

Teil I

I. Mechanik

II. Wärmelehre

Anhang

Teil II

III. Elektrizitätslehre

IV. Geometrische Optik

V. Wellenoptik

VI. Dualismus Wellen und Quanten

VII. Atome, Moleküle und Festkörper

VIII. Atomkerne und Kernstrahlung

IX. Strahlenschutz

Anhang

I. Mechanik

1. Physikalische Grössen und Einheiten	101-1
1.1 Physikalische Grössen	101-1
1.2 Basiseinheiten und abgeleitete physikalische Einheiten	101-2
1.3 Dimension einer physikalischen Grösse	101-5
1.4 Skalare und vektorielle physikalische Grössen	101-7
2. Kinematik	102-1
2.1 Bewegung eines Punktes	102-1
2.2 Geschwindigkeit	102-1
2.3 Die Beschleunigung	102-3
2.4 Bewegung im dreidimensionalen Raum	102-5
2.5 Spezielle Bewegungen	102-7
2.5.1 Die gleichmässig beschleunigte Bewegung	102-7
2.5.2 Kreisbewegung und harmonische Schwingung	102-10
3. Die Dynamik	103-1
3.1 Träge und schwere Masse	103-1
3.2 Newtonsche Axiome	103-2
3.3 Abgeschlossene Systeme, Impuls und Impulssatz	103-3
3.4 Die Gravitationskraft	103-4
3.5 Trägheitskräfte	103-6
3.6 Dynamik der Rotationsbewegung	103-7
3.7 Gleichgewichtsbedingungen	103-11
3.8 Der Schwerpunkt	103-13
3.9 Reibung	103-15
4. Arbeit, Energie und Leistung	104-1
4.1 Arbeit	104-1
4.2 Energie	104-5
4.3 Äquivalenz von Masse und Energie	104-7
4.4 Leistung	104-7

5. Erhaltungssätze	105-1
5.1 Energiesatz	105-2
5.2 Impulssatz	105-4
5.3 Drehimpulssatz	105-11
6. Mechanische Eigenschaften von Festkörpern	106-1
6.1 Wechselwirkungspotential	106-1
6.2 Mechanische Eigenschaften deformierbarer Festkörper	106-3
7. Mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten	107-1
7.1 Hydrostatik	107-1
7.2 Oberflächenspannung	107-4
7.3 Kapillarität	107-8
7.4 Hydrodynamik	107-10
7.4.1 Kontinuitätsgleichung	107-11
7.4.2 Gleichung von Bernoulli	107-11
7.4.3 Viskose Flüssigkeiten und innere Reibung	107-16
7.4.4 Turbulente Strömungen	107-23
8. Schwingungen	108-1
8.1 Harmonische Schwingungen	108-1
8.2 Gedämpfte Schwingungen	108-6
8.3 Erzwungene Schwingungen	108-8
8.4 Überlagerung von Schwingungen	108-10
8.5 Gekoppelte Oszillatoren	108-14
9. Wellen	109-1
9.1 Definitionen	109-1
9.2 Mathematische Beschreibung von Wellen	109-3
9.3 Doppler Effekt	109-9
9.4 Anharmonische Wellen	109-11
9.5 Überlagerung und Beugung von Wellen	109-13
9.6 Wellen an Grenzflächen	109-21
9.7 Akustik	109-24

II. Wärmelehre

1. Der Begriff der Temperatur	201-1
1.1 Makroskopische und mikroskopische Beschreibung	201-1
1.2 Thermisches Gleichgewicht und Temperaturbegriff	201-2
1.3 Temperaturmessung	201-3
1.4 Thermische Dehnung	201-7
2. Wärme und erster Hauptsatz der Thermodynamik	202-1
2.1 Wärme und Temperatur	202-1
2.2 Wärmeleitung	202-3
2.3 Wärme und Arbeit	202-4
2.4 Erster Hauptsatz der Thermodynamik	202-7
2.5 Anwendungen des ersten Hauptsatzes	202-8
3. Kinetische Gastheorie	203-1
3.1 Thermodynamik und statistische Mechanik	203-1
3.2 Das ideale Gas	203-1
3.3 Mikroskopische Eigenschaften des idealen Gases	203-3
3.4 Kinetische Interpretation der Temperatur	203-6
3.5 Spezifische Wärme des idealen Gases	203-7
3.6 Äquipartition der Energie	203-9
3.7 Brownsche Bewegung und mittlere freie Weglänge	203-13
3.8 Die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle	203-14
3.9 Reale Gasgleichung	203-16
4. Entropie und zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	204-1
4.1 Die Richtung thermodynamischer Prozesse	204-1
4.2 Irreversible und reversible Zustandsänderungen	204-1
4.3 Die Entropie	204-4
4.4 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	204-6
4.5 Anwendungen des zweiten Hauptsatzes	204-9
4.5.1 Reversible Kreisprozesse	204-9
4.5.2 Wärmekraftmaschinen	204-9
4.5.3 Wärmepumpen	204-11

5. Diffusion	205-1
5.1 Der Diffusionsprozess	205-1
5.2 Diffusionsgesetz	205-3
5.3 Osmose	205-4
6. Stoffgemische	206-1
6.1 Mischungen von Gasen	206-1
6.2 Gas-Flüssigkeitsgemische	206-3
7. Phasenübergänge und Phasengemische	207-1
7.1 Änderungen des Aggregatzustandes	207-1
7.2 Phasendiagramme	207-4
7.3 Gefrierpunktserniedrigung und Siedepunktserhöhung	207-6

III. Elektrizität und Magnetismus

1. Elektrische Ladung	301-1
1.1 Phänomene	301-1
1.2 Die elektrische Ladung q	301-2
2. Das Coulombsche Kraftgesetz	302-1
3. Das elektrische Feld	303-1
3.1 Die elektrische Feldstärke	303-1
3.2 Berechnung des E-Feldes	303-2
3.3 Elektrische Dipole	303-4
3.4 Der Satz von Gauss	303-6
4. Das elektrische Potential	304-1
4.1 Definition des elektrischen Potentials	304-1
4.2 Das Potential einer Punktladung q	304-2
4.3 Potentielle Energie einer Ladung	304-3
4.4 Berechnung der elektrischen Feldstärke aus dem Potential	304-4
4.5 Äquipotentialflächen und E-Feldlinien	304-5

5. Kondensatoren und Dielektrika	305-1
5.1 Begriff der Kapazität	305-1
5.2 Berechnung der Kapazität	305-2
5.3 Schaltungen von Kondensatoren	305-3
5.4 Energiedichte des elektrischen Feldes	305-4
5.5 Kondensatoren mit Dielektrika	305-5
6. Der elektrische Strom	306-1
6.1 Definition des elektrischen Stroms	306-1
6.2 Elektrische Ströme in Materie	306-3
6.3 Das Ohmsche Gesetz	306-7
6.4 Metalle - Halbleiter - Isolatoren	306-9
6.5 Ströme in Elektrolyten	306-10
6.6 Energieumwandlung in elektrischen Stromkreisen	306-14
6.7 Elektrische Netzwerke	306-15
7. Das magnetische Feld	307-1
7.1 Phänomene des Magnetismus	307-1
7.2 Das B-Feld	307-2
7.3 Anwendungen der Lorentzkraft	307-4
7.4 Das Gesetz von Biot-Savart	307-6
7.5 Das Ampèresche Gesetz	307-10
7.6 Der magnetische Dipol	307-12
8. Das Induktionsgesetz	308-1
8.1 Induktionsphänomene	308-1
8.2 Das Faradaysche Induktionsgesetz	308-2
8.3 Die Lenzsche Regel	308-4
8.4 Die Selbstinduktion	308-5
9. Energie des B-Feldes	309-1

10. Maxwellscher Verschiebungsstrom und Maxwell'sche Gleichungen	310-1
10.1 Maxwellscher Verschiebungsstrom	310-1
10.2 Maxwell'sche Gleichungen	310-3
11. Materie und B-Feld	311-1
11.1 Die relative Permeabilität	311-1
11.2 Berechnung von B-Feldern und Induktion in Anwesenheit von Materie mit der relativen Permeabilität μ	311-4
12. Ein- und Ausschaltvorgänge	312-1
12.1 RC-Schaltungen	312-1
12.2 RL-Schaltungen	312-4
13. Wechselspannungen und Wechselströme	313-1
13.1 Darstellung von harmonischen Wechselspannungen und -strömen	313-1
13.2 Die Leistung im Wechselstromkreis	313-2
13.3 Das technische Spannungsnetz	313-4
13.4 RLC-Schaltungen im Wechselstromkreis	313-6
13.5 Der Transformator	313-13
14. Gefahren elektrischer Ströme für den Menschen	314-1
15. Elektromagnetische Wellen	315-1
15.1 Erzeugung elektromagnetischer Wellen	315-1
15.2 Eigenschaften der elektromagnetischen Wellen	315-3
15.3 Abstrahlungscharakteristik der Dipolantenne	315-5
15.4 Energietransport der elektromagnetischen Welle	315-5
15.5 Übersicht über elektromagnetische Wellen	315-8

IV. Geometrische Optik

1. Übersicht	401-1
2. Photometrie, Lichtmessgrößen	402-1
3. Grundlagen der geometrischen Optik	403-1
3.1 Reflexions- und Brechungsgesetz	403-1
3.2 Totalreflexion	403-3
4. Optische Abbildung	404-1
4.1 Dünne Linsen	404-1
4.2 Abbildung durch sphärische Spiegel	404-5
4.3 Linsenkombinationen	404-8
4.4 Optische Instrumente	404-9
4.5 Abbildendes System mit einer Grenzfläche	404-11
4.6 Dicke Linsen	404-15
4.7 Anwendung auf das menschliche Auge	404-17

V. Wellenoptik

1. Prinzip von Huygens	501-1
2. Youngs Experiment	502-1
3. Kohärente Wellen	503-1
3.1 Begriff der Kohärenz	503-1
3.2 Interferenz an dünnen Schichten	503-2

4. Beugung kohärenter Wellen	504-1
4.1 Beugung am Einfachspalt	504-1
4.2 Der Doppelspalt	504-6
4.3 Beugung am Gitter	504-9
5. Abbesche Theorie der Auflösung des Lichtmikroskops	505-1
5.1 Abbildung durch Ueberlagerung verschiedener Beugungsordnungen	505-1
5.2 Auflösungsvermögen des Lichtmikroskops	505-2
6. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Medien	506-1
6.1 Brechungsindex und Dispersion	506-1
6.2 Absorption elektromagnetischer Strahlung in Medien	506-2
6.3 Lichtstreuung	506-5
7. Polarisation des Lichtes	507-1
7.1 Eigenschaften des polarisierten Lichtes	507-1
7.2 Erzeugung von polarisiertem Licht	507-2
7.2.1 Polarisation durch Reflexion	507-2
7.2.2 Polarisation durch Doppelbrechung	507-4
7.2.3 Polarisation durch Dichroismus	507-5
7.2.4 Entstehung von polarisiertem Licht durch Lichtstreuung	507-5
7.3 Optische Aktivität	507-6
7.4 Gesetz von Malus	507-8

VI. Dualismus Wellen und Quanten

1. Die Wärmestrahlung	601-1
1.1 Phänomene	601-1
1.2 Emission und Absorption, Kirchhoffsches Strahlungsgesetz	601-2
1.3 Hohlraumstrahlung	601-4
1.4 Das Gesetz von Stefan-Boltzmann	601-5
1.5 Das Wiensche Gesetz	601-6
1.6 Das Plancksche Strahlungsgesetz	601-7
1.7 Anwendungen der Wärmestrahlung	601-9
2. Einsteins Photonentheorie	602-1
2.1 Der Photoeffekt	602-1
2.2 Maximalenergie der Photoelektronen	602-1
2.3 Lichtquanten	602-3
2.4 Andere Lichtquantenphänomene	602-6
3. Dualismus Welle-Korpuskel	603-1
3.1 Materiewellen	603-1
3.2 de Broglie Wellen	603-2
3.3 Heisenbergsche Unschärferelation	603-3

VII. Atome, Moleküle, Festkörper

1. Atombau	701-1
1.1 Kern und Elektronenhülle	701-1
1.2 Linienspektren des Wasserstoffatoms	701-3

2. Bohrsches Atommodell	702-1
2.1 Bohrsche Postulate	702-1
2.2 Termschema des H-Atoms	702-4
3. Quantenzahlen	703-1
3.1 Beschreibung von Elektronenzuständen	703-1
3.2 Pauli Prinzip	703-3
3.3 Orbitale	703-4
4. Molekülspektren	704-1
5. Festkörper	705-1
6. Anwendungen	706-1

VIII. Der Atomkern und Kernstrahlung

1. Aufbau des Atomkerns	801-1
1.1 Bausteine des Atomkerns	801-1
1.2 Kernnomenklatur	801-3
1.3 Bindungsenergie des Kerns	801-4
1.4 Stabilitätslinie in der N-Z Ebene	801-7
2. Radioaktivität	802-1
2.1 Stabile und instabile Nuklide	802-1
2.2 Zerfallsarten	802-2
2.3 Zerfallsgesetz	802-4

3. Wechselwirkung der Kernstrahlung mit Materie	803-1
3.1 α - und β - Strahlung	803-1
3.2 γ - (und Röntgen-) Strahlung	803-2
3.3 Neutronen	803-5
3.4 Andere Strahlenarten	803-5

IX. Dosimetrie und Strahlenschutz

1. Dosimetrie	901-1
1.1 Aktivität	901-1
1.2 Energiedosis	901-1
1.3 Äquivalentdosis	901-2
1.4 Dosisleistung	901-3
2. Toleranzdosen	902-1
2.1 Nicht beruflich strahlenexponierte Personen	902-1
2.2 Beruflich strahlenexponierte Personen	902-1
3. Natürliche und künstliche Strahlenbelastung	903-1
3.1 Natürliche Radioaktivität	903-1
3.2 Künstliche Radioaktivität	903-2
4. Wirkungen der radioaktiven Strahlung auf den Menschen	904-1

Anhang

SI - Basiseinheiten	A-1
Mathematische Beziehungen	A-2
Physikalische Konstanten	A-3

III Elektrizität und Magnetismus

1. Elektrische Ladung

1.1 Phänomene

Elektrische Ladungen verursachen uns wohlbekannte Phänomene:

- Blitzschlag (= Transport von elektrischer Ladung)
- Funkenbildung zwischen verschieden geladenen Körpern
- Kraftwirkung zwischen elektrisch geladenen Körpern.

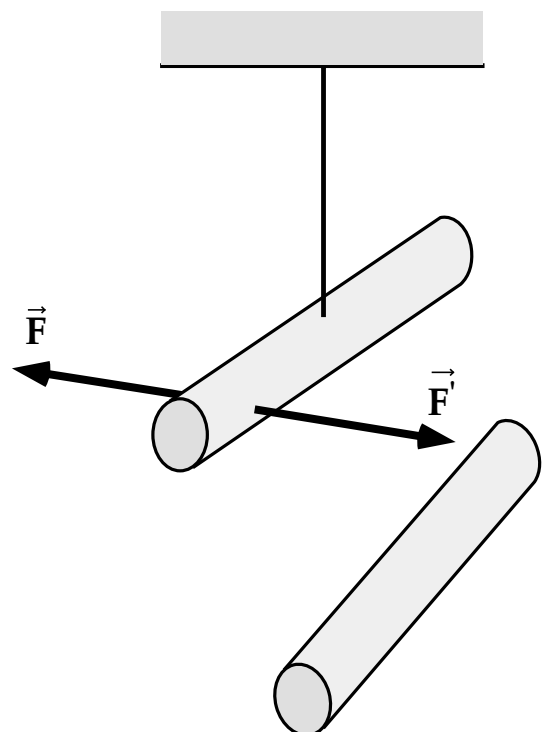
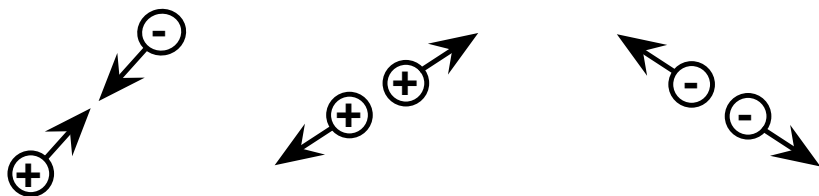
Die Kraftwirkung kann anziehend oder abstoßend sein.

Es existieren zwei Arten von Ladung:

- + positive Ladung
- negative Ladung

Das Experiment zeigt:

gleichartige Ladungen stoßen sich ab
ungleiche Ladungen ziehen sich an



1. Elektrische Ladung

1.2 Die elektrische Ladung q

Die elektrische Ladung ist an Materie gebunden.

Die kleinste in der Natur vorkommende Ladung ist die **Elementarladung e** .

Die geladenen Elementarteilchen tragen die Ladung $+e$ oder $-e$:

Teilchen	Ladung
Elektron	$-e$
Proton	$+e$
Positron	$+e$
π -Mesonen	$+e, -e, 0$
Neutron	0

Das Elektron wurde 1897 durch Joseph Thomson (1856-1940) entdeckt.

Jede in der Natur vorkommende Ladung q setzt sich zusammen aus einer Zahl n von Elementarladungen, d. h. die Ladung ist **quantisiert**.

$$q = n \cdot e$$

Positive und negative Ladungen können sich in ihrer Wirkung kompensieren. So wirkt z.B. ein Atom von aussen als **elektrisch neutral**. Die Z Protonen im Kern mit der positiven Ladung $+Z \cdot e$ werden kompensiert (oder abgeschirmt) durch die negative Ladung $-Z \cdot e$ der Elektronen.

Die elektrische Ladung ist eine **Erhaltungsgrösse**, d. h. in einem abgeschlossenen System ist die Summe der elektrischen Ladung konstant.

Einheit der Ladung q

1 Coulomb = 1 C = 1 Ampere · 1 Sekunde

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

(Ampere und Sekunde sind SI Basiseinheiten)

Grösse der Elementarladung :

$$1 e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

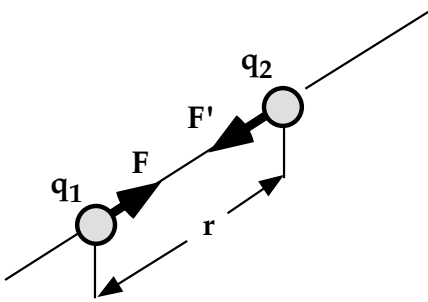
Die Ladung von 1 C wird somit von $\frac{1}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 6.24 \cdot 10^{18}$ Elektronen gebildet.

