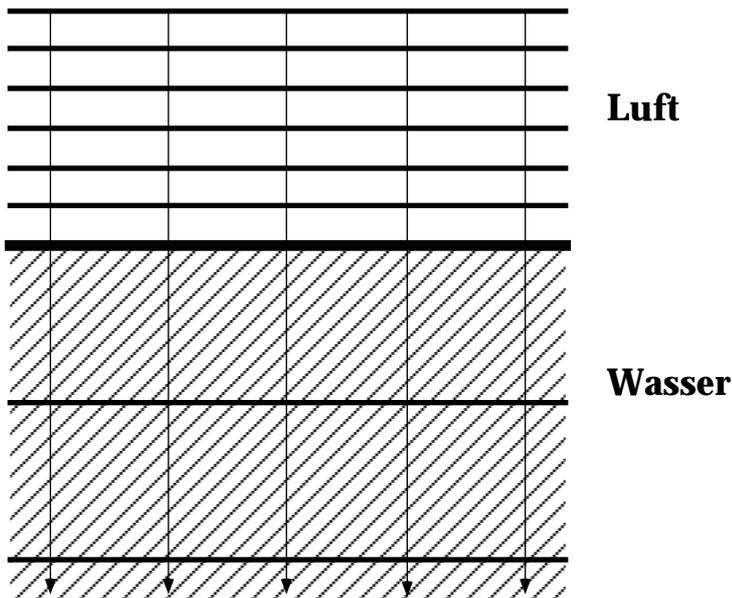
Die Frequenz ν einer Welle wird von der Quelle bestimmt. Die Wellenlänge λ hängt dagegen von der Ausbreitungsgeschwindigkeit v (und damit vom Medium) ab.

$$v = \lambda \cdot \nu \quad \Rightarrow \quad \lambda = v / \nu$$

Beispiel: Eine Schallwelle mit $\nu = 1000$ Hz breitet sich in Luft aus, trifft auf eine Luft - Wasser Grenzfläche. Wie gross sind die Wellenlängen in Luft und Wasser (λ_{Luft} , λ_{Wasser})?

$$\lambda_{\text{Luft}} = \frac{v_{\text{Luft}}}{\nu} = \frac{343}{1000} = 0.34 \text{ m}$$

$$\lambda_{\text{Wasser}} = \frac{v_{\text{Wasser}}}{\nu} = \frac{1485}{1000} = 1.485 \text{ m}$$



Harmonische Kugelwellen

Kugelwellenfunktionen hängen von der Zeit und dem Betrag des Radius ab.

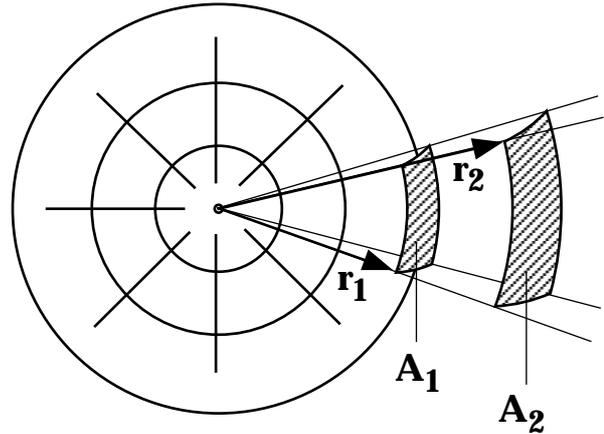
$$A(r, t) = \frac{A_0}{r} \sin(\omega t - k \cdot r)$$

Die Amplitude nimmt mit zunehmendem r wie $1/r$ ab.

Begründung:

Die Leistung P_1 der Welle durch die Fläche A_1 ist in einem nicht-absorbierenden Medium gleich der Leistung P_2 durch die Fläche A_2 .

$$P_1 = P_2$$



Die Intensität I (= Leistung / Fläche) nimmt deshalb mit zunehmendem Radius r ab:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{P_1}{A_1} \cdot \frac{A_2}{P_2} = \frac{P_1}{P_2} \cdot \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

andererseits ist

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

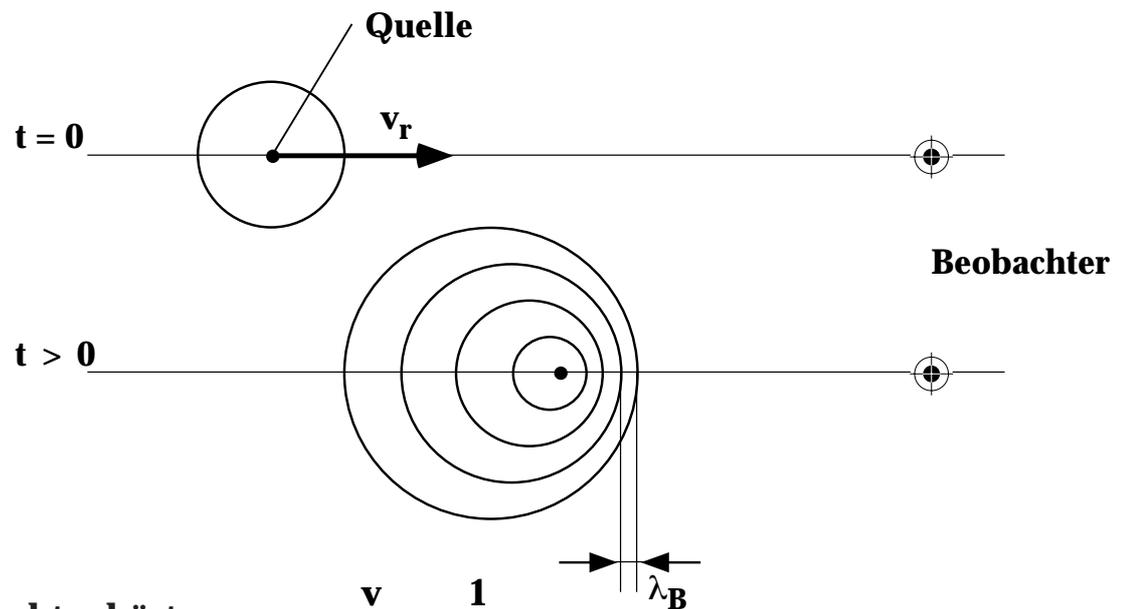
Die Intensität nimmt mit zunehmendem r wie $1/r^2$ ab.

Da die Intensität I proportional zur Amplitude im Quadrat ist, muss die Amplitude wie $1/r$ abnehmen.

9.3 Doppler Effekt

Beim Doppler Effekt handelt es sich um Frequenzverschiebungen, die als Folge von Relativbewegungen zwischen Schallquelle und Beobachter zustande kommen.

Beispiel: mit Geschwindigkeit v_r bewegte Schallquelle, ruhender Beobachter
 Emittede Tonfrequenz: $\nu = 1/T$
 Schall-Ausbreitungsgeschwindigkeit: v



Frequenz, die der Beobachter hört: $\nu_B = \frac{v}{\lambda_B} = \frac{1}{T_B}$

Anzahl Schwingungen, die in der Zeit t ausgesandt werden: t/T
 diese werden verteilt auf die Strecke $s = v \cdot t - v_r \cdot t$

$$\lambda_B = \frac{s}{t/T} = \frac{v}{v} - \frac{v_r}{v} = \frac{v}{v} \left(1 - \frac{v_r}{v}\right) = \lambda \left(1 - \frac{v_r}{v}\right)$$

$$\nu_B = \frac{v}{\lambda_B} = \frac{v}{\lambda \left(1 - \frac{v_r}{v}\right)} = \frac{v}{1 - \frac{v_r}{v}}$$

$$\Rightarrow \nu_B = \frac{v}{1 - \frac{v_r}{v}}$$

Falls $v_r \ll v$, schreiben wir für $\nu_B = v + \Delta\nu$

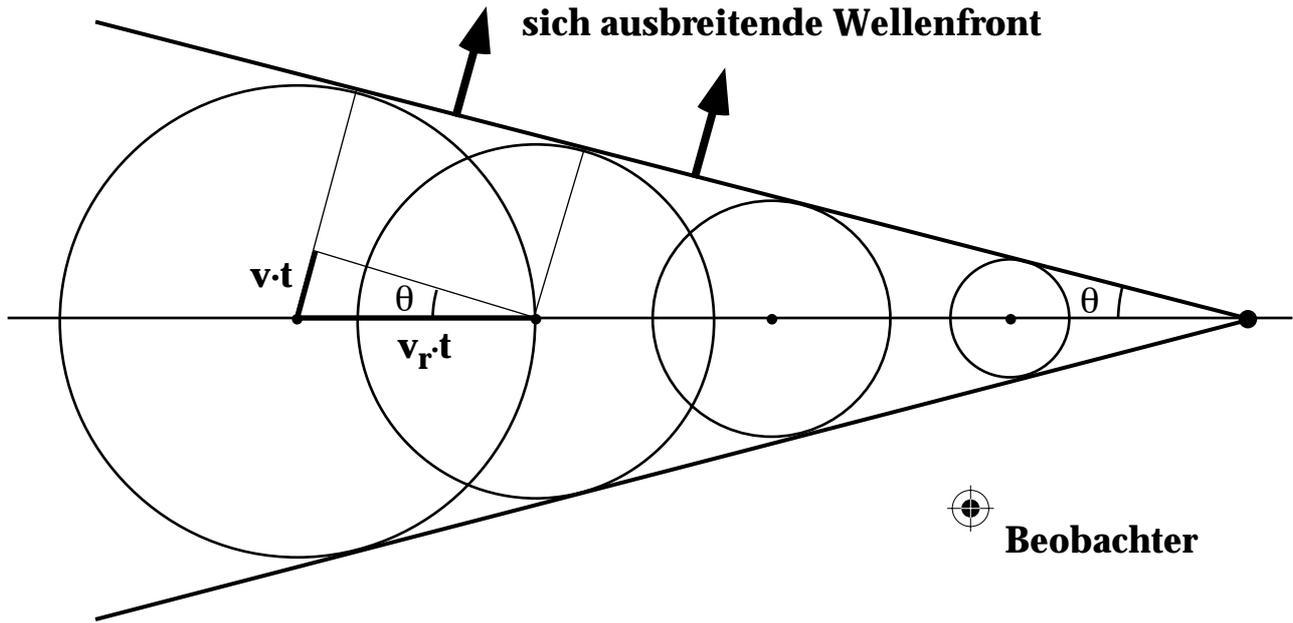
$$\frac{v + \Delta\nu}{v} = \frac{1}{1 - \frac{v_r}{v}}, \quad 1 + \frac{\Delta\nu}{v} \cong 1 + \frac{v_r}{v} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\Delta\nu}{v} \cong \frac{v_r}{v}$$

Näherung für $v_r \ll v$

Machscher Kegel

Bewegt sich die Schallquelle mit $v_r > v$ so sieht die Situation wie folgt aus:



$$\sin \theta = \frac{v \cdot t}{v_r \cdot t} = \frac{v}{v_r}$$

2θ : Öffnungswinkel des Machschen Kegels
(Ernst Mach 1838 - 1916)

Erreicht die Wellenfront den Beobachter, dann nimmt er sie als **Überschallknall** wahr.

9.4 Anharmonische Wellen

Anharmonische Wellen sind räumlich und zeitlich periodische Funktionen, die nicht durch sin- bzw. cos-Funktionen beschrieben werden können.

Wie bei den nicht harmonischen Schwingungen können diese anharmonischen Wellenfunktionen wiederum durch eine Fourierreihe (d.h. durch eine Summe harmonischer Funktionen) dargestellt werden.

$A(x, t)$ sei eine nicht harmonische Welle. Sie kann durch die Fourierreihe dargestellt werden :

$$A(x, t) = A(x + \lambda, t) = A(x, t + T)$$

$$= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t - mkx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\omega t - mkx)$$

(gilt nur falls die Ausbreitungsgeschwindigkeit frequenzunabhängig ist)

			Intervall
$m = 1$:	Kreisfrequenz ω	\Rightarrow	Grundton
			Oktave
$m = 2$:	2ω	\Rightarrow	1. Oberton
			Quinte
$m = 3$:	3ω	\Rightarrow	2. Oberton
			Quarte
$m = 4$:	4ω	\Rightarrow	3. Oberton
.	.	.	.
.	.	.	.

Beim Schall werden

harmonische Wellen als Ton bezeichnet,

periodische, nicht harmonische Wellen sind Klänge

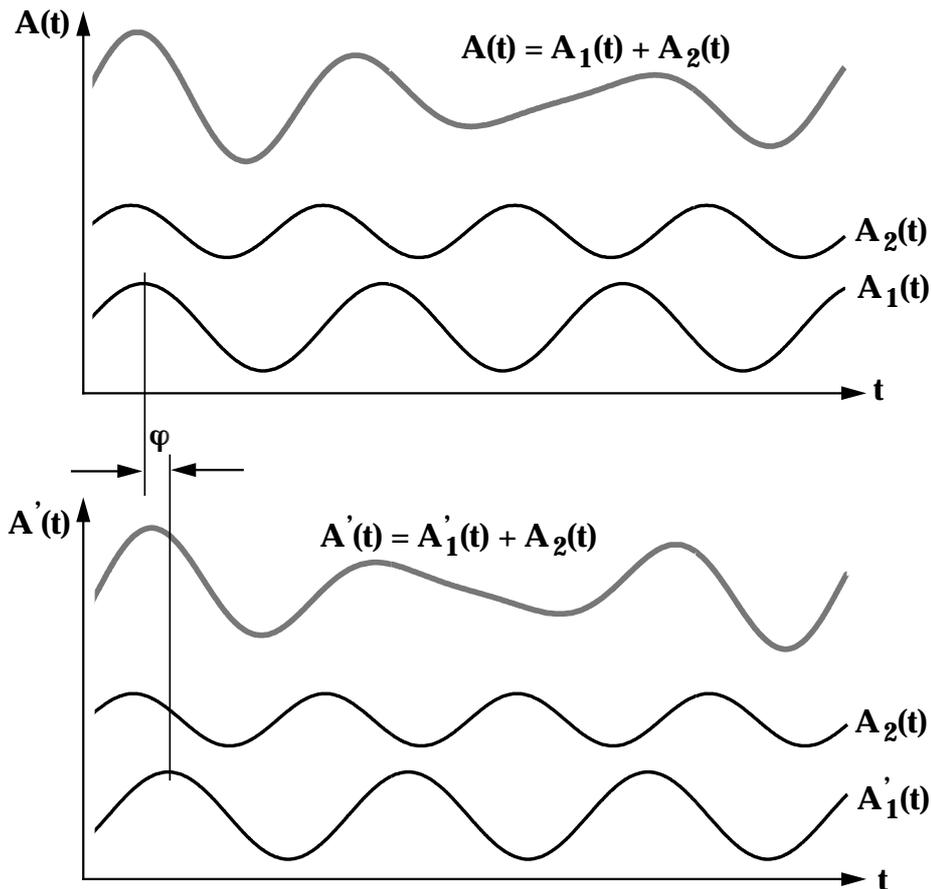
während nicht periodische Wellen als Geräusch oder Knall bezeichnet werden.

Tonintervalle	reines Frequenzverhältnis	Anzahl Halbtöne	Wohltemperierte* Tonhöhenkala: Frequenzverhältnis
Terz	5 / 4	4	$(\sqrt[12]{2})^4 = 1.2599$
Quarte	4 / 3	5	$(\sqrt[12]{2})^5 = 1.3348$
Quinte	3 / 2	7	$(\sqrt[12]{2})^7 = 1.4983$
Oktave	2 / 1	12	$(\sqrt[12]{2})^{12} = 2.0$

*hier wird die Oktave in 12 Halbtöne eingeteilt wobei das Frequenzverhältnis zweier aufeinanderfolgender Halbtöne gegeben ist durch $\frac{v_{n+1}}{v} = (\sqrt[12]{2}) \approx 1.0595$

Das menschliche Ohr registriert die Schallamplitude (und damit die Intensität) als Lautstärke und die Frequenz als Tonhöhe. Es ist jedoch unempfindlich auf Phasendifferenzen.

Beispiel:



$A_1'(t)$ unterscheidet sich von $A_1(t)$ nur durch eine Phasenverschiebung φ , was dazu führt, dass $A'(t)$ und $A(t)$ physikalisch verschieden sind. Das Ohr registriert jedoch denselben Klang, weil es nicht auf Phasenverschiebungen empfindlich ist.

9.5 Überlagerung und Beugung von Wellen

Zwei Wellenzüge, die sich räumlich überlappen addieren sich zu einer neuen Welle. Diese (vektorielle oder skalare) Addition der Auslenkungen bezeichnet man als **Überlagerung, Interferenz oder Superposition** von Wellen.

Beispiel:

Zwei ebene Wellen gleicher Frequenz, gleicher Amplitude und Ausbreitungsrichtung

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx - \varphi_0)$$

$$y_2(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx)$$

Superposition

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

$$= y_0 [\sin(\omega t - kx - \varphi_0) + \sin(\omega t - kx)]$$

$$y(x, t) = 2 y_0 \cos \frac{\varphi_0}{2} \sin\left(\omega t - kx - \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

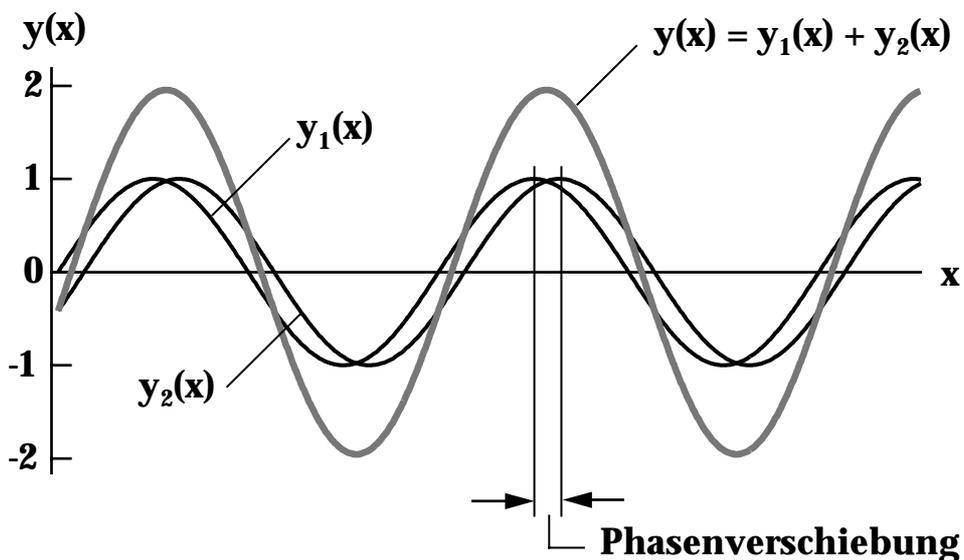
┌──────────┐ ┌──────────┐
Amplitude Orts- und Zeitabhängigkeit
 wie ursprüngliche Welle

Je nach Phasenverschiebung φ_0 ist eine Verstärkung (konstruktive Interferenz) oder Löschung (destruktive Interferenz) der ursprüngliche Welle ist möglich.

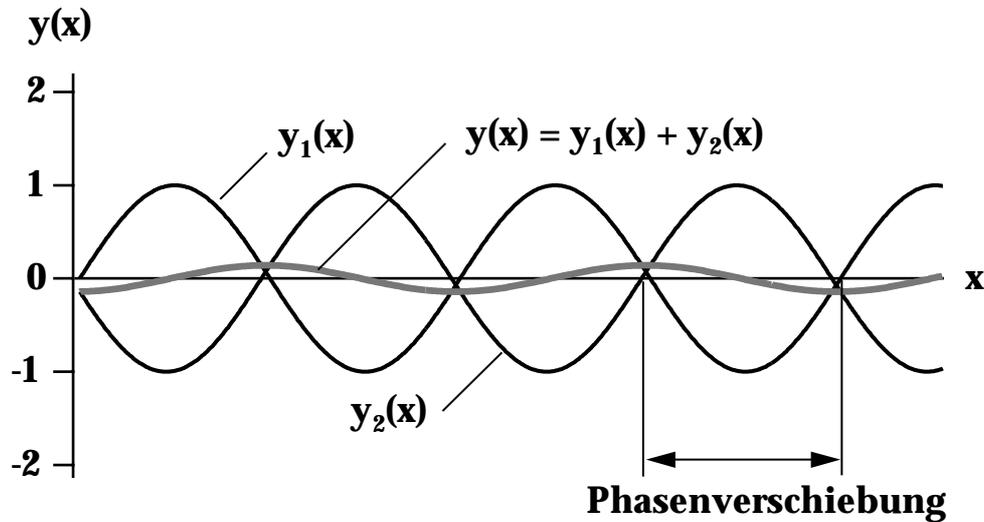
Beispiele:

Eine kleine Phasenverschiebung φ_0 (oder auch $\varphi_0 = 0$) führt zu einer konstruktiven Interferenz.

Momentaufnahme zur Zeit $t = 0$:



Falls die Phasenverschiebung nahe bei π liegt, entsteht destruktive Interferenz:



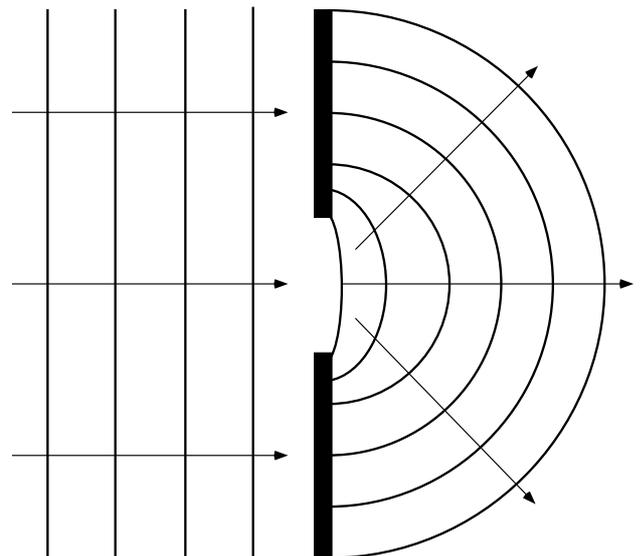
Beugung von Wellen

Eine Welle, die auf ein Hindernis trifft, kann sich nach dem Hindernis in andere Richtungen ausbreiten.

Beispiel: Wasserwellen hinter einem Damm mit Öffnung

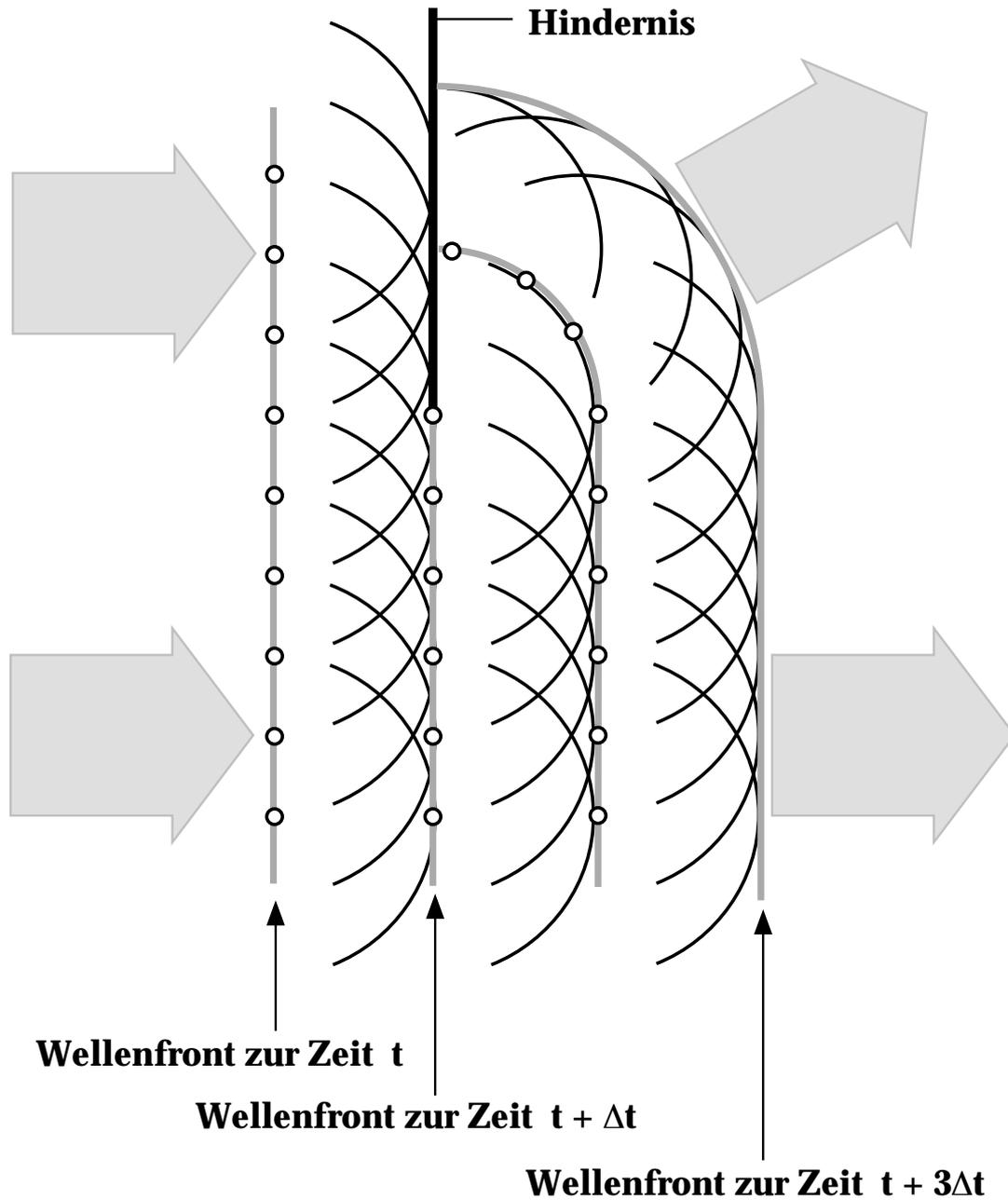
Das Entstehen der Beugung kann man mit dem **Prinzip von Huygens** erklären (Christian Huygens, 1629 - 1695) :

Eine Welle breitet sich dadurch aus, dass von jedem ihrer Punkte eine neue, kugelförmige Elementarwelle ausgeht. Die Einhüllende aller Elementarwellen der alten Welle ergibt die Welle zu einem späteren Zeitpunkt.