2. Das Coulombsche Kraftgesetz

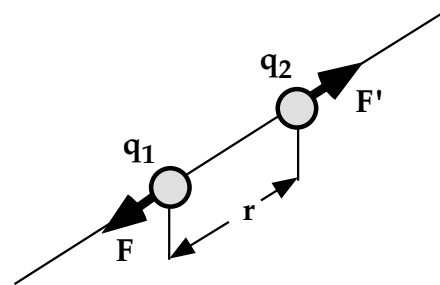
Die Kraftwirkung zwischen elektrischen Ladungen wurde von Coulomb mit einer Torsionswaage untersucht. Der quantitative Zusammenhang zwischen der Kraft F und den punktförmigen Ladungen q_1 und q_2 im Abstand r lautet

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Coulombsches Gesetz
(Charles Auguste Coulomb, 1736-1806)



$q_1 \cdot q_2 < 0$
 q_1 und q_2 haben verschiedene Vorzeichen
 ϵ_0 : elektrische Feldkonstante

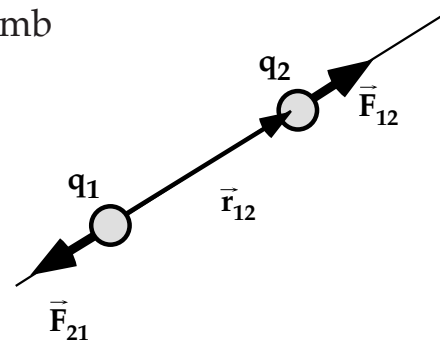


$q_1 \cdot q_2 > 0$
 q_1 und q_2 haben gleiche Vorzeichen

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \cdot \text{s}^4}{\text{kg} \cdot \text{m}^3}$$

Vektorielle Schreibweise des Gesetzes von Coulomb

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^3} \vec{r}_{12}$$



Größenvergleiche

- Zwei Elektronen im Abstand von 1 cm

Gravitationskraft $F_G = \gamma \frac{m_e^2}{r^2} = 5.5 \cdot 10^{-67} \text{ N}$

Coulombkraft $F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = 2.3 \cdot 10^{-24} \text{ N}$

$$\frac{F}{F_G} = 4.2 \cdot 10^{42} !$$

- Kraftverhältnis zwischen zwei Ladungen von je 1 C im Abstand von 1 cm :

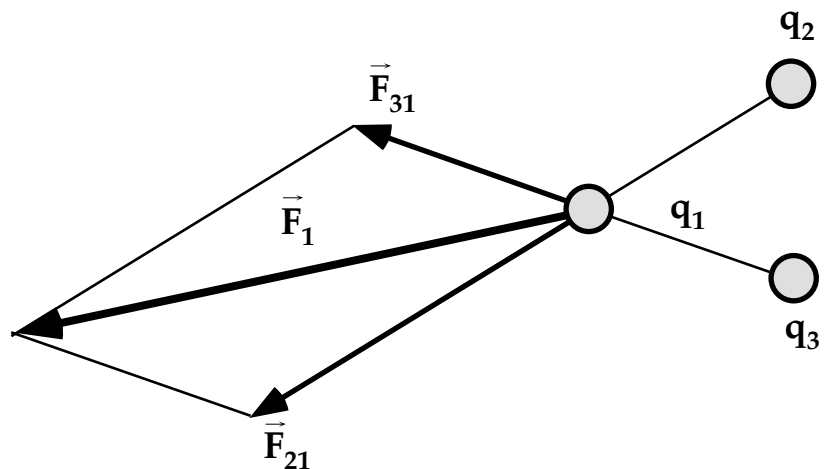
$$F = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1 \cdot 1}{0.01^2} = 9.0 \cdot 10^{13} \text{ N}$$

was dem Gewicht einer Masse von rund 10^{13} kg auf der Erde entspricht.

Coulombkräfte zwischen mehr als zwei punktförmigen Ladungen

Coulombkräfte sind wie Gravitationskräfte additiv. Die gesamte Coulombkraft \vec{F}_1 auf eine Ladung q_1 ergibt sich aus der Vektorsumme der Teilkräfte \vec{F}_{i1} :

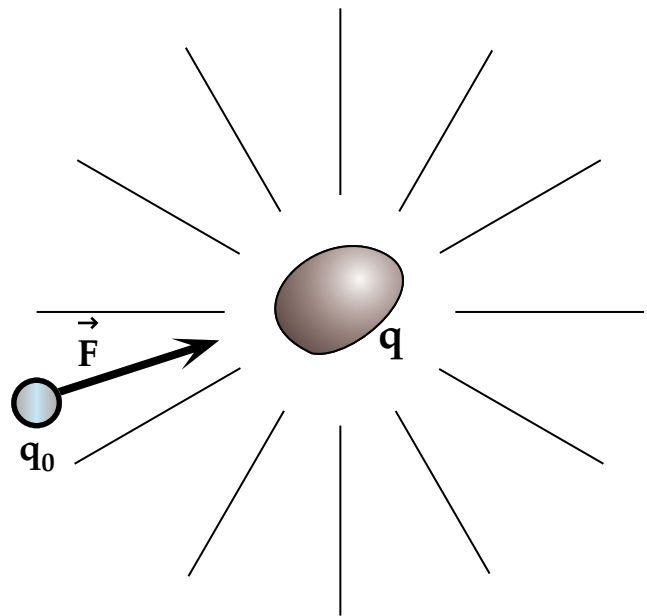
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \dots$$



3. Das elektrische Feld

3.1 Die elektrische Feldstärke

Der Raum um eine Ladung q wird durch die Anwesenheit der Ladung verändert. Das zeigt sich darin, dass auf eine Probeladung q_0 eine Kraft \vec{F} ausgeübt wird.



Definition des elektrischen Feldes E :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Einheit von E : $1 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3 \cdot \text{A}}$

In Kapitel 4 werden wir sehen, dass die Einheit von E auch in Volt/Meter angegeben werden kann.

Die **Feldlinien** des elektrischen Feldes erhält man indem man für eine grosse Zahl von Punkten im Raum die Richtung des \vec{E} -Feldes bestimmt. Die \vec{E} -Vektoren bilden dann Tangenten an die Feldlinien.

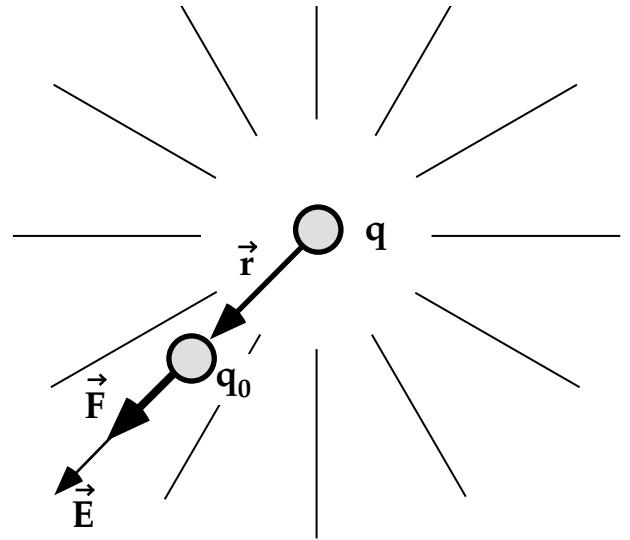
3.2 Berechnung des E-Feldes

Für eine Punktladung q ergibt sich

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q q_0}{q_0 r^2}$$

$$E(r) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

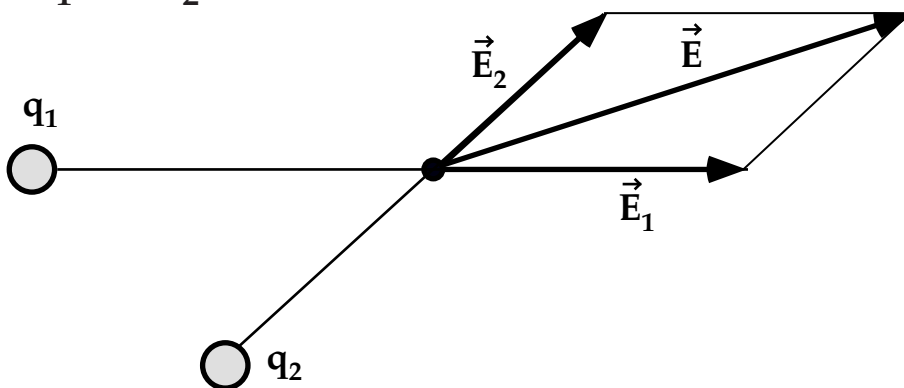
Die Feldlinien verlaufen radial und sind für $q > 0$ nach aussen gerichtet.



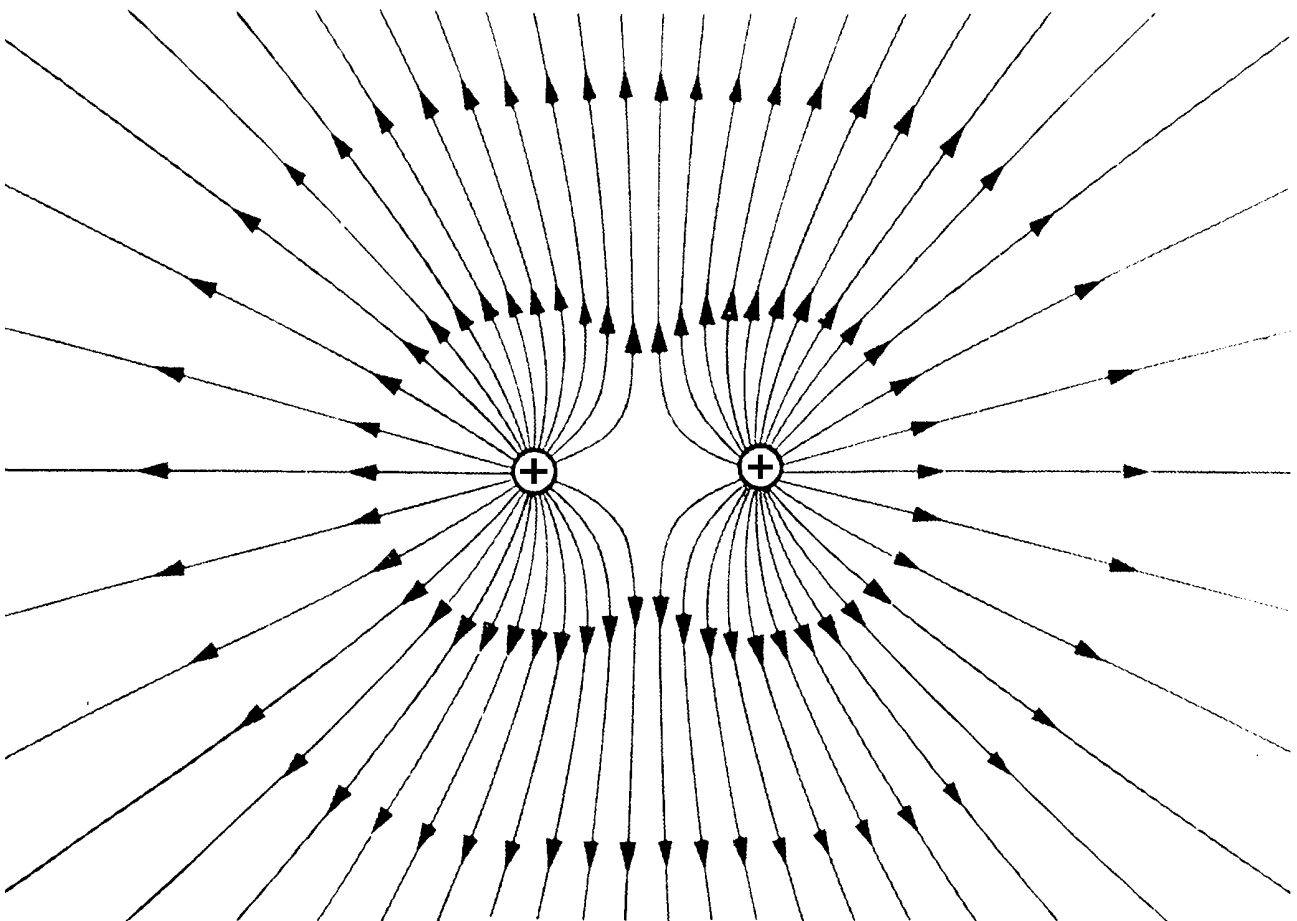
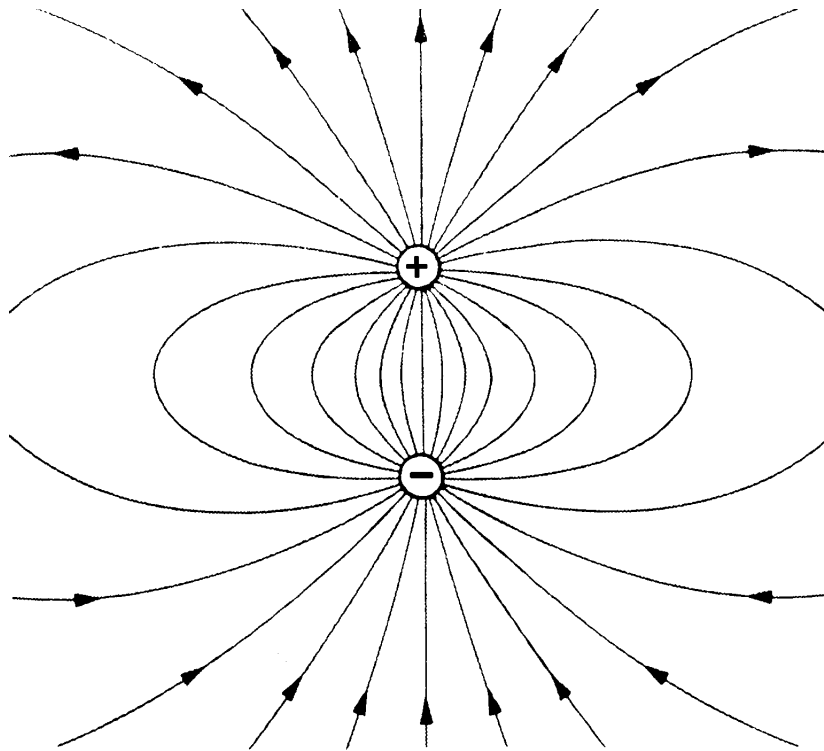
Im Falle von mehreren Ladungen ergibt sich die gesamte Feldstärke \vec{E} als die Vektorsumme der von den einzelnen Ladungen verursachten Teilfeldstärken \vec{E}_i .

Beispiel:

2 Ladungen q_1 und q_2



Feldlinienbilder zweier Ladungspaare: $(+q, -q)$ und $(+q, +q)$



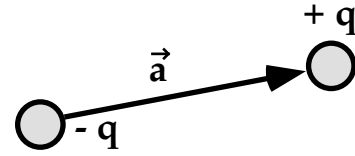
3. Das elektrische Feld

3.3 Elektrische Dipole

Ein elektrischer Dipol besteht aus einem

Ladungspaar $(+q, -q)$ im Abstand \vec{a}

Definition des Dipolmoments \vec{p}

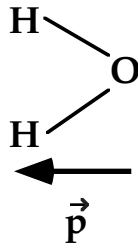
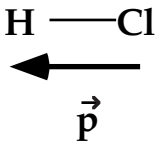


$$\vec{p} = q \cdot \vec{a}$$

Einheit von \vec{p} : 1 C·m

Dipolmomente spielen eine wichtige Rolle bei Molekülen.

Beispiele:



Anmerkung: in der Chemie wird das Dipolmoment mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen

Elektrische Dipole im homogenen elektrischen Feld

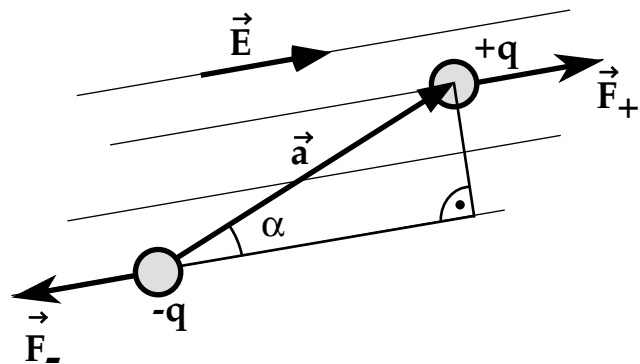
Auf einen Dipol \vec{p} in einem homogenen elektrischen Feld \vec{E} wirkt ein Drehmoment \vec{M}

$$\begin{aligned} |\vec{M}| &= |\vec{F}| \cdot |\vec{a}| \sin \alpha \\ &= q |\vec{E}| \cdot |\vec{a}| \sin \alpha \end{aligned}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{p}| \cdot |\vec{E}| \sin \alpha$$

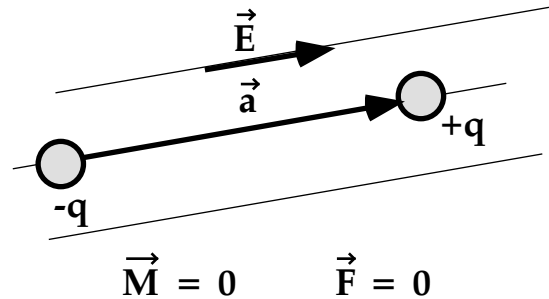
oder

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$



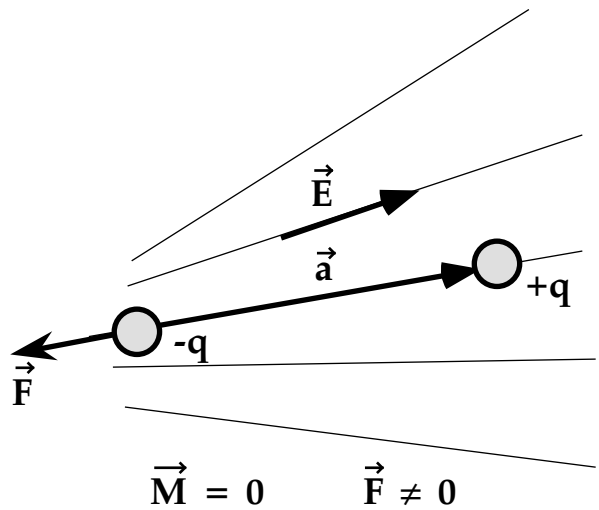
Ausrichtung des Dipols im homogenen Feld

Falls $\vec{a} \parallel \vec{E}$ wird $\vec{M} = 0$,
was der stabilen Lage des Dipols
entspricht (minimale potentielle Energie).
Ebenso ist die resultierende Kraft auf
den Dipol null.



Der elektrische Dipol im inhomogenen Feld

Selbst wenn der Dipol \vec{p} parallel
zu den \vec{E} -Feldlinien ausgerichtet ist,
wirkt eine resultierende Kraft,
da sich die Teilkräfte auf die beiden
Ladungen nicht aufheben. Der
Dipol wird in Richtung
größerer E-Feldstärke gezogen.



3.4 Der Satz von Gauss

Der Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und der Ladung q kann mathematisch auf ganz andere Weise dargestellt werden :

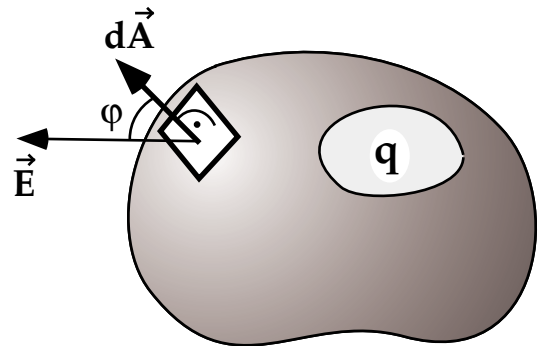
$$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

Satz von Gauss (Carl Friedrich Gauss , 1777 - 1855)

$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \Phi$ ist der Fluss des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Fläche A und q ist die gesamte Ladung innerhalb von A .

$d\vec{A}$: nach aussen gerichteter
Normalvektor auf Flächenelement dA

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA \cdot \cos\varphi$$



Beispiel :

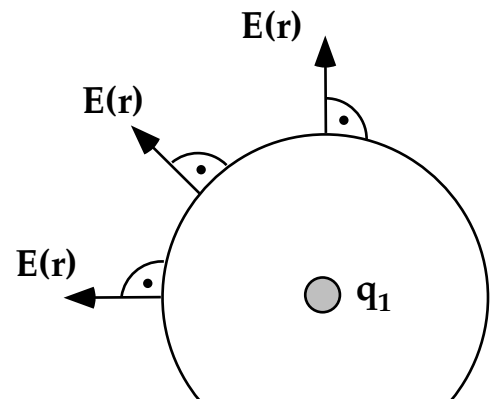
Punktladung q_1 , wir wählen als geschlossene Fläche die Kugel mit Radius r

Satz von Gauss :

$$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q_1$$

$$E(r) \cdot 4 \pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q_1$$

$$E(r) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r^2}$$



für die Kraft auf eine Ladung q_2 im Abstand r von q_1 erhält man dann

$$F = E \cdot q_2 = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

was mit dem Gesetz von Coulomb identisch ist.

Anwendung des Satzes von Gauss

Ort der Ladung auf einem metallischen Leiter

Der metallische Leiter verfügt über frei bewegliche Ladungen, die Elektronen.

Im Gleichgewicht gilt im Inneren des Leiters

$$\vec{E}_{\text{innen}} = 0$$

(Falls $\vec{E}_{\text{innen}} \neq 0$, so würde solange eine

Ladungsverschiebung stattfinden bis

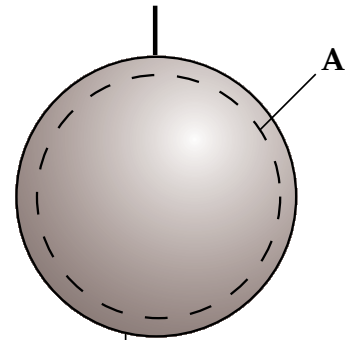
$\vec{E}_{\text{innen}} = 0$ erreicht ist)

Falls wir nun eine Gaussche Fläche A direkt unter der Oberfläche wählen, gilt

$$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

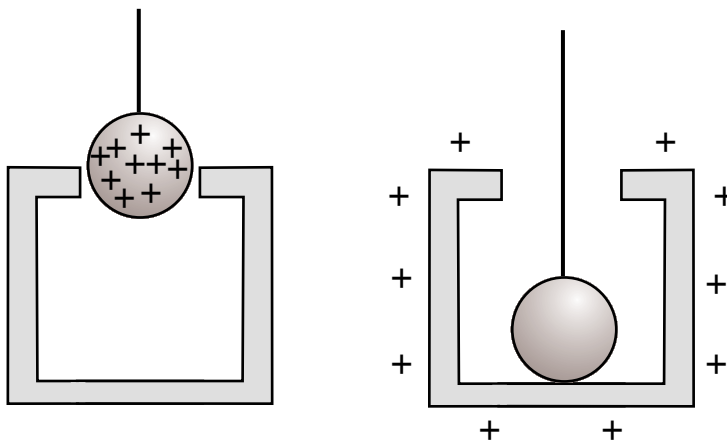
da $E_{\text{innen}} = 0$. Somit muss $q_{\text{innen}} = 0$ sein.

Daraus folgt, dass eine überschüssige Ladung auf der Oberfläche lokalisiert sein muss.



mit der Ladung q
geladenes Metallstück

Ein einfaches Experiment bestätigt dieses Phänomen:



Die anfänglich geladene Kugel überträgt die Ladung auf die Aussenfläche des Gefäßes und ist dann ungeladen.



4. Das elektrische Potential

4.1 Definition des elektrischen Potentials

Um eine Ladung q in einem elektrischen Feld zu verschieben, müssen wir gegen die Coulombkraft F_C Arbeit verrichten. Diese Arbeit berechnet sich nach

$$dW = -\vec{F}_C d\vec{s} = -q \vec{E} d\vec{s}$$

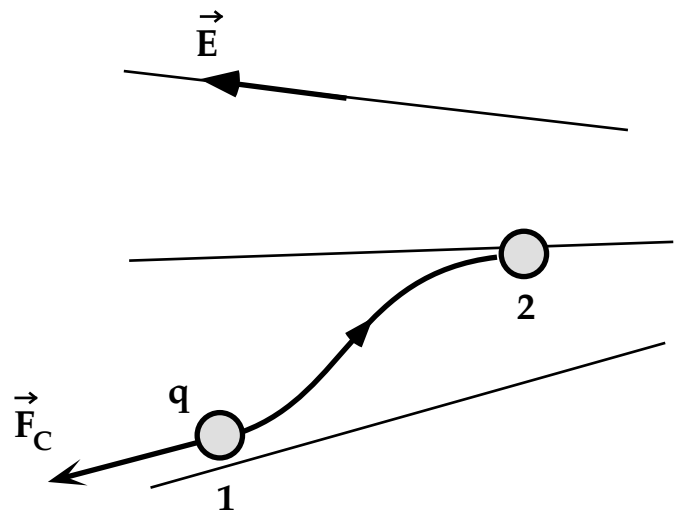
Das elektrische Potential U definieren wir durch

$$dU = \frac{dW}{q} = -\vec{E} d\vec{s}$$

Verschieben wir die Ladung von 1 nach 2 so gilt

$$U_{12} = \frac{\Delta W_{12}}{q}$$

Die Potentialdifferenz zwischen den Punkten 1 und 2 bezeichnen wir als **elektrische Spannung**.



Einheit : 1 Joule/Coulomb = 1 Volt = 1 V

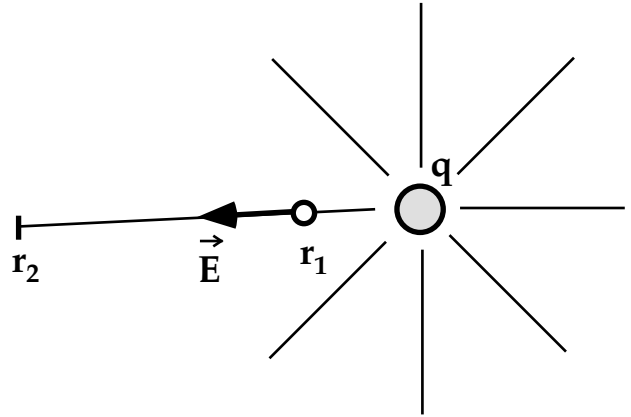
U ist eine skalare Grösse

4.2 Das Potential einer Punktladung q

$$\int_{r_1}^{r_2} dU = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$U(r_2) - U(r_1) = - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} q \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$$

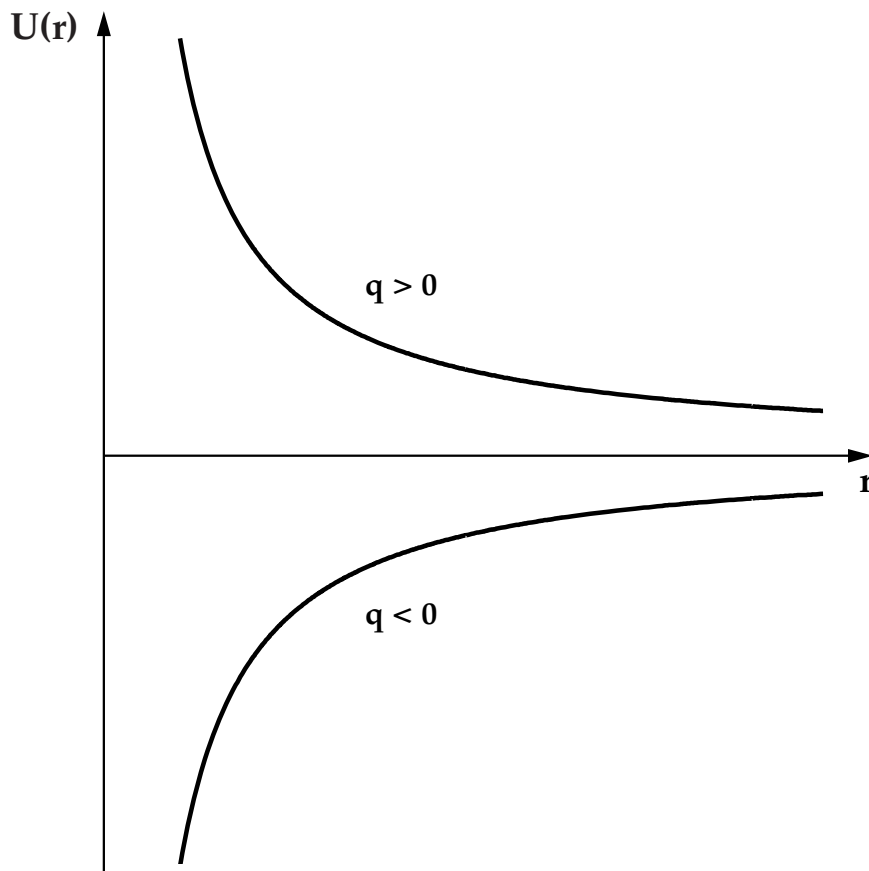
$$U(r_2) - U(r_1) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



Wählen wir $r_2 \rightarrow \infty$ als Referenzpunkt und setzen dort $U(r_2 \rightarrow \infty) = 0$, so erhalten wir

$$U(r) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r}$$

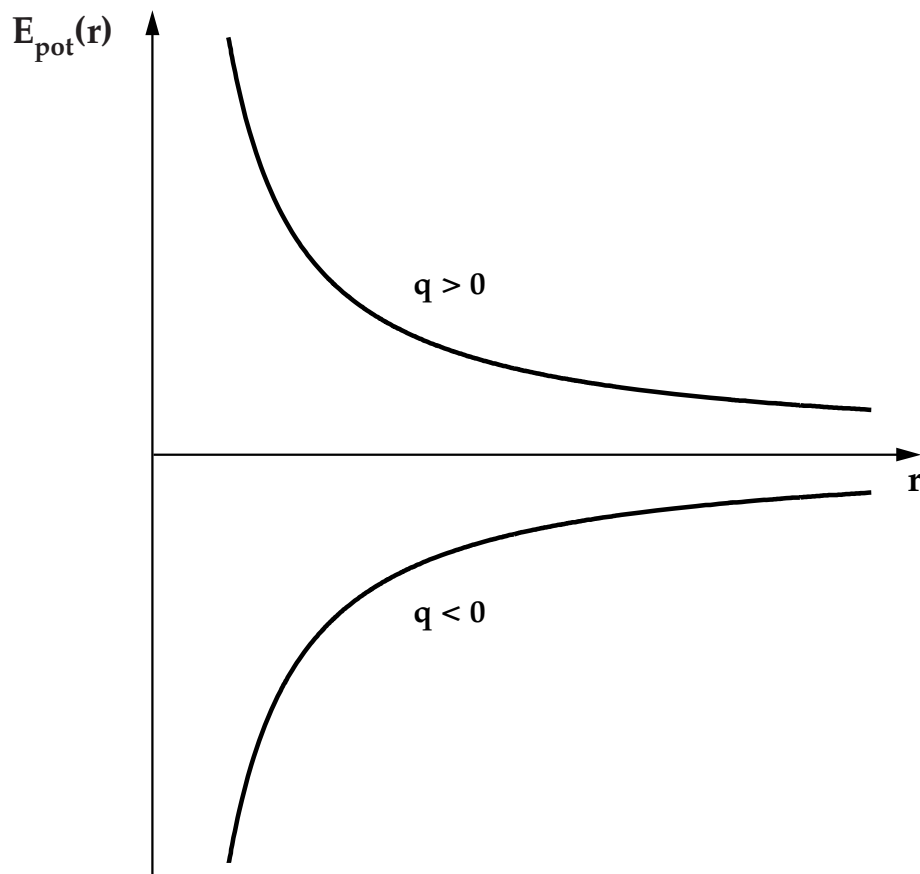
elektrisches Potential einer Punktladung



4.3 Potentielle Energie einer Ladung

Befindet sich eine Ladung q_0 im Feld einer Ladung q , so beträgt die potentielle Energie E_{pot}

$$E_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \cdot q_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_0}{r}$$



4. Das elektrische Potential

4.4 Berechnung der elektrischen Feldstärke aus dem Potential

Das elektrische Potential haben wir definiert durch

$$dU = -\vec{E} \, d\vec{s}$$

Schreiben wir $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ so gilt

$$dU = -E_x \, dx \quad (y = \text{const.}, z = \text{const.})$$

$$dU = -E_y \, dy \quad (z = \text{const.}, x = \text{const.})$$

$$dU = -E_z \, dz \quad (x = \text{const.}, y = \text{const.})$$

Dies schreibt man in der Form

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Diese drei Gleichungen können mit einem Differentialoperator, dem **Gradienten**, zusammengefasst werden

$$\vec{E} = -\text{grad } U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

4.5 Aequipotentialflächen und E-Feldlinien

Aequipotentialflächen sind definiert durch $U = \text{konstant}$.

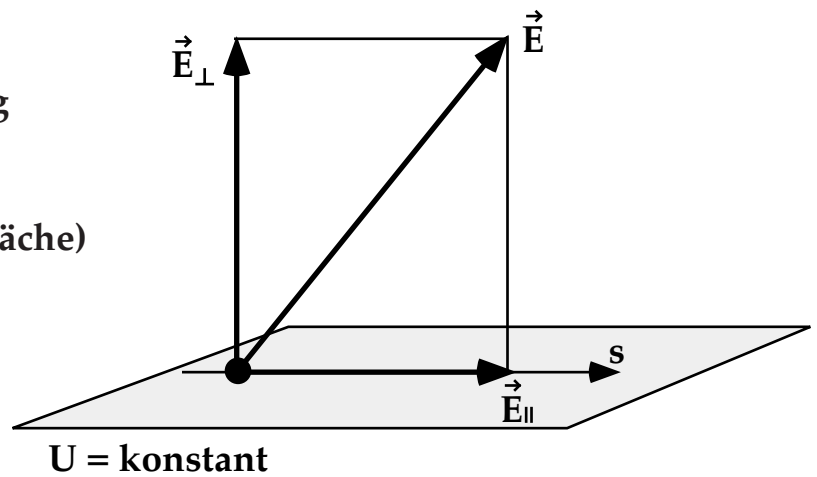
Aequipotentialflächen und E-Feldlinien stehen senkrecht aufeinander.

Beweis:

Annahme: \vec{E} hat eine beliebige Richtung auf der Fläche $U = \text{konstant}$.

In Richtung \vec{E}_{\parallel} (auf der Aequipotentialfläche) muss gelten

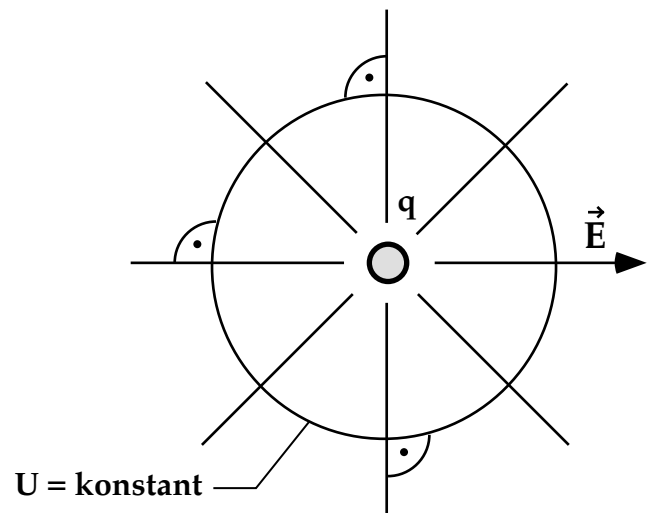
$$-\frac{dU}{ds} = \vec{E}_{\parallel} = 0$$

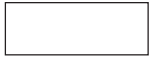


Beispiel:

Punktladung q

Die Aequipotentialflächen sind Kugeln, die \vec{E} -Feldlinien sind radial gerichtet.





5. Kondensatoren und Dielektrika

5.1 Begriff der Kapazität

Jeder nach aussen isolierte Leiter hat die Fähigkeit eine elektrische Ladung q aufzunehmen. Die Oberfläche des Leiters wird dadurch auf ein Potential U gebracht.

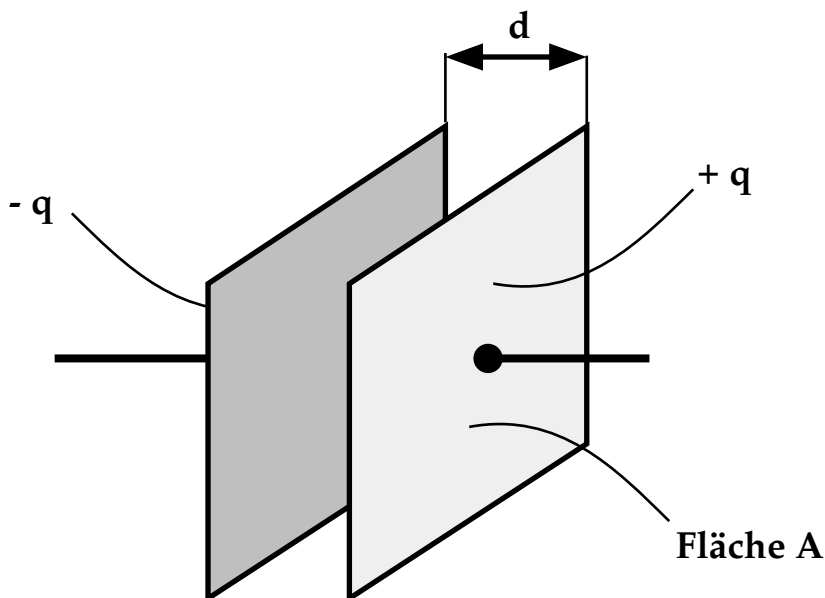
Definition der Kapazität C

$$q = C \cdot U$$

Einheit: $1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F}$

C ist die Kapazität der Leiteranordnung, die wir als Kondensator bezeichnen.

Normalerweise besteht ein Kondensator aus zwei Leiterplatten



im geladenen Zustand tragen die Platten die Ladung $+q$ und $-q$.

5.2 Berechnung der Kapazität

Wir betrachten einen Plattenkondensator. Die Kapazität dieses Kondensators ist proportional zur Plattenfläche A und umgekehrt proportional zum Abstand d der Platten.

Quantitativ gilt

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

Kapazität des Plattenkondensators

Die Kapazität des Plattenkondensators lässt sich mit Hilfe des Satzes von Gauss berechnen.

Annahme:

zwischen den Platten ist $E = \text{konst.}$

ausserhalb $E_a = 0$

$$\oint \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

da $\vec{E} = \text{konst.}$ und $\vec{E} \perp A$ gilt

$$E \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

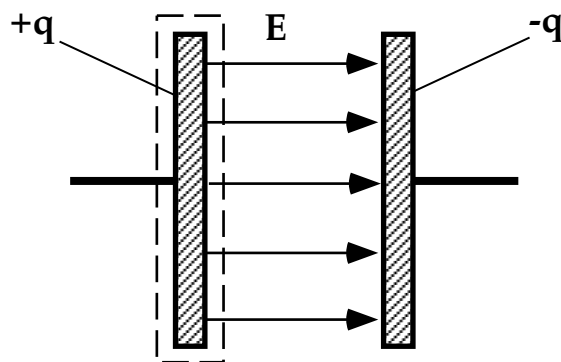
und für die Potentialdifferenz zwischen den Platten gilt wegen des homogenen Feldes

$$U = E \cdot d$$

$$\frac{U}{d} A = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

$$\epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{q}{U} = C$$

was obiger Formel für den Kondensator entspricht.



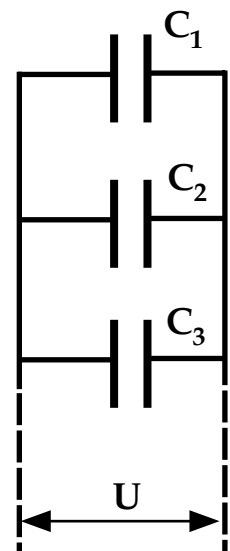
5.3 Schaltungen von Kondensatoren

Gegeben sind Parallel- und Serienschaltungen von Kondensatoren $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$.
Gesucht sind Ersatzkondensatoren C , die dieselbe Kapazität aufweisen wie die Schaltung der n Kondensatoren.

Parallelschaltung

$$C = \frac{q_{\text{tot}}}{U} = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{U} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

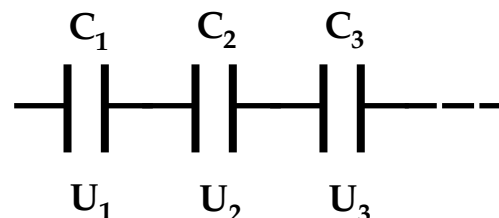
Alle Kondensatoren besitzen die gleiche Spannung U



Serienschaltung

$$\frac{1}{C} = \frac{U_{\text{tot}}}{q} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Der Betrag der Ladung ist an allen Kondensatorplatten gleich q .



5.4 Energiedichte des elektrischen Feldes

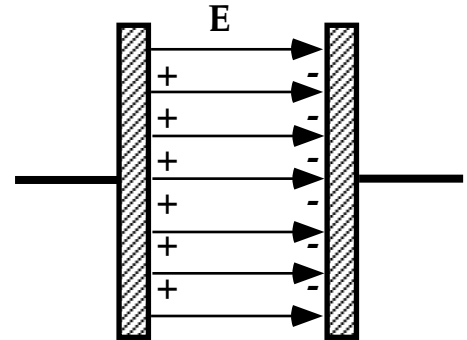
Das Aufladen eines Kondensators erfordert Arbeit.