Beispiel: Ausbreitung einer ebenen Welle

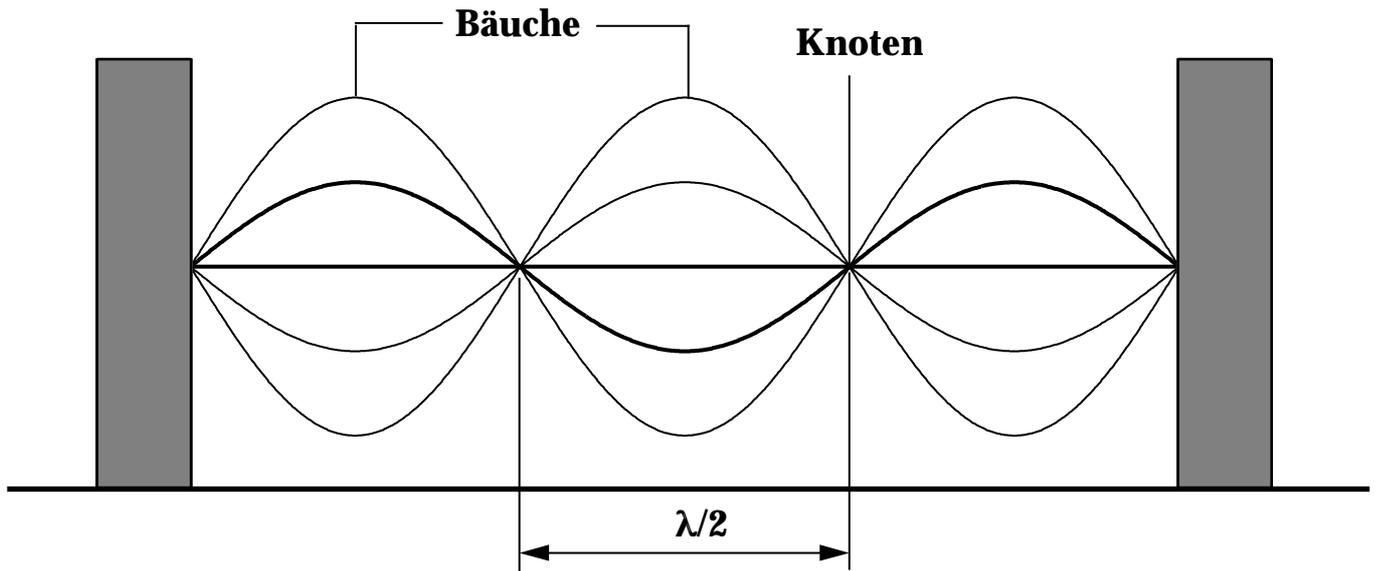
Die Wellenfront zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ergibt sich aus der Umhüllenden der Elementarwellen (Kugelwellen), die zum Zeitpunkt t ausgesandt wurden



Stehende Wellen

Stehende Wellen sind durch räumlich feste Nullstellen der Auslenkung (\Rightarrow Knoten) und feste Orte der Maximalauslenkung (\Rightarrow Bäuche) gekennzeichnet.

Beispiel: Schwingungen einer Saite mit der Grundfrequenz oder einer Oberschwingung.



Stehende Wellen entstehen durch die Überlagerung zweier identischer Wellen mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung.

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx) \quad \text{Welle in positiver x-Richtung}$$

$$y_2(x, t) = y_0 \sin(\omega t + kx + \varphi_0) \quad \text{Welle in negativer x-Richtung}$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2y_0 \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_0}{2}\right) \cos\left(kx + \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

nur zeitabhängig

nur ortsabhängig

9. Wellen

Lage der Knoten:

$$\cos\left(kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) = 0 \Rightarrow kx + \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$2kx + \varphi_0 = (2n + 1)\pi$$

$$x = \frac{(2n + 1)\pi - \varphi_0}{2k}$$

Lage der Knoten

Lage der Bäuche:

$$\cos\left(kx + \frac{\varphi_0}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow kx + \frac{\varphi_0}{2} = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

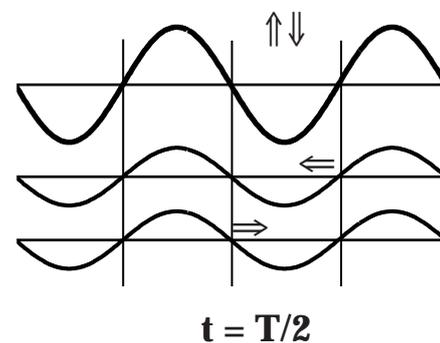
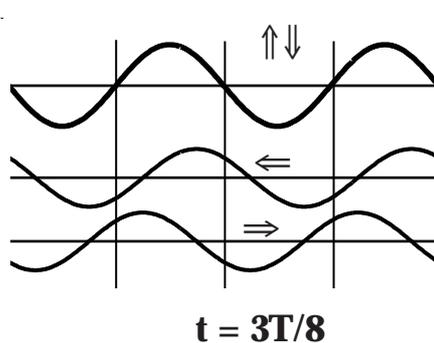
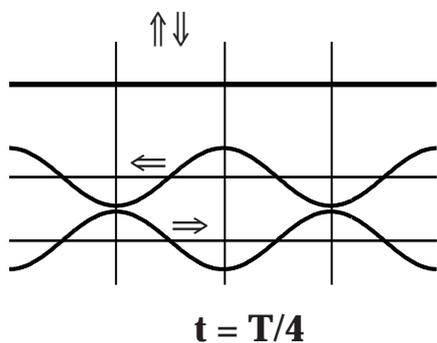
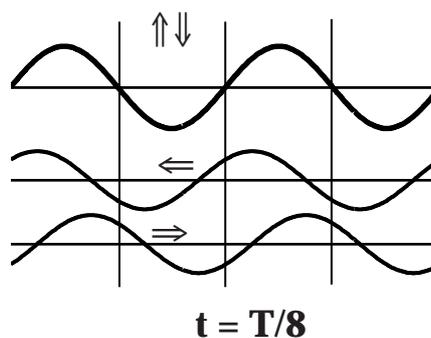
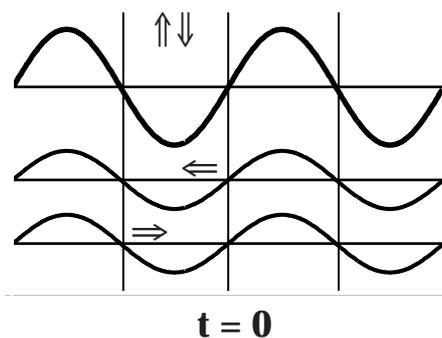
$$x = \frac{2n\pi - \varphi_0}{2k}$$

Lage der Bäuche

Abstand der Knoten:

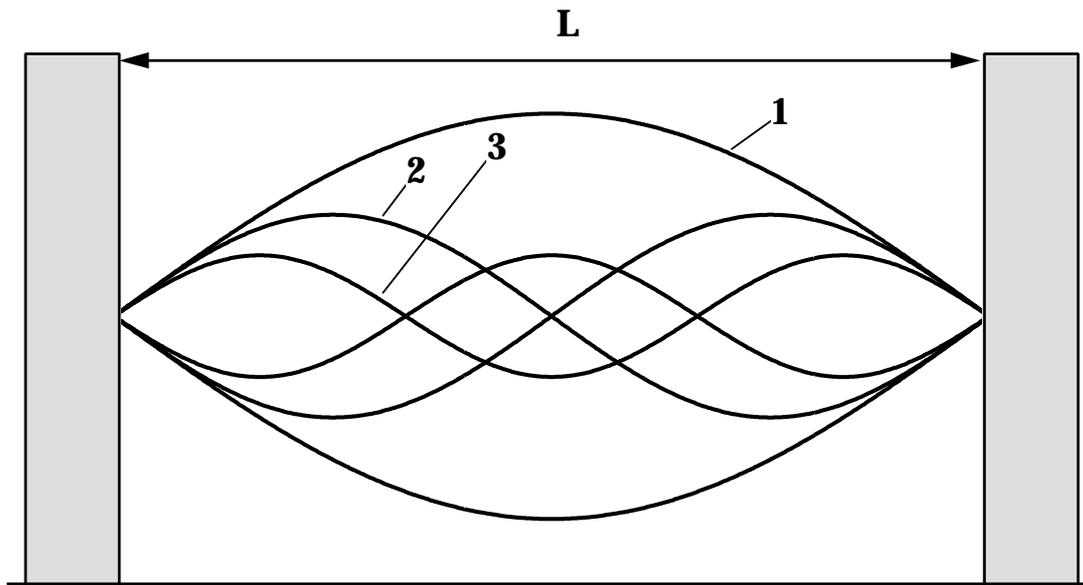
$$x(n+1) - x(n) = \frac{[2(n+1) + 1]\pi - (2n+1)\pi}{2k} = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}$$

Entstehung von stehenden Wellen durch Überlagerung entgegengesetzt laufender Wellen:



Stehende Wellen und mögliche Eigenschwingungen eines Systems

• Eingespannte Saite



1 **Grundschiwingung:** $L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \omega_0 = 2\pi v \frac{1}{\lambda} = \pi \frac{v}{L}$

2 **1. Oberschiwingung:** $L = \lambda \Rightarrow \omega_1 = 2\pi \frac{v}{L} = 2\omega_0$

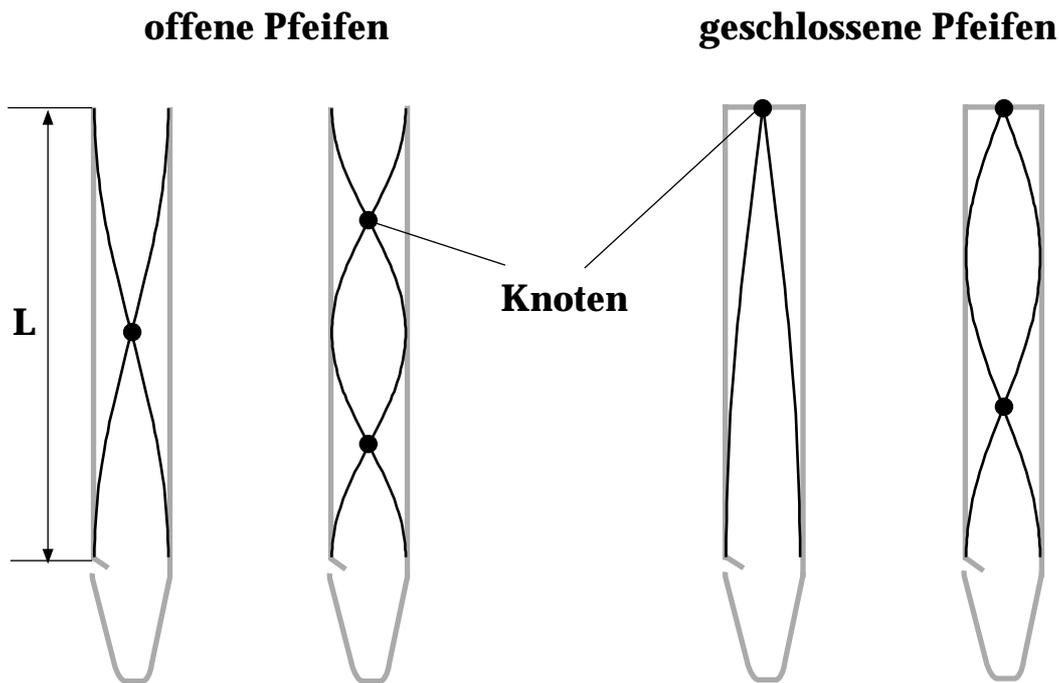
3 **2. Oberschiwingung:** $L = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow \omega_2 = 3\pi \frac{v}{L} = 3\omega_0$

n-te Oberschiwingung besitzt n Knoten

$$\omega_n = (n + 1) \pi \frac{v}{L} = (n + 1) \omega_0$$

• stehende Wellen in Luftsäulen (Pfeifen)

Betrachten Auslenkungen der Luftmoleküle



Grundschwingung:

$$1 \text{ Knoten und } L = \frac{\lambda}{2}$$

1. Oberschwingung

$$2 \text{ Knoten und } L = \lambda$$

n. Oberschwingung

$$L = (n + 1) \frac{\lambda}{2} = (n + 1) \pi \frac{v}{2\pi v}$$

$$\omega_n = (n + 1) \pi \frac{v}{L} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Grundschwingung:

$$1 \text{ Knoten und } L = \frac{\lambda}{4}$$

1. Oberschwingung

$$2 \text{ Knoten und } L = \frac{3\lambda}{4}$$

n. Oberschwingung

$$L = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} = (2n + 1) 2\pi \frac{v}{4 \cdot 2\pi v}$$

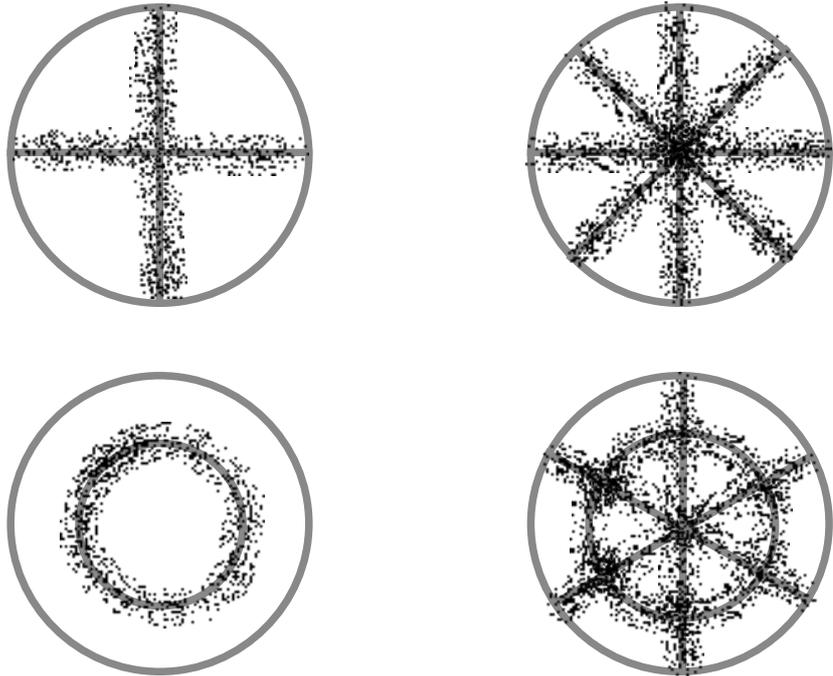
$$\omega_n = (2n + 1) 2\pi \frac{v}{4L} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Anmerkung: ω_n hängt von v ab und damit wird die Tonhöhe zudem durch die Gaszusammensetzung, den Druck und die Temperatur bestimmt.

• Eigenschwingungen in Festkörpern

Knoten können durch Staubfiguren sichtbar gemacht werden (Chladnische Klangfiguren).

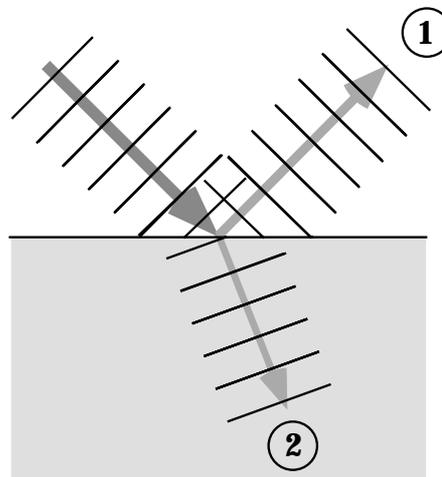
Die Teilchen (Sand, Staub) sammeln sich in den Knotenlinien an



9.6 Wellen an Grenzflächen

Trifft eine Welle (z. B. Schallwelle) auf eine Grenzfläche (z. B. Luft - Wasser), dann wird die Welle in zwei Anteile aufgeteilt:

- reflektierte Welle ①
- gebrochene Welle ②



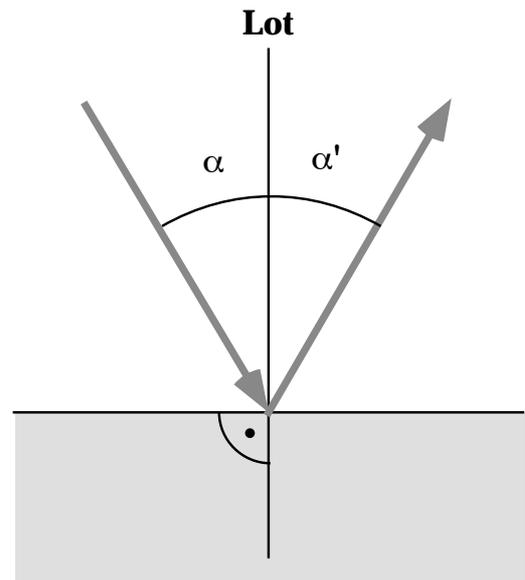
Wellenreflexion

Reflexionsgesetz:

Der Reflexionswinkel α' ist gleich dem Einfallswinkel α

$$\alpha' = \alpha$$

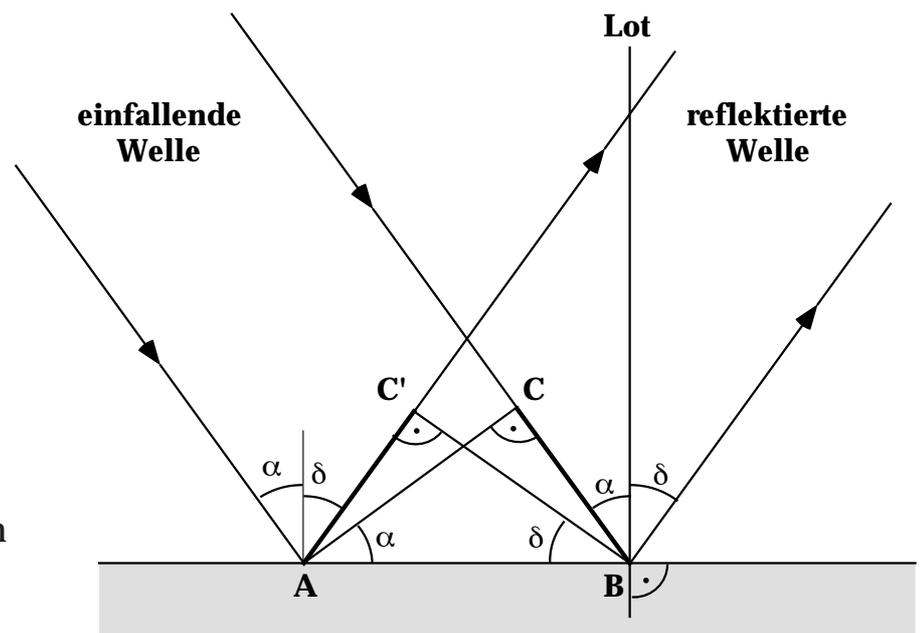
Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und Lot liegen in einer Ebene.



Begründung:

- Die Richtung der reflektierten Welle α' ergibt sich nach dem Huygensschen Prinzip.
- In der Zeit, in der sich die einfallende Welle von $C \rightarrow B$ fortbewegt, breitet sich von A eine Kugelwelle mit dem Radius $\overline{AC'}$ ($= \overline{BC}$) aus. Die Richtung der Wellenfront der reflektierten Welle ergibt sich durch Tangentenbildung von B an die Kugelwelle. Dadurch ergibt sich das Dreieck ABC' welches kongruent zu ABC ist. Somit ist

$$\alpha = \delta$$



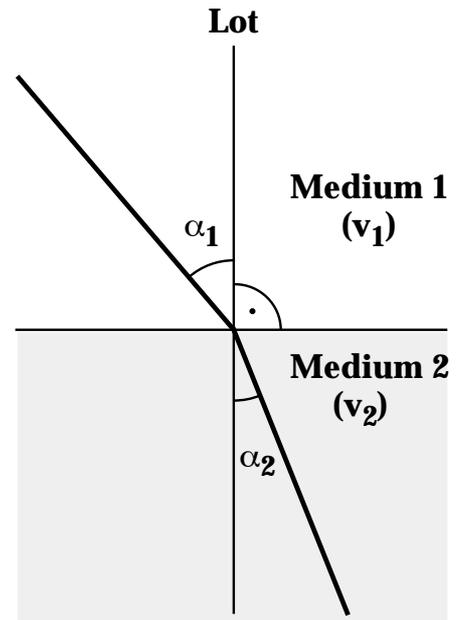
Brechungsgesetz

Ursache der Brechung :
 zwei verschiedene
 Ausbreitungsgeschwindigkeiten
 in den beiden Medien (v_1 und v_2).

Brechungsgesetz :

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

**einfallender Strahl, gebrochener Strahl
 und Lot liegen in einer Ebene.**



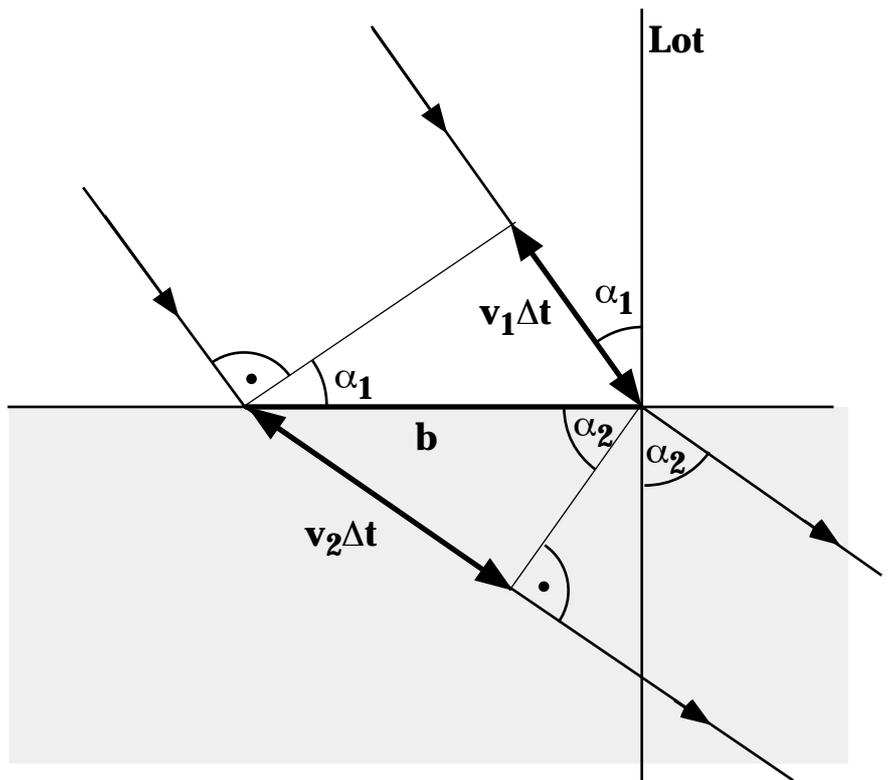
Begründung:

Die Richtung der gebrochenen Welle ergibt sich wieder nach dem Huygensschen Prinzip.

$$\sin \alpha_1 = \frac{v_1 \Delta t}{b}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2 \Delta t}{b}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$



9.7 Akustik

Lehre vom Schall

Schallwellen in Gasen sind longitudinale Druckwellen. In Festkörpern sind longitudinale und transversale Druckwellen möglich.

Kenngrossen des Schalls:

- Die Amplitude einer Schallwelle kann durch den Druck (Schalldruck) charakterisiert werden: Einheit Pa
- Schallstärke, Schallintensität I
ist die pro Zeit und Fläche auftreffende Schallenergie
Einheit: W/m^2
- Schalleistung P
ist die gesamte von einer Quelle abgegebene Schalleistung
- logarithmische Skala der Schallintensität : Dezibel Skala, Schallpegel

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad \text{mit } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

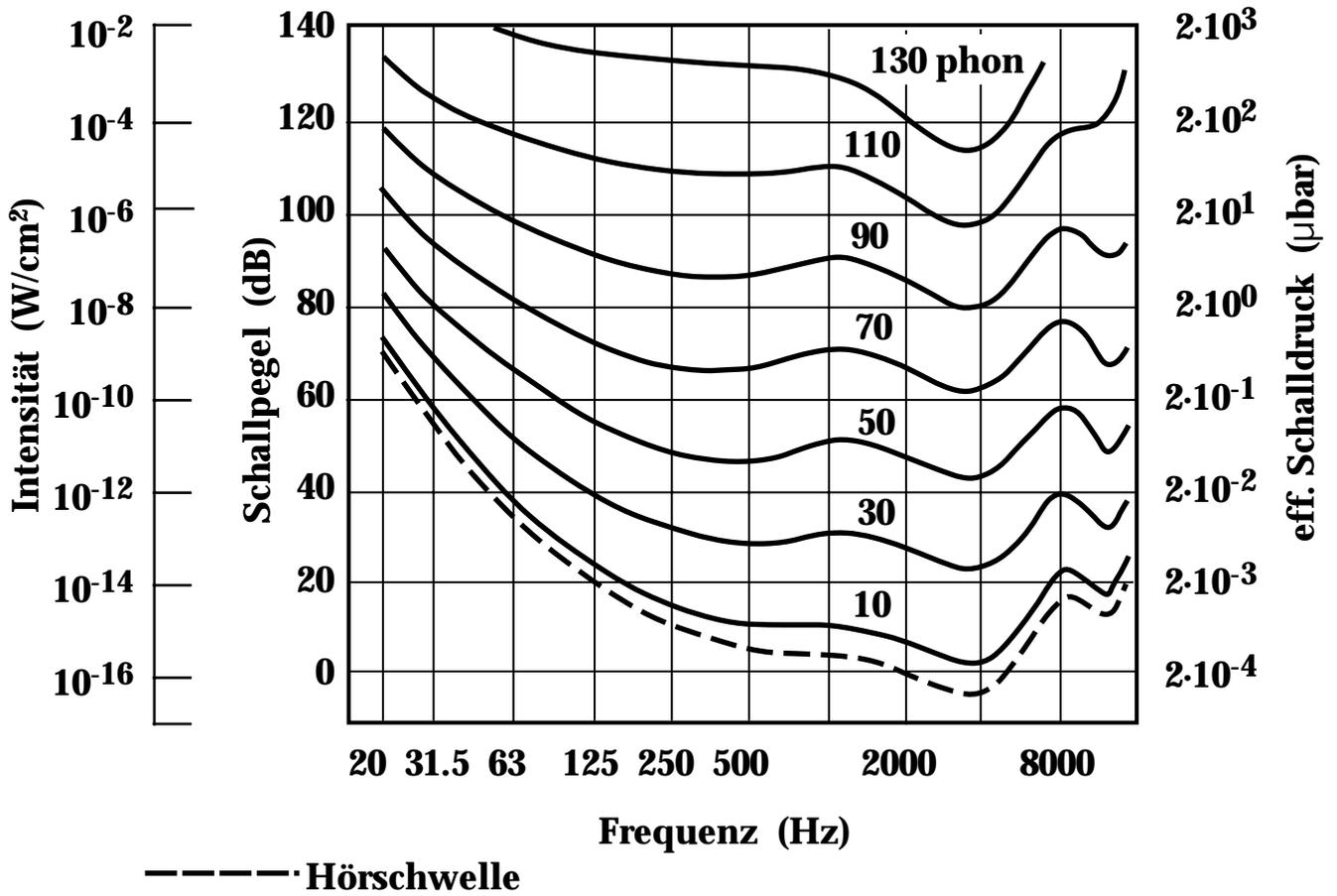
I_0 : Bezugsintensität (= Hörschwelle bei 1000 Hz)

oder, da I proportional zu p^2 ist

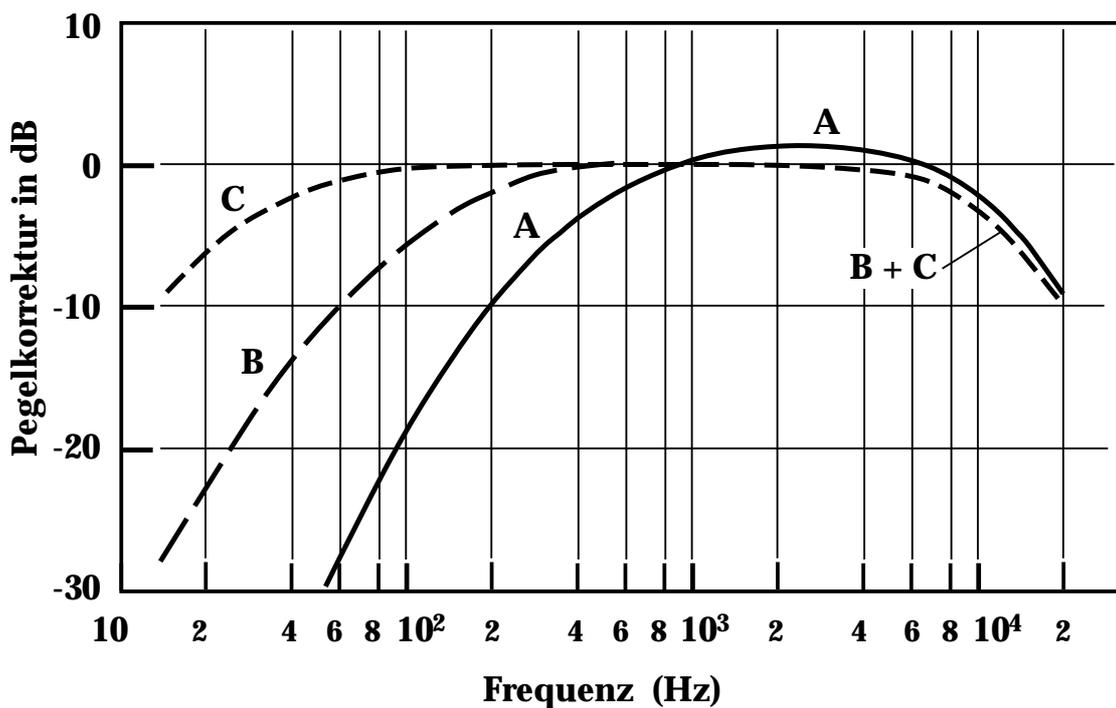
$$L = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0} \quad \text{mit } p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

- Physiologisch bewertete Lautstärkepegel
Um dem Hörbereich des Menschen (von etwa 16 Hz bis 20 kHz) und der Frequenzabhängigkeit der Empfindlichkeit innerhalb des Hörbereichs Rechnung zu tragen arbeitet man mit verschiedenen physiologisch bewerteten Lautstärkepegeln:
 - Phonkurven
 - dB(A), dB(B) und dB(C) Bewertungskurven

Phonkurven (heute kaum noch verwendet)



aktuell verwendete Pegelkorrekturen: dB(A), dB(B), dB(C)



9. Wellen

Die logarithmischen Skalen der Schallpegel tragen auch dem logarithmischen Empfinden des menschlichen Ohrs Rechnung.