Um die Ladung dq von der rechten zur linken Platte zu verschieben ist die Arbeit dW erforderlich.

$$dW = U \cdot dq$$

$$dW = \frac{1}{C} q dq$$

$$W = \int_0^q dW = \frac{1}{C} \int_0^q q dq$$



$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

Energie des geladenen Kondensators

andererseits gilt

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

und für das homogene Feld E

$$U = E \cdot d$$

oben eingesetzt liefert

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2$$

$$\frac{W}{A \cdot d} = \frac{E_{el}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Energiedichte des elektrischen Feldes

5.5 Kondensatoren mit Dielektrika

Bei den behandelten Phänomenen und Gesetzen haben wir vorausgesetzt, dass sich die betrachteten Leiter und Ladungen im Vakuum befinden. Kondensatoren zeigen deutlich, dass die Anwesenheit eines dielektrischen Stoffes (eines Isolators) einen grossen Einfluss haben kann. Wird der Raum zwischen den Platten eines Kondensators mit einem Dielektrikum gefüllt, so erhöht sich die Kapazität C . Bezeichnen wir die Kapazität des Kondensators ohne Dielektrikum mit C_0 (Vakuum-Kondensator) so gilt

$$C = \varepsilon C_0$$

ε : Dielektrizitätskonstante des Mediums, ε ist dimensionslos

Tabelle : Dielektrizitätskonstanten ε einiger Stoffe

Stoff	ε	Stoff	ε
Vakuum	1	Chloroform	4.8
Luft	1.00054	Bernstein	5.4
Helium	1.0055	Porzellan	6.5
Teflon	2.1	Neoprene	6.9
Polyethylen	2.3	Glimmer	7.0
Benzol	2.3	Iod	11.1
Olivenöl	3.1	Ethylalkohol	24
Papier	3.5	Glycerin	43
Schwefel	3.5	Wasser (18 °C)	81.1
Bakelit	4.8	Titanoxid	100

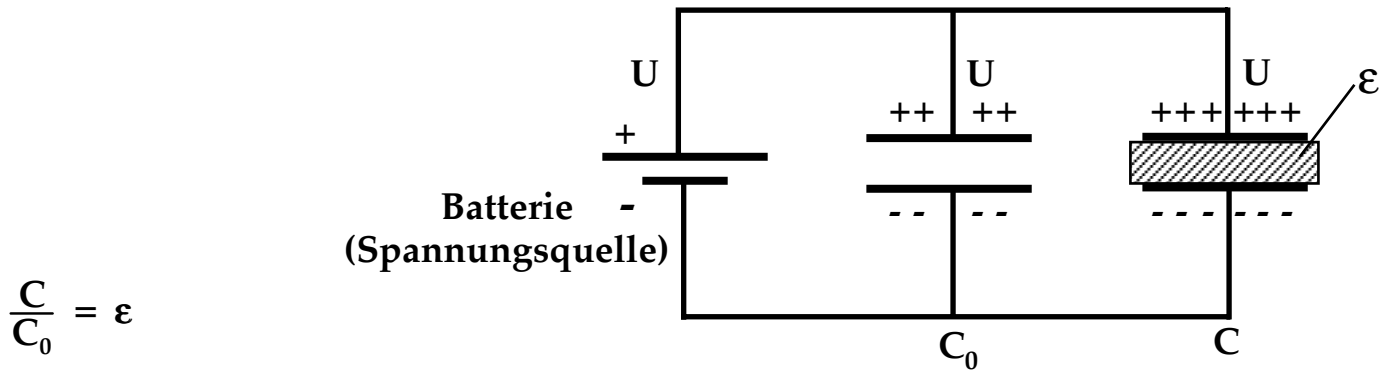
5. Kondensatoren und Dielektrika

Die Anwesenheit eines Dielektrikums ändert nichts an der Definition der Kapazität und es gilt weiterhin

$$q = C \cdot U$$

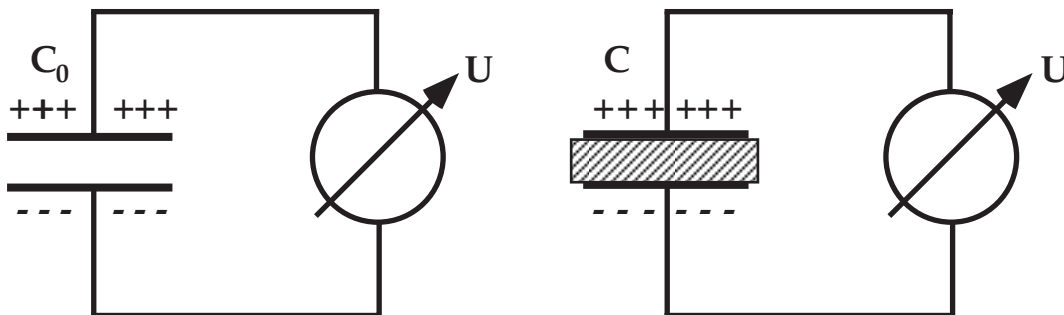
Einfluss des Dielektrikums auf q und U eines Kondensators

- zwei Kondensatoren mit derselben Spannung U



wegen $q = C \cdot U$ ist die Ladung auf den Kondensatorplatten von C um den Faktor ϵ grösser als auf C_0

- zwei Kondensatoren mit derselben Ladung q



wegen $U = \frac{q}{C}$ ist die Spannung U an C um den Faktor $1/\epsilon$ kleiner als auf C_0

Änderung der Energie im geladenen Kondensatoren beim Einfügen eines Dielektrikums:

- $U = \text{konstant}$

$$E_0 = \frac{1}{2} C_0 U^2$$

(siehe Abschnitt 5.4)

→

- mit Dielektrikum

$$E = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon C_0 U^2$$

die Energie ist um einen Faktor ε grösser

- $q = \text{konstant}$

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{C_0} q^2$$

→

$$E = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon C_0} q^2$$

die Energie ist um einen Faktor $1/\varepsilon$ kleiner

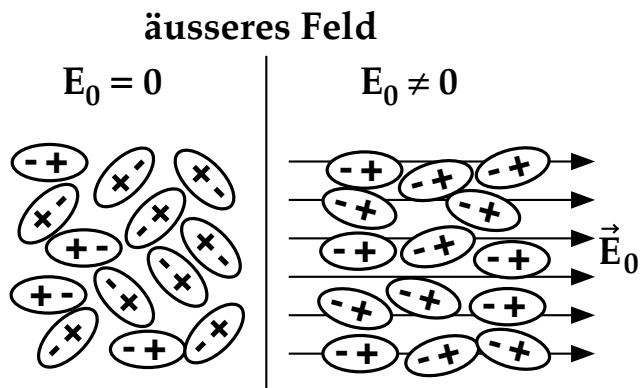
Mikroskopische Betrachtung des Dielektrikums

Wir unterscheiden zwei Arten von Dielektrika:

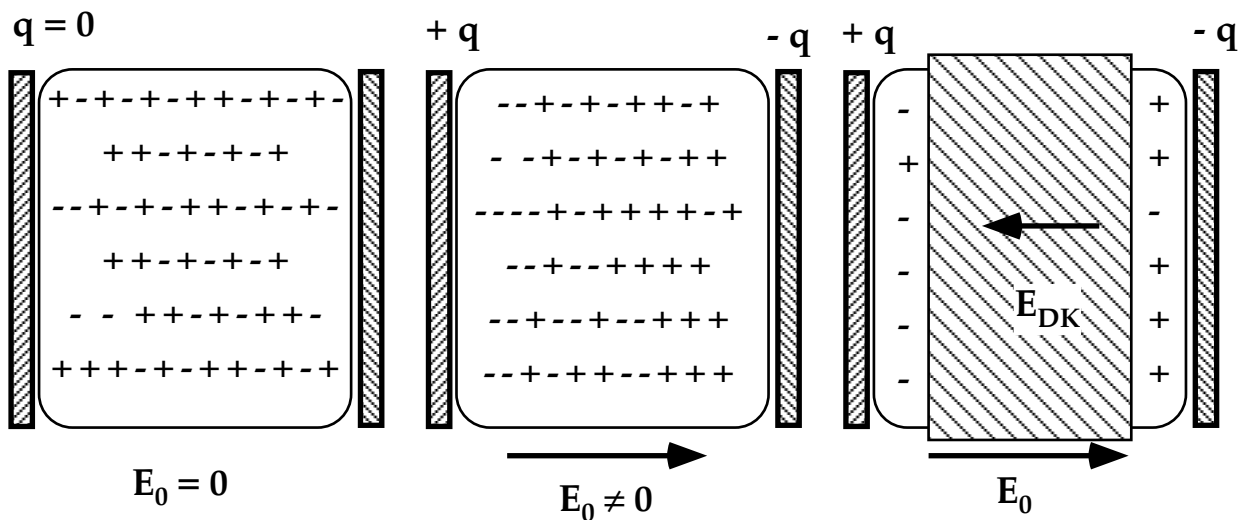
- Dielektrika, die aus Molekülen mit einem Dipolmoment \vec{p} bestehen und
- Isolatoren, deren Atome durch die Anwesenheit eines äusseren \vec{E} -Feldes polarisiert werden und dadurch dann auch ein Dipolmoment besitzen (induzierte Dipole).

Dielektrikum in einem \vec{E} -Feld

Beim Anlegen eines äusseren Feldes richten sich die Dipolmomente \vec{p} bevorzugt in der Richtung des \vec{E} -Feldes aus.



Die thermische Bewegung der Moleküle verhindert eine perfekte Ausrichtung der Moleküle.



Die Ladungen an der Oberfläche des Dielektrikums bewirken ein kompensierendes E-Feld E_{DK} , das dem äusseren Feld E_0 entgegengesetzt ist.

Das resultierende Feld beträgt dann

$$E = E_0 - E_{DK}$$

Da $U = E \cdot d$, reduziert sich die Spannung U beim Einschoben eines Dielektrikums zwischen die Kondensatorplatten, was wir oben bereits phänomenologisch diskutiert haben.

Auch die Coulombkraft auf eine Ladung q_0 wird durch die Anwesenheit eines Dielektrikums abgeschwächt. Da

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

bewirkt die Reduktion des Netto-E-Feldes durch das Dielektrikum auf $E = E_0 - E_{DK}$ auch eine Reduktion der Kraft. Da das E-Feld um einen Faktor $1/\epsilon$ reduziert wird, beträgt die Coulombkraft

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \frac{q_1 \cdot q_1}{r^2}$$

Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten

Da die thermische Bewegung der Moleküle einer perfekten Ausrichtung in einem äusseren Feld entgegenwirkt, ist leicht einzusehen, dass die Dielektrizitätskonstante bei diesen Stoffen mit zunehmender Temperatur stark abnimmt.

Die Dielektrizitätskonstante von Stoffen mit induzierten Dipolen ist nicht temperaturabhängig. Dafür hängt hier die Dielektrizitätskonstante vom äusseren Feld ab.

6. Der elektrische Strom

6.1 Definition des elektrischen Stromes

Definition:

Der elektrische Strom I durch einen festgelegten Querschnitt ist gegeben durch

$$I = \frac{dq}{dt}$$

oder falls der elektrische Strom zeitunabhängig ist

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Einheit: 1 Ampère = 1 A = 1 $\frac{\text{Coulomb}}{\text{Sekunde}}$

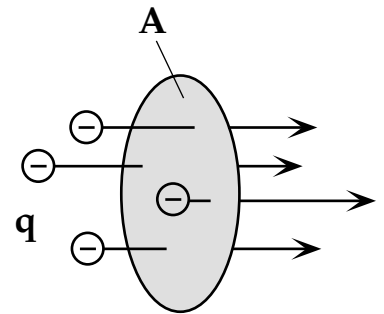
Die Stromstärke 1 Ampère ist eine der sieben SI Basiseinheiten.

Definition:

Die elektrische Stromdichte i durch einen Querschnitt A ist gegeben durch

$$i = \frac{I}{A} = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{A}$$

Einheit: 1 $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

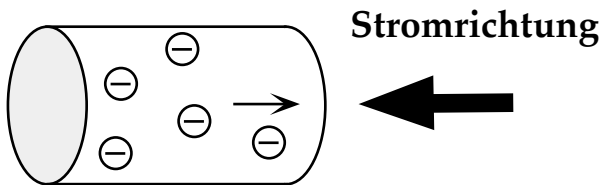


6. Der elektrische Strom

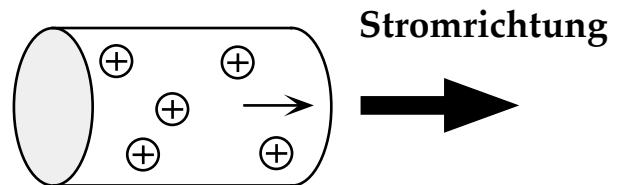
Konvention der Stromrichtung

Die Stromrichtung ist bestimmt durch die Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger

Beispiele:



Elektronen in einem metallischen Leiter



H^+ Ionen in einem Elektrolyten

Ein elektrischer Strom liegt also immer dann vor, wenn Ladung transportiert wird. Da elektrische Ladung an Materie gebunden ist (Elektronen, Protonen, Ionen) ist mit dem elektrischen Strom auch ein Materietransport verbunden.

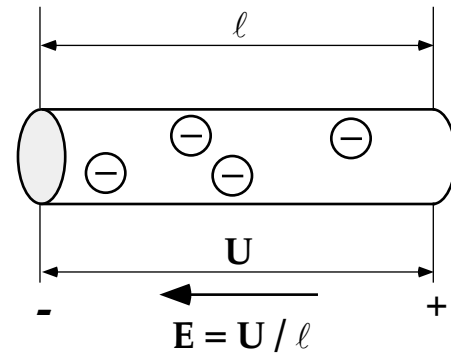
Ein elektrischer Strom in Materie mit frei beweglichen Ladungsträgern kommt durch Anlegen einer elektrischen Spannung U (und damit eines elektrischen Feldes) zustande. Ladungen können jedoch auch im Vakuum transportiert werden, z. B. als Elektronenstrahlen, wobei die Elektronen durch ein elektrisches Feld beschleunigt werden können.

6.2 Elektrische Ströme in Materie

Legen wir an einen elektrischen Leiter der Länge ℓ eine konstante Spannung U an, so fließt ein konstanter elektrischer Strom I .

Auf die Elektronen wirkt eine beschleunigende Kraft

$$\vec{F} = -e \vec{E}$$



Da die Elektronen Stöße mit dem Ionengitter machen, stellt sich eine stationäre mittlere Geschwindigkeit der Elektronen ein, die **Driftgeschwindigkeit** v_D .

(Analogie: Driftgeschwindigkeit einer fallenden Kugel in viskoser Flüssigkeit)

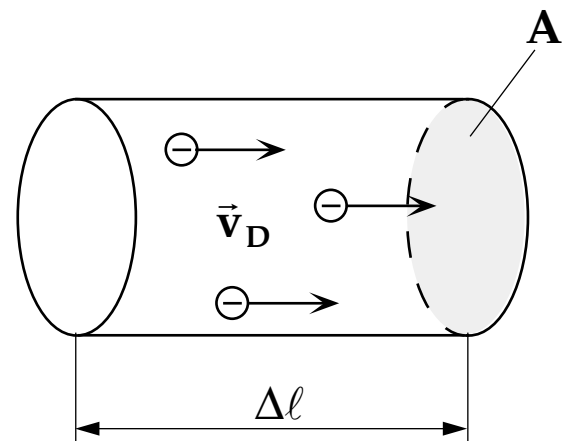
Wir betrachten das Volumen

$$\Delta V = A \cdot \Delta \ell$$

und die darin enthaltenen Elektronen, die zum Strom I beitragen

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e n \Delta V}{\Delta t} = e n A \underbrace{\frac{\Delta \ell}{\Delta t}}_{v_D}$$

$$I = e n A v_D$$



oder für die Stromdichte

$$i = \frac{I}{A} = e n v_D$$

n : Dichte der Leitungselektronen
(Elektronen, die zur Leitung beitragen)
 e : Elementarladung ($1.602 \cdot 10^{-19} \text{C}$)

6. Der elektrische Strom

Beispiel: Kupferdraht $A = 1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$

$$I = 1 \text{ A}$$

$$n = 1 \text{ Elektron/Cu-Atom}$$

$$A_{\text{Cu}} = 64 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

$$\rho_{\text{Cu}} = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$n = \frac{N_A \cdot \rho_{\text{Cu}}}{A_{\text{Cu}}} = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 9 \cdot 10^3}{64 \cdot 10^{-3}} = 8.5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$v_D = \frac{I}{e \cdot n \cdot A} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 8.5 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6}} = 7.4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$= 0.074 \text{ mm/s}$$

Elektrischer Widerstand

Definition

Der elektrische Widerstand R eines Leiters ist gegeben durch

$$R = \frac{U}{I}$$

Einheit: 1 Volt/Ampère = 1 Ohm = 1Ω

Definition

Der spezifische elektrische Widerstand ρ eines Materials ist gegeben durch

$$\rho = \frac{E}{i}$$

Einheit: $1 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{A}} = 1 \Omega \cdot \text{m}$

Definition

Die elektrische Leitfähigkeit σ ist definiert durch

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

Einheit: $1 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = 1 \frac{\text{Siemens}}{\text{Meter}} = 1 \frac{\text{S}}{\text{m}}$

Mit den letzten beiden Definitionen kann die Stromdichte i auch geschrieben werden

$$i = \frac{1}{\rho} \cdot E = \sigma \cdot E$$

Zusammenhang R und ρ

$$\rho = \frac{E}{i}$$

$$\rho = \frac{U}{\ell} \cdot \frac{1}{I/A}$$

$$\frac{U}{I} = \frac{\rho \cdot \ell}{A} = R$$

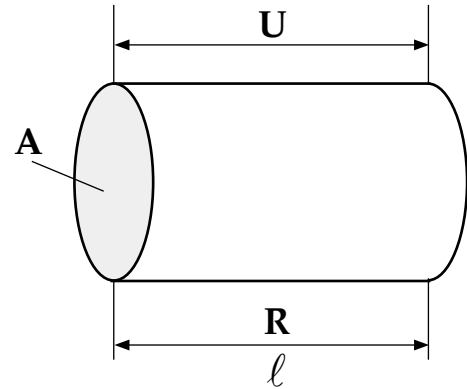


Tabelle: elektrische Leitfähigkeit σ , spezifischer Widerstand ρ und deren Temperaturkoeffizienten α von einigen Materialien.

Stoff	elektrische Leitfähigkeit [$S \cdot m^{-1}$]	spez. Widerstand [$\Omega \cdot m$]	α - Parameter [$1/^\circ C$]
Silber	$6.25 \cdot 10^7$	$1.6 \cdot 10^{-8}$	0.0061
Kupfer	$5.88 \cdot 10^7$	$1.7 \cdot 10^{-8}$	0.0068
Aluminium	$3.12 \cdot 10^7$	$3.2 \cdot 10^{-8}$	0.0043
Eisen	$1.15 \cdot 10^7$	$8.7 \cdot 10^{-8}$	0.0065
Konstantan	$0.20 \cdot 10^7$	$50 \cdot 10^{-8}$	$(-8 \text{ bis } +4) \cdot 10^{-5}$
Graphit	$10^4 \text{ bis } 10^5$	$10 \text{ bis } 100 \cdot 10^{-6}$	-0.0005
Germanium	$2.17 \cdot 10^{-4}$	4600	
Silizium	$4.34 \cdot 10^{-8}$	$2.3 \cdot 10^7$	
Blut	0.625	1.6	
Muskelg.	0.5	2	
Glas	10^{-13}	10^{13}	
Hartgummi	10^{-17}	10^{17}	

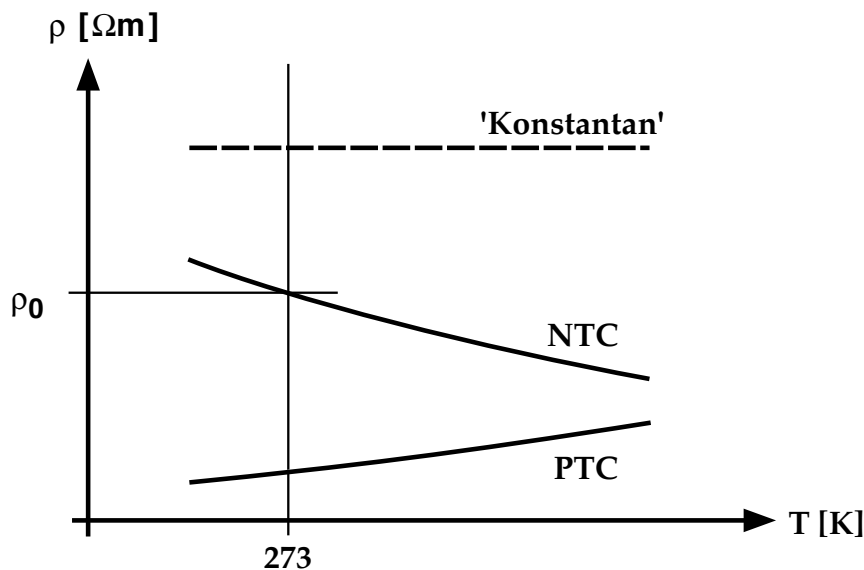
6. Der elektrische Strom

Der elektrische Widerstand ist temperaturabhängig. Die Variation von ρ (oder R) kann berechnet werden nach

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

Dabei setzt man voraus, dass im betrachteten Temperaturbereich eine lineare Abhängigkeit besteht.