Nach dem **Weber-Fechnerschen** Gesetz ist die subjektiv empfundene **Lautstärke proportional zum Logarithmus der Schallintensität, $L \propto \log I$.**

Auch für die Tonfrequenz (Tonhöhe) hat das Ohr eine logarithmische Empfindung.

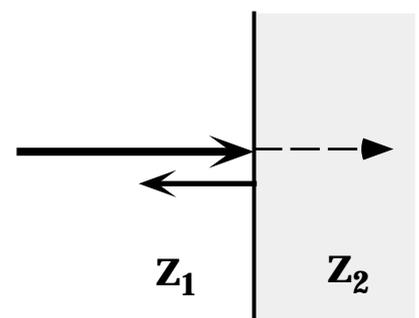
Lautstärken einiger Geräusche in dB(A)

Geräusch	dB(A)	Geräusch	dB(A)
Pressluft-Sirene (7 m)	131	Büro mit Buchungsmaschinen	75
Kesselschmiede	125	Mittlerer Strassenverkehr	70
Presslufthammer (1 m)	120	Unterhaltungssprache (1 m)	65
Sandstrahlgebläse (1 m)	115	Schwacher Strassenverkehr	50
Düsen - Flugzeug (200 m)	115	Niedrigster Geräuschpegel	
Hupe (1 m)	110	in Wohnvierteln bei Nacht	40
Weberei	100	Blätterrauschen	30
LKW (7 m)	90	Rundfunksprecherstudio	20
Motorrad (7 m)	85	Schalltoter Raum (gut isoliert)	10
PKW (7 m)	80	Hörschwelle (jugendliches Ohr)	0

Reflexion von Schall an Grenzflächen

Welcher Anteil einer einfallenden Schallwelle an einer Grenzfläche reflektiert wird, hängt von den Wellenwiderständen Z der beiden Medien ab.

$$Z = \rho \cdot v \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \rho : \text{mittlere Dichte des Mediums} \\ v : \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit} \end{array}$$



Trifft eine Schallwelle senkrecht auf eine Grenzfläche auf, so berechnet sich die Reflexion $r = p_{\text{refl.}} / p_{\text{einf.}}$ ($p_{\text{einf.}}$ und $p_{\text{refl.}}$ sind Schalldrücke der einfallenden und reflektierten Welle) nach:

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

bei der Reflexion an einer starren Wand ($Z_2 \Rightarrow \infty$) wird $r = +1$, das bedeutet vollständige Reflexion ohne Phasenumkehr.

Falls $Z_2 = 0$ wird $r = -1$, das bedeutet vollständige Reflexion mit Phasenumkehr.

Auf der Reflexion von Schallwellen an Grenzflächen beruht die Ultraschalluntersuchung in der Medizin.

Tabelle: Schallgeschwindigkeiten, Dichten und Wellenwiderstände physiologisch wichtiger Stoffe

Stoff	Schallgeschwindigkeit m/s	Dichte ρ kg/m ³	Wellenwiderstand Z kg/m ² s
Wasser (20 °C)	1483	998.2	$1.489 \cdot 10^6$
Luft (p_n, T_n)	331	1.293	$0.414 \cdot 10^3$
Fett	1470	970	$1.42 \cdot 10^6$
Knochenmark	1700	970	$1.65 \cdot 10^6$
Muskel	1568	1040	$1.63 \cdot 10^6$
Gehirn	1530	1020	$1.56 \cdot 10^6$
Knochen (kompakt)	3600	1700	$6.12 \cdot 10^6$

9. Wellen

Einige Daten zum menschlichen Ohr

Frequenzbereich	16 Hz - 20 kHz
Arbeitsbereich	
Schalldruck	$2 \cdot 10^{-5}$ Pa - 20 Pa
Schallintensität	10^{-12} W/m ² - 1 W/m ² (0 - 120 dB)
Schmerzgrenze	10 W/m ² (130 dB)

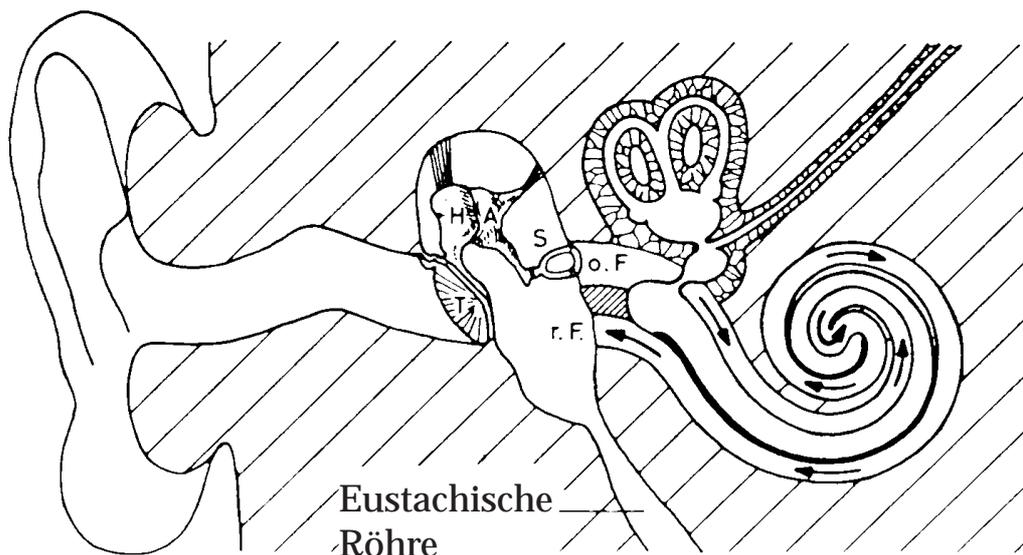
Erlaubte kurzzeitige Überbelastung 200 Pa

Auflösungsvermögen

Schallintensität	8 % (Mittel)
Frequenz	0.2 % (= 1/30 'Halbton')
Zeit	0.055s
Richtung	4 Grad

Menschliches Hörorgan

Aussenohr	Mittel- ohr	Innenohr
-----------	----------------	----------



T	Trommelfell
H	Hammer
A	Amboss
S	Steigbügel
o. F.	ovales Fenster
r. F.	rundes Fenster

Der **Schallübertragungsweg** vom äusseren Ohr zum Cortischen Organ auf der Basilarmembran führt über

Trommelfell - Hammer - Amboss - Steigbügel -

Knöchelchenkette
mechanischer Hebelarm,
Hebelverhältnis 1.3 : 1

Medium : Luft

- Ovales Fenster - Innenohr

Medium : Perilymphe
(wässriges Medium)

- Das Schalleitungssystem bestehend aus Trommelfell, Gehörknöchelchen und Innenohr (bis zum runden Fenster) besitzt eine Resonanzfrequenz $\nu_0 \approx 1400$ Hz und ist stark gedämpft mit einer Abklingzeit von $\tau \approx 2$ ms, was zu einer breiten Resonanzkurve führt.
- Die **Eigenfrequenz des Gehörgangs** liegt bei etwa 2 - 4 kHz was zu einer grossen Empfindlichkeit des Ohrs in diesem Bereich führt.
- Die Übertragung des Schalls vom Trommelfell auf das ovale Fenster durch die Knöchelchenkette **verbessert die Einkopplung** des Schalls von Luft in das wässrige Medium. Ohne diesen Uebertragungsapparat würde nur etwa 1 Promille der Intensität auf das Innenohr übertragen. Der Grund dafür ist die grosse Änderung des Wellenwiderstandes an der Grenzfläche Luft - wässriges Medium:

$$\text{mit } Z_{\text{Luft}} = 4 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^2 \text{ s}, \quad Z_{\text{Wasser}} = 1.5 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^2 \text{ s}$$

ergibt sich für die Reflexion der Schalldruckamplitude

$$r = \frac{Z_{\text{Wasser}} - Z_{\text{Luft}}}{Z_{\text{Wasser}} + Z_{\text{Luft}}} = \frac{1.5 \cdot 10^6 - 4 \cdot 10^2}{1.5 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^2} = 0.99947$$

das Reflexionsverhältnis der Intensität

$$R = r^2 = 0.99891$$

oder für den Anteil der übertragenen Intensität:

$$1 - R \approx 1 \text{ Promille}$$

Das Uebertragungssystem mit der Knöchelchenkette verbessert dieses Verhältnis auf rund 13 %, d.h. um mehr als einen Faktor 100.

- Das Innenohr mit Cortischem Organ und Basilarmembran macht die **Spektralanalyse** des Schalls (Fourier-Analyse der Frequenzen und Amplituden). Auf der Basilarmembran bilden sich stehende Wellen aus, die rund 30'000 Nervenzellen anregen. Die elektrischen Impulse werden über den Hörnerv ans Gehirn weitergeleitet.
 - Die Hörschwelle bei $\nu = 1000 \text{ Hz}$ von $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ist nahe bei der **Rauschgrenze der Wärmebewegung** der Luftmoleküle, die etwa $5 \cdot 10^{-13} \text{ W/m}^2$ beträgt. Das bedeutet, dass die Hörschwelle aus prinzipiellen Gründen nicht wesentlich besser sein kann.
-

II. Wärmelehre

1. Der Begriff der Temperatur

1.1 Makroskopische und mikroskopische Beschreibung

Es gibt zwei Möglichkeiten den Zustand (oder die Änderung dieses Zustandes) eines Systems zu beschreiben:

- **makroskopische Beschreibung**

schliesst Grössen ein wie *Druck, Temperatur, Wärme, innere Energie, Entropie, ...*

In diesen Grössen ist das Verhalten einer grossen Zahl von Teilchen ($\approx 10^{23}$ Teilchen) auf einen Wert reduziert. Diese Grössen haben oft einen direkten Bezug zu unserer Sinneswahrnehmung.

Die Gesetze welche diese Grössen miteinander verknüpfen gehören zur **Thermodynamik**

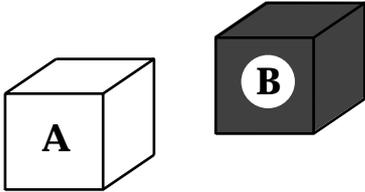
- **mikroskopische Beschreibung**

hier beschreibt man das Verhalten einzelner Atome und Moleküle, die das System bilden. Dazu gehören Grössen wie *Teilchengeschwindigkeiten, Energien, Massen, Drehimpulse, ...*

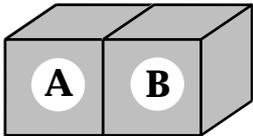
Diese Grössen sind unserer Sinnesempfindung nicht direkt zugänglich. **Statistische Mechanik**

1. Der Begriff der Temperatur

1.2 Thermisches Gleichgewicht und Temperaturbegriff



Wir betrachten zwei identische Körper **A** und **B**, der eine fühlt sich kalt an, der andere heiss.



Bringen wir die beiden Körper in Kontakt, so fühlen sie sich nach einer gewissen Zeit gleich warm an, d.h. sie vermitteln die gleiche Temperaturempfindung.

In diesem Fall sind **A** und **B** im **thermischen Gleichgewicht**.

Zwei Körper, die nicht in Kontakt sind, befinden sich dann im thermischen Gleichgewicht, wenn sich *ihr Zustand nicht ändert* nachdem sie in Kontakt gebracht wurden.

Das thermische Gleichgewicht von zwei Körpern **A** und **B** kann durch einen dritten Körper **C** (einem *Thermometer*) getestet werden.

Nullter Hauptsatz der Thermodynamik: Wenn zwei Körper **A** und **B** jeder für sich im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten Körper **C** ist, dann sind auch **A** und **B** im thermischen Gleichgewicht.

Dieser Hauptsatz ist die Basis für die Definition der Temperatur. Wie alle Hauptsätze der Thermodynamik ist er eine *Erfahrungstatsache* und kann nicht aus anderen Gesetzen hergeleitet werden.

1.3 Temperaturmessung

Die Temperaturmessung basiert auf der Abhängigkeit physikalischer Grössen von der Temperatur.

Beispiele:

Volumen einer Flüssigkeit
 Länge eines Stabes
 elektrischer Widerstand eines Drahtes
 Druck eines Gases bei konstantem Volumen
 Volumen eines Gases bei konstantem Druck
 Farbe eines glühenden Körpers

Alle diese Grössen (und viele andere) können verwendet werden um eine Temperaturskala zu definieren.

Problem: jedes Thermometer besitzt eine eigene Temperaturskala

Abhilfe: man definiert eine Temperaturskala mit einer Messvorschrift und *eicht* alle anderen Temperaturmessverfahren gegen diese Standardskala.

Die Kelvin Temperaturskala

Für die Definition der Temperaturskala benötigen wir zwei leicht reproduzierbare Fixpunkte:

Definition der Kelvin Skala:

die Temperatur des Phasengemischs Eis, Wasser und Wasserdampf (Tripelpunkts-Temperatur des Wassers) ist definiert durch

$T_{\text{tr}} = 273.16 \text{ K}$ und der absolute Temperaturnullpunkt beträgt $T_0 = 0 \text{ K}$.

Die Einheit 1 K entspricht somit $1/273.16 \cdot T_{\text{tr}}$
 (nach W. Thomson, Lord Kelvin 1828-1907)

Man kann zeigen, dass die Temperatur unabhängig von der Stoffart einen absoluten Nullpunkt besitzt und Temperaturen darunter nicht existieren.

1. Der Begriff der Temperatur

Experimentell kann man dem absoluten Nullpunkt nur beliebig nahe kommen, aber nie exakt erreichen. Bei 0 K besitzen die Moleküle und Atome die sogenannte Nullpunktsenergie, d.h. die kinetische Energie ist nicht null sondern weist bei dieser Temperatur ein Minimum auf.

Für die **Skalenteilung** der Kelvin Temperaturskala verwendet man in der Praxis bei

- *hohen* Temperaturen die Gesetze der Wärmestrahlung, bei
- *mittleren* Temperaturen die thermische Dehnung eines angenähert idealen Gases (Gasthermometer) und bei
- *tiefen* Temperaturen die Gesetze der statistischen Mechanik

Die Celsius-Skala (nach A. Celsius 1701-1744)

ist definiert durch die Fixpunkte

- 0 Grad Celsius = 0 °C entspricht der Temperatur des schmelzenden Eises
- 100 Grad Celsius = 100 °C entspricht der Temperatur des siedenden Wassers

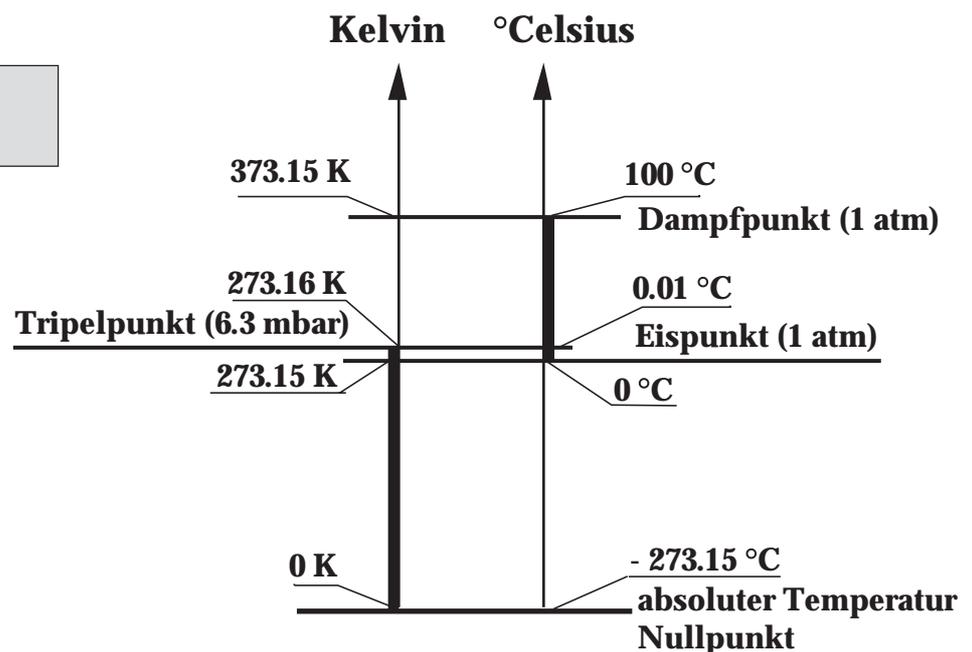
beide bei einem Druck $p = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.01325 \text{ bar} = 1 \text{ phys. Atmosphäre}$

Umrechnung $\text{K} \Leftrightarrow \text{°C}$

$$T (\text{K}) = T (\text{°C}) + 273.15 \text{ K}$$

Für Temperaturdifferenzen gilt:

$$\Delta T (\text{K}) = \Delta T (\text{°C})$$



Die Fahrenheit-Temperaturskala (nach G. D. Fahrenheit 1686-1736)
ist definiert durch die Fixpunkte

$$0\text{ }^{\circ}\text{C} = 32\text{ }^{\circ}\text{F} \quad \text{und} \quad 100\text{ }^{\circ}\text{C} = 212\text{ }^{\circ}\text{F}$$

Umrechnung $^{\circ}\text{C} \Rightarrow ^{\circ}\text{F}$

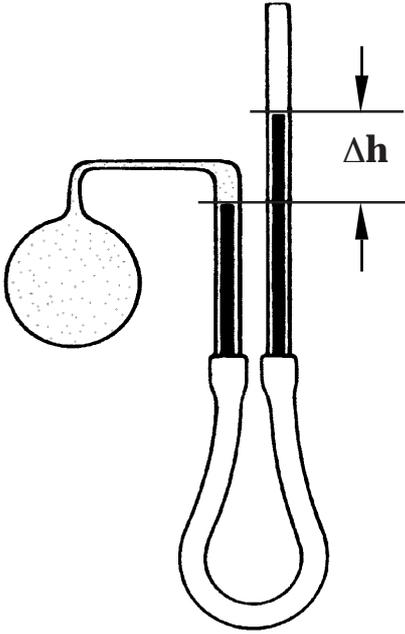
$$T\text{ (}^{\circ}\text{F)} = \frac{9}{5} \cdot T\text{ (}^{\circ}\text{C)} + 32\text{ }^{\circ}\text{F}$$

Einige Temperaturen	K	$^{\circ}\text{C}$
Temperatur eines Plasmas im Fusionsreaktor (Tokamak)	$3 \cdot 10^8$	
Inneres der Sonne	10^7	
Sonnenoberfläche	6'000	
Schmelzpunkt von Wolfram	3'653	3'380
Durchschnittstemperatur der Erdoberfläche	287.5	14.3
Tripelpunkt des Wassers	273.16	0.01
Schmelzpunkt des Quecksilbers	234.3	-38.9
Sublimationspunkt von CO_2 ('Trockeneis')	194.63	-78.5
Siedepunkt von Sauerstoff (1 atm)	90.18	-183.0
Siedepunkt von Stickstoff (1 atm)	77.35	-195.8
Siedepunkt von Wasserstoff (1 atm)	20.37	
Siedepunkt von ^4He (1 atm)	4.21	
Siedepunkt von ^3He (1 atm)	0.3	
tiefste bisher erreichte Temperatur	10^{-6}	
(durch adiabatische Demagnetisierung von Atomkernen)		

1. Der Begriff der Temperatur

Thermometer

- **Das Gasthermometer** arbeitet entweder mit konstantem Druck oder konstantem Volumen wie auf nebenstehender Abbildung

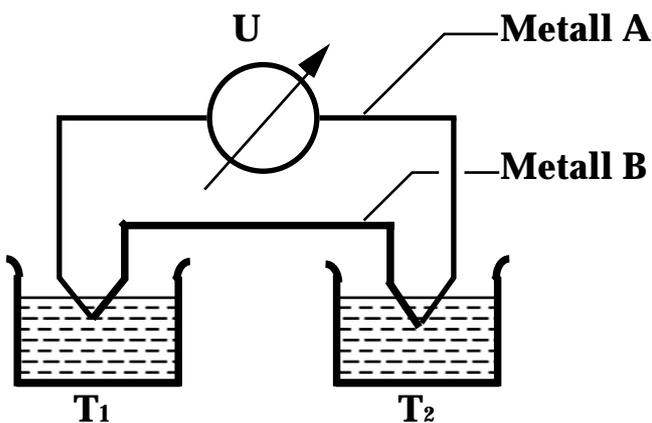


$$T = k \cdot p \quad (\text{angenähert ideales Gas})$$

Die Eichung nach Definition der Kelvinskala liefert am Tripelpunkt des Wassers

$$k = T_{\text{tr}} / p_{\text{tr}} = 273.16 \text{ K} / p_{\text{tr}}$$

- **Flüssigkeitsthermometer** Beispiel: Quecksilber-Fieberthermometer
- **Thermoelement**



Das Voltmeter misst die Thermospannung im skizzierten Kreis. Beispiel für die beiden Metalle A und B: Kupfer und Konstantan. Die Thermospannung U ist von der Größenordnung $\approx 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ V}$ pro Grad Temperaturdifferenz.

$$U \propto (T_2 - T_1)$$

- **Pyrometer**

aus der Messung der emittierten Wärmestrahlung (= elektromagnetische Strahlung) kann unter Verwendung der Strahlungsgesetze die Oberflächentemperatur eines Körpers bestimmt werden (wird später behandelt).

1.4 Thermische Dehnung

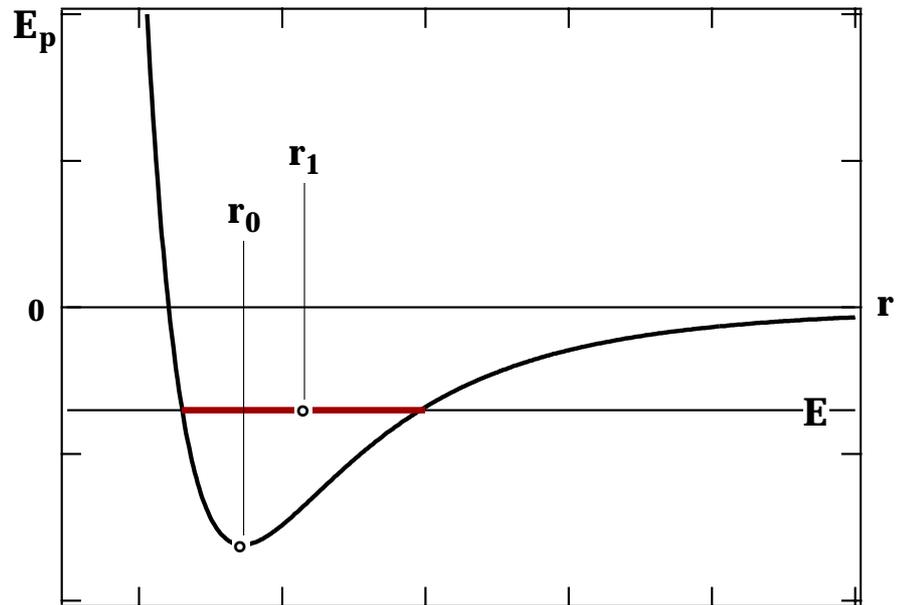
Praktisch alle Körper dehnen sich mit zunehmender Temperatur aus.

Mikroskopische Erklärung: wir betrachten das Wechselwirkungspotential zwischen zwei benachbarten Atomen

r_0 : Abstand zweier benachbarter Atome bei $T_0 = 0 \text{ K}$ (\rightarrow minimale thermische Bewegung der Atome)

r_1 : mittlere Position des Atoms bei $T_1 > T_0$

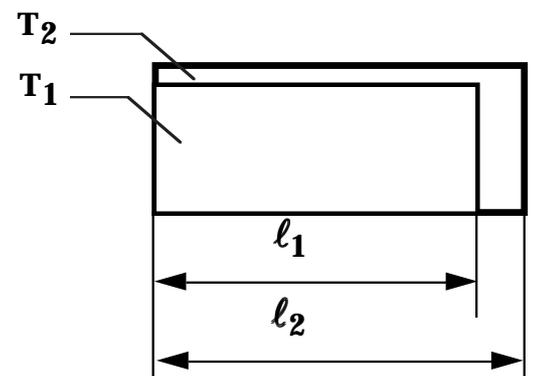
$\Rightarrow r_1 > r_0$ wegen der Asymmetrie des Potentials



Makroskopische Beschreibung der Thermischen Dehnung

ein Körper wird von einer Temperatur T_1 auf T_2 erwärmt. Dabei dehnt sich seine Länge von l_1 auf l_2 aus.

$$\begin{aligned} l_2 - l_1 &= \Delta l \\ T_2 - T_1 &= \Delta T \end{aligned}$$



Die relative Längenänderung $\Delta l / l$ ist proportional zur Temperaturänderung ΔT . Die Proportionalitätskonstante α hängt primär vom Material ab.

$$\Delta l / l = \alpha \cdot \Delta T$$

α : linearer Ausdehnungskoeffizient $[\alpha] = \text{K}^{-1} = \text{°C}^{-1}$

1. Der Begriff der Temperatur

Tabelle linearer Ausdehnungskoeffizienten α

fester Stoff	α (K^{-1})
Kupfer	$16.8 \cdot 10^{-6}$
Eisen	$12.2 \cdot 10^{-6}$
Thüringer Glas	$8.5 \cdot 10^{-6}$
Pyrex-Glas	$3.2 \cdot 10^{-6}$
Invar Stahl	$1.5 \cdot 10^{-6}$
Quarzglas	$0.45 \cdot 10^{-6}$
Edelstahl	$16 \cdot 10^{-6}$
Dentalmaterial:	
Zahnschmelze	$11.4 \cdot 10^{-6}$
Silikatzement	$7.6 \cdot 10^{-6}$
Dentalamalgam	$25.0 \cdot 10^{-6}$
Porzellan	$4.1 \cdot 10^{-6}$
Polymethylmethacrylat	$81.0 \cdot 10^{-6}$

Thermische Volumenausdehnung

Wenn wir alle drei räumlichen Dimensionen berücksichtigen, können wir auch die Volumenausdehnung eines Körpers berechnen:

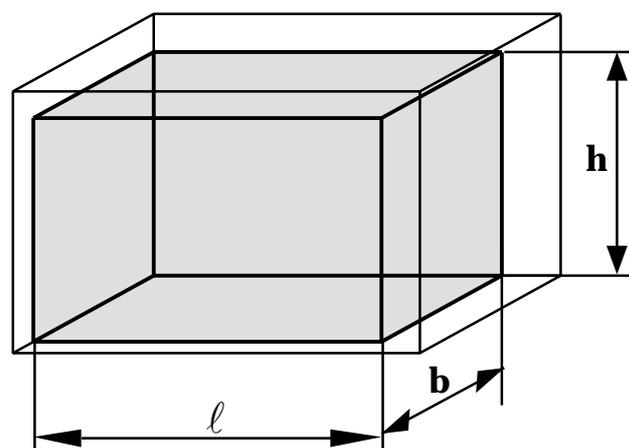
$$\Delta V/V = (V_2 - V_1)/V_1$$

$$V_2 = \ell b h (1 + \alpha \Delta T)^3$$

$$= \ell b h (1 + 3 \alpha \Delta T + \underbrace{3 \alpha^2 \Delta T^2}_{\ll 1} + \underbrace{\alpha^3 \Delta T^3}_{\ll 1})$$

$$V_2 = \ell b h (1 + 3 \alpha \Delta T)$$

$$\Delta V/V = (V_2/V_1) - 1$$



$$\Delta V/V = 3 \alpha \Delta T$$

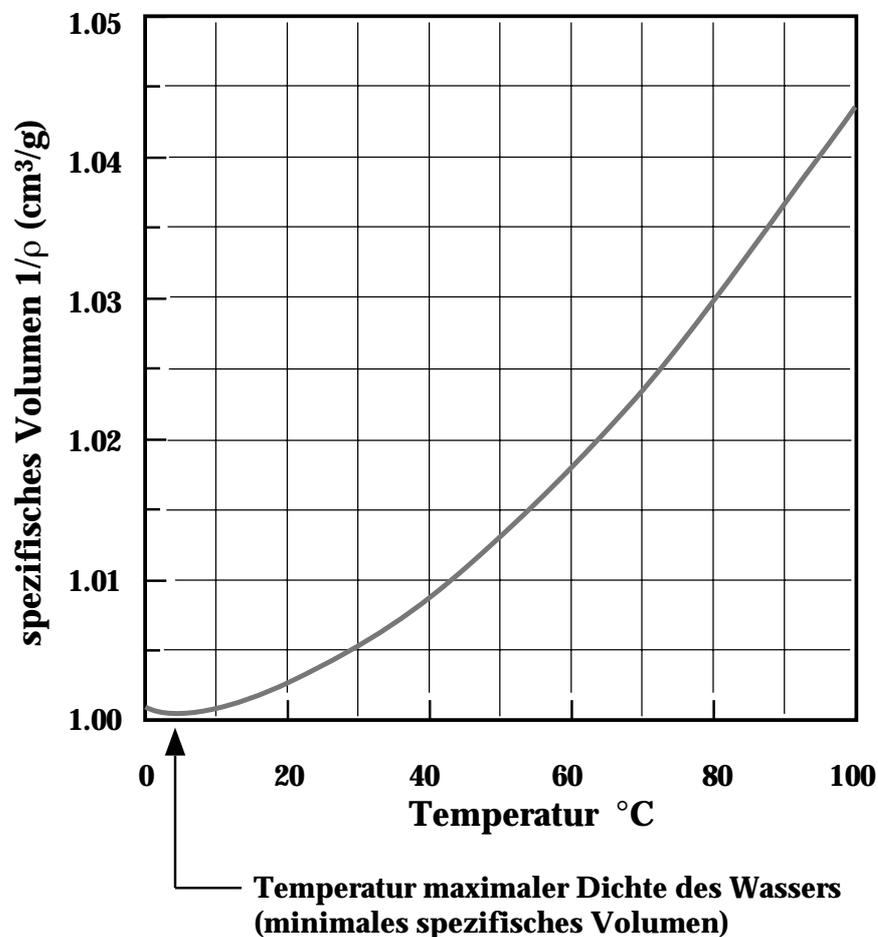
$$3 \alpha = \gamma$$

γ : Volumenausdehnungskoeffizient
 $[\gamma] = K^{-1} = ^\circ C^{-1}$

Tabelle kubischer Ausdehnungskoeffizienten γ

Stoff	γ (K ⁻¹)
Äthylalkohol (20 °C)	1'100 · 10 ⁻⁶
Quecksilber (20 °C)	182 · 10 ⁻⁶
Wasser (20 °C)	207 · 10 ⁻⁶
Eis (-5 bis 0 °C)	230 · 10 ⁻⁶

Als Beispiel für die Temperaturabhängigkeit der thermischen Dehnung ist hier das spezifische Volumen von Wasser (in cm³/g) wiedergegeben



$$\Delta V(T)/V_0 = \gamma \cdot (T - T_0)$$

- γ ist die Steigung in obiger Kurve
 im Bereich 0 .. 4 °C: negativer Ausdehnungskoeffizient
 im Bereich 4 .. 100°C: positiver Ausdehnungskoeffizient

2. Wärme und erster Hauptsatz der Thermodynamik

2.1 Wärme und Temperatur

Führt man einem System Wärme zu, so erhöht sich im allgemeinen seine Temperatur. Die Wärmezufuhr erfolgt häufig dadurch, dass ein Körper mit einer höheren Temperatur mit einem Körper mit einer tieferen Temperatur in Kontakt gebracht wird.

Eine Temperaturerhöhung erfolgt jedoch nicht nur als Folge einer Wärmezufuhr. Seit rund 200 Jahren weiss man, dass die Zufuhr von mechanischer Energie auch zu einer Temperaturerhöhung führen kann. Dies führte zur Erkenntnis, dass **Wärme** wie mechanische Arbeit **eine Form von Energie** ist.

Diese Erkenntnis zusammen mit der Energieerhaltung wurde von vielen Forschern in der gleichen Zeitperiode erarbeitet. Unter anderen waren daran beteiligt Julius Mayer (1814-1878), James Joule (1818-1889), Hermann von Helmholtz (1821-1894), L. A. Colding (1815-1888).

Wir verwenden für die Wärme das Symbol Q , die Einheit $[Q] = 1 \text{ Joule} (= 1 \text{ N}\cdot\text{m})$
Alte Einheit: $1 \text{ Kalorie} = 1 \text{ cal} = 4.185 \text{ Joule}$.

2. Wärme und erster Hauptsatz der Thermodynamik

Die Wärmekapazität

Die Zufuhr von einer Wärme ΔQ erhöhe die Temperatur eines Körpers um ΔT .

Wir definieren:

$$\Delta Q = \alpha \cdot \Delta T$$

α : **Wärmekapazität** des Körpers (oder des Systems)

Einheit von α : $[\alpha] = 1 \text{ Joule} / \text{K}$

Die **spezifische Wärmekapazität** oder **spezifische Wärme** ist definiert durch

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

c : **spezifische Wärme** des betreffenden Stoffes

Einheit von c : $[c] = 1 \text{ Joule} / \text{kg} \cdot \text{K}$

Die spezifische Wärme hängt primär vom Material ab, ist aber auch temperaturabhängig.

Tabelle spezifischer Wärmen c

Stoff	c bei 20 °C $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	Stoff	c bei 20 °C $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Blei	129	Beton	2900
Quecksilber	139	Methylalkohol	2470
Silber	234	Wasser	4187
Kupfer	385	Luft (c_p)	1003
Graphit	709	Luft (c_v)	715
Glas	840	Helium (c_p)	5230
Aluminium	896	Helium (c_v)	3125
Keramik (Al_2O_3)	1050	Wasserstoff (c_p)	14210
Porzellan	1100	Wasserstoff (c_v)	10078

Da sich bei der Erwärmung ein Körper ausdehnt, gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten für die Definition der Wärmekapazität:

Wärmezufuhr bei konstantem Druck	\Rightarrow	c_p
Wärmezufuhr bei konstantem Volumen	\Rightarrow	c_v

In Abschnitt 3.5 werden wir darauf zurückkommen.

Die **Molare Wärmekapazität C** ist die auf ein Mol bezogene Wärmekapazität:

$$\Delta Q = n C \Delta T$$

n : Anzahl Mole

$[C] = 1 \text{ Joule/mol}\cdot\text{K}$

1 mol entspricht der Substanzmenge von N_A Teilchen ($N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$)

2.2 Wärmeleitung

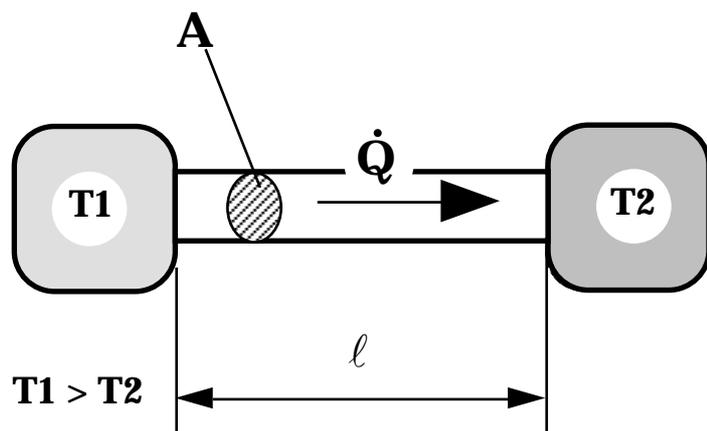
Wärmetransport in Materie findet als Folge von Temperaturdifferenzen statt.

Der **Wärmestrom** $\frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$ wird bestimmt durch die Temperaturdifferenz

pro Länge $\frac{T_1 - T_2}{\ell} = \frac{\Delta T}{\ell}$, das Material des Stabes und die Querschnittsfläche A .

Es gilt:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \lambda A \frac{\Delta T}{\ell}$$



2. Wärme und erster Hauptsatz der Thermodynamik

λ ist die Wärmeleitfähigkeit des betreffenden Materials

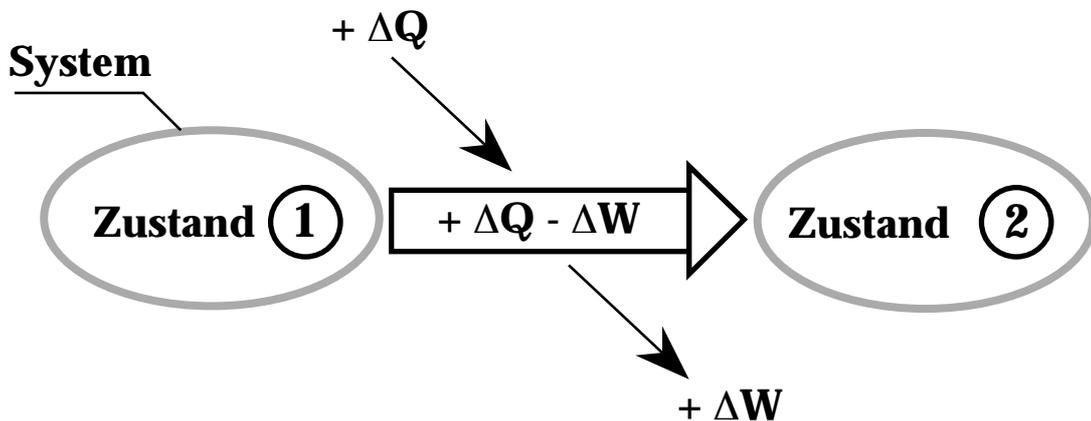
Einheit $[\lambda] = 1 \text{ W/m}\cdot\text{K}$

Tabelle der Wärmeleitfähigkeiten λ einiger Stoffe

Stoff	λ bei 20 °C $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	Stoff	λ bei 20 °C $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Diamant (isotopenrein)	3320	Porzellan	0.8
Silber	419	Eis	2.1
Kupfer	390	Wasser	0.57
Aluminium	230	Schnee	0.4
Platin	71	Alkohol	0.18
Blei	36	Helium	0.14
Quarzglas	1.4	Luft	0.025

2.3 Wärme und Arbeit

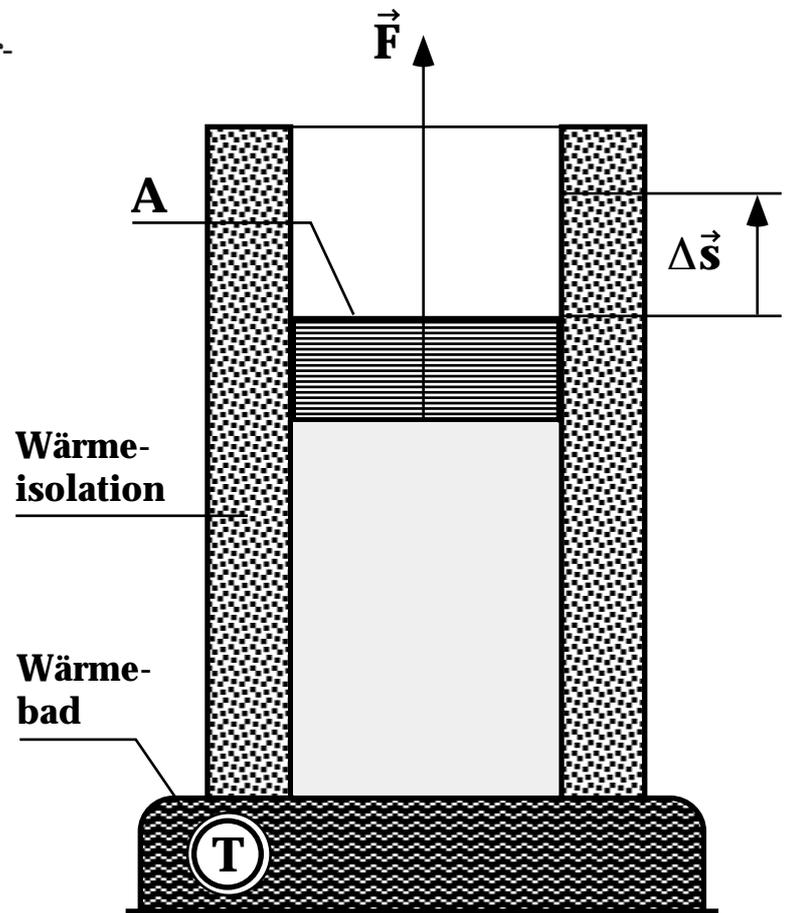
Die Thermodynamik beschäftigt sich mit dem Energieaustausch, den ein System erfährt, wenn es von einem ersten Zustand in einen zweiten Zustand übergeführt wird.



Wir betrachten nebenstehendes Modellsystem. Es besteht aus einem ideal thermisch isolierten Zylinder mit Gasfüllung, einem Kolben mit Querschnittsfläche A und einem Wärmereservoir mit einstellbarer Temperatur T .

Der Zustand des Gases wird beschrieben durch die Größen p , V und T . Eine Zustandsänderung führt das Gas von einem ersten Zustand $\textcircled{1}$ (p_1, V_1, T_1) in einen zweiten Zustand $\textcircled{2}$ (p_2, V_2, T_2) über.

Falls wir diese Zustandsänderung langsam durchführen, sind in jedem Zeitpunkt die Größen p , V und T eindeutig definiert. Die Zustandsänderung erfolgt quasi statisch über lauter Gleichgewichtszustände. Wir können deshalb die Zustandsänderung in einem Diagramm vollständig darstellen.



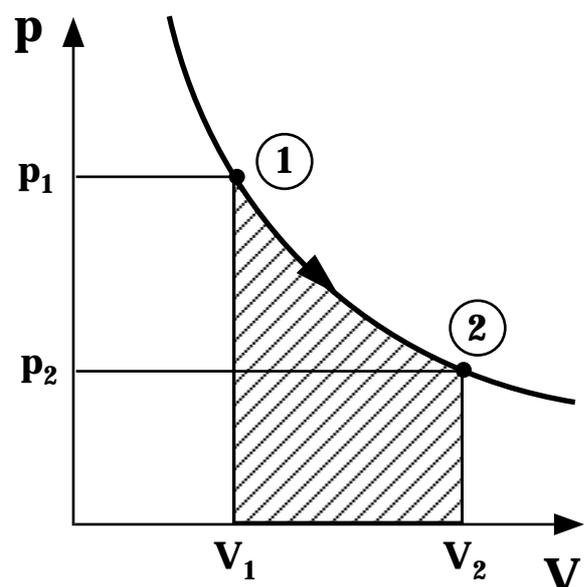
Die Arbeit dW , die das System bei der Kolbenbewegung $d\vec{s}$ verrichtet, ist

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = pA \cdot ds = p dV$$

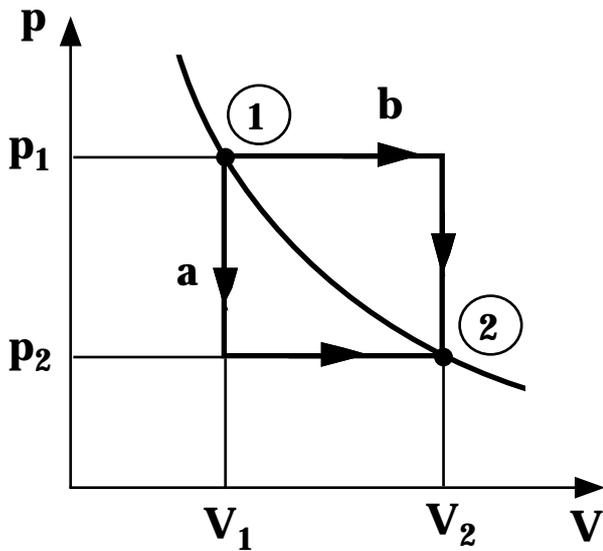
Die gesamte Arbeit ΔW für die Zustandsänderung $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$ ist

$$\Delta W = \int_1^2 dW = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

dies entspricht der schraffierten Fläche im pV -Diagramm.



2. Wärme und erster Hauptsatz der Thermodynamik



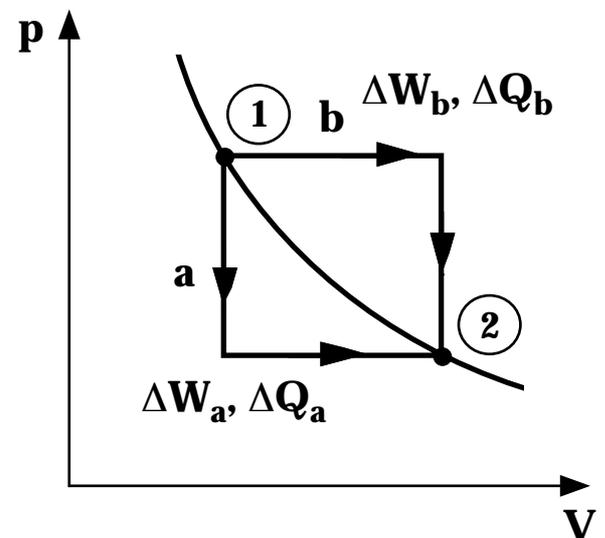
Es gibt jedoch beliebig viele Wege, um das System vom Zustand 1 in den Zustand 2 zu bringen. Die vom System verrichtete Arbeit ist dabei offensichtlich wegabhängig.

$$\Delta W_a = p_2 (V_2 - V_1)$$

$$\Delta W_b = p_1 (V_2 - V_1)$$

Bei der Zustandsänderung $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$ findet zwischen dem Gas und dem Wärmebad auch ein Wärmeaustausch ΔQ statt. Wie die Arbeit ΔW , hängt auch dieser Wärmeaustausch vom Weg ab. ΔW und ΔQ sind somit keine Zustandsvariablen.

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, postuliert der erste Hauptsatz der Thermodynamik die Existenz einer anderen Größe, die wegunabhängig ist und damit eine Zustandsvariable darstellt.



$$\Delta W_a \neq \Delta W_b$$

$$\Delta Q_a \neq \Delta Q_b$$

2.4 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Wir betrachten ein System, dem wir die Wärme ΔQ zuführen. Das System selbst verrichtet die Arbeit ΔW .

Erster Hauptsatz der Thermodynamik:

Jedes thermodynamische System in einem Gleichgewichtszustand besitzt eine Zustandsvariable U genannt **innere Energie**. Die Änderung dU der inneren Energie ist gegeben durch

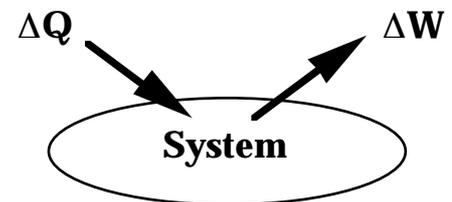
$$dU = dQ - dW$$

dabei bedeuten

dQ die dem System zugeführte Wärme und

dW die vom System verrichtete Arbeit.

$\Delta U = U_2 - U_1$ hängt also nur vom Anfangs- und Endzustand ab und längs eines geschlossenen Weges ist $\Delta U = 0$. Die Prozessführung kann dabei auch über nicht-Gleichgewichtszustände erfolgen.

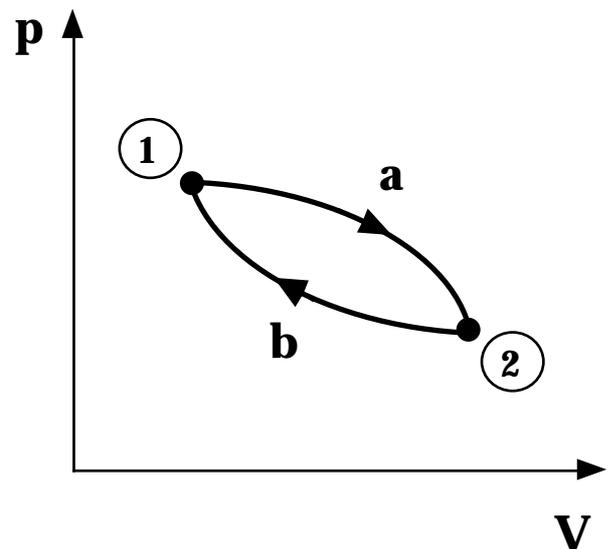


$$\Delta U_a = \int_1^2 dU \quad \text{über Weg a}$$

$$\Delta U_b = \int_2^1 dU \quad \text{über Weg b}$$

$$= -\Delta U_a$$

$$\Rightarrow \Delta U_a + \Delta U_b = \oint dU = 0$$



2.5 Anwendungen des ersten Hauptsatzes

• isobare Zustandsänderung

$p = \text{konstant}$

betrachten Expansion von V_1 auf V_2

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

$$\Delta W = p (V_2 - V_1)$$

Durch Wärmezufuhr können wir erreichen, dass Wasser verdampft wird. Als Folge davon vergrößert sich das Volumen der Dampfphase. Wenn wir die spezifische Verdampfungswärme mit λ (Joule / kg) bezeichnen dann gilt für die zugeführte Wärme:

$$\Delta Q = \Delta m \cdot \lambda$$

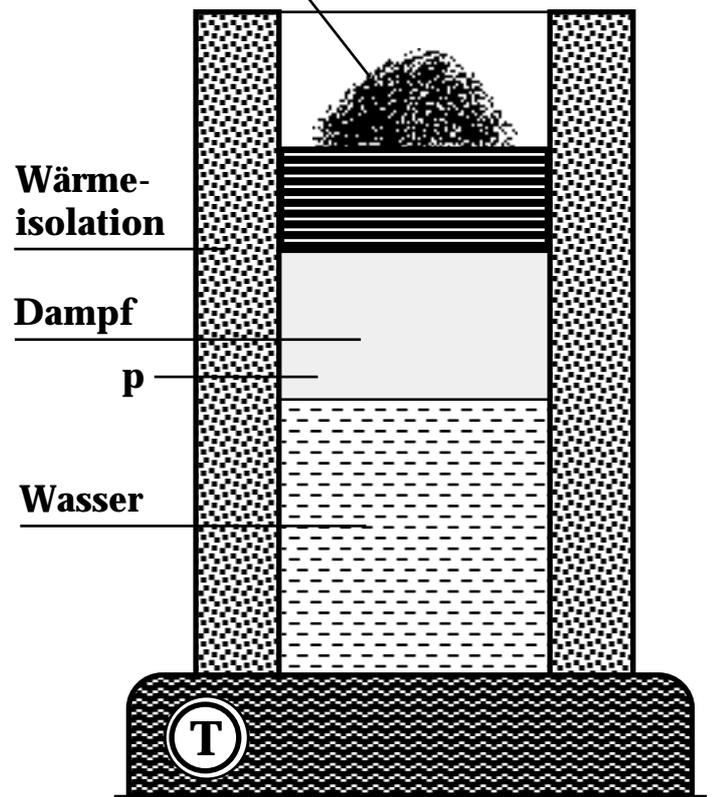
Δm ist die Masse des Wassers, die in Dampf übergeführt wird.

Für die Änderung der inneren Energie gilt dann

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

$$\Delta U = \Delta m \cdot \lambda - p (V_2 - V_1)$$

Gewicht



neben dem äusseren Druck bestimmen das Gewicht des Sands und die Kolbenfläche den (konstanten) Druck p über dem Wasser.

• adiabatische Zustandsänderung

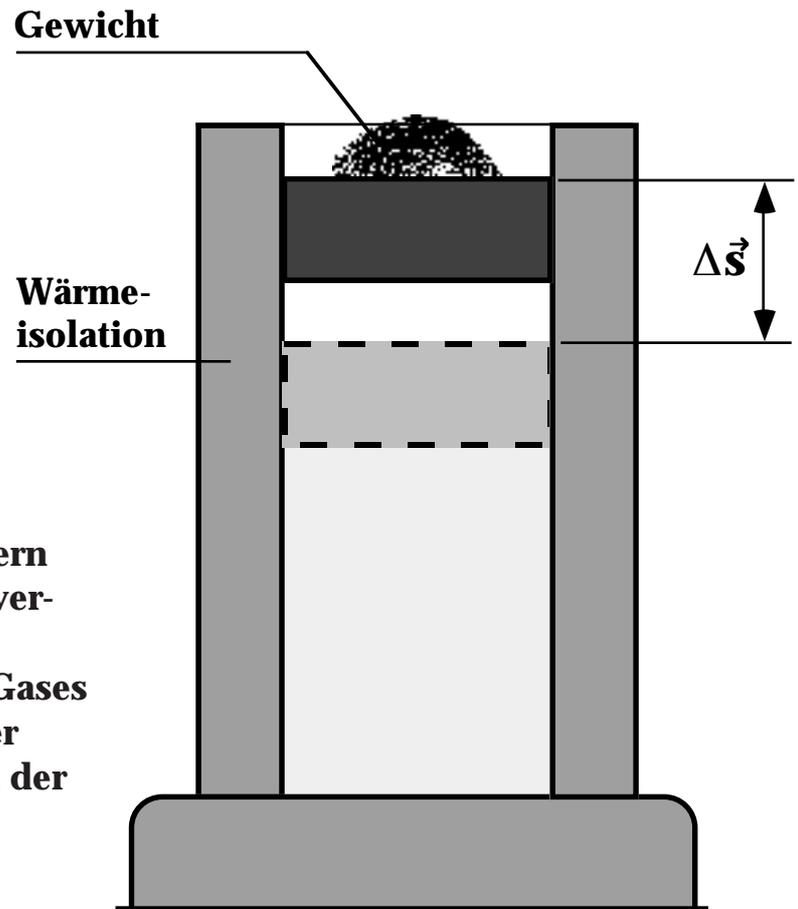
adiabatisch heisst $\Delta Q = 0$

Kann realisiert werden durch Wärmeisolation oder sehr schnellen Prozess (z.B. Verbrennungsmotor)

Der erste Hauptsatz lautet dann :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\Delta W$$

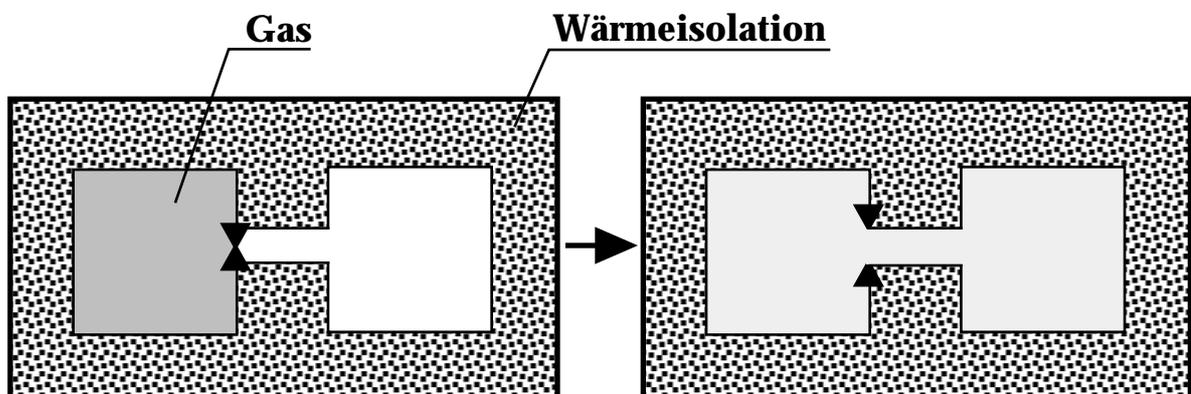
Falls wir im Modell das Gewicht vergrößern oder verkleinern, wird am System Arbeit verrichtet oder das System verrichtet Arbeit. Daraus folgt, dass die innere Energie des Gases damit entweder zunimmt (um $+\Delta W$, bei der Kompression) oder abnimmt (um $-\Delta W$, bei der Expansion).