Der Temperaturkoeffizient α ist bei den meisten Metallen positiv, d.h. der elektrische Widerstand R nimmt mit zunehmender Temperatur zu (PTC - Leiter oder 'Kaltleiter'). Es gibt aber auch Stoffe, die einen negativen Temperaturkoeffizienten aufweisen (NTC - Leiter oder 'Heissleiter').

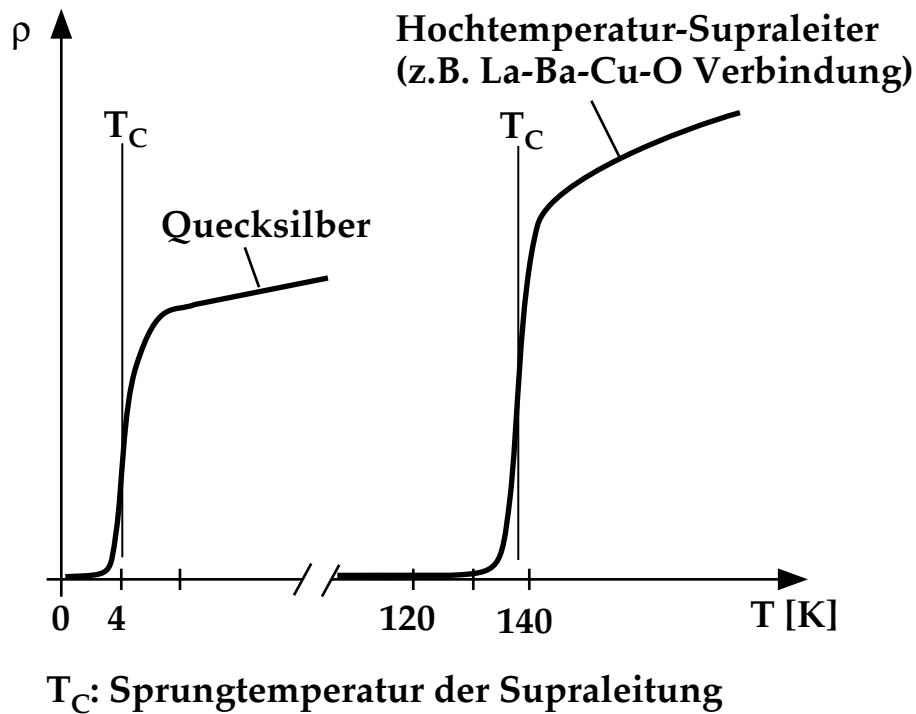


Supraleitung

Viele Substanzen zeigen unterhalb einer kritischen Temperatur T_c supraleitendes Verhalten (\Rightarrow 'Supraleiter'). Unterhalb T_c fällt der elektrische Widerstand auf Null ab.

Die Supraleitung wurde am Quecksilber 1911 durch Kamerlingh Onnes entdeckt.

J. G. Bednorz und K. A. Müller erhielten 1987 für die Entdeckung der Hochtemperatursupraleiter den Nobelpreis.

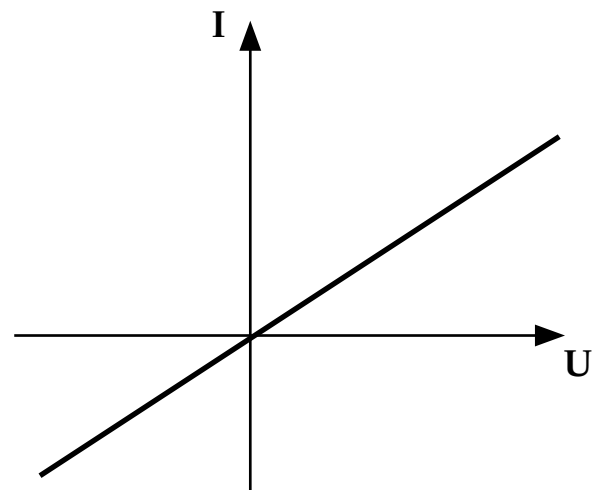


6.3 Das Ohmsche Gesetz

Experimentell wurde nachgewiesen, dass beim Anlegen einer Spannung U an einen elektrischen Leiter (auf konstanter Temperatur) ein Strom I resultiert, der proportional zu U ist.

$$I = \frac{1}{R} U$$

Ohmsches Gesetz
(Georg Ohm 1789 - 1854)

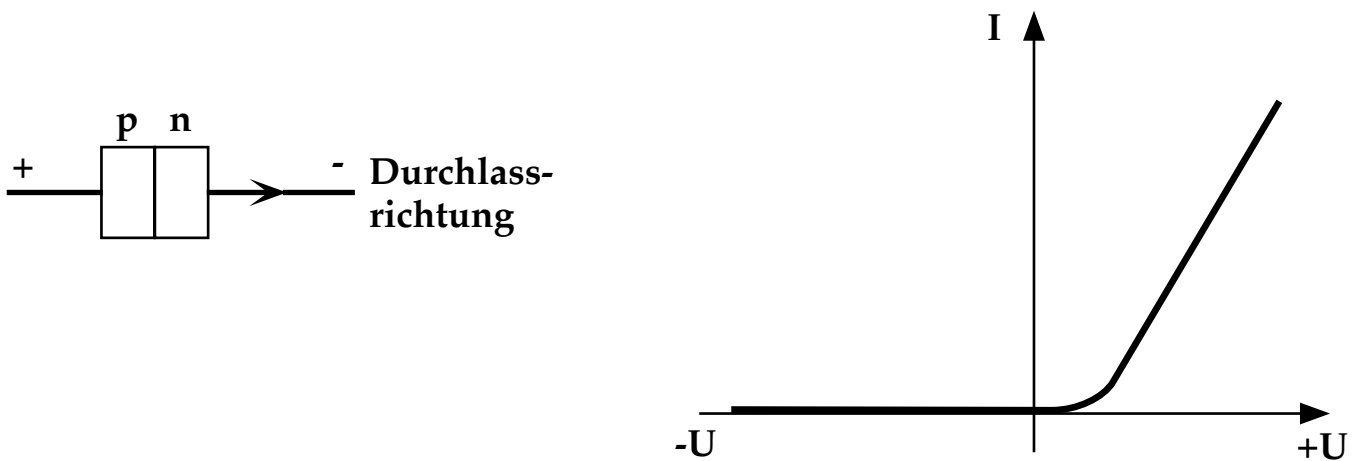


Kennlinie eines Ohmschen Leiters

Die Darstellung $I(U)$ bezeichnet man als Kennlinie eines Leiters.

6. Der elektrische Strom

Es gibt viele Leiter, die keine lineare Kennlinie besitzen und somit kein ohmsches Verhalten zeigen.

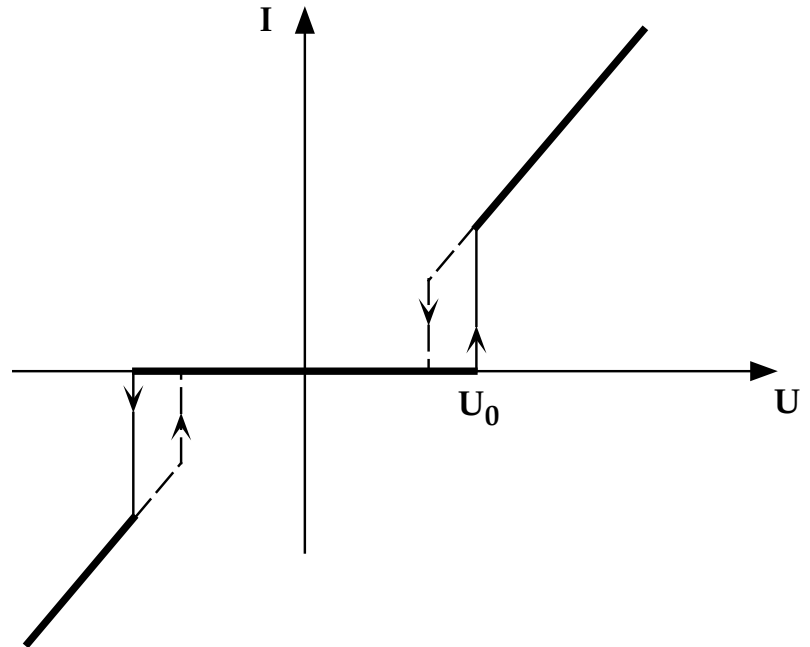
Kennlinie eines pn Halbleiterübergangs.

Die Kennlinie zeigt, dass der Strom nur in einer Richtung fließen kann (negative Polarität an n-Halbleiter). Man bezeichnet diese Anordnung als Gleichrichter oder Diode.

Die Diodenkennlinie wird bestimmt durch das elektrische Verhalten der Grenzfläche zwischen dem p-Typ und n-Typ Halbleiter.

Kennlinie einer Glimmlampe

Die Lampe wird gezündet sobald die Zündspannung U_0 überschritten wird. Dabei wird eine grosse Zahl von Molekülen ionisiert und der Ionentransport wird dann von Ionen und Elektronen getragen.



6.4 Metalle - Halbleiter - Isolatoren

Isolatoren besitzen spezifische Widerstände im Bereich von $\rho > 10^{10} \Omega \cdot \text{m}$ ($\sigma < 10^{-10} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$).

Sie können den elektrischen Strom nicht leiten, weil sie keine frei beweglichen Ladungsträger besitzen. So sind z.B. die Valenzelektronen in Oxiden atomar lokalisiert und können deshalb nicht zur Leitfähigkeit beitragen.

Halbleiter besitzen spezifische Widerstände im Bereich von $10^{-5} - 10^{-10} \Omega \cdot \text{m}$.

Charakteristisch ist hier die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit, die mit zunehmender Temperatur stark zunimmt wie

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_a}{kT}}$$

σ_0 : Leitfähigkeitsvorfaktor

E_a : Aktivierungsenergie

k : Boltzmann Konstante

6. Der elektrische Strom

Halbleitermaterialien sind Elemente oder Verbindungen mit (durchschnittlich) 4 Valenzelektronen pro Atom. Der Leitfähigkeitstyp (n- Typ oder p- Typ) wird bestimmt durch die Wertigkeit der Dotierungsatome im Halbleiter (5-wertige oder 3-wertige Elemente).

Metalle besitzen spezifische Widerstände im Bereich von $1.59 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ (Silber) bis einige $10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$.

Die hohe Leitfähigkeit kommt durch die metallische Bindung zustande. Die Valenzelektronen sind nicht lokalisiert sondern können sich mehr oder weniger frei im Metall bewegen. Bei den Edelmetallen Cu, Ag und Au tragen je etwa 1 Elektron/ Atom zu den Leitungselektronen bei.

6.5 Ströme in Elektrolyten

Der Begriff der Ladungsträgerbeweglichkeit

Die Stromdichte \mathbf{i} lässt sich nach Abschnitt 6.2 durch die Driftgeschwindigkeit ausdrücken

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{A}} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_D$$

und andererseits durch die elektrische Leitfähigkeit σ

$$\mathbf{i} = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

Damit können wir σ ausdrücken durch

$$\sigma = \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \frac{v_D}{E} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$$

die Grösse \mathbf{b} wird als Beweglichkeit der Ladungsträger bezeichnet

$$\mathbf{b} = \frac{v_D}{E}$$

Einheit von \mathbf{b} : $1 \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}$

In verschiedenen Stoffen, wie z.B. Halbleiter oder Elektrolyten, tragen sowohl negative Ladungsträger (Elektronen, negative Ionen) wie positive Ladungsträger ('Löcher' im Falle der Halbleiter, positive Ionen) zur Stromleitung bei. Jeder Ladungsträgertyp besitzt dann im betreffenden Stoff eine charakteristische Beweglichkeit.

Zur gesamten Leitfähigkeit σ tragen die Ströme der einzelnen Ladungsträger bei:

$$\sigma = \sigma^+ + \sigma^- = z^+ \cdot e \cdot n^+ \cdot b^+ + z^- \cdot e \cdot n^- \cdot b^-$$

Dabei bedeuten

z^+, z^- Wertigkeit der positiven bzw. negativen Ionen

e elektrische Elementarladung ($6.02 \cdot 10^{-19} \text{C}$)

n^+, n^- Konzentration der positiven bzw. negativen Ladungsträger

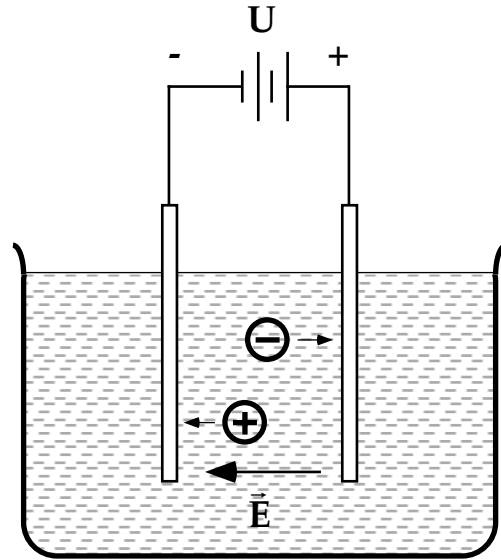
Tabelle : Ladungsträgerbeweglichkeit in einigen festen Stoffen und wässrigen Lösungen

Stoff	Elektronen [cm ² / Vs]	Löcher [cm ² / Vs]	wässrige Lösung (20°C)	
				[cm ² / Vs]
Diamant	1800	1200	H ⁺	$3.26 \cdot 10^{-3}$
Silizium	1900	425	Li ⁺	$0.35 \cdot 10^{-3}$
Germanium	3900	1700	Na ⁺	$0.45 \cdot 10^{-3}$
GaAs	4000	240	K ⁺	$0.67 \cdot 10^{-3}$
Metalle	10 bis 100	-	Ca ⁺⁺	$0.53 \cdot 10^{-3}$
			OH ⁻	$1.80 \cdot 10^{-3}$
			Cl ⁻	$0.68 \cdot 10^{-3}$
			SO ₄ ⁻⁻	$0.68 \cdot 10^{-3}$

Die Ionenbeweglichkeiten in Elektrolyten sind deshalb sehr klein, weil die Ionen grosse (und schwere) Solvatkomplexe bilden (Anlagerung der polaren H₂O-Moleküle).

Stofftransport in Elektrolyten

Beim Anlegen einer elektrischen Spannung an die Elektroden entsteht im Elektrolyten ein elektrisches Feld, welches die **Anionen** (negative Ionen, z.B. Cl^-) in Richtung **Anode** (positive Elektrode) und die **Kationen** (positive Ionen, z.B. Na^+) in Richtung **Kathode** (negative Elektrode) bewegt.



elektrolytische Zelle

An den Elektroden werden die Ionen durch Abgabe bzw. Aufnahme von Elektronen neutralisiert und an den Elektroden abgelagert (z.B. Abscheidung des Metalls) oder rekombinieren zu Gasmolekülen (z.B. Cl_2).

Die Substanzmenge, die ausgeschieden wird ist gegeben durch :

$$n = \frac{Q}{z \cdot e} \cdot \frac{1}{N_A}$$

- n: Stoffmenge in Mol
- Q: während des Prozesses fließende Ladung ($= \int I dt$)
- z: Wertigkeit des Ions
- e: Elementarladung
- N_A : Avogadro'sche Zahl

die Grösse $\frac{Q}{z \cdot e}$ entspricht der Anzahl der Ionen.

Die Ladung von einem Mol Elementarladungen bezeichnet man als Faradaysche Konstante F :

$$F = e N_A = 96'485 \text{ C / mol}$$

$$\Rightarrow n = \frac{Q}{z \cdot F}$$

Beispiel: Ausscheidung von Silber aus Silbernitrat (AgNO_3) - Lösung.

$$Q = 1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

$$n = \frac{Q}{z \cdot F} = \frac{1}{1 \cdot 96'485} = 1.0364 \cdot 10^{-5} \text{ Mol}$$

$$m = n \cdot A = 1.0364 \cdot 10^{-5} \cdot 107.9 \frac{\text{mol} \cdot \text{g}}{\text{mol}}$$

$$m = 1.118 \text{ mg}$$

(darauf beruhte früher die Definition des Ampère : Ausscheidung von 1.118 mg Ag aus AgNO_3 Lösung bei 1 A in 1 s)

Elektrophorese

Bei der Elektrophorese werden Eiweisse (Albumin, Globulin), die in der Regel elektrisch geladen sind, in einem elektrischen Feld getrennt. Die Trennung erfolgt aufgrund der verschiedenen Beweglichkeiten b der verschiedenen Eiweisse. Diese liegen im Bereich von 1 bis $10 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{Vs}$ und sind damit rund 100 mal kleiner als die der einfachen Ionen in Elektrolyten.

6. Der elektrische Strom

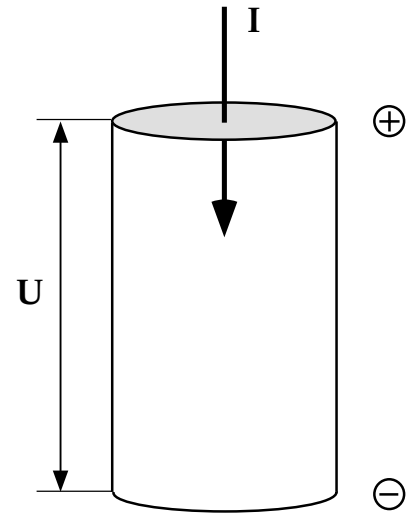
6.6 Energieumwandlung in elektrischen Stromkreisen

Die Ladungsträger, die eine Potentialdifferenz U durchlaufen, nehmen dabei eine Energie W auf

$$W = q \cdot U$$

Für die Leistung P gilt dann

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dq}{dt} U = I \cdot U$$



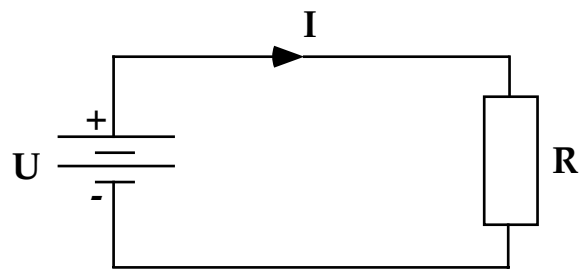
Dieser Zusammenhang gilt auch für Ströme und Spannungen, die zeitlich nicht konstant sind.

$$P(t) = U(t) \cdot I(t)$$

momentane Leistung

Beispiel: Stromkreis mit Batterie und ohmschem Widerstand

Die Batterie liefert die Spannung U . Damit ein Strom fließen kann braucht er einen geschlossenen Kreis. Die Verbindungen der einzelnen Elemente werden als Äquipotentialflächen betrachtet d.h. entlang den (idealen) Leitungen ist der Spannungsabfall



$$\Delta U = 0 \quad (\text{da } R_{\text{Leitung}} = 0)$$

Somit ist die Spannung an R ebenfalls U und der Strom I beträgt $I = \frac{U}{R}$.

Die Leistung, die am Widerstand in Wärme umgewandelt wird ist dann

$$P = UI = U \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$$

oder

$$P = UI = R \cdot I^2$$

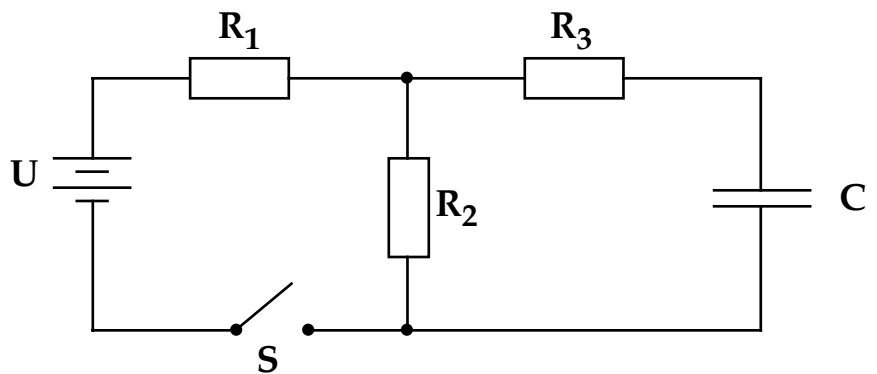
Diese Leistung wird von der Batterie geliefert.

6.7 Elektrische Netzwerke

Elektrische Netzwerke bestehen aus Schaltungen von elektrischen Elementen wie Spannungsquellen, Widerständen, Kondensatoren u.s.w. und können aus einem oder mehreren Kreisen bestehen.

Beispiel:

Netzwerk, das aus zwei Kreisen (oder Maschen) besteht mit Batterie (U), Widerständen (R_1, R_2, R_3), Kondensator (C) und einem Schalter (S).



6. Der elektrische Strom

Zur Berechnung der in einem Kreis auftretenden Ströme und Spannungen benützt man die

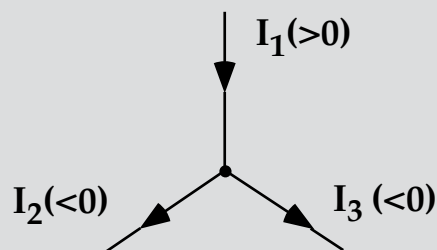
Kirchhoffschen Regeln

(nach Gustav Robert Kirchhoff, 1824 - 1887)

1. Knotenregel

An jedem Verzweigungspunkt einer Schaltung ist die Summe der zufließenden Ströme (>0) und der abfließenden Ströme (<0) gleich Null.

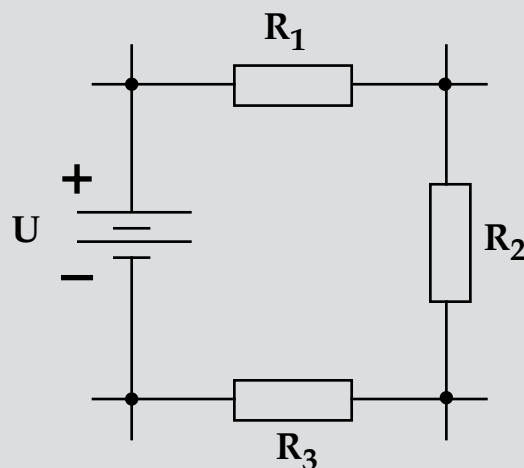
$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$



2. Maschenregel

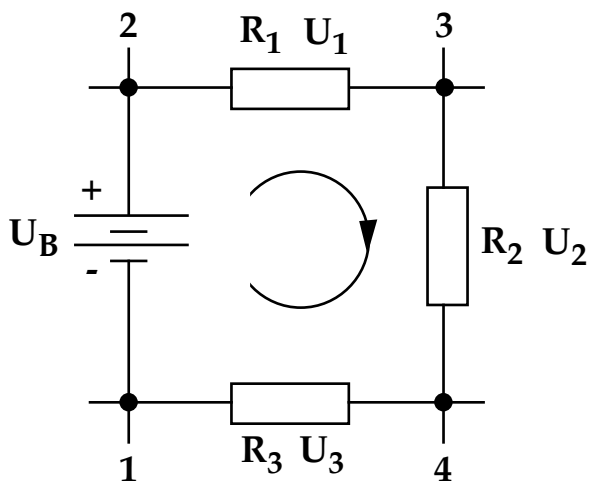
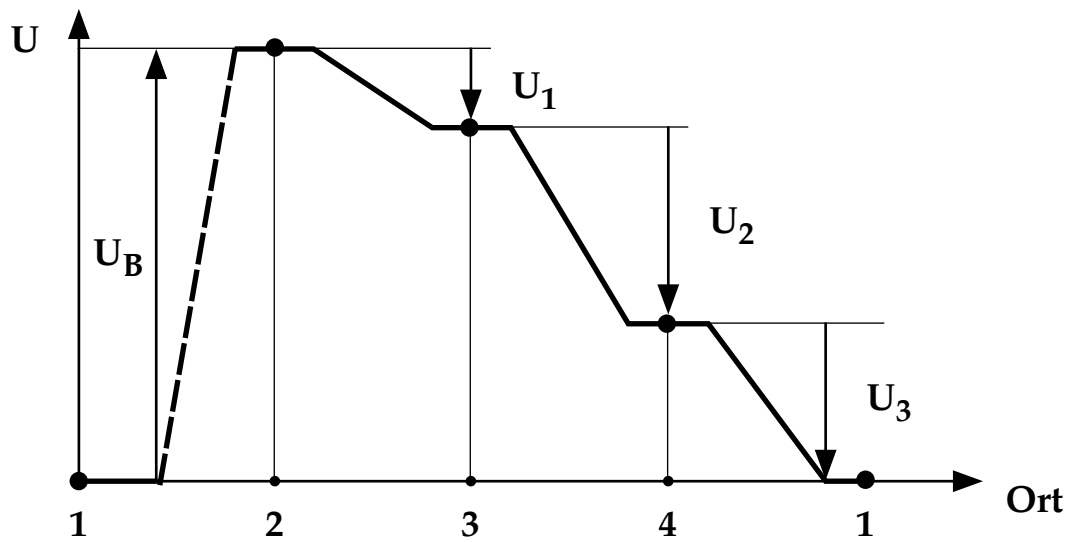
In jedem geschlossenen Stromkreis (Masche) ist die Summe der Spannungsabfälle an den einzelnen Elementen (einschliesslich der Spannungsquellen) gleich Null.

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$



Die Kirchhoffschen Regeln sind eine direkte Folge der Ladungserhaltung (1. Regel) und der Wegunabhängigkeit in einem Potentialfeld (2. Regel).

Beispiel: Potentialverlauf in einer Masche



Für die Masche muss eine Umlaufrichtung angenommen werden und die Vorzeichen der Spannungsabfälle müssen korrekt berücksichtigt werden :

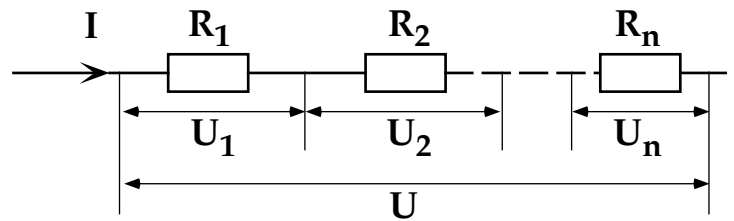
$$U_B - U_1 - U_2 - U_3 = 0$$

Schaltungen von Ohmschen Widerständen

Serieschaltung von Widerständen

Die Serieschaltung der Widerstände

R_1, R_2, \dots, R_n soll durch einen Widerstand R ersetzt werden.



wegen der Ladungserhaltung fließt in jedem Widerstand der Strom I

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \dots + \frac{U_n}{I} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Serieschaltung von Widerständen

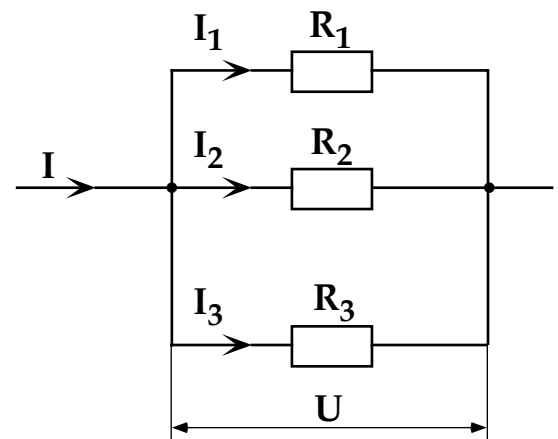
Parallelschaltung von Widerständen

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Parallelschaltung von Widerständen



an allen Widerständen liegt die Spannung U

Beispiel: Stromkreis mit mehreren Maschen

Knoten K :

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Masche 1 :

$$U_B - U_1 - U_2 = 0$$

$$U_B - R_1 I_1 - R_2 I_3 = 0$$

Masche 2 :

$$U_2 + U_3 = 0$$

$$-R_2 I_3 + R_3 I_2 = 0$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} -I_1 + I_2 + I_3 & = & 0 & \\ +R_1 I_1 & & +R_2 I_3 & = +U_B \\ & & -R_3 I_2 + R_2 I_3 & = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \text{ Gleichungen} \\ 3 \text{ Unbekannte} \end{array}$$

$$\underline{I_3 = I_1 - I_2}$$

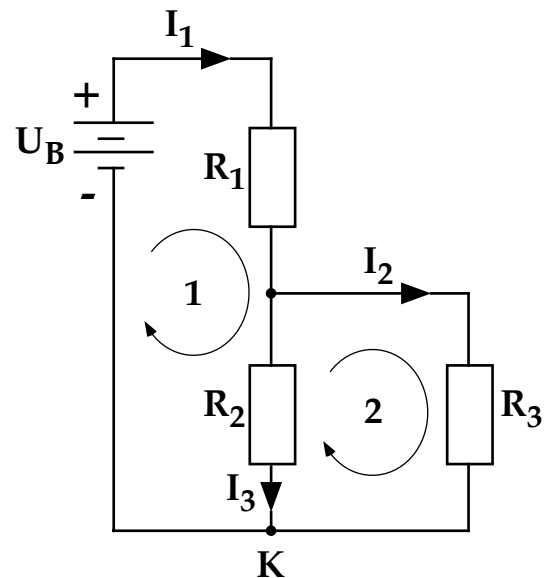
$$\left| \begin{array}{ccc|c} R_1 I_1 & & +R_2(I_1 - I_2) & = U_B \\ & & -R_3 I_2 + R_2(I_1 - I_2) & = 0 \end{array} \right|$$

$$\underline{I_1 = I_2 \frac{(R_2 + R_3)}{R_2}}$$

$$R_1 I_2 \frac{R_2 + R_3}{R_2} + R_2 \frac{I_2 (R_2 + R_3)}{R_2} - R_2 I_2 = U_B$$

$$I_2 \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_2} + I_2 R_3 = U_B$$

$$\underline{I_2 = U_B \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}$$

 U_1 : Spannung an R_1 U_2 : Spannung an R_2 U_3 : Spannung an R_3

6. Der elektrische Strom

$$I_1 = U_B \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \frac{R_2 + R_3}{R_2}$$

$$I_1 = U_B \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_3 = U_B \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

daraus ergeben sich die Spannungen

$$U_2 = U_3 = I_3 R_2 = U_B \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

und analog für $U_1 = R_1 I_1$.

7. Das magnetische Feld

7.1 Phänomene des Magnetismus

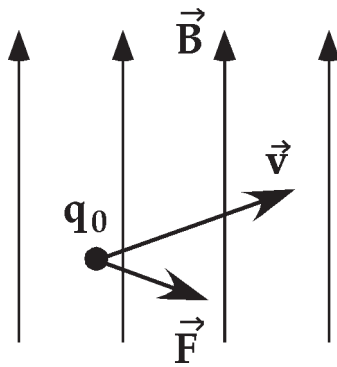
- **es existieren Stoffe, die aufeinander Kräfte ausüben, die nicht mit der Gravitationskraft oder der Coulombkraft erklärt werden können :**
 - **Kräfte zwischen Gesteinen (Magnetit)**
 - **starke anziehende und abstossende Kräfte zwischen bestimmten Übergangsmetallen (ferromagnetische Stoffe)**
 - **Kräfte zwischen ferromagnetischen Stoffen und der Erde (⇒ Kompass, wurde von den Chinesen bereits im 10. Jahrhundert verwendet)**
- **Kräfte zwischen elektrischen Strömen und Kräfte zwischen elektrischem Strom und Metallen (entdeckt 1820 durch Oersted)**

7. Das magnetische Feld

7.2 Das B-Feld

Das magnetische Induktionsfeld (kurz magnetisches Feld oder B-Feld genannt) kann man definieren, indem man, ähnlich wie beim E-Feld, von der Kraftwirkung ausgeht.

B - Feld



$$\vec{F}_L = q_0 \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

F_L : Lorentzkraft wirkt auf bewegte Ladung q_0

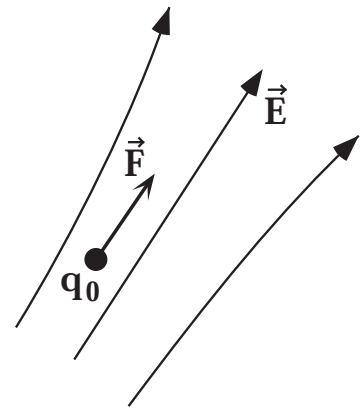
\vec{v} : Geschwindigkeit der Ladung q_0

Einheit des B-Feldes:

$$1 \frac{\text{Newton}}{\text{Ampère} \cdot \text{Meter}} = 1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}$$

(nach Nikola Tesla, 1856 - 1943 und Gauss nach Carl Friedrich Gauss, 1777 - 1855)

E - Feld



$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$$

Definition des E-Feldes

\vec{F} Kraft auf (ruhende oder bewegte) Ladung q_0

Beispiel:

maximale Kraft auf einen elektrischen Strom im B-Feld der Erde

$$I = 1 \text{ A}, \quad \ell = 1 \text{ m}, \quad B = 0.2 \text{ Gauss}$$

$$\vec{v} \perp \vec{B}$$

$$F_L = q \cdot v \cdot B$$

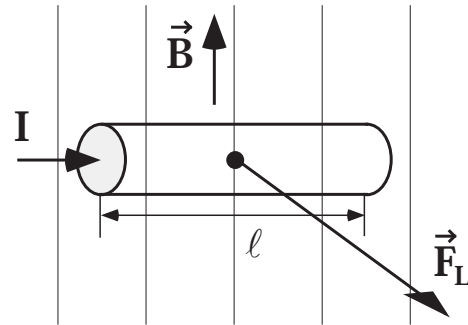
Kraft auf ein Längenelement $d\ell$

$$\begin{aligned} dF_L &= dq \cdot v_D \cdot B \\ &= e \cdot n \cdot A \cdot d\ell \frac{i}{e \cdot n} B \end{aligned}$$

$$dF_L = d\ell \cdot I \cdot B$$

oder für die Länge ℓ

$$F_L = \ell \cdot I \cdot B = 1 \cdot 1 \cdot 0.2 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$



v_D : Driftgeschwindigkeit
der Ladungen (= i/en
nach Abschnitt 6.2)

7.3 Anwendungen der Lorentzkraft

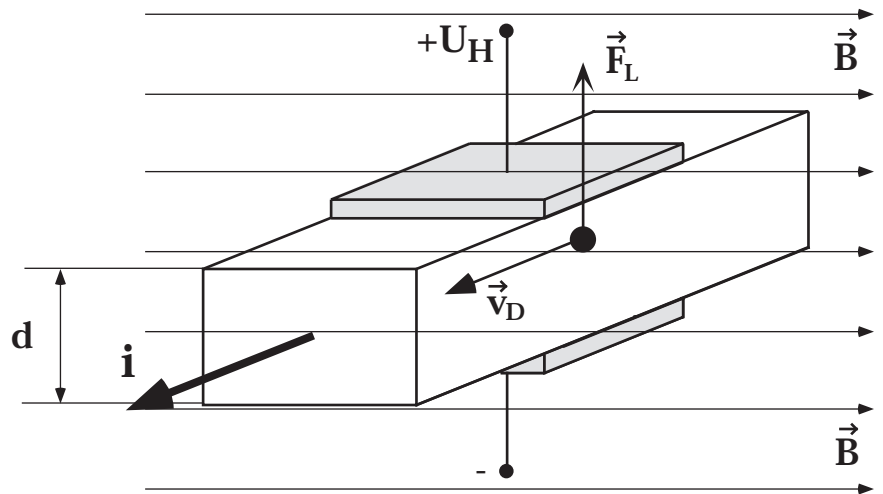
Hall-Effekt (E. H. Hall, 1879)

Ein Leiter wird von einer Stromdichte \mathbf{i} durchflossen. Senkrecht zur Flussrichtung ist ein homogenes \mathbf{B} -Feld vorhanden. Die Ladungsträger verspüren eine Lorentzkraft, die senkrecht zu \mathbf{i} und $\vec{\mathbf{B}}$ gerichtet ist.

$$\vec{\mathbf{F}}_L = e \vec{\mathbf{v}}_D \times \vec{\mathbf{B}} \quad \mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{i}}{e \cdot \mathbf{n}}$$

$$\mathbf{F}_L = \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{n}} \mathbf{B} \quad \vec{\mathbf{v}}_D \perp \vec{\mathbf{B}}$$

Durch die Lorentzkraft werden die Ladungsträger abgelenkt, was zu einer Aufladung auf eine Spannung U_H der senkrecht angebrachten Elektroden führt. Im stationären Gleichgewicht ist die Summe von Coulomb- und Lorentzkraft gleich Null:



$$-eE + \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{n}} \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{E} = \frac{U_H}{d}$$

$$U_H = \frac{1}{e \cdot \mathbf{n}} d \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{B} \quad \text{oder} \quad U_H = d \cdot \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{B}$$

U_H wird als Hallspannung bezeichnet.

Die Hallspannung U_H kann somit angewendet werden, um entweder die Ladungsträgerkonzentration n oder die Driftgeschwindigkeit v_D zu bestimmen (z.B. Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Blut).

Ladung auf Zyklotron - Kreisbahn

Eine Ladung, die senkrecht zu den B-Feldlinien in ein Magnetfeld eingeschossen wird, beschreibt eine Kreisbahn vom Radius r .

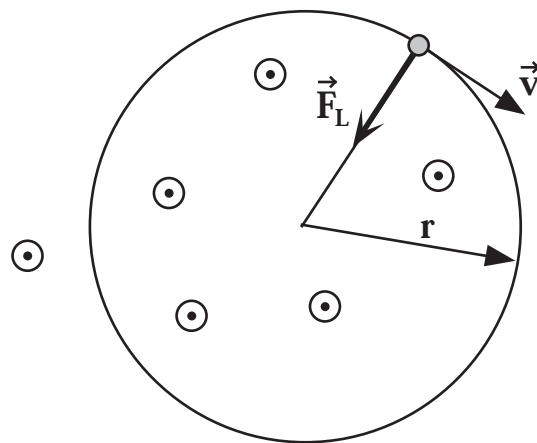
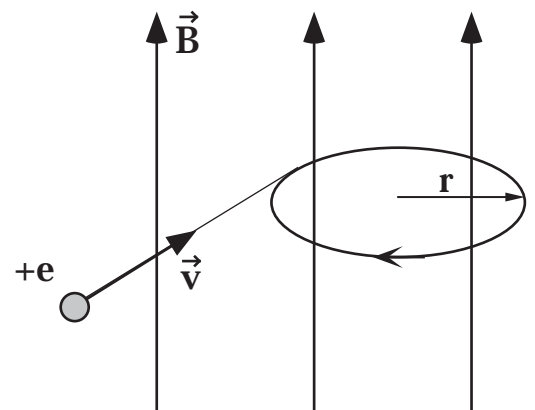
Die Zentripetalkraft F_z ist gleich der Lorentzkraft F_L :

$$\vec{F}_L = e \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned} m \omega^2 r &= e v B & (\vec{v} \perp \vec{B}) \\ &= e \omega r B \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{e B}{m}$$

ω heisst Zyklotronfrequenz



7.4 Das Gesetz von Biot - Savart

(Jean Baptiste Biot, 1774 - 1862 und Felix Savart , 1791 - 1841)

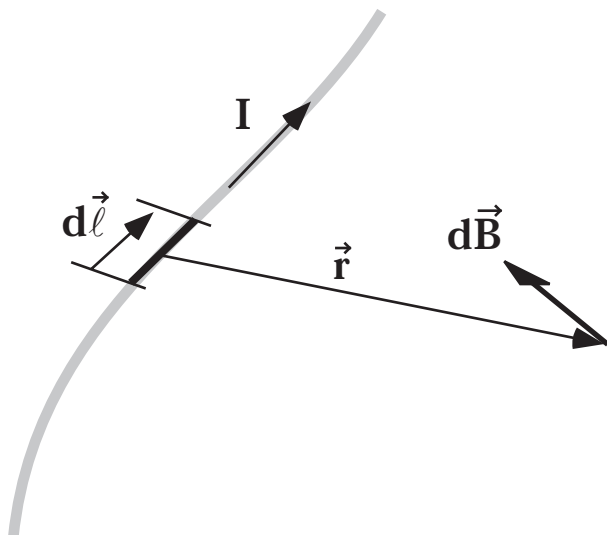
Das Gesetz von Biot-Savart ermöglicht die Berechnung des B-Feldes aus einer gegebenen Stromverteilung. Es ist ebenso fundamental wie das Coulombsche Gesetz für die Berechnung des E-Feldes.