• freie Expansion

Bei diesem Überströmversuch gilt : $\Delta Q = 0$ und $\Delta W = 0$
somit ist auch $\Delta U = 0$

Später werden wir sehen, dass dieser Prozess **irreversibel** ist.



3. Kinetische Gastheorie

3.1 Thermodynamik und statistische Mechanik

Die **Thermodynamik** beschäftigt sich mit der Verknüpfung makroskopischer Variablen wie Druck, Volumen, Temperatur und Wärme.

Die **statistische Mechanik** beschäftigt sich mit demselben Gebiet, geht jedoch von der Existenz von Atomen aus und wendet fundamentale Gesetze der Mechanik auf diese Atome an.

- die **kinetische Theorie** verwendet einfache mathematische Mittelwertbildungen (dies wenden wir hier auf den Druck, Temperatur, spezifische Wärme und die innere Energie von Gasen auf atomarer Stufe an).
- die **statistische Mechanik** basiert auf einer formaleren und abstrakteren Anwendung der Gesetze der Mechanik und leitet dadurch die Gesetze der Thermodynamik her.

3.2 Das ideale Gas

Alle Gase verhalten sich unter gewissen Bedingungen (bei kleinen Dichten) ähnlich, und es existiert ein einfacher Zusammenhang zwischen den Größen p , V und T für eine bestimmte Gasmenge.

3. Kinetische Gastheorie

Das ideale Gas lässt sich durch folgende Gesetze charakterisieren:

Für eine feste Gasmenge gilt

$p \cdot V = \text{konstant}$ bei konstanter Temperatur	Gesetz von Boyle - Mariotte (Robert Boyle 1627 - 1691 und Edme Mariotte 1620 - 1684)
$V/T = \text{konstant}$ bei konstantem Druck	Gesetz von Charles (Jacques Charles 1746 - 1823)
$p/T = \text{konstant}$ bei konstantem Volumen	Gesetz von Gay - Lussac (Louis Gay - Lussac 1778 - 1850)

Diese Gesetze lassen sich zum **Gasgesetz des idealen Gases** zusammenfassen
(gleichzeitig definiert diese Gleichung das ideale Gas)

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

n : Anzahl Mole

R : universelle Gaskonstante **R = 8.314 J/mol·K**

T : Temperatur in Kelvin

Anwendungsbeispiel zum Gesetz des idealen Gases:

Isotherme (T = konst.) Expansion eines idealen Gases:

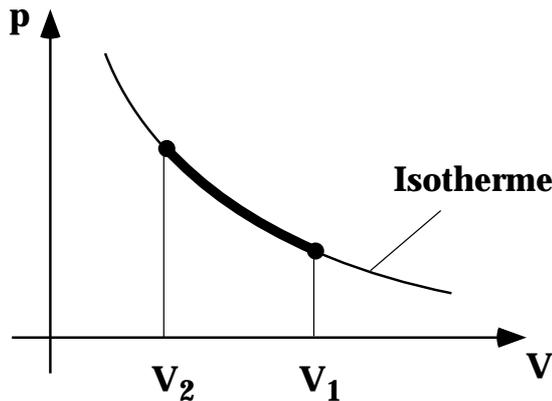
berechne die Arbeit, die das Gas bei der Expansion von V_1 auf V_2 verrichtet.

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n R T}{V} \, dV = n R T (\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$\Delta W = n R T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Beispiel:

Welche Energie wird benötigt, um Stickstoff von 1 bar in eine Pressgasflasche ($V_2 = 50 \text{ l}$, $T = 300 \text{ K}$, $p_2 = 200 \text{ bar}$) isotherm abzufüllen ?



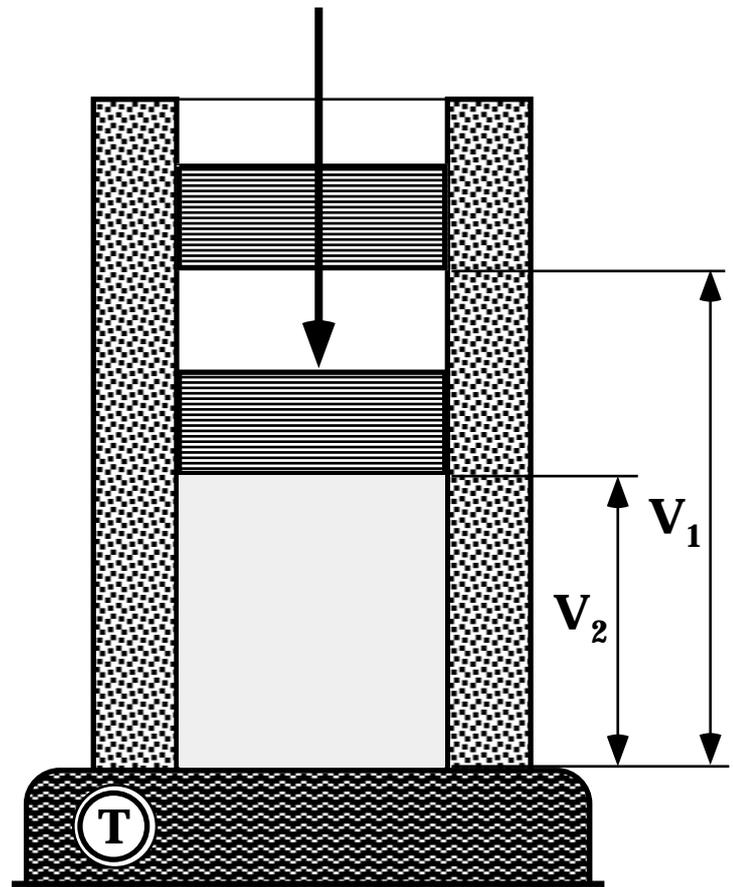
$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{p_2 V_2}{p_1}$$

$$\text{für ein ideales Gas gilt: } n = \frac{p_2 V_2}{R T}$$

$$\Delta W = n R T \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2 V_2}{R T} R T \ln \frac{V_2}{p_2/p_1 \cdot V_2}$$

$$\Delta W = p_2 V_2 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$\Delta W = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \ln \left(\frac{1 \text{ bar}}{200 \text{ bar}} \right) = -5.3 \cdot 10^6 \text{ J}$$



benötigte Energie: $\Delta E = 5.3 \cdot 10^6 \text{ J}$ (entspricht 1.47 kWh)

3.3 Mikroskopische Eigenschaften des idealen Gases

Die mikroskopischen Eigenschaften des idealen Gases sind die folgenden (es bleibt dann zu zeigen, dass diese konsistent sind mit obiger makroskopischer Beschreibung):

1. Das Gas besteht aus vielen ($\approx 10^{23}$) identischen Teilchen (Atome oder Moleküle)
2. Die Teilchen gehorchen der Newtonschen Mechanik
3. Die Teilchen sind punktförmig (Eigenvolumen = 0)
4. Ausser elastischen Stößen existiert keine Wechselwirkung zwischen den Teilchen

Berechnung des Druckes

Wir betrachten ein Teilchen in einem Kubus mit Kantenlänge ℓ . An den Wänden wird das Teilchen elastisch reflektiert.

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Der Druck auf eine Wand kann berechnet werden aus dem Impulsübertrag der Teilchen auf die Einheitsfläche :

$$\frac{F}{A} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{A}$$

Bei der Reflexion eines Teilchens an der rechten Seitenwand beträgt die Impulsänderung Δp

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -mv_x - mv_x = -2mv_x$$

Die Rate (= Anzahl Stöße pro Zeit) mit der das Teilchen auf die vordere Wand auftrifft ist gegeben durch

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{v_x}{2 \cdot \ell} \quad [\text{s}^{-1}]$$

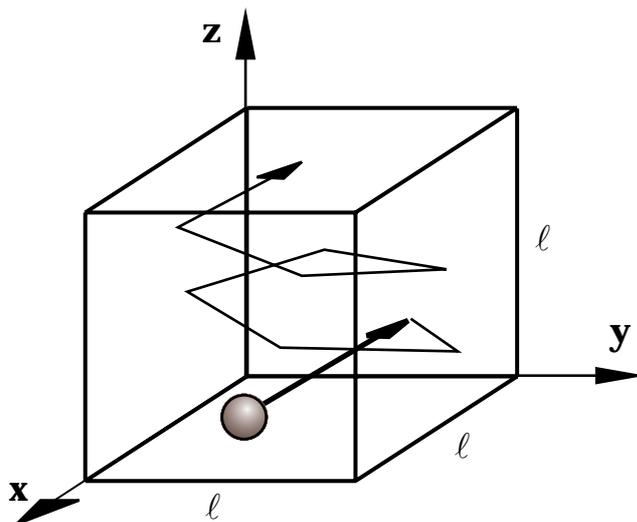
Für ein Teilchen ergibt sich somit

$$\frac{F}{A} = \frac{2 m v_x^2}{2 \ell^3} = \frac{m}{V} v_x^2 \quad \text{mit } V = \ell^3$$

Den gesuchten Druck p erhalten wir wenn wir alle N Teilchen berücksichtigen

$$p = \frac{m N}{V} \left(\frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \dots + v_{xN}^2}{N} \right) \quad \text{also} \quad p = \rho \overline{v_x^2}$$

wobei $\overline{v_x^2}$ der Mittelwert der Geschwindigkeitsquadrate v_x^2 ist.



Da für jedes Teilchen gilt:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

und die Richtungsverteilung völlig zufällig ist, gilt:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

und somit

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$$

$$\overline{v^2} = \frac{3p}{\rho} \Leftrightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} \quad (\text{rms: 'root mean square'})$$

Beispiel:

Wasserstoff H_2 bei 0°C und 1 atm.

$$\rho = \frac{M}{V_M} = \frac{M}{RT/p} = \frac{2.02 \cdot 10^{-3} \cdot 1.01325 \cdot 10^5}{8.314 \cdot 273.15} = 9.01 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.01325 \cdot 10^5}{9.01 \cdot 10^{-2}}} = 1837 \text{ m/s}$$

3.5 Spezifische Wärme des idealen Gases

Da zwischen den Molekülen des idealen Gases ausser bei elastischen Stössen keine Kräfte wirken, ist die potentielle Energie der Teilchen null und die innere Energie des Gases steckt nur in der kinetischen Energie der Moleküle. Diese beträgt nach obigem Abschnitt für ein einatomiges Gas :

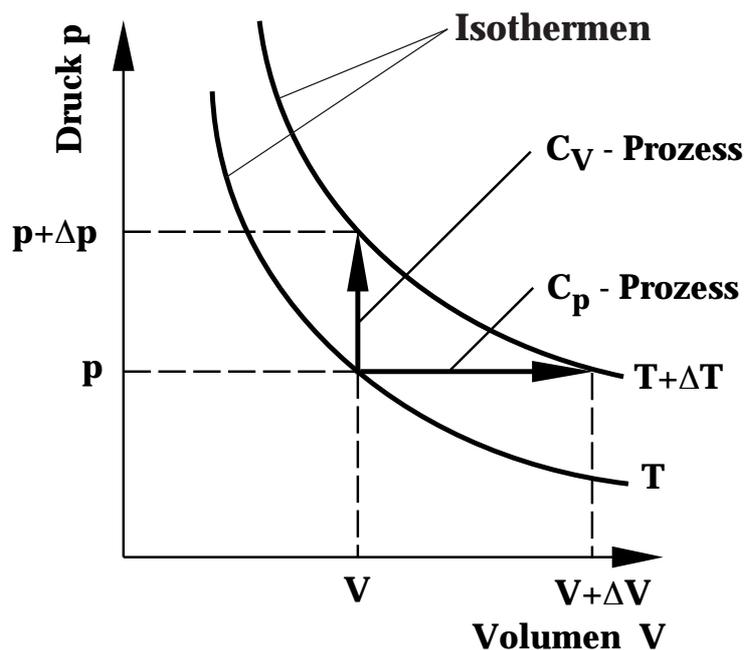
$$U = \frac{1}{2} M \cdot n \cdot \overline{v^2} = \frac{3}{2} n \cdot R \cdot T$$

U ist also proportional zur Temperatur (in K) und ist unabhängig vom Druck und Volumen.

Die molare Wärmekapazität bezeichnen wir mit C und wird berechnet durch

$$C = \frac{dQ}{dT} \cdot \frac{1}{n}$$

Wie bereits weiter oben ausgeführt kann die Wärme- und Temperaturänderung als Prozess bei konstantem Druck ($\Rightarrow C_p$) oder konstantem Volumen ($\Rightarrow C_V$) realisiert werden.



3.6 Aequipartition der Energie

Die gemessenen spezifischen Wärmen von Gasen zeigen, dass molekulare Gase (2 und mehratomige Moleküle) höhere molare spezifische Wärmen aufweisen.

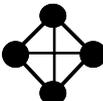
Aequipartitionsprinzip:

Jeder energietragende Freiheitsgrad eines Atoms oder Moleküls besitzt im Mittel die Energie $\frac{1}{2} k T$ oder auf 1 Mol bezogen $\frac{1}{2} R T$.
(James Clerk Maxwell, 1831 - 1879)

Das bedeutet, dass jeder energietragende Freiheitsgrad mit dem Wert $1/2 R = 4.16 \text{ J/mol}$ zur molaren spezifischen Wärme beiträgt.

Wie in der Mechanik (Abschnitt 8.5 Gekoppelte Oszillatoren) ausgeführt wurde, unterscheidet man Translations-, Rotations- und Vibrationsfreiheitsgrade. Die Gesamtzahl der (geometrischen) Freiheitsgrade ist $3i$ (i ist die Zahl der Atome im Molekül).

Beispiele

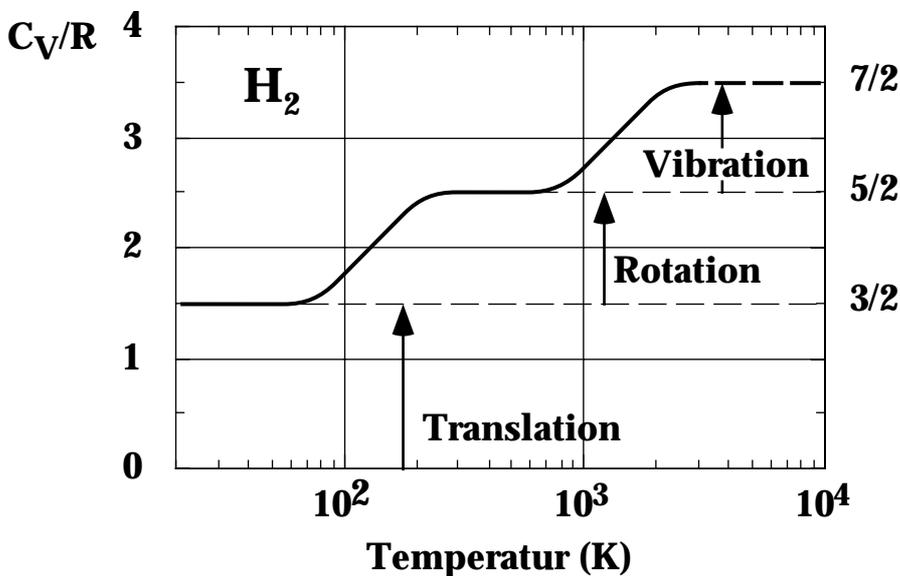
Gas	$i = \frac{\text{Atome}}{\text{Molekül}}$	f_{trans}	f_{rot}	f_{vibr}	$f_{\text{tot}} (=3i)$
He 	1	3	0	0	3
H ₂ 	2	3	2	1	6
CO ₂ 	3	3	2	4	9
NH ₃ 	4	3	3	6	12

3. Kinetische Gastheorie

Für die Berechnung der molaren spezifischen Wärme eines Moleküls ist zu beachten, dass die vibratorischen Freiheitsgrade mit $2 \cdot R/2$ beitragen, da die Vibrationsbewegung *potentielle* und *kinetische Energie* besitzt. Diese zwei Energieformen tragen je für jeden Vibrationsfreiheitsgrad mit $R/2$ zur molaren spezifischen Wärme bei.

Molekül	Beispiel	$C_V(\text{J/mol}\cdot\text{K})$
einatomig 	ideal	$3 R/2 = 12.5$
	He	12.5
	Ar	12.6
zweiatomig 	ideal	$7 R/2 = 29.0$
	N_2	20.7
	O_2	20.8
dreiatomig (gestreckt) 	ideal	$13 R/2 = 54.0$
	CO_2	29.7

Die Anregung der verschiedenen Freiheitsgrade ist von der Temperatur abhängig. Zuerst werden die Translationsfreiheitsgrade angeregt, dann die Rotations- und schliesslich die Vibrationsfreiheitsgrade. Unsere klassische Mechanik sagt nichts darüber aus, warum die Anregung in dieser Art erfolgt. Die Erklärung dafür bleibt der Quantenmechanik vorbehalten. Dies zeigt wie die Newtonsche (= klassische) Mechanik versagen kann, wenn man in atomare Dimensionen vorstösst.



C_V von Wasserstoff H_2 in Abhängigkeit der Temperatur

Adiabatische Zustandsänderung des idealen Gases

adiabatisch heisst $dQ = 0$

1. Hauptsatz

$$dU = dQ - dW$$

vom System (Gas) verrichtete Arbeit :

$$dW = p dV$$

dU für das ideale Gas :

$$dU = n C_V dT$$

$$\rightarrow dQ = 0 = n C_V dT + p dV$$

$$\rightarrow dT = - \frac{p dV}{n C_V}$$

andererseits ist nach der Zustandsgleichung des idealen Gases

$$p V = n R T$$

$$dT = \frac{p dV + V dp}{n R}$$

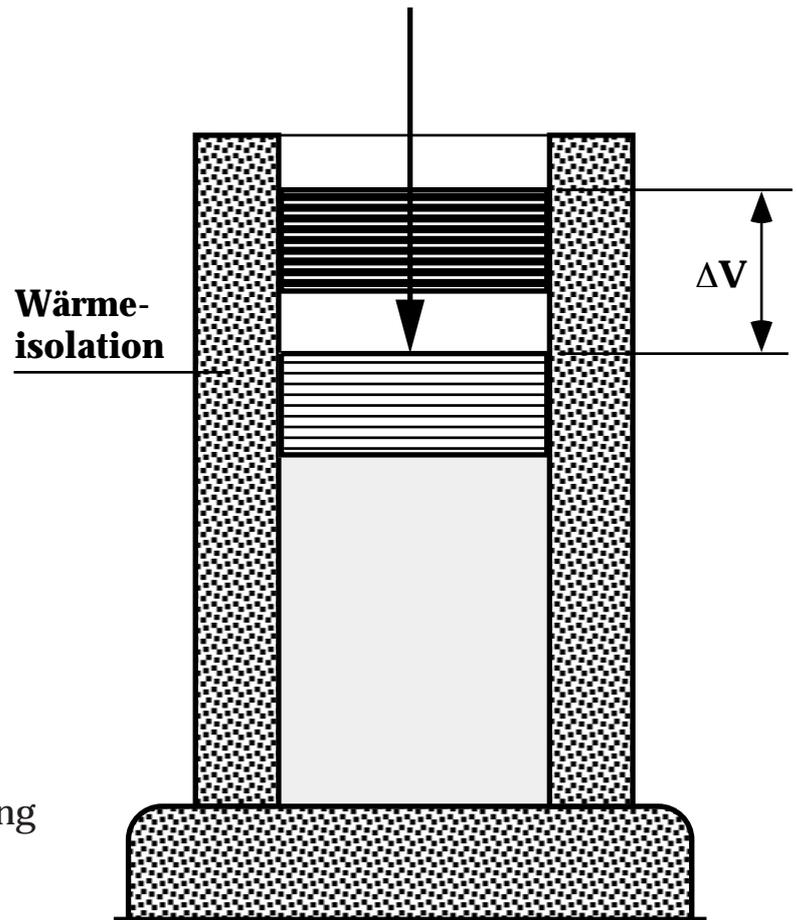
gleichgesetzt liefert

$$- \frac{p dV}{n C_V} = \frac{p dV + V dp}{n R}$$

$$- R p dV = C_V p dV + C_V V dp$$

$$\text{setzen } R = C_p - C_V$$

$$0 = C_p p dV + C_V V dp$$



3. Kinetische Gastheorie

oder

$$\frac{dp}{p} + \frac{C_p}{C_v} \frac{dV}{V} = 0 \quad \text{wir setzen} \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma$$

$$\int \frac{dp}{p} + \gamma \int \frac{dV}{V} = 0$$

$$\ln p + \gamma \cdot \ln V = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow p \cdot V^\gamma = \text{konstant} \quad \text{Gleichung der Adiabaten}$$

$$\text{dabei bedeutet } \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Für das *ideale Gas* gilt für die Isothermen:

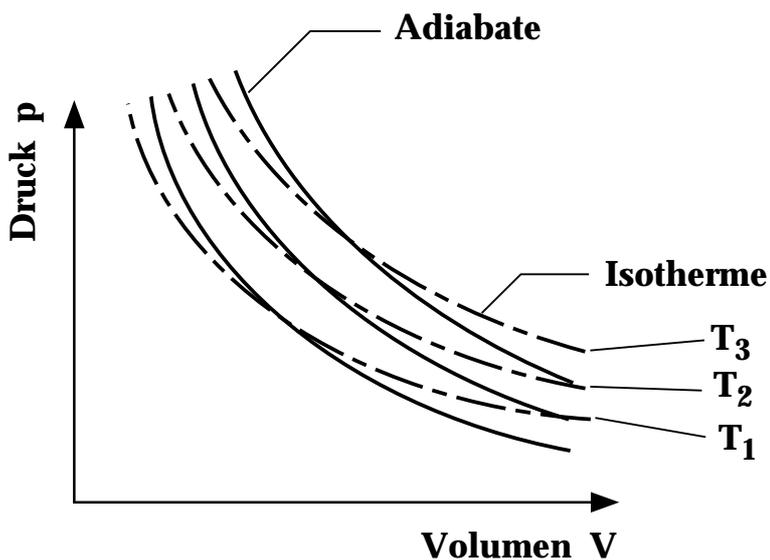
$$p \cdot V = \text{konstant}$$

Für das einatomige *ideale Gas* gilt:

$$\gamma = \frac{(3/2 + 1) R}{3/2 R} = 5/3 = 1.66$$

oder allgemein für ein Gas mit f Freiheitsgraden:

$$\gamma = \frac{f/2 + 1}{f/2}$$



Die Adiabaten verlaufen steiler als die Isothermen.

Gleichung der Adiabaten:

$$p V^\gamma = \text{konstant}$$

Gleichung der Isothermen:

$$p V = \text{konstant.}$$

3.7 Brownsche Bewegung und mittlere freie Weglänge

Kleine Teilchen (Staub, Russ), die sich in Gasen oder Flüssigkeiten befinden, sind nicht in Ruhe, sondern führen unregelmässige Bewegungen aus, die man mit dem Mikroskop beobachten kann (Robert Brown, 1773- 1858). Die Bewegung der Teilchen, die Brownsche Bewegung, kommt durch Stösse mit den Gas- oder Flüssigkeitsmolekülen zustande und macht damit thermische Bewegungen direkt sichtbar.

Eine ähnliche Bewegung führen auch Gasmoleküle aus. Zwischen zwei Stössen bewegen sie sich geradlinig.

Der zurückgelegte Weg zwischen zwei Stössen bezeichnet man als **mittlere freie Weglänge $\bar{\ell}$** .

Diese ist indirekt proportional zur Teilchendichte n (Teilchen /m³) und zur Querschnittsfläche der Teilchen.

Es gilt (ohne Beweis)

$$\bar{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2} n \cdot \sigma}$$

mittlere freie Weglänge

σ : geometrischer Stossquerschnitt $\sigma = \pi (r_1 + r_2)^2$

r_1, r_2 Radien des stossenden und gestossenen Teilchens

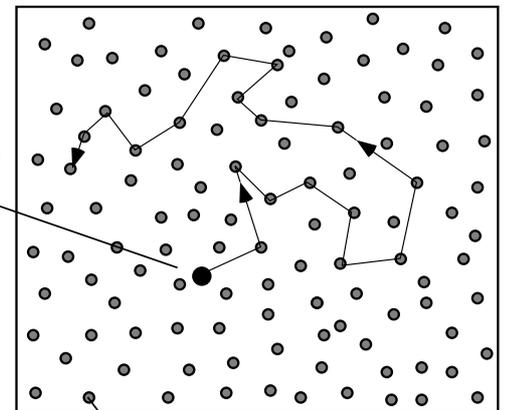
Beispiel: Gas unter Normalbedingungen (1 atm, 0° C)

$$r_1 = r_2 = 10^{-10} \text{ m} \quad n = \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{0.0224} \frac{\text{Teilchen}}{\text{m}^3}$$

$$\Rightarrow \bar{\ell} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2.7 \cdot 10^{25} \cdot \pi (2 \cdot 10^{-10})^2} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0.2 \text{ } \mu\text{m}$$

$$\text{im Hochvakuum: } p = 10^{-9} \text{ atm} \Rightarrow \bar{\ell} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{10^{-9}} = 200 \text{ m}$$

Partikel
(Staub, Russ)



Gas- oder Flüssigkeits-
moleküle

3. Kinetische Gastheorie

Aus der mittleren freien Weglänge $\bar{\ell}$ und der mittleren Translationsgeschwindigkeit $\sqrt{\bar{v}^2}$ lässt sich die Stossfrequenz $\bar{\nu}$ eines Teilchens berechnen :

$$\bar{\nu} = \frac{\sqrt{\bar{v}^2}}{\bar{\ell}}$$

$\sqrt{\bar{v}^2}$ ist von der Grössenordnung 10^3 m/s, $\bar{\ell}$ beträgt bei Normalbedingungen rund 10^{-7} m

Daraus ergibt sich die Stossfrequenz $\bar{\nu} \approx 10^{10} \text{ s}^{-1}$.

3.8 Die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle

Im Abschnitt 3.3 haben wir die mittlere Geschwindigkeit $\sqrt{\bar{v}^2}$ berechnet. Die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung gibt darüber Auskunft, wie die Geschwindigkeiten der Gasmoleküle statistisch verteilt sind, oder präziser, wie gross die Zahl der Gasmoleküle mit Geschwindigkeiten in einem vorgegebenen Intervall (von v bis $v+dv$) ist.

Maxwell-Boltzmann Verteilung der Geschwindigkeiten (ohne Beweis):

$$N(v) dv = N \cdot \left(\frac{m}{2 \pi k T} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{-m v^2}{2 k T} \right) \cdot 4 \pi v^2 dv$$

(nach James Clerc Maxwell, 1831-1879 und Ludwig Boltzmann, 1844-1906)

es bedeuten:

$N(v)dv$: Zahl der Moleküle mit Geschwindigkeiten im Intervall von v bis $v+dv$

N : gesamte Teilchenzahl

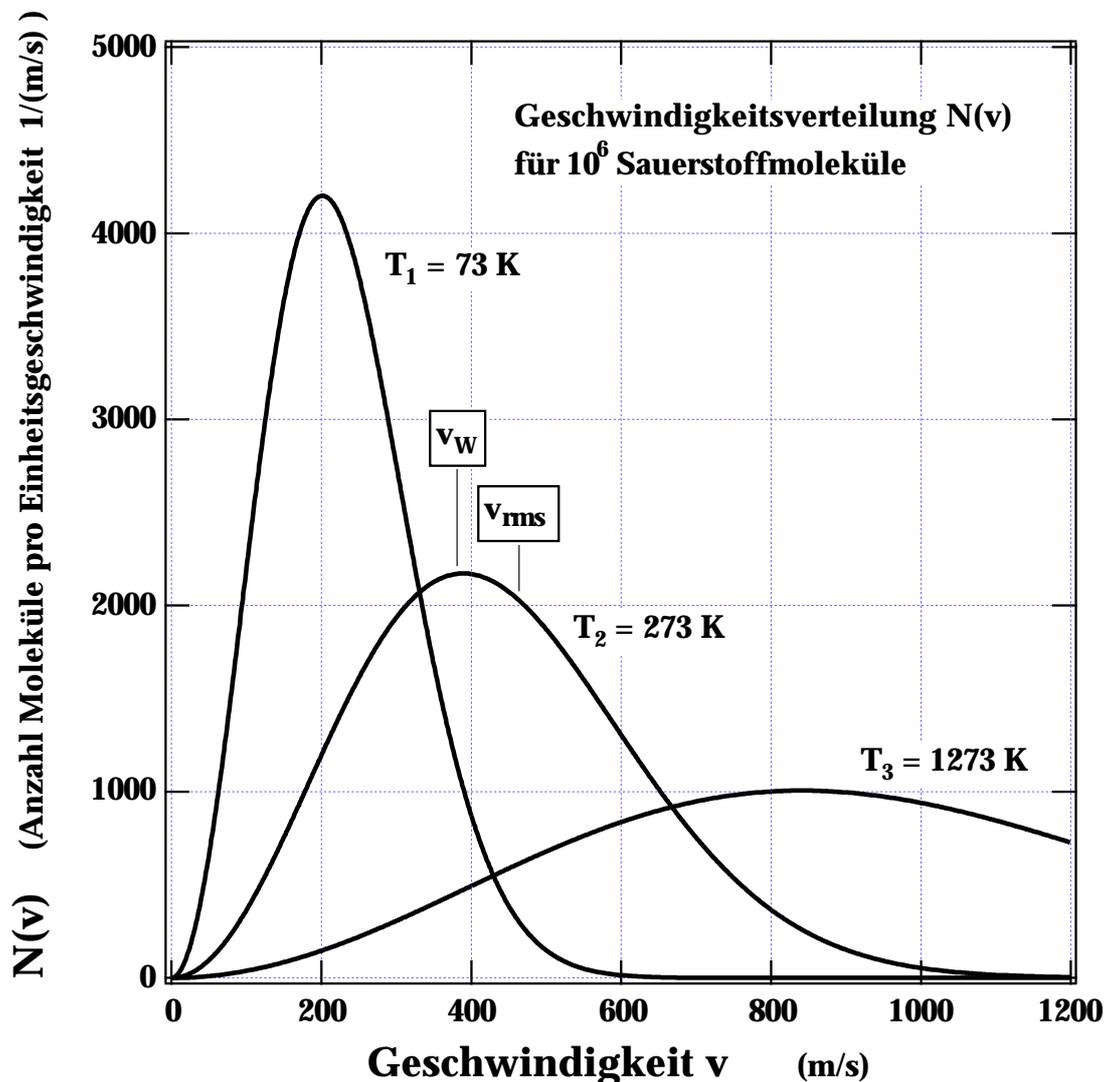
m : Masse des Moleküls

k : Boltzmann-Konstante

T : Temperatur in Kelvin

Eigenschaften der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung

- es existiert keine Maximalgeschwindigkeit. Bei grossen Geschwindigkeiten nimmt $N(v)$ exponentiell ab.
- bei kleinen Geschwindigkeiten ist $N(v)$ proportional zu v^2
- das Maximum der Kurve liefert die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_W
- $v_W \neq \sqrt{v^2}$ ($= v_{\text{rms}}$)
- $v_{\text{rms}} = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_W$



3.9 Reale Gasgleichung

Beim idealen Gas (Abschnitt 3.3) haben wir zwei wesentliche vereinfachende Voraussetzungen gemacht :

- die Atome oder Moleküle eines Gases sind punktförmig (d. h. sie besitzen kein Eigenvolumen)
- zwischen den Teilchen gibt es keine anziehenden Kräfte

Diese Voraussetzungen führen dazu, dass das Modell des idealen Gases bei hohen Drücken und tiefen Temperaturen versagt :

- ein reales Gas lässt sich nicht auf beliebig kleine Volumina komprimieren
- das reale Gas zeigt Kondensation

Die Zustandsgleichung für reale Gase wurde von J. D. van der Waals (1837-1923) formuliert :

Van der Waalssche Gasgleichung

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2} \right) \cdot (V - n \cdot b) = n R T$$

a, b : van der Waalssche Konstanten (abhängig von der Gasart)

$\frac{a \cdot n^2}{V^2}$: entspricht dem Binnendruck, der aus der Wechselwirkung der Moleküle resultiert.

nb : entspricht dem Eigenvolumen der Moleküle

3. Kinetische Gastheorie

Einige kritische Zustandsgrößen

Gas	T_K (K)	T_K (°C)	p_K (10^5 N/m ²)
He	5.3	-267.9	2.22
H ₂	33.3	-239.9	12.5
N ₂	126.1	-147.1	32.9
CO	134.0	-139.2	34.3
O ₂	154.4	-118.8	48.7
CH ₄	190.7	-82.5	44.9
CO ₂	304.2	31.0	71.6
NH ₃	405.6	132.4	109.3
H ₂ O	647.2	374.0	213.5

4. Entropie und 2. Hauptsatz der Thermodynamik

4.1 Die Richtung thermodynamischer Prozesse

Der erste Hauptsatz ist der Energieerhaltungssatz der Thermodynamik. Er besagt, dass beim Prozess vom Zustand 1 zu einem Zustand 2 gelten muss:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W$$

1. Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz sagt jedoch nichts darüber aus, ob ein Prozess auch vom Zustand 2 nach Zustand 1 spontan abläuft.

Beispiel:

Zwei Körper, die in Kontakt sind und sich auf gleicher Temperatur befinden, tauschen nie Wärme aus, so dass ein Körper immer heißer und der andere kälter wird (obschon dies nicht im Widerspruch zum ersten Hauptsatz wäre).

Der zweite Hauptsatz beschäftigt sich mit der Frage der **Richtung** in der thermodynamische Prozesse ablaufen oder anders ausgedrückt mit der **Wahrscheinlichkeit** eines thermodynamischen Zustandes.

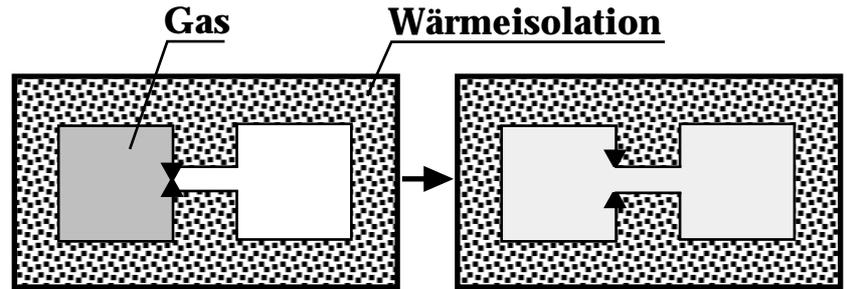
4.2 Irreversible und reversible Zustandsänderungen

Definition:

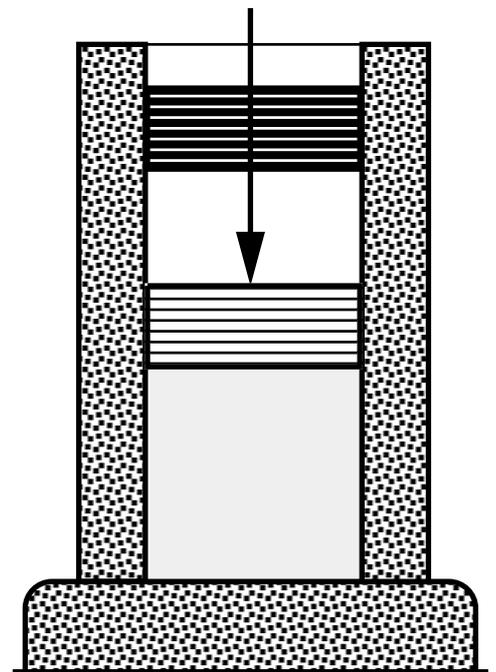
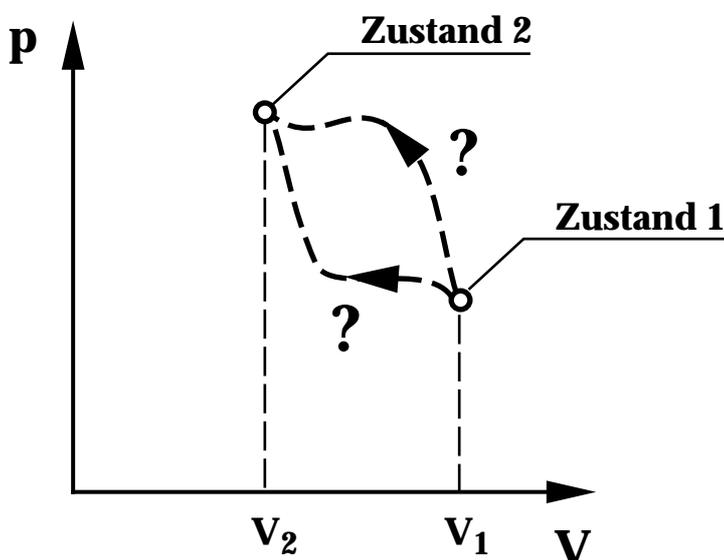
Zustandsänderungen werden als reversibel bezeichnet, wenn die Richtung, in der sie ablaufen, durch differentiell kleine Änderungen der Umgebung umgekehrt werden kann. Bei irreversiblen Prozessen kann die Richtung in der sie ablaufen nicht durch differentiell kleine Einwirkungen der Umgebung gewendet werden.

Beispiele von irreversiblen und reversiblen Prozessen:**1. Freie Expansion eines Gases**

Wenn der Verbindungshahn geöffnet ist, strömt das Gas irreversibel in die rechte Kammer, bis der Druck links und rechts derselbe ist. Die freie Expansion kann nicht durch differentiell kleine Einwirkung von aussen rückgängig gemacht werden.

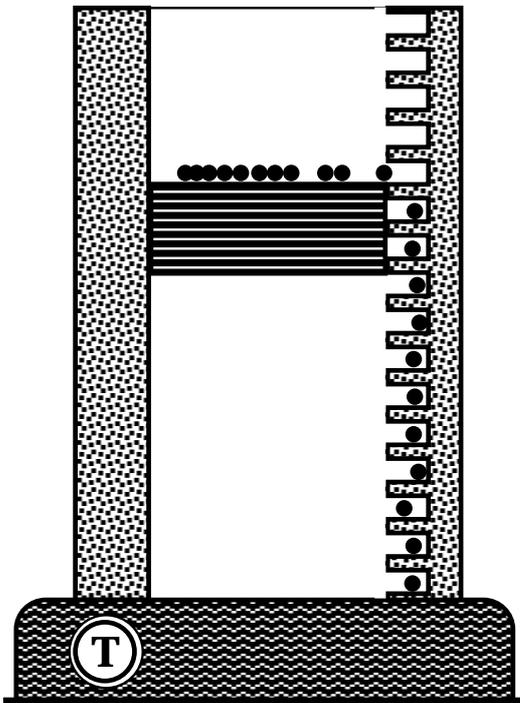
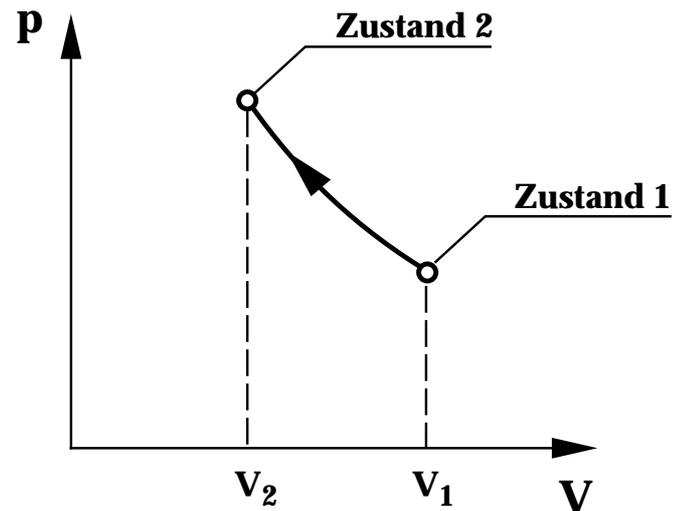
**2. Sehr schnelle Kompression eines Gases**

Ein Gas wird in einem Zylinder auf das halbe Volumen ruckartig komprimiert. Anfangs- (1) und Endzustand (2) sind Gleichgewichtszustände (mit definierten Größen p , V und T) und können somit z.B. im p - V Diagramm eingezeichnet werden. Die Zustandsänderung erfolgt jedoch über nicht-Gleichgewichtszustände. So können während der Kompression z.B. Turbulenzen im Gas entstehen und dadurch sind die Zustandsgrößen während der Kompression nicht definiert. Der Weg vom Zustand 1 in den Zustand 2 kann im p - V Diagramm somit nicht eingezeichnet werden. Diese Zustandsänderung ist irreversibel.



3. Reversible isotherme Kompression eines Gases

Wie in Beispiel 2 komprimieren wir hier das Gas auf sein halbes Volumen aber jetzt wird der Prozess sehr langsam ausgeführt. Dadurch ist nach jedem infinitesimal kleinen Kompressionsschritt wieder ein Gleichgewichtszustand erreicht und die Zustandsänderung kann im p-V Diagramm eingezeichnet werden.



Nebenstehend ein Modell für die praktische Durchführung der reversiblen, isothermen Kompression

In jedem Zeitpunkt kann durch infinitesimal kleine Änderungen der Umgebung die Prozessrichtung umgekehrt werden (reversibler Prozess).

Reversible Prozesse erfolgen über lauter Gleichgewichtszustände und können streng genommen nur durch unendlich langsame Zustandsänderungen realisiert werden.

$$\Delta W < 0 \quad \text{am System (Gas) wird Arbeit verrichtet}$$

$$\Delta T = 0 \quad \text{isothermer Prozess}$$

Im Fall des *idealen* Gases folgt aus

$$\Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = 0$$

und somit

$$\Delta U = 0 = \Delta Q - \Delta W \quad \Rightarrow \quad \Delta W = \Delta Q$$

4.3 Die Entropie

Definition der Entropieänderung:

Die Entropieänderung $\Delta S = S_2 - S_1$ einer reversiblen

Zustandsänderung ist gegeben durch $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$

Bei isothermen, reversiblen Prozessen können wir also schreiben

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

Einheit der Entropie:

$$[S] = 1 \text{ J/K}$$

Beispiel:

Isotherme, reversible Kompression eines idealen Gases (1 mol, $T = 300\text{K}$) vom Volumen V auf $V/2$ (Beispiel 3 in Abschnitt 4.2)

$$\Delta Q = \Delta W$$

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = n R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = n R \ln \frac{V_2}{V_1} = 8.314 \text{ J/K} \cdot \ln(1/2) = -5.76 \text{ J/K}$$

Wird die Zustandsänderung rückgängig gemacht durch eine isotherme, reversible Expansion zurück auf V so erhält man : $\Delta S = 5.76 \text{ J/K}$

Bei der isothermen Kompression gibt das System (Gas) die Wärme

$$\Delta Q = -n R T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

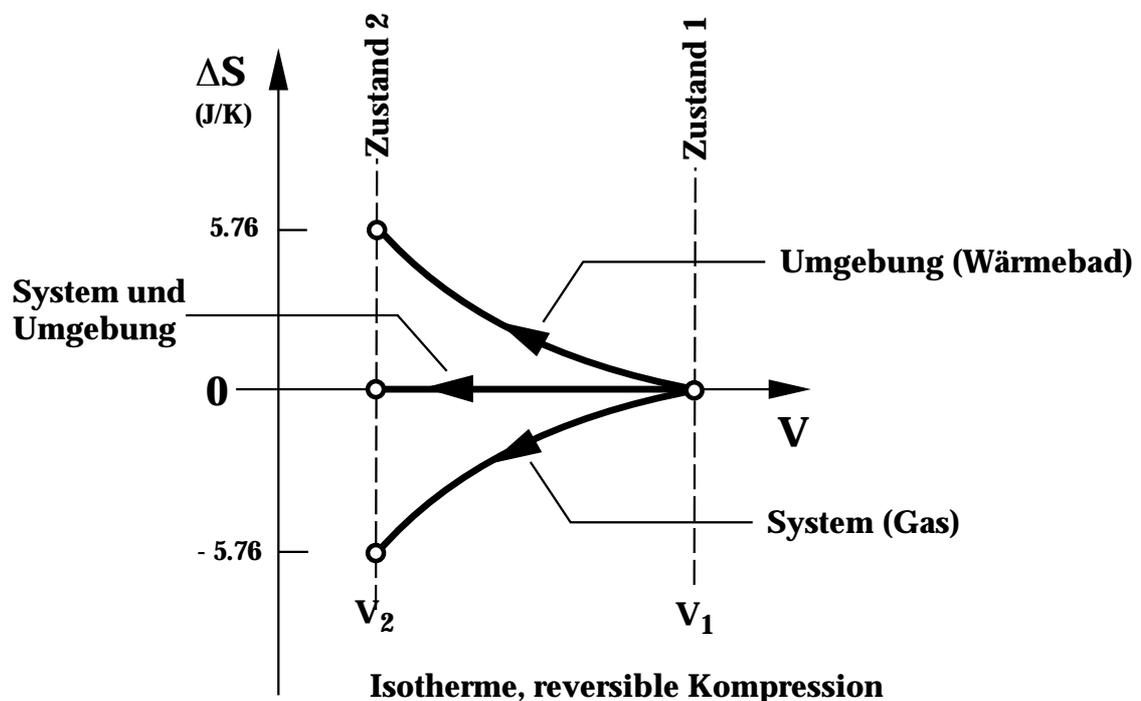
an die Umgebung (das Wärmebad) ab.

Für die Umgebung ist somit die Entropieänderung

$$\Delta S_U = -\Delta S$$

Falls wir die gesamte Entropieänderung des Systems und der Umgebung betrachten, so erhalten wir

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S + \Delta S_U = 0$$



Für die Berechnung der Entropieänderung ΔS eines irreversiblen Prozesses geht man so vor, dass der irreversible Prozess durch einen reversiblen Prozess mit gleichem Anfangs- und Endzustand ersetzt wird und ΔS für den reversiblen Prozess berechnet wird.

4.4 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik:

Für die gesamte Entropieänderung ΔS_{tot} (Summe aus Entropieänderung des Systems ΔS und der Umgebung ΔS_U) gilt:

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S + \Delta S_U = 0 \quad \text{bei reversiblen Prozessen}$$

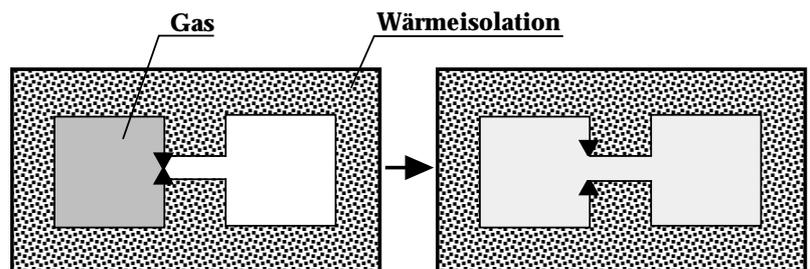
$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S + \Delta S_U > 0 \quad \text{bei irreversiblen Prozessen}$$

Da reversible Prozesse ideale Zustandsänderungen sind, die in der Realität nicht vorkommen, nimmt die Entropie also immer zu. Somit bestimmt der 2. Hauptsatz auch die Richtung, in der thermodynamische Prozesse ablaufen:

Jeder Prozess, der in Gleichgewichtszuständen startet und endet, geht in der Richtung, dass die Gesamtentropie zunimmt.

Beispiel eines irreversiblen Prozesses:

Adiabatisches Ausströmen von 1 mol eines idealen Gases von V_1 auf $V_2 (= 2 V_1)$ bei $T_1 = 300 \text{ K}$.



$$\Delta Q = 0 \quad (\text{adiabatischer Prozess})$$

$$\Delta W = 0 \quad (\text{das System verrichtet keine Arbeit})$$

$$\Rightarrow \Delta U = 0$$

$$\text{und daraus folgt} \quad \Delta T = 0$$

Obwohl in unserem Beispiel $\Delta Q = 0$ ist, nimmt die Entropie in diesem spontan ablaufenden Prozess zu

($\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ gilt nur für reversible Prozesse).

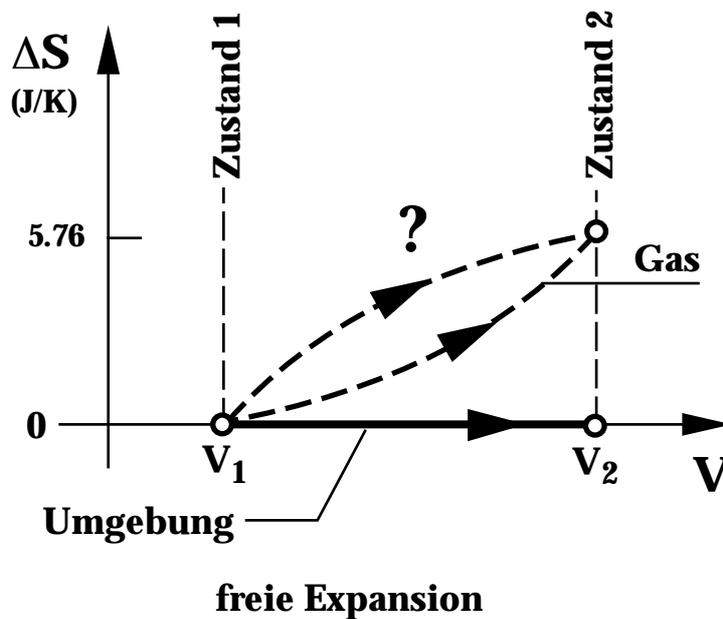
Für die Entropieberechnung in diesem Beispiel müssen wir einen reversiblen Prozess mit gleichem Anfangs- und Endzustand finden und dafür ΔS berechnen.

Wir benutzen als reversiblen Prozess die isotherme Expansion. Nach Beispiel 1 in diesem Abschnitt ist dann

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = n R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = n R \ln \frac{V_2}{V_1} = 8.314 \text{ J/K} \cdot \ln 2 = 5.76 \text{ J/K}$$

Dies ist somit die Entropiezunahme des Systems bei der irreversiblen Zustandsänderung. Da die Entropie der Umgebung dabei konstant bleibt, nimmt also die Gesamtentropie bei diesem irreversiblen Prozess um 5.76 J/K zu.



4. Entropie und 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Beispiel:

Irreversibler Temperatenausgleich zweier identischer Eisenkörper A und B mit den Anfangstemperaturen T_A und T_B

$m = 1 \text{ kg}$, $c = 452 \text{ J/kg K}$, $T_A = 200 \text{ K}$, $T_B = 400 \text{ K}$

T_m sei die Temperatur des thermischen Gleichgewichts zwischen A und B

aus dem 1. Hauptsatz folgt:

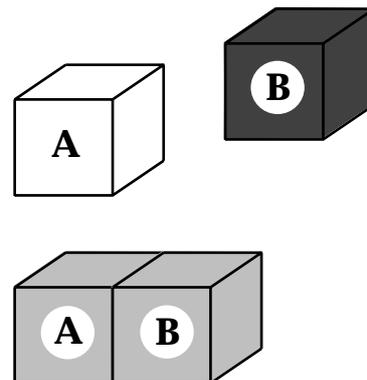
$$\Delta Q_A + \Delta Q_B = 0$$

$$mc \Delta T_A + mc \Delta T_B = 0$$

$$\Delta T_A = -\Delta T_B$$

$$T_m - T_A = -(T_m - T_B)$$

$$T_m = \frac{T_B + T_A}{2} = 300 \text{ K}$$



Um die Entropieänderung der beiden Körper zu berechnen, betrachten wir eine reversible Abkühlung von B auf T_m (durch ein Wärmebad mit einstellbarer Temperatur) und eine reversible Erwärmung von A auf T_m :

$$\Delta S_B = \frac{\Delta Q_B}{T} = mc \int_{T_B}^{T_m} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_m}{T_B} < 0$$

$$\Delta S_A = \frac{\Delta Q_A}{T} = mc \int_{T_A}^{T_m} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_m}{T_A} > 0$$

$$\Delta S_{\text{tot}} = mc \left(\ln \frac{T_m}{T_A} + \ln \frac{T_m}{T_B} \right)$$

$$\Delta S_{\text{tot}} = 1 \text{ kg} \cdot 452 \text{ J/kg K} \cdot (0.405 - 0.288) = 53.2 \text{ J/K}$$

4.5 Anwendung des zweiten Hauptsatzes

4.5.1 Reversible Kreisprozesse

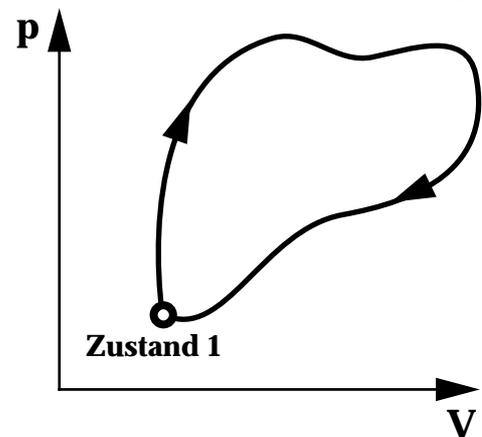
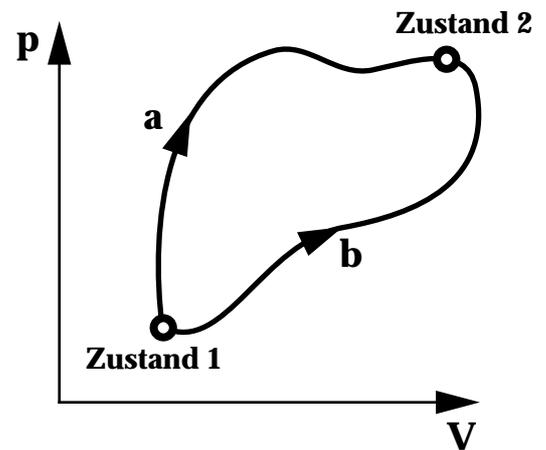
Die Entropieänderung ΔS bei einem reversiblen Prozess hängt nur vom Anfangs- und Endzustand des Systems ab.

$$\Delta S_{1 \Rightarrow 2} = \int_{\text{über Weg a}} dS = \int_{\text{über Weg b}} dS$$

da $\Delta S_{1 \Rightarrow 2} = -\Delta S_{2 \Rightarrow 1}$
gilt für einen reversiblen Kreisprozess

$$\oint dS = 0$$

Das bedeutet, dass die Entropie S eine Zustandsvariable ist.



4.5.2 Wärmekraftmaschinen

Wir betrachten eine ideale, reversibel arbeitende Wärme-Kraftmaschine, die mit einem Kreisprozess Wärme in Arbeit umwandelt. Dabei entnimmt die Maschine einem Reservoir mit der Temperatur T_h die Wärme ΔQ_h , gibt an die Umgebung die Arbeit ΔW ab und führt einem Wärmereservoir tieferer Temperatur T_k die Wärme ΔQ_k zu.