B - Feld

bewegte Ladung

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overbrace{dq \cdot \vec{v}}^{\vec{I} d\vec{\ell}} \times \vec{r}}{r^3}$$

Gesetz von Biot - Savart



μ_0 : magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}$$

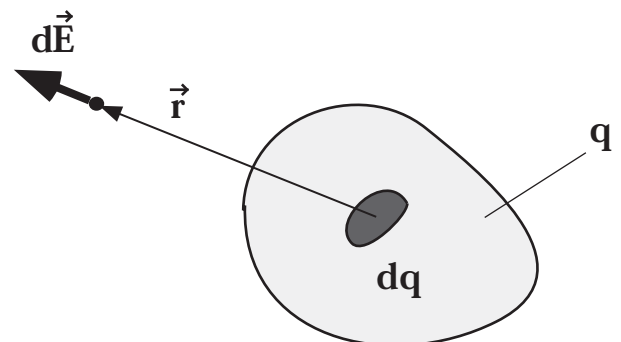
E - Feld

Ladung

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overbrace{dq} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

nicht vektorielle Schreibweise:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$



Anwendungen des Gesetzes von Biot - Savart

B-Feld eines Stromes durch einen geraden Leiter

Die B-Feldlinien bilden konzentrische Kreise um den Leiter, denn nach Biot-Savart ist

$$d\vec{B} \perp \vec{r} \text{ und } d\vec{B} \perp d\vec{\ell}.$$

Für den Betrag von \vec{B} gilt

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell \cdot \sin \alpha}{r'^2}$$

$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{r}{r'}$$

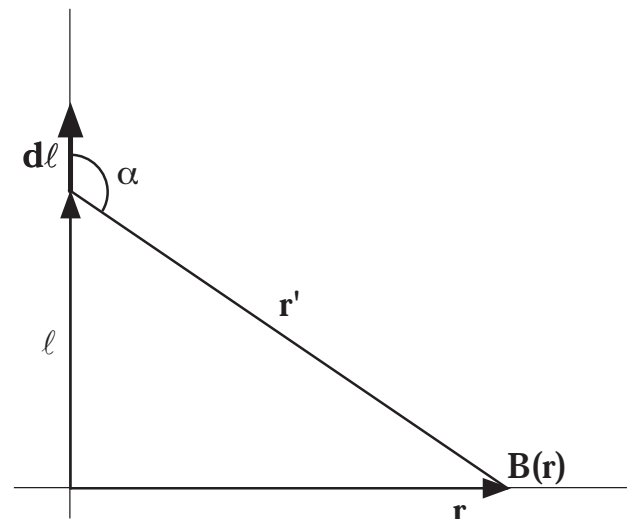
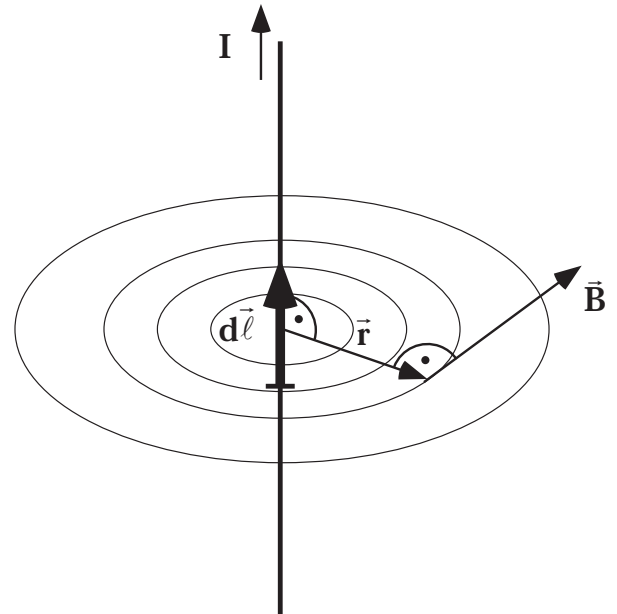
$$\sin \alpha = \frac{r}{(r^2 + \ell^2)^{1/2}}$$

$$\int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r d\ell}{(r^2 + \ell^2)^{3/2}}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left. \frac{\ell}{(r^2 + \ell^2)^{1/2}} \right|_{\ell=-\infty}^{\ell=\infty}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

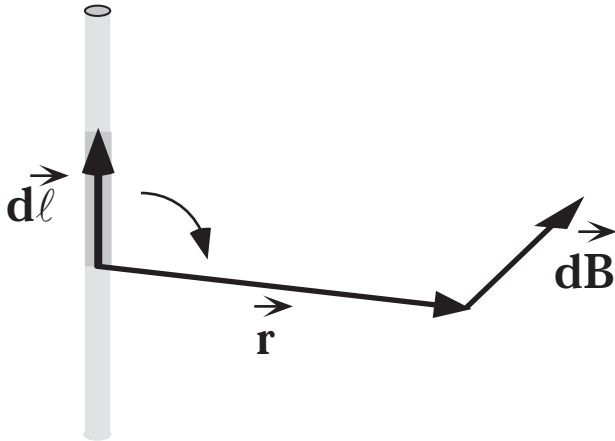
B-Feld des (unendlich ausgedehnten) geraden Leiters, der vom Strom I durchflossen wird.



7. Das magnetische Feld

Die Richtung des B-Feldes ergibt sich nach der Korkenzieherregel:

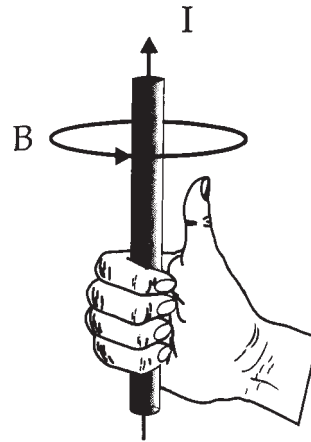
$d\vec{\ell}$ in Richtung \vec{r} drehen - Verschiebungsrichtung liefert \vec{B} Richtung



'rechte - Hand - Regel'

Daumen in Richtung I

Finger deuten in Richtung \vec{B}

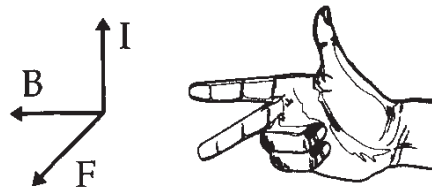


oder

Daumen in Richtung I

Zeigefinger in Richtung \vec{B}

Kraft zeigt in Richtung Mittelfinger.



Kraft zwischen zwei parallelen Strömen

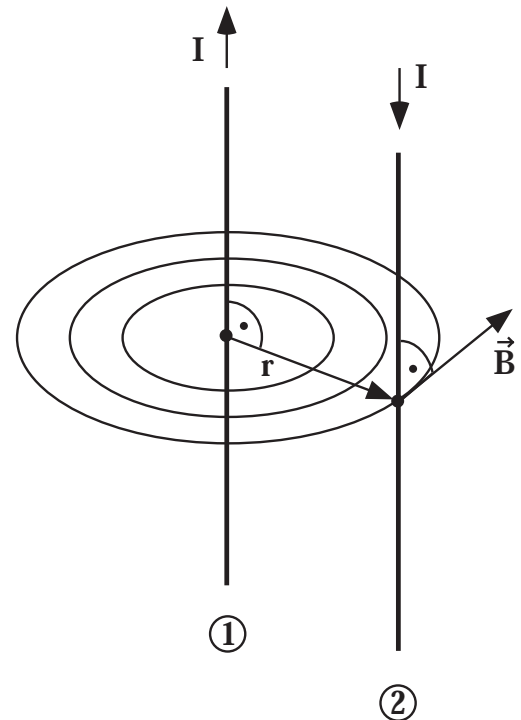
B-Feld verursacht durch I
in Leiter ① im Abstand r

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

$$\frac{F}{\ell} = I \cdot B \quad (\text{Lorentzkraft, Abschnitt 7.2})$$

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{r}$$

Die Kraft ist abstossend für antiparallele
Ströme und anziehend für parallele Ströme.



Auf der Kraftwirkung zwischen zwei parallelen
Strömen beruht die Definition des Ampère (Basiseinheit im SI-System):

Das Ampère ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der durch zwei parallele unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.

$$\frac{F}{\ell} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}}{2\pi} \frac{1\text{A}^2}{1\text{m}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{A} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m} \quad (1\text{T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A m}})$$

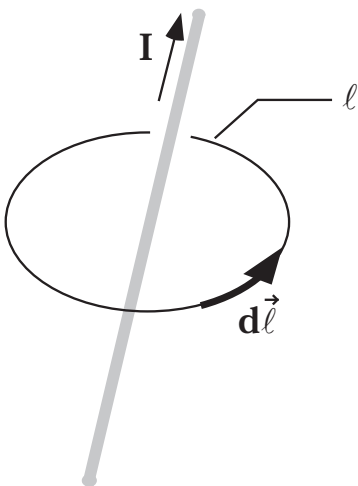
7.5 Das Ampèresche Gesetz

In der Elektrostatik haben wir den Satz von Gauss kennengelernt, der es uns ermöglichte, in gewissen Fällen des E-Feld auf einfache Art zu berechnen. Ebenso fundamental ist das Ampèresche Gesetz, das uns die Berechnung des B-Feldes in gewissen Fällen ermöglicht.

B - Feld

Ampèresches Gesetz

$$\oint_{\ell} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I$$



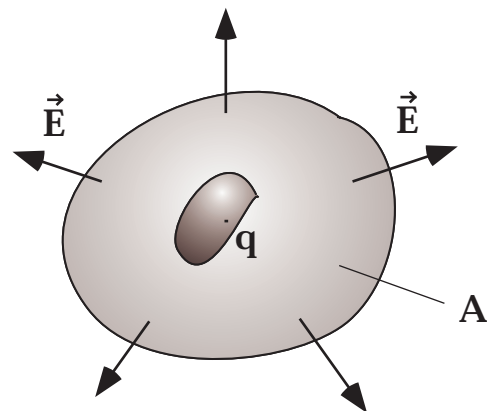
$\oint_{\ell} \vec{B} d\vec{\ell}$: Integral längs des geschlossenen Weges ℓ

I : gesamter Strom, der durch die geschlossene Wegschleufe ℓ hindurchtritt

E - Feld

Satz von Gauss

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q$$



Beispiele:**B-Feld eines geraden Leiters**

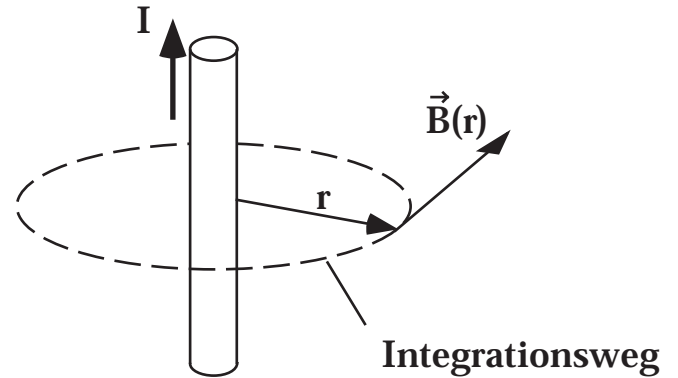
Anwendung des Ampèreschen Gesetzes:

Wir nehmen an, dass für einen bestimmten Abstand r , B konstant ist

$$\oint \vec{B} \, d\vec{\ell} = \oint B \, dr = \mu_0 I$$

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Dasselbe Resultat hat uns auch das Gesetz von Biot - Savart geliefert.

B-Feld im Innern einer langen Spule

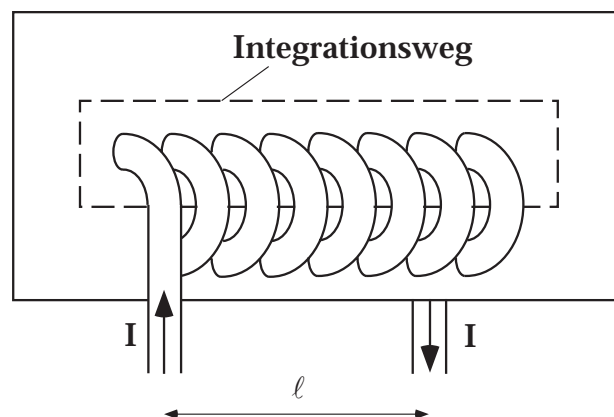
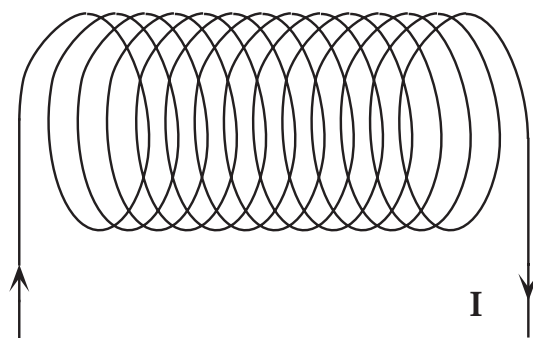
$$\oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{tot}}$$

$$B \cdot \ell = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

Das B-Feld ausserhalb der Spule werde vernachlässigt ($B \approx 0$)

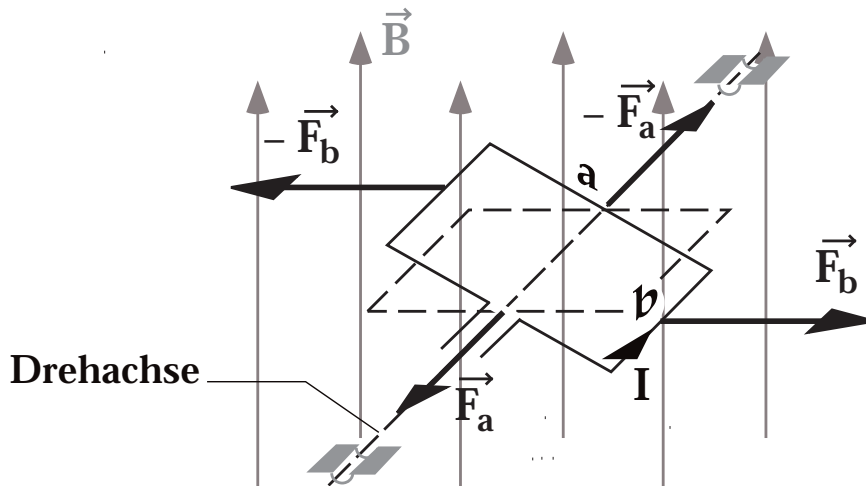
$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\ell}$$

N: Anzahl Windungen



7.6 Der magnetische Dipol

Drehmoment auf eine Stromschleife im B - Feld



Kräfte \vec{F}_a und $-\vec{F}_a$ in Richtung der Drehachse heben sich auf und bewirken kein Drehmoment.

$$|\vec{F}_b| = b \cdot I \cdot B$$

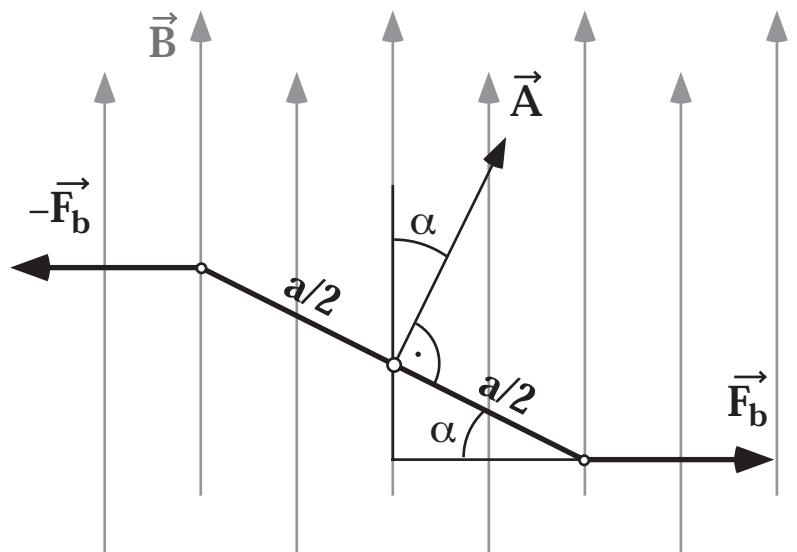
Drehmoment durch Kräfte \vec{F}_b und $-\vec{F}_b$

$$|\vec{M}| = 2 \frac{a}{2} \cdot F_b \sin \alpha$$

$$|\vec{M}| = a \cdot b \cdot I \cdot B \sin \alpha$$

oder vektoriell

$$\vec{M} = I \vec{A} \times \vec{B}$$



Definition:

Der magnetische Dipol \vec{m} einer Stromschleife ist gegeben durch:

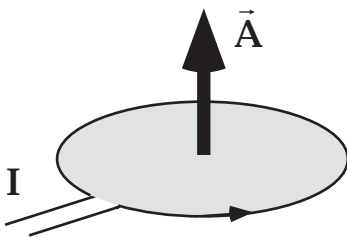
$$\vec{m} = I \vec{A}$$

Damit ergibt sich für das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Analogie zwischen magnetischem (\vec{m}) und elektrischem (\vec{p}) Dipol:

magnetischer Dipol

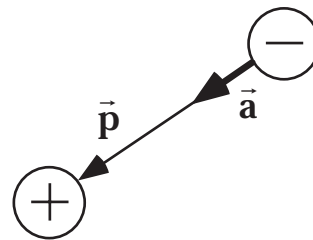


$$\vec{m} = I \cdot \vec{A}$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Drehmoment auf \vec{m}
im B-Feld

elektrischer Dipol



$$\vec{p} = q \cdot \vec{a}$$

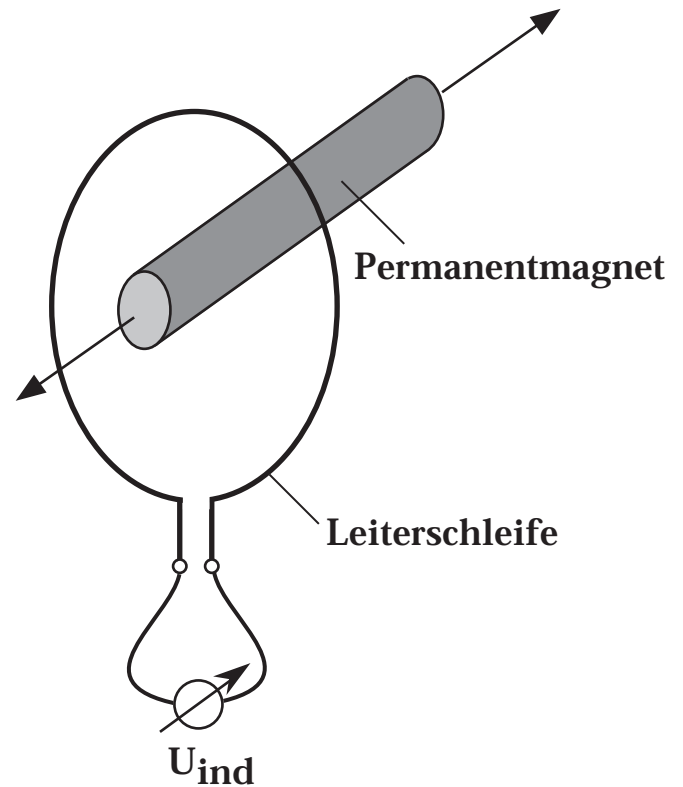
$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Drehmoment auf \vec{p}
im E-Feld

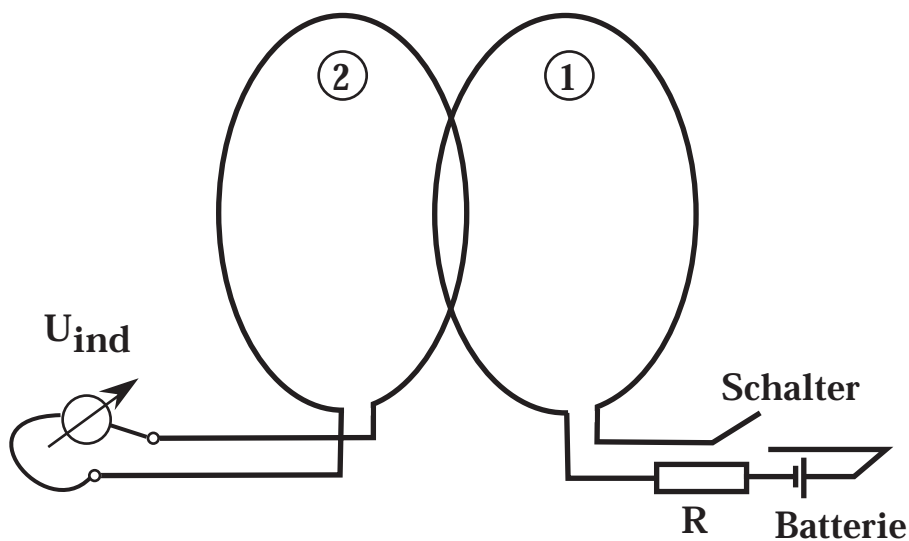
8. Das Induktionsgesetz

8.1 Induktionsphänomene

a) Beim Bewegen des Permanentmagneten zeigt das Voltmeter in der Leiterschleife einen Ausschlag. Die in der Leiterschleife entstehende elektrische Spannung bezeichnen wir als induzierte Spannung oder Induktionsspannung U_{ind} .



b) Wird der Schalter im Stromkreis 1 geschlossen oder geöffnet, so wird kurzzeitig im Stromkreis 2 eine Spannung U_{ind} induziert.