4. Entropie und 2. Hauptsatz der Thermodynamik

reversibler Kreisprozess bedeutet für das System:

$$\Delta S = 0$$

$$\Delta U = 0$$

aus dem ersten Hauptsatz folgt

$$\Delta U = 0 = \Delta Q - \Delta W$$

$$\Delta Q = \Delta Q_h - \Delta Q_k = \Delta W$$

Der zweite Hauptsatz verlangt bei reversibler Prozessführung:

$$\Delta S_{\text{tot}} = 0$$

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_h + \Delta S_k$$

$$-\frac{\Delta Q_h}{T_h} + \frac{\Delta Q_k}{T_k} = 0$$

$$\frac{\Delta Q_k}{\Delta Q_h} = \frac{T_k}{T_h}$$

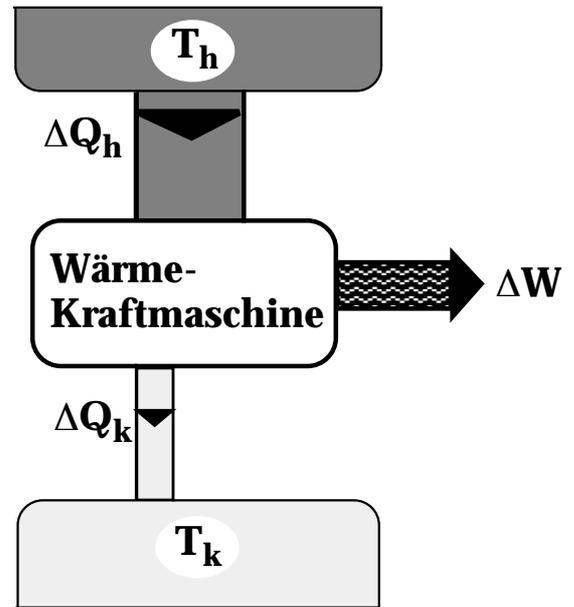
Der Wirkungsgrad η der Maschine ist gegeben durch

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_h} = 1 - \frac{\Delta Q_k}{\Delta Q_h} = 1 - \frac{T_k}{T_h}$$

$$\eta = \frac{T_h - T_k}{T_h}$$

Carnotscher Wirkungsgrad (1824)

Idealer Wirkungsgrad nach Sadi Carnot (1796-1832) einer reversibel arbeitenden Wärmekraftmaschine



Bei irreversibler Prozessführung gilt

$$\Delta S_{\text{tot}} > 0$$

$$-\frac{\Delta Q_h}{T_h} + \frac{\Delta Q_k}{T_k} > 0$$

$$\frac{\Delta Q_k}{\Delta Q_h} > \frac{T_k}{T_h}$$

$$\eta = 1 - \frac{\Delta Q_k}{\Delta Q_h} < 1 - \frac{T_k}{T_h}$$

$$\eta < \frac{T_h - T_k}{T_h}$$

realer Wirkungsgrad

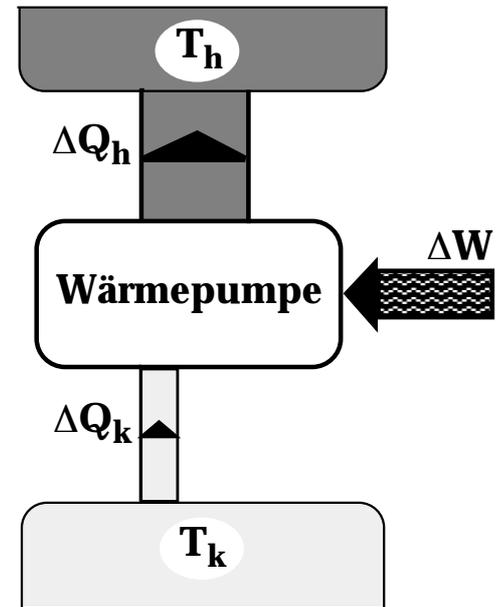
4.5.3 Die Wärmepumpe

Die Umkehrung der Wärme-Kraftmaschine führt zur Wärmepumpe (oder Kühlschrank)

Analog wie bei der Wärme-Kraftmaschine gilt nach dem ersten Hauptsatz

$$\Delta W = \Delta Q_h - \Delta Q_k$$

Nach dem zweiten Hauptsatz bleibt im Fall der reversibel arbeitenden Maschine die gesamte Entropie (System und Umgebung) konstant und im nicht reversiblen Fall nimmt die Entropie zu.



reversible Wärmepumpe:

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_h + \Delta S_k = 0$$

$$\frac{\Delta Q_h}{T_h} - \frac{\Delta Q_k}{T_k} = 0$$

der Wirkungsgrad η_{WP}

der Wärmepumpe beträgt

$$\eta_{\text{WP}} = \frac{\Delta Q_h}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_h}{\Delta Q_h - \Delta Q_k}$$

$$\frac{1}{\eta_{\text{WP}}} = 1 - \frac{\Delta Q_k}{\Delta Q_h} = 1 - \frac{T_k}{T_h} = \frac{T_h - T_k}{T_h}$$

$$\eta_{\text{WP}} = \frac{T_h}{T_h - T_k}$$

irreversible Pumpe:

$$\Delta S_{\text{tot}} = \Delta S_h + \Delta S_k > 0$$

$$\frac{\Delta Q_h}{T_h} - \frac{\Delta Q_k}{T_k} > 0$$

der Wirkungsgrad η_{WP}

der Wärmepumpe beträgt

$$\eta_{\text{WP}} = \frac{\Delta Q_h}{\Delta W} = \frac{\Delta Q_h}{\Delta Q_h - \Delta Q_k}$$

$$\frac{1}{\eta_{\text{WP}}} = 1 - \frac{\Delta Q_k}{\Delta Q_h} > 1 - \frac{T_k}{T_h} = \frac{T_h - T_k}{T_h}$$

$$\eta_{\text{WP}} < \frac{T_h}{T_h - T_k}$$

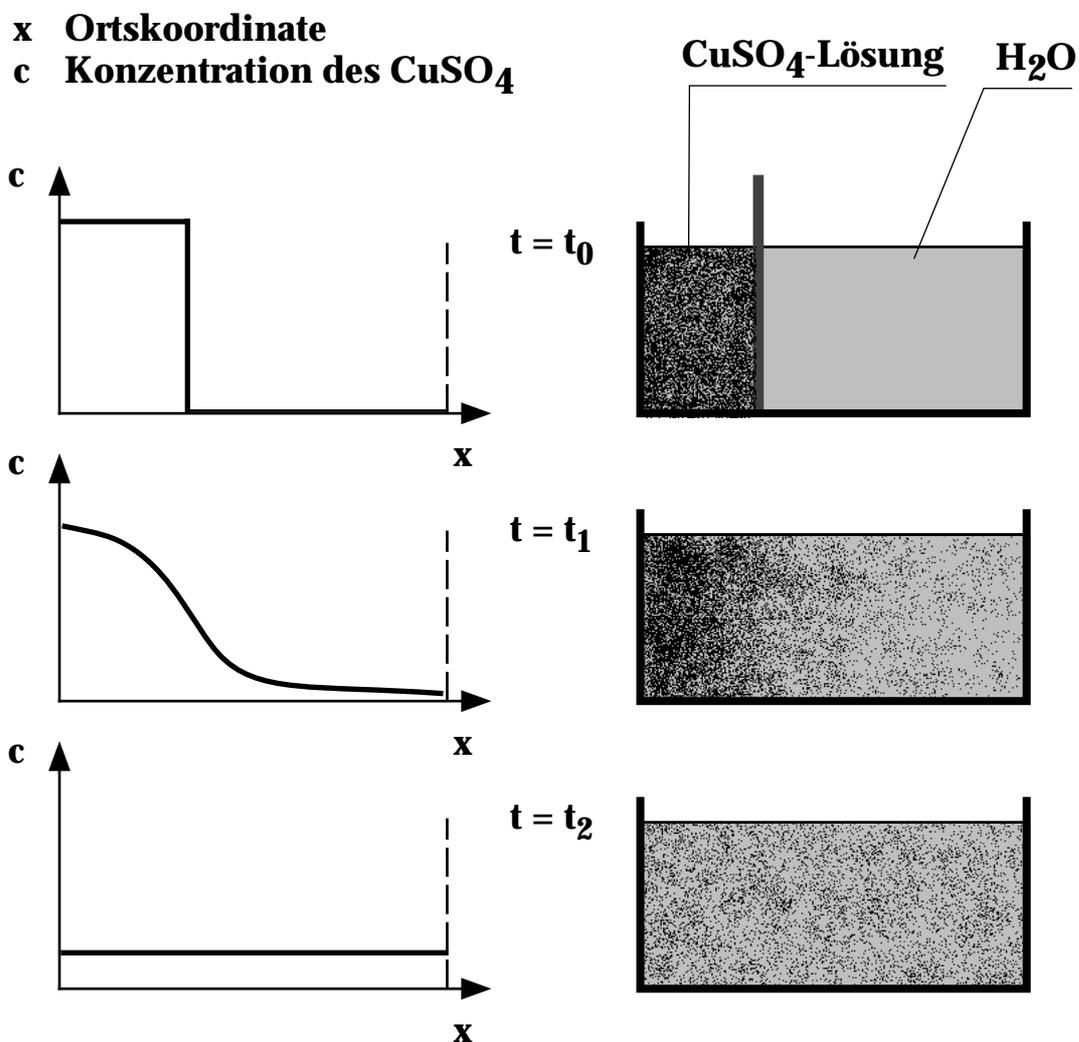
5. Diffusion

5.1 Der Diffusionsprozess

Die Diffusion ist ein Transportphänomen, das auf der Wärmebewegung (Brownscher Bewegung) von frei beweglichen Materieteilchen beruht.

Beispiele:

- Durchmischung zweier anfänglich räumlich getrennter Gase
- Diffusion von Fremdatomen in einem Festkörper
- Durchmischung von zwei übereinandergeschichteten Flüssigkeiten



5. Diffusion

Die Diffusion hängt ab

- von den Substanzen (diffundierende Substanz und dem Medium, in dem die Diffusion erfolgt)
- vom Konzentrationsgradienten $\frac{dc}{dx}$
- von der Temperatur T.

Eine höhere Temperatur bedeutet einen höheren Diffusionsteilchenstrom, da die mittlere Geschwindigkeit $\sqrt{v^2}$ der diffundierenden Teilchen auch größer ist. Nach

Abschnitt 3.4 gilt ja

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Die Geschwindigkeit ist also proportional \sqrt{T} und indirekt proportional \sqrt{M} . Das bedeutet, dass die Diffusion von schweren Atomen langsamer erfolgt. Auch Isotope, die verschiedene Atommassen (und gleiche Kernladungszahl) besitzen, diffundieren verschieden schnell.

$$\frac{v_{\text{rms}}}{v'_{\text{rms}}} = \sqrt{\frac{M'}{M}}$$

Darauf beruht die technische Trennung von Isotopen (z. B. ^{235}U und ^{238}U)

5.2 Diffusionsgesetz

Quantitativ gilt für die Diffusion in einer Raumrichtung

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m} = -D \cdot A \cdot \frac{dc}{dx}$$

1. Ficksches Gesetz (Adolf Fick, 1829–1901)

\dot{m} : Massenstrom

D : Diffusionskonstante (bezieht sich auf ein Substanzpaar und ist temperaturabhängig)

A : Querschnittsfläche

$\frac{dc}{dx}$: Konzentrationsgradient

Einige Diffusionskonstanten

Diffusion		
von	in	D in m ² /s
H ₂	Luft (0°C)	6.3 x 10 ⁻⁵
Wasserdampf	Luft (0°C)	2.4 x 10 ⁻⁵
CO ₂	Luft (0°C)	1.4 x 10 ⁻⁵
CS ₂	Luft (0°C)	1.0 x 10 ⁻⁵
NaCl	Wasser (15°C)	1.1 x 10 ⁻⁹
Zucker	Wasser (12°C)	3.0 x 10 ⁻¹⁰

Beispiel:

Ein Süßwasser- und ein Salzwasserreservoir sind durch eine Leitung der Länge $\ell = 1$ m und einer Querschnittsfläche von 1 cm^2 miteinander verbunden. Die Salzkonzentration im Salzwasser beträgt $c = 9 \text{ g} / \ell$. Welche Salzmenge diffundiert in einer Stunde durch die Leitung ?

$D(\text{NaCl in Wasser, } 15^\circ\text{C}) = 1.1 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$

$$|\Delta m| = \Delta t \cdot D \cdot A \cdot \frac{dc}{dx}$$

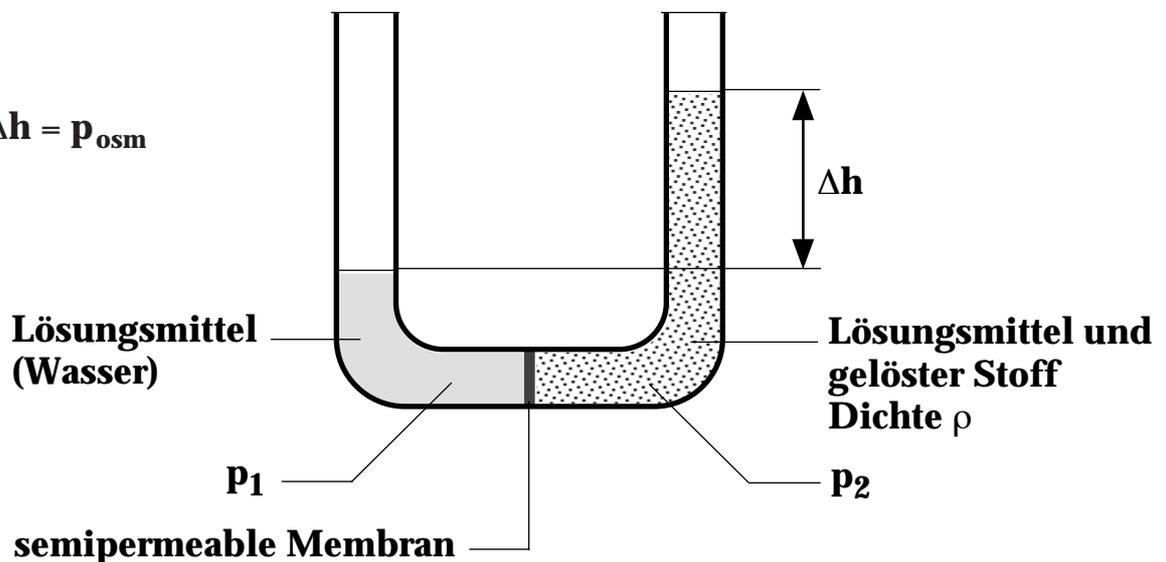
$$\frac{dc}{dx} = 9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot \text{m}}$$

$$|\Delta m| = 3.6 \cdot 10^3 \text{ s} \cdot 1.1 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4} = 3.6 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$$

5.3 Osmose

Die Osmose beruht auf der Diffusion einer Flüssigkeit durch eine semipermeable Membran. Die ideale selektive Membran ist nur durchlässig für das Lösungsmittel, nicht aber für den gelösten Stoff. Die Diffusion des Lösungsmittels führt zu einer Druckdifferenz, dem osmotischen Druck, zwischen den beiden Seiten der Membran.

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot \Delta h = p_{\text{osm}}$$



phänomenologisch beobachtet man:

- Δp ist unabhängig von der Art des gelösten Stoffes.
- Δp ist bestimmt durch die molare Konzentration (mol/m^3) des gelösten Stoffes und der Temperatur.
- der gelöste Stoff kann nicht diffundieren, weil eine Hydratation stattfindet. An den gelösten Ionen eines Salzes lagern sich Wassermoleküle an, so dass relativ große Komplexe entstehen. (Im Falle eines anderen Lösungsmittels, z.B. Alkohol, spricht man von Solvatation und Solvat-Komplexen.)

Quantitativ wird der osmotische Druck p_{osm} durch das **Gesetz von van't Hoff** beschrieben (Jacobus van't Hoff, 1852 - 1911) :

$$p_{\text{osm}} = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T$$

$\frac{n}{V}$: molare Konzentration des gelösten Stoffes

Das Gesetz von van't Hoff hat die gleiche Form wie die Zustandsgleichung idealer Gase. Es beschreibt den osmotischen Druck für kleine molare Konzentrationen $\frac{n}{V}$.

Zellwände sind semipermeable Membranen. Wird eine Zelle (z.B. rotes Blutkörperchen) von einer wässrigen Lösung umgeben, die einen größeren osmotischen Druck (hypertonisch) besitzt als der Zellsaft, so wird sich die Zellwand zusammenziehen. Ist die Umgebung jedoch hypotonisch, so dehnt sich die Zellwand aus, was zum Platzen der Zelle führen kann (Hämolyse im Fall des Blutes).

Beispiel :

Eine isotonische oder physiologische Kochsalzlösung besitzt den gleichen osmotischen Druck gegenüber reinem Wasser wie das Blut. Die Konzentration von NaCl dieser Lösung beträgt 9 g/l . Wie groß ist p_{osm} bei $T = 37 \text{ }^\circ\text{C}$?

$$\begin{aligned} \frac{n_{\text{tot}}}{V} &= \frac{n_{\text{Na}}}{V} + \frac{n_{\text{Cl}}}{V} \quad (\text{vollständige Dissoziation von NaCl}) \\ &= 2 \cdot \frac{9 \text{ g/l}}{58.5 \text{ g/mol}} = 308 \text{ mol/m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{\text{osm}} &= \frac{n_{\text{tot}}}{V} \cdot R \cdot T \\ &= 308 \text{ mol/m}^3 \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 310 \text{ K} = 7.9 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

$$p_{\text{osm}} = 7.9 \text{ bar}$$

5. Diffusion

Beispiel :

Die osmotische Arbeit der Niere kann mit einem Modell abgeschätzt werden. Die Ausgangskonzentration c_1 der Lösung betrage $0.005 \text{ mol}/\ell$. Diese soll durch Verschiebung des Kolbens auf $c_2 = 0.5 \text{ mol}/\ell$ erhöht werden. Der Prozess erfolge isotherm bei einer Temperatur $T = 310 \text{ K}$.

Das Volumen V_2 betrage 1ℓ . V_1 beträgt dann

$$V_1 = V_2 \cdot c_2 / c_1 = 1 \ell \cdot 0.5 / 0.005 = 100 \ell$$

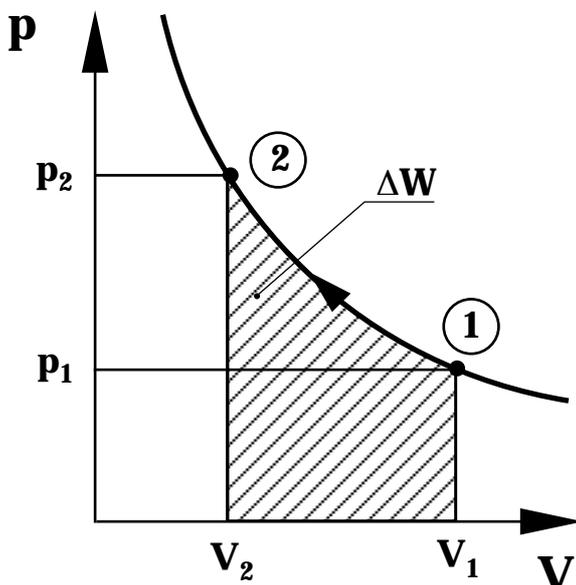
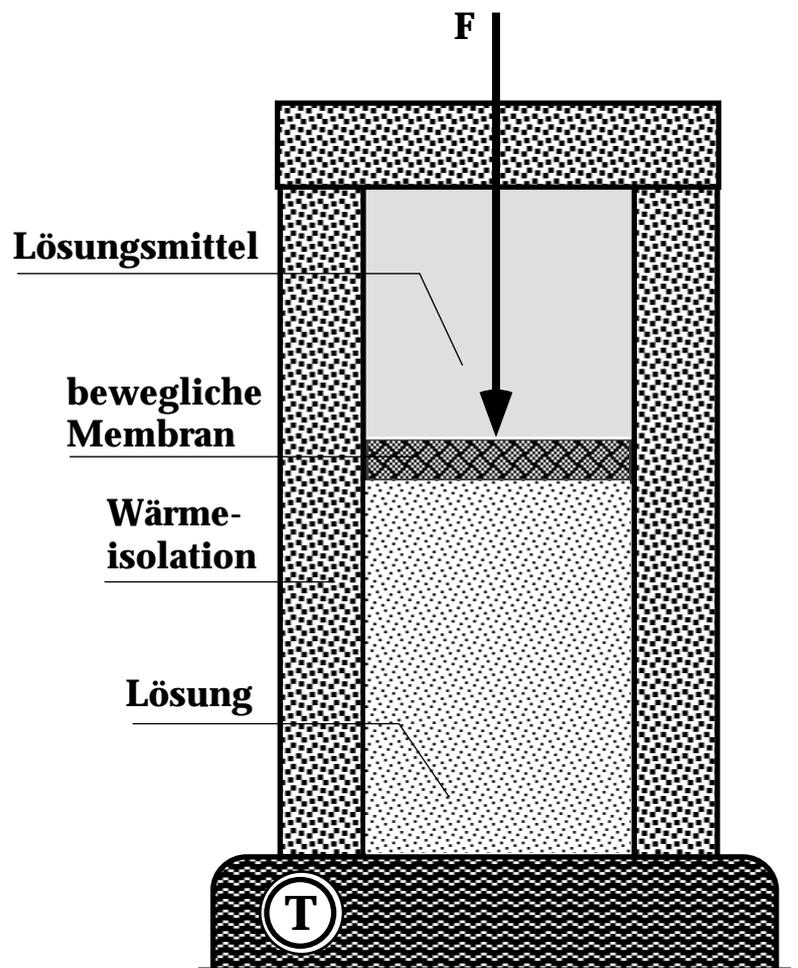
$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = - n R T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$= - n R T (\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$W = n R T \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$W = 0.5 \text{ mol} \cdot 8.3 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 310 \text{ K} \cdot \ln(100)$$

$$W = 5925 \text{ J} \quad (= 1416 \text{ cal})$$



6. Stoffgemische

6.1 Mischungen von Gasen

Wir setzen ideale Gase voraus, die unter sich keine Wechselwirkung zeigen.

Nach dem Daltonschen Gesetz (John Dalton, 1766 - 1844) ist der Gesamtdruck p eines Gasgemisches gleich der Summe der Partialdrücke:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

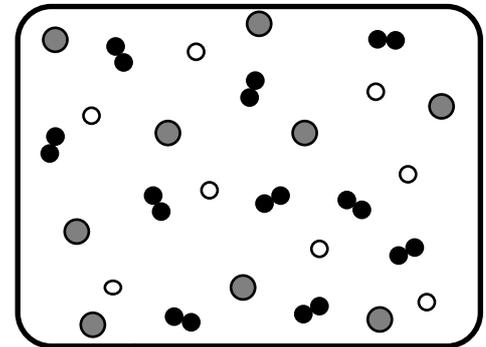
Für die einzelnen Gase gilt:

$$p_i = \frac{n_i}{V} R T$$

und somit für den Gesamtdruck:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{V} R T \sum_{i=1}^n n_i$$

Mischung von n idealen Gasen.



Volumen V

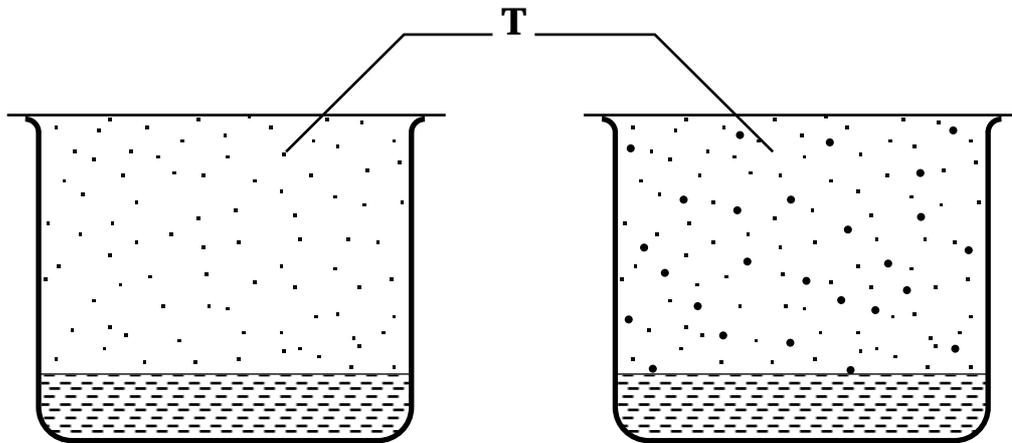
Jede Gaskomponente verhält sich so, als ob die anderen Komponenten nicht vorhanden wären.

6. Stoffgemische

Beispiel: Zusammensetzung trockener Luft ($p = 1 \text{ atm}$)

Gas	relative molare Konzentration $\frac{n_i}{n}$ (%)	Partialdruck p_i (bar)
N ₂	78.1	0.791
O ₂	20.9	0.212
CO ₂	0.03	$3 \cdot 10^{-4}$
Ar	0.93	$9.4 \cdot 10^{-3}$
Rest	0.04	$4 \cdot 10^{-4}$
Summe	100 %	1.013 bar

Feuchte Luft enthält als weitere Komponente Wasserdampf. Der maximale Partialdruck des Wassers in der Luft hängt nur vom Gleichgewichtsdampfdruck des Wassers bei der Temperatur T ab (siehe Abschnitt 7.1) und ist unabhängig von der Anwesenheit der Luft.



Gefäss mit Wasser
und Wasserdampf

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{Wasserdampf}}$$

Gefäss mit Wasser, Wasser-
dampf und Luft

$$P'_{\text{tot}} = P'_{\text{Wasserdampf}} + P'_{\text{Luft}}$$

Der Wasserdampf-Partialdruck ist in beiden Gefässen gleich gross

$$P_{\text{Wasserdampf}} = P'_{\text{Wasserdampf}}$$

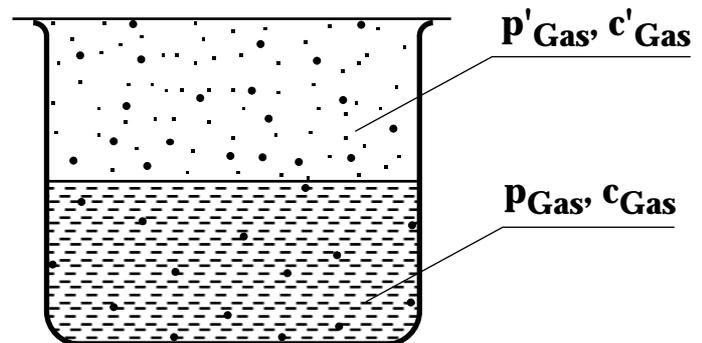
6.2 Gas - Flüssigkeitsgemische

Flüssigkeiten können Gase in gelöster Form aufnehmen. Die Menge eines Gases, die eine bestimmte Flüssigkeit aufnimmt, hängt im Gleichgewichtszustand nur vom Druck des Gases über der Flüssigkeit und der Temperatur ab.

Nach dem Henry-Dalton'schen Gesetz gilt für kleine Konzentrationen

$$\frac{c_{\text{Gas}}}{c'_{\text{Gas}}} = \alpha$$

α ist die Ostwald'sche Löslichkeit und c bedeutet die molare Konzentration ($c = n/V$).



Das Gesetz von Henry-Dalton läßt sich auch wie folgt formulieren:

Es gilt

$$c_{\text{Gas}} = \frac{p_{\text{Gas}}}{R T} \quad \text{und} \quad c'_{\text{Gas}} = \frac{p'_{\text{Gas}}}{R T}$$

c'_{Gas} oben eingesetzt liefert:

$$c_{\text{Gas}} = \frac{\alpha}{R T} \cdot p'_{\text{Gas}}$$

Henry-Dalton'sches Gesetz (1803)

Beispiele:

- Sauerstofftransport im Blut
- Reduktion des relativen O_2 - Gehalts in der Atemluft von Sporttauchern in großer Tiefe, um eine Sauerstoffvergiftung zu vermeiden. Der Aufstieg aus großer Tiefe darf nur langsam erfolgen, weil sich sonst wegen der raschen Druckabnahme Gasblasen im Blut bilden.

7. Phasenübergänge und Phasengemische

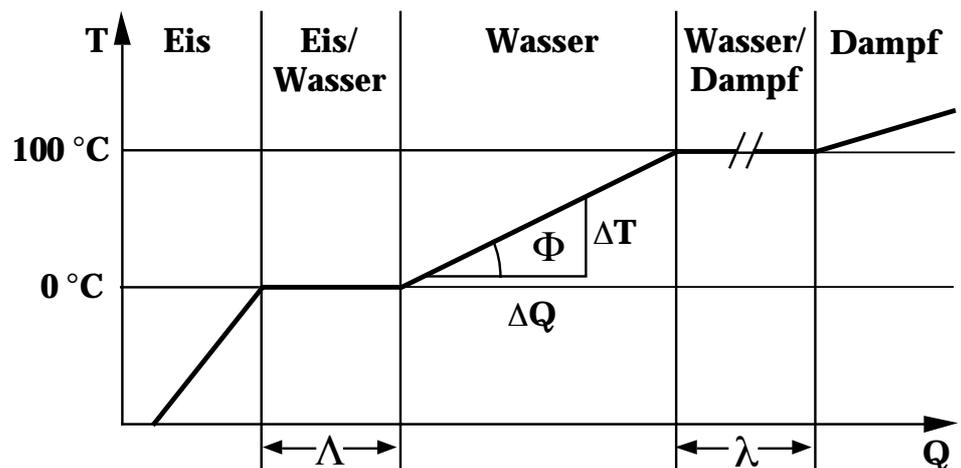
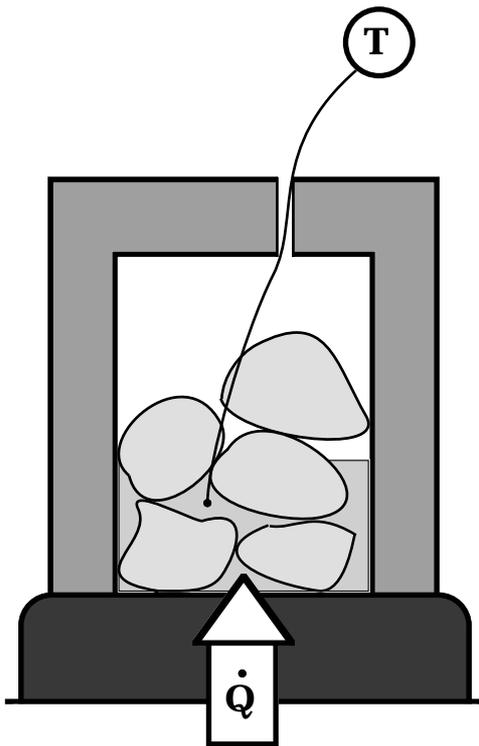
7.1 Änderungen des Aggregatzustandes

In diesem Abschnitt betrachten wir die Phasenübergänge

- schmelzen - erstarren (fest \Leftrightarrow flüssig)
- verdampfen - kondensieren (flüssig \Leftrightarrow gasförmig)
- sublimieren - adsorbieren (fest \Leftrightarrow gasförmig)

Beispiel:

In einem Experiment wird 1 kg Eis mit einer konstanten Heizrate bei konstantem Druck von 1 atm Wärme zugeführt.



$$\frac{\Delta T}{\Delta Q} = \frac{1}{c_p}$$

$$\Phi \sim \frac{1}{c_p}$$

7. Phasenübergänge und Phasengemische

Die Analyse der T - Q Kurve liefert folgende Materialkonstanten:

Die Schmelzwärme Λ [J/kg]

ist diejenige Wärmemenge, die notwendig ist, um 1 kg des betreffenden Stoffes bei $p = 1 \text{ atm}$ zu schmelzen.

Beispiel: $\Lambda_{\text{Eis}} = 3.35 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$

Die Verdampfungswärme λ [J/kg]

ist diejenige Wärmemenge, die notwendig ist, um 1 kg des betreffenden Stoffes bei $p = 1 \text{ atm}$ zu verdampfen.

Beispiel: $\lambda_{\text{Wasser}} = 2.25 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$

Die spezifischen Wärmen c_p [J/kg·K]

ergeben sich aus den reziproken Steigungen im T - Q Diagramm.

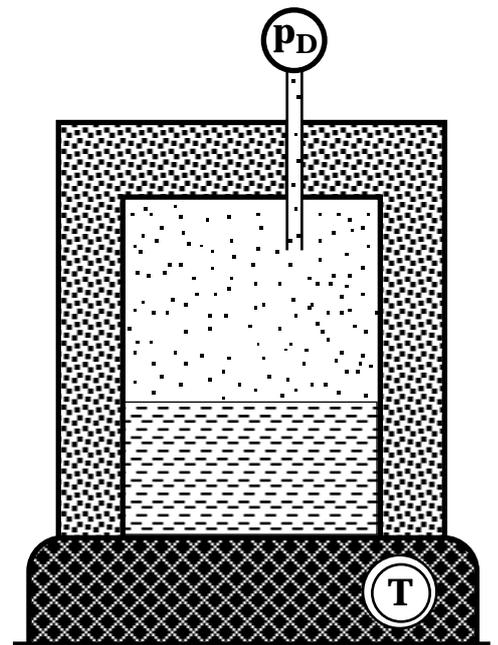
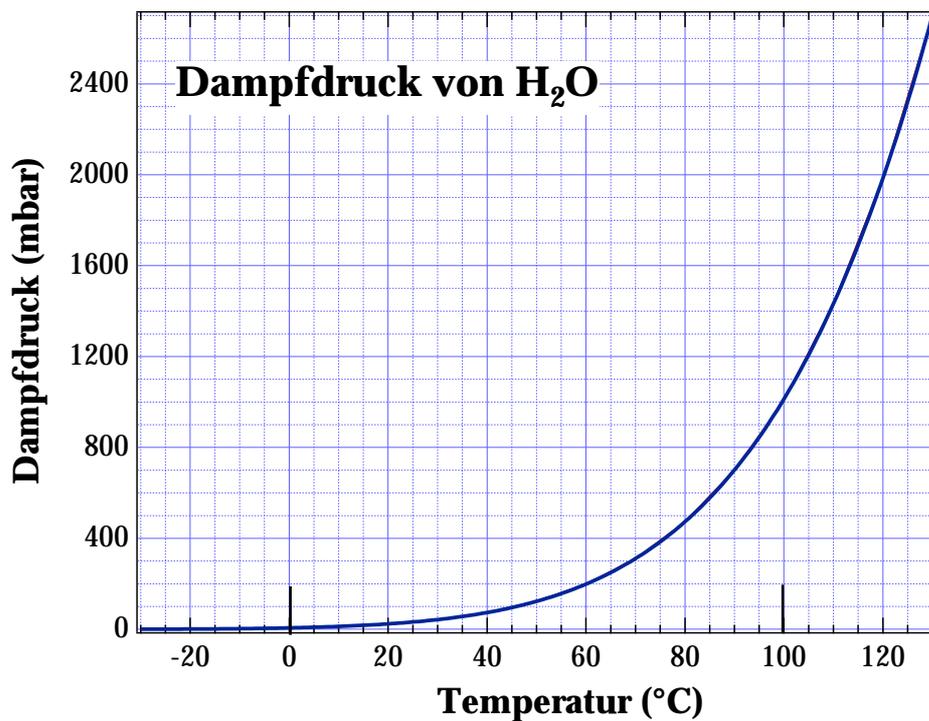
Beispiel: $c_{p,\text{Eis}(0^\circ\text{C})} = 2.114 \cdot 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

$c_{p,\text{Wasser}} = 4.187 \cdot 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

Beim Erstarren bzw. Kondensieren werden die Schmelzwärme Λ bzw. die Verdampfungswärme λ wieder freigesetzt (latente Wärme).

Dampfdruck und Siedeprozess

Jede Flüssigkeit besitzt eine charakteristische Gleichgewichts - Dampfdruckkurve. Diese wird durch Druckmessung in einem abgeschlossenen Behälter bestimmt, der in Kontakt mit einem Temperaturbad ist. Im thermischen Gleichgewicht ist die Zahl der verdampfenden und kondensierenden Flüssigkeitsmoleküle pro Zeit gleich gross.

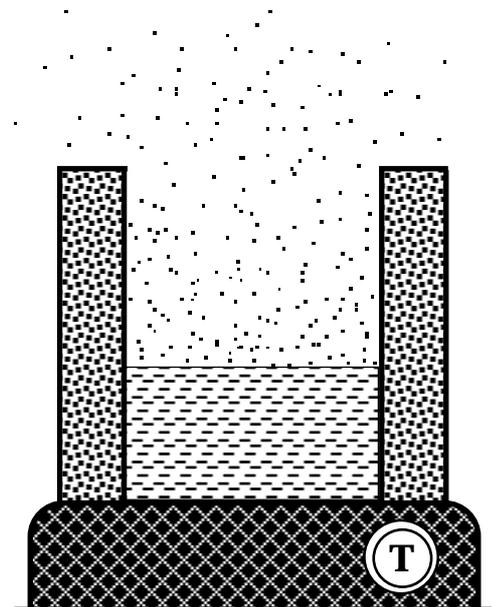


Dampfdruckkurve von Wasser im thermischen Gleichgewicht (⇒ 'Sättigungsdampfdruck')

Verdunsten und Sieden
sind nicht-Gleichgewichtsprozesse

Verdunsten: $p_D(T) < p$

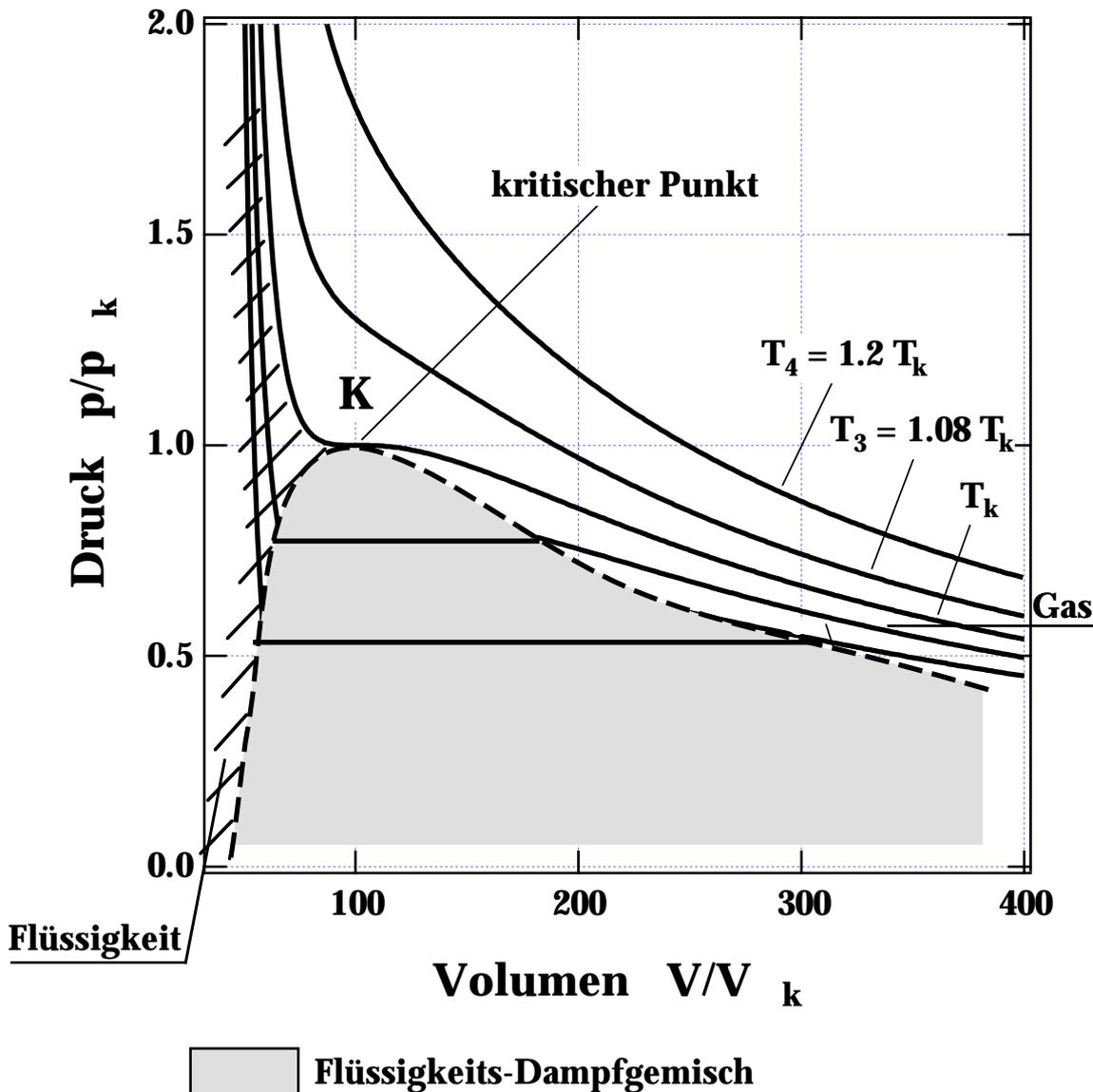
Sieden: $p_D(T_s) = p$



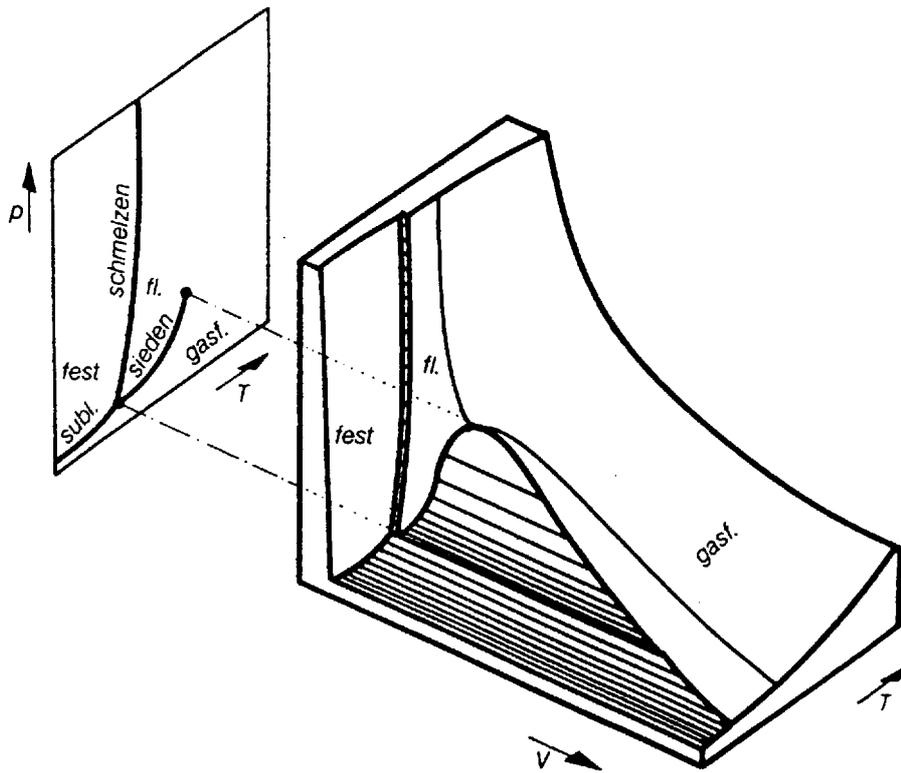
7.2 Phasendiagramme

Phasendiagramme sind grafische Darstellungen, welche den Zusammenhang der Größen p , V und T für ein System (eine bestimmte Substanzmenge) zeigen. Aus dem Kapitel 3 kennen wir bereits das p - V Diagramm des realen Gases.

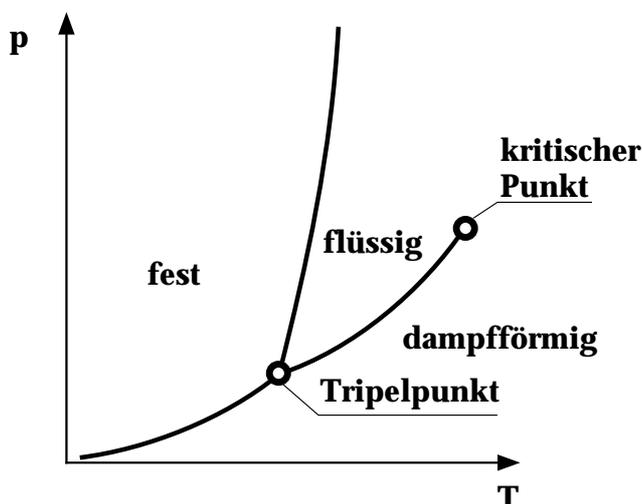
In diesem Diagramm lassen sich auch die Grenzen zwischen den Phasen Gas, Gas-Flüssigkeit und Flüssigkeit einzeichnen.



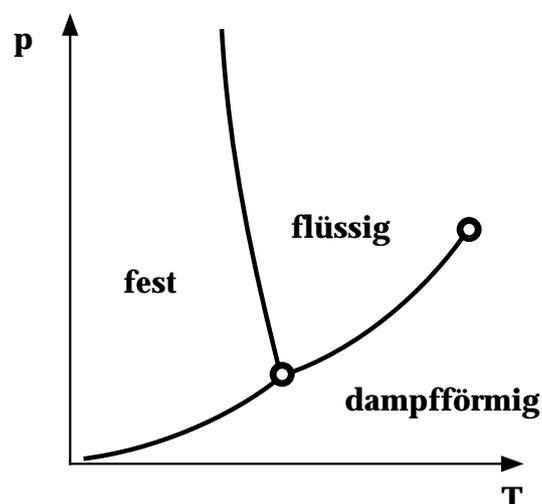
Falls man die p - V Kurven für verschiedene Temperaturen hintereinander darstellt, erhält man ein dreidimensionales p - V - T Bild. Im folgenden Bild ist neben der flüssigen und gasförmigen Phase auch noch die feste Phase eingezeichnet. In der dreidimensionalen Darstellung entsteht aus dem Tripelpunkt die Tripellinie.



Durch die Projektion der Phasengrenzen auf die p - T Ebene erhalten wir das p - T Phasendiagramm.



typisches Phasendiagramm eines Stoffes, der sich beim Schmelzen ausdehnt



qualitativer Verlauf der Phasengrenzen eines Stoffes, der beim Schmelzen eine Volumenverkleinerung erfährt (z.B. Eis)

7.3 Gefrierpunktserniedrigung und Siedepunktserhöhung

Wir betrachten hier eine Lösung eines Stoffes mit vernachlässigbarem Dampfdruck in einem Lösungsmittel, wie z.B. ein Salz in Wasser.

Das Auflösen des Salzes im Wasser erfordert die Energie Λ_{diss} , andererseits wird bei der Hydratation (Anlagerung von Wassermolekülen an den Ionen des gelösten Stoffes) die Energie Λ_{hyd} frei. Die Lösungswärme Λ_{L} kann dann positiv oder negativ sein.

$$\Lambda_{\text{L}} = \Lambda_{\text{hyd}} - \Lambda_{\text{diss}} > 0 \quad \text{exothermer Prozess}$$

$$\Lambda_{\text{L}} = \Lambda_{\text{hyd}} - \Lambda_{\text{diss}} < 0 \quad \text{endothermer Prozess}$$

Löslichkeit eines Stoffes

Die Sättigungskonzentration eines Stoffes in einem Lösungsmittel hängt von der Temperatur ab.

- Falls $\Lambda_{\text{L}} > 0$ **exothermer Prozess**,
(z.B. Kalziumchlorid in Wasser), nimmt die Löslichkeit des Stoffes mit abnehmender Temperatur zu.
- Falls $\Lambda_{\text{L}} < 0$ **endothermer Prozess**,
(z.B. Ammoniumnitrat oder Salmiaksalz in Wasser), nimmt die Löslichkeit mit zunehmender Temperatur zu.

Dampfdruckerniedrigung

Der Dampfdruck $p'_D(T)$ einer Lösung ist kleiner als derjenige des reinen Lösungsmittels $p_D(T)$, was als **Dampfdruckerniedrigung** bezeichnet wird.

Die direkte Konsequenz der Dampfdruckerniedrigung ist eine **Siedepunktserhöhung** ΔT_S .

p_a sei der äußere Druck (z.B. 1 atm). Der Siedepunkt ist erreicht, wenn

$$p_a = p_D(T_S) = p'_D(T_S + \Delta T_S)$$

p_D ist der Dampfdruck des reinen Lösungsmittels
 p'_D ist der Dampfdruck der Lösung

Quantitativ gilt für die Siedepunktserhöhung ΔT_S in erster Näherung

$$\Delta T_S = c_1 \cdot K_S$$

c_1 : molare Konzentration des gelösten Stoffes ($\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$)

K_S : molare Siedepunktserhöhung für ein bestimmtes Lösungsmittel ($\text{K} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$)

ΔT_S ist unabhängig von der Art des gelösten Stoffes.

Beispiel: NaCl in Wasser

$c_1 = 9 \text{ g/l}$ (physiol. Kochsalzlösung)

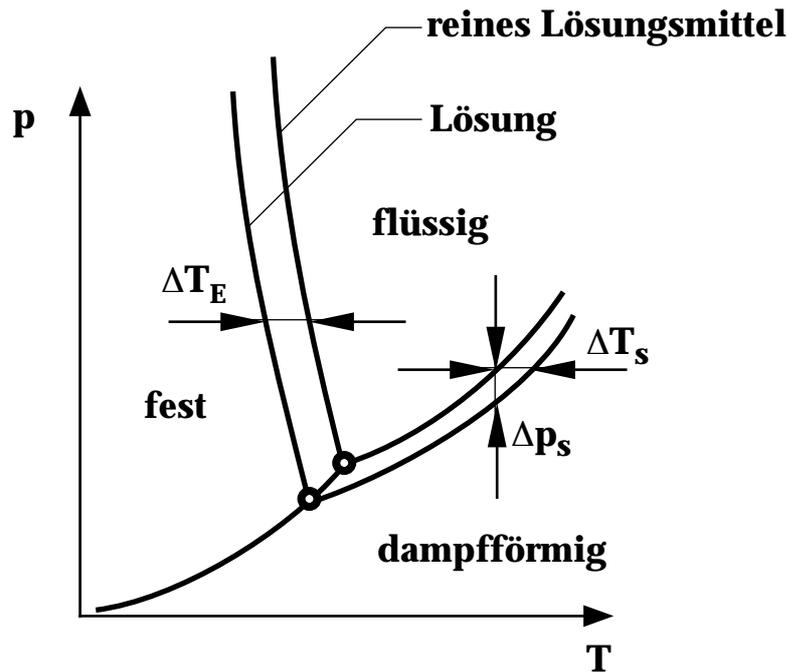
$K_S(\text{H}_2\text{O}) = 0.513 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 0.513 \frac{\text{K}}{\text{mol/l}}$

$$\Delta T_S = c_1 \cdot K_S = 2 \cdot \frac{9 \text{ g/l}}{58.5 \text{ g/mol}} \cdot 0.513 \text{ K} \cdot \text{l/mol} = 0.16 \text{ K}$$

2 Ionen pro Molekül

7. Phasenübergänge und Phasengemische

Die Verschiebung der Dampfdruckkurve $p(T)$ durch den gelösten Stoff verändert unser p - T Phasendiagramm.



Die Dampfdruckkurve wird durch den gelösten Stoff um Δp_s abgesenkt. Dadurch verschiebt sich der Tripelpunkt zu einer kleineren Temperatur. Damit wird auch die Erstarungskurve (oder Schmelzkurve) um einen Betrag ΔT_E zu kleineren Temperaturen verschoben.

Quantitativ gilt wieder in erster Näherung

$$\Delta T_E = c_1 \cdot K_E$$

c_1 : molare Konzentration des gelösten Stoffes (mol/m^3)

K_E : molare Gefrierpunktserniedrigung für ein bestimmtes Lösungsmittel ($\text{K} \cdot \text{m}^3/\text{mol}$)

Beispiel:

Für die physiologische Kochsalzlösung erhält man mit K_E (Wasser),

$$K_E = -1.86 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^3/\text{mol} = -1.86 \frac{\text{K}}{\text{mol}/\ell}$$

$$\Delta T_E = c_1 K_E = -2 \cdot \frac{9 \text{ g}/\ell}{58.5 \text{ g}/\text{mol}} \cdot 1.86 \text{ K} \cdot \ell/\text{mol}$$

$$\Delta T_E = -0.57 \text{ K}$$

Eine Anwendung der Gefrierpunktserniedrigung stellt die Kryoskopie dar. Die Messung von ΔT_E liefert c_1 , was zur Bestimmung des Molekulargewichts eines Stoffes verwendet werden kann.

SI - Basiseinheiten

1. Meter

Der Meter ist jene Distanz, die das Licht in $1/299'792'458$ einer Sekunde durchläuft.

2. Kilogramm

Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

3. Sekunde

Die Sekunde ist das $9'192'631'770$ fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Atoms des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

4. Ampere

Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stroms, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern mit je 1 Meter Leiterlänge die Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.

5. Kelvin

Das Kelvin, die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der $273,16$ te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

6. Mol

Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in $0,012$ Kilogramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind.

7. Candela

Das Candela ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, welche monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hertz aussendet, und deren Strahlstärke in dieser Richtung $1/683$ Watt pro Steradian beträgt.

Mathematische Beziehungen

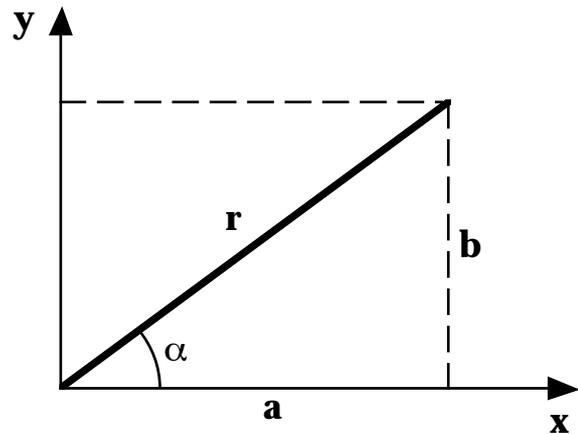
Trigonometrische Funktionen

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \sin \frac{b}{r} = \operatorname{arc} \cos \frac{a}{r}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{a}{b}$$



Trigonometrische Identitäten

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Symmetrie

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Periodizität

$$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \alpha$$

$$\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Physikalische Konstanten

Gravitationskonstante	γ	$6.673 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.9979 \cdot 10^8$	m s^{-1}
Avogadro- oder Loschmidtsche Zahl	N_A	$6.0221 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Boltzmann Konstante	k	$1.3807 \cdot 10^{-23}$	J K^{-1}
Universelle Gaskonstante	R	8.3145	$\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$
Elektrische Elementarladung	e	$1.6022 \cdot 10^{-19}$	A s
Elektrische Feldkonstante	ϵ_0	$8.8542 \cdot 10^{-12}$	$\text{A s V}^{-1} \text{m}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$\text{V s A}^{-1} \text{m}^{-1}$
Plancksche Konstante	h	$6.6261 \cdot 10^{-34}$	J s
Stefan-Boltzmann Konstante	σ	$5.6705 \cdot 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Wiensche Konstante	$\lambda_{\text{max}} \cdot T$	$2.8978 \cdot 10^{-3}$	K m