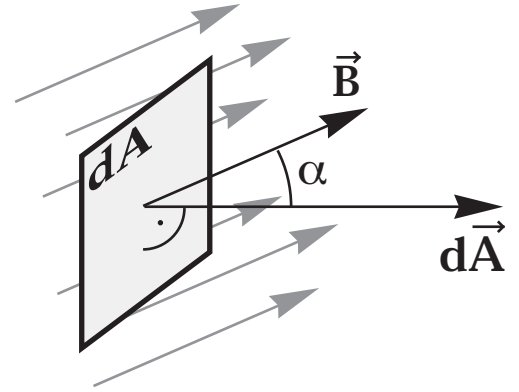
8. Das Induktionsgesetz

Die Experimente zeigen, dass die in einem Stromkreis induzierte Spannung mit der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ durch den Stromkreis zusammenhängt.

Definition des magnetischen Flusses

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \, dA \cos \alpha$$

Falls \vec{B} über eine Ebene A konstant ist und $\vec{B} \perp A$, dann gilt $\Phi = B \cdot A$



Einheit des magnetischen Flusses Φ : $1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ Weber} = 1 \text{ Wb}$

8.2 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Für die induzierte Spannung in einem Stromkreis gilt dann

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \dot{\Phi}$$

Induktionsgesetz von Faraday, 1831

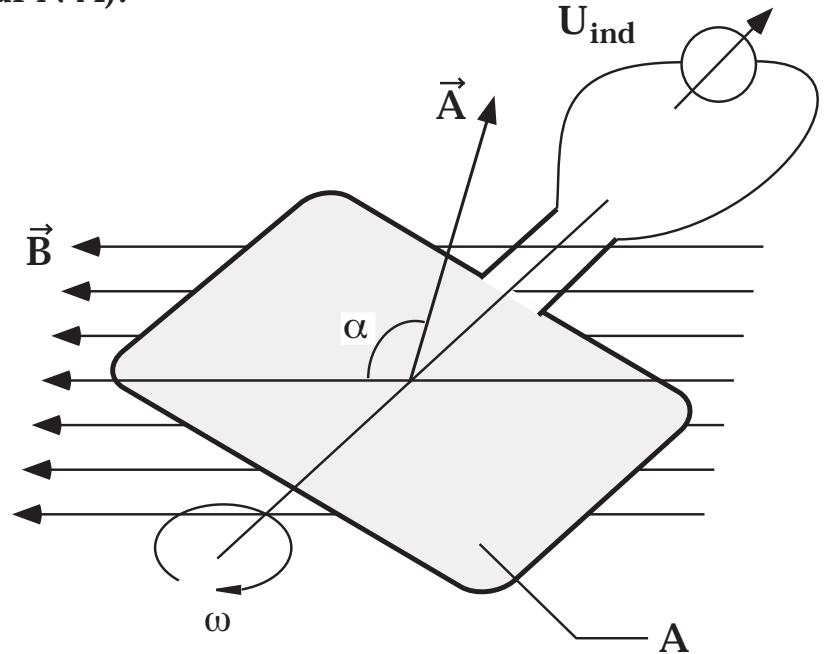
(Michael Faraday, 1791 - 1867)

Die Entstehung einer Induktionsspannung U_{ind} kann man sich auch erklären durch die Wirkung der Lorentzkraft auf die Ladungsträger in der Leiterschleife, wenn diese relativ zu einem B-Feld bewegt wird.

- Wird an Stelle einer einfachen Leiterschleife eine Spule mit N Windungen verwendet, so erhöht sich U_{ind} auf das N -fache (Serieschaltung von N Spannungsquellen oder Vergrößerung der Fläche A auf $N \cdot A$).

$$U_{\text{ind}} = -N \dot{\Phi}$$

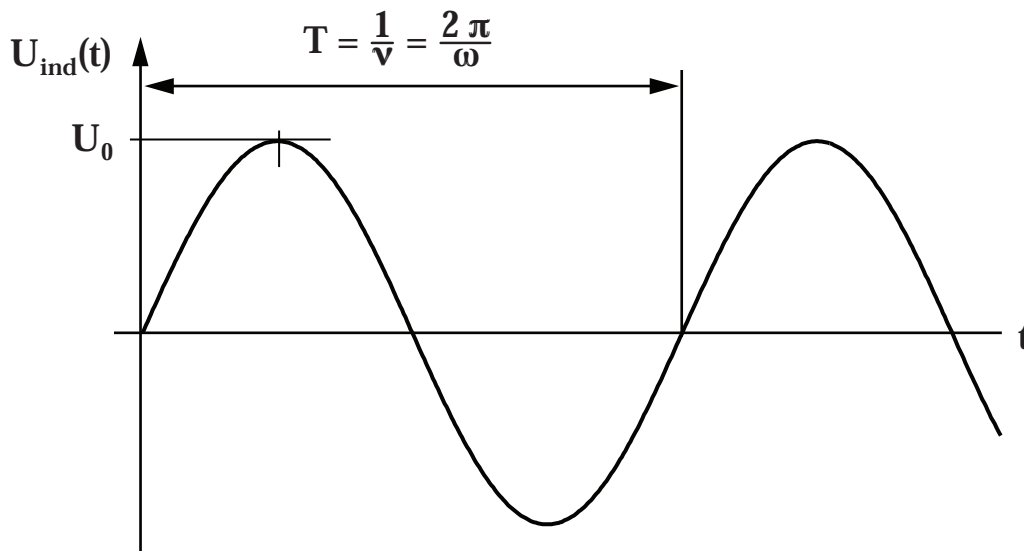
- Falls wir eine Leiterschleife betrachten, die in einem B -Feld mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, so erhalten wir für die Induktionsspannung U_{ind}



$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot A \frac{d(\cos \alpha)}{dt} = -B \cdot A \frac{d(\cos \omega t)}{dt}$$

$$U_{\text{ind}} = +B A \omega \sin \omega t = U_0 \sin \omega t$$

Eine zeitlich sich ändernde Spannung, die wir durch Sinus- oder Cosinusfunktionen beschreiben können, bezeichnen wir als (harmonische) Wechselspannungen. Diese haben in der Elektrotechnik eine wichtige Bedeutung (siehe Kapitel 13 ff).

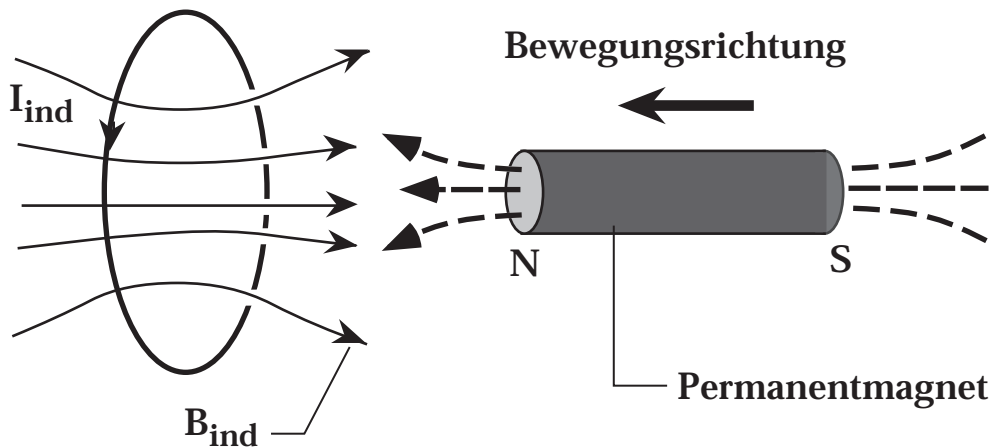


8.3 Die Lenzsche Regel

Nach Heinrich Friedrich Lenz (1804 - 1865) ist die Induktionsspannung so gerichtet, dass der daraus resultierende Induktionsstrom ein B-Feld erzeugt, das der Feldänderung, die U_{ind} erzeugt, entgegenwirkt.

Das Minuszeichen im Induktionsgesetz ist auf diesen Sachverhalt zurückzuführen.

Beispiel:



Wird der Permanentmagnet nach links bewegt, so nimmt das B-Feld am Ort der Leiterschleife zu. Der induzierte Strom I_{ind} ist nun so gerichtet, dass er ein B-Feld aufbaut, das der Feldzunahme durch den Permanentmagneten entgegenwirkt. Da sich die beiden B-Felder abstoßen, wirkt der Bewegung des Permanentmagneten eine Kraft entgegen.

8.4 Die Selbstinduktion

Wie wir in Abschnitt 8.1 gesehen haben, kann durch eine erste Spule (oder Leiterschleufe) in einer zweiten Spule eine Spannung U_{ind} induziert werden. Die Feldänderung wird jedoch auch von der ersten Spule wahrgenommen und führt zu einer Selbstinduktion. Diese hängt neben der Leitergeometrie von der zeitlichen Stromänderung $\frac{dI}{dt}$ ab, da diese proportional zu $\frac{d\Phi}{dt}$ ist.

Definition der Induktivität L (oder Selbstinduktion):

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt} = -L\dot{I}$$

Einheit von L : $1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ Henry} = 1 \text{ Hy}$

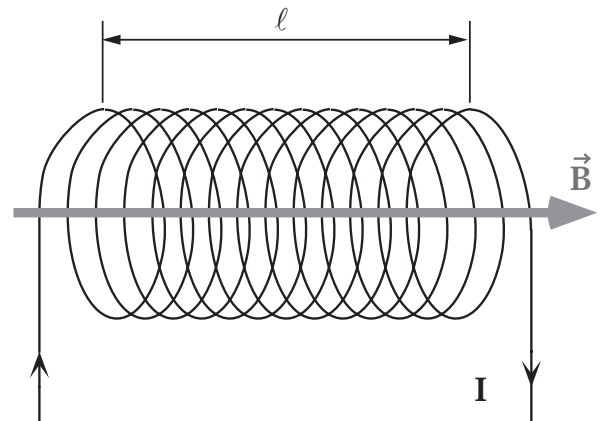
Berechnung der Induktivität einer langen, dünnen Spule

B-Feld im Spuleninnern (nach Abschnitt 7.5)

$$B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{\ell}$$

$$\Phi = \mu_0 \frac{N \cdot I \cdot A}{\ell} \quad (= B \cdot A)$$

$$U_{\text{ind}} = -N\dot{\Phi} = -\mu_0 \frac{N^2 \dot{I} A}{\ell} = -L\dot{I}$$



N : Anzahl Windungen

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$

Induktivität der langen, dünnen Spule (ohne Eisenkern)

9. Energie des B-Feldes

Um ein B-Feld in einer Spule aufzubauen ist Arbeit notwendig.

Wir nehmen an, dass wir an einer Spule mit der Induktivität L den Strom von 0 auf I_{\max} erhöhen. Dabei muss gegen die Selbstinduktionsspannung U_{ind} Arbeit verrichtet werden

$$dW = -U_{\text{ind}} I dt = +L \frac{dI}{dt} I dt = L I dI$$

$$W = L \int_0^{I_{\max}} I dI = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$$

andererseits ist

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \quad \text{und} \quad I = \frac{B \cdot \ell}{\mu_0 N}$$

eingesetzt

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{B^2 \cdot \ell^2}{\mu_0^2 N^2} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \underbrace{A \ell}_{\text{Volumen } V}$$

$$\frac{W}{V} = \frac{E_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Energiedichte des B-Feldes

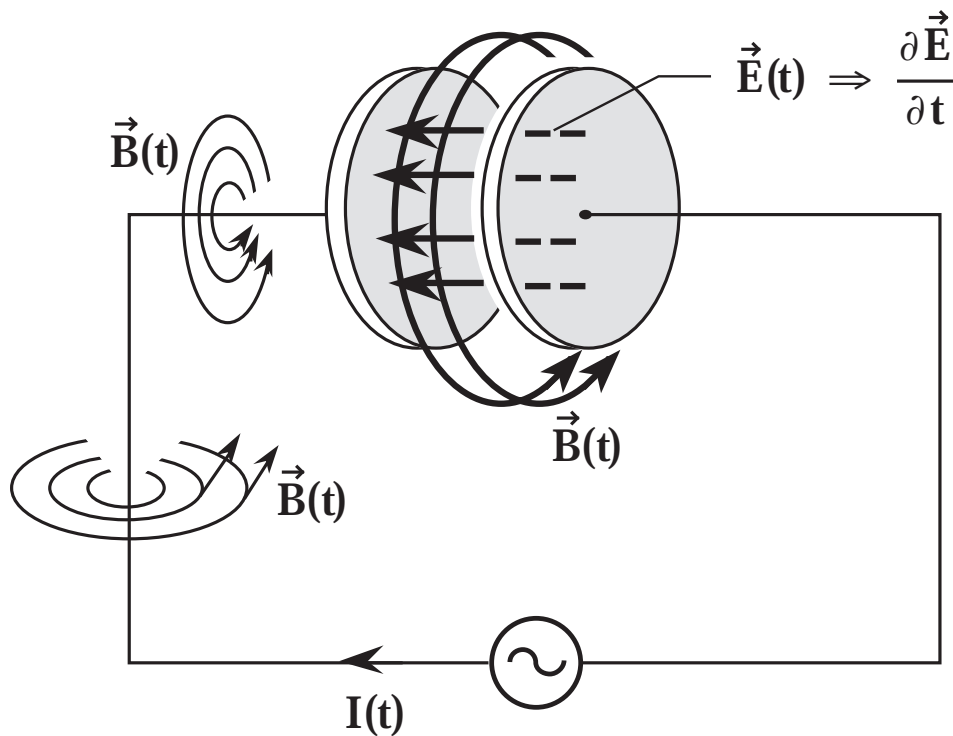
10. Maxwellscher Verschiebungsstrom und Maxwellsche Gleichungen

10.1 Maxwellscher Verschiebungsstrom

In Kapitel 6 haben wir gesehen, dass ein stromdurchflossener Leiter von einem \vec{B} -Wirbelfeld umgeben ist.

Man kann zeigen, dass auch ein zeitlich sich änderndes \vec{E} -Feld von einem \vec{B} -Feld umgeben ist.

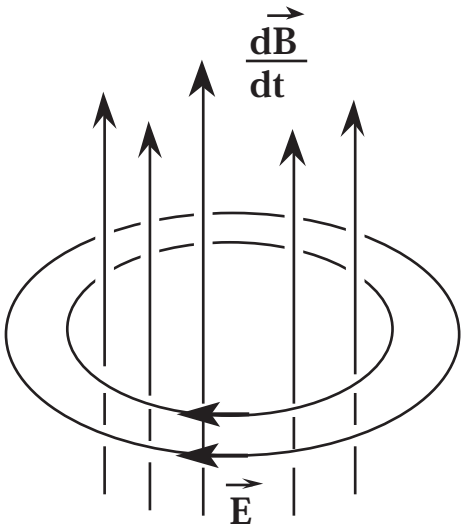
Beispiel: Kondensator in Wechselstromkreis



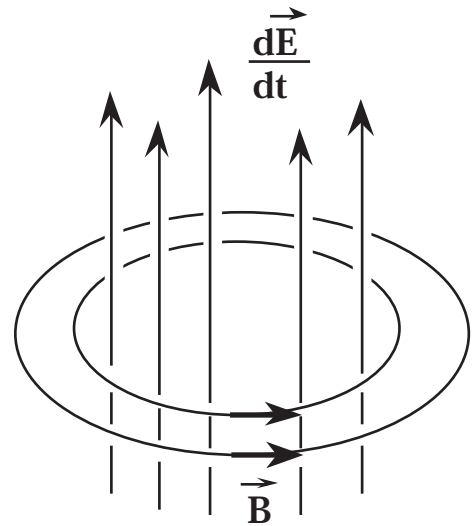
10. Maxwellscher Verschiebungsstrom und Maxwellsche Gleichungen

Beim Induktionsgesetz (Kap. 8) haben wir gesehen, wie ein zeitabhängiges B-Feld ($\frac{d\vec{B}}{dt}$) eine Induktionsspannung in einer Leiterschleife erzeugen kann ($U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} d\vec{s}$).

Analog zu diesem Phänomen erzeugt also ein zeitlich änderndes E-Feld ($\frac{d\vec{E}}{dt}$) ein magnetisches Wirbelfeld ($\oint \vec{B} d\vec{s}$).



Induktion erzeugt
E-Wirbelfeld



Verschiebungsstrom erzeugt
B-Wirbelfeld

10.2 Maxwellsche Gleichungen

(im Vakuum, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$)

Bedeutung	differentielle Form	Integralform
Quellenfreiheit des B-Feldes	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\oint_A \vec{B} \, d\vec{A} = 0$
elektrische Ladungen sind Quellen des E-Feldes	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$	$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$
Faradaysches Induktionsgesetz zeitlich ändernde B-Felder erzeugen E-Felder	$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_s \vec{E} \, d\vec{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$
Ampèresches Gesetz mit Maxwellscher Ergänzung (Maxwellschem Verschiebungsstrom)	$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{i}$	$\frac{1}{\mu_0} \oint_s \vec{B} \, d\vec{s} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \, d\vec{A} + I$

11. Materie und B-Feld

11.1 Die relative Permeabilität

Die bisher behandelten Phänomene des B-Feldes gelten nur im Vakuum. Die Anwesenheit von Materie (Gase, Flüssigkeiten oder Festkörper) kann die B-Felder stark verändern. Je nach Art der Änderung und deren Temperaturabhängigkeit unterscheidet man zwischen ferromagnetischen, paramagnetischen und diamagnetischen Stoffen.

Für das unterschiedliche Verhalten der Materie ist die unterschiedliche Elektronenstruktur verantwortlich. Die Elektronen können auf Grund ihrer Bewegung um den Atomkern magnetische Dipolmomente besitzen, die in einem äusseren Feld ausgerichtet werden können.

Bei einigen Stoffen kompensieren sich die Dipolmomente zu Null. In diesen Fällen können durch ein äusseres Feld magnetische Dipole induziert werden.

Diamagnetische Stoffe

In diamagnetischen Stoffen werden magnetische Dipole induziert. Die induzierten Dipole schwächen das äussere Feld ab. Die induzierten Dipole sind voll ausgerichtet und der Effekt ist temperaturunabhängig. Das resultierende Feld B_m kann beschrieben werden durch

$$B_m = \mu B_0 \quad \mu < 1 \text{ für Diamagnetika}$$

μ ist die relative Permeabilität

B_0 ist das äussere Feld

Beispiele: Zn, Pb, Cu, Au, Edelgase, H_2 , Benzol, NaCl

Paramagnetische Stoffe

besitzen permanente magnetische Dipole, die sich im äusseren Feld ausrichten und dieses verstärken. Die magnetischen Dipole sind wegen der Temperaturbewegung nur teilweise ausgerichtet (d.h. es besteht eine starke Temperaturabhängigkeit für das resultierende B_m -Feld)

$$B_m = \mu B_0 \quad \mu > 1 \text{ für Paramagnetika}$$

Beispiele: Mn, Cr, Al, Pt, O_2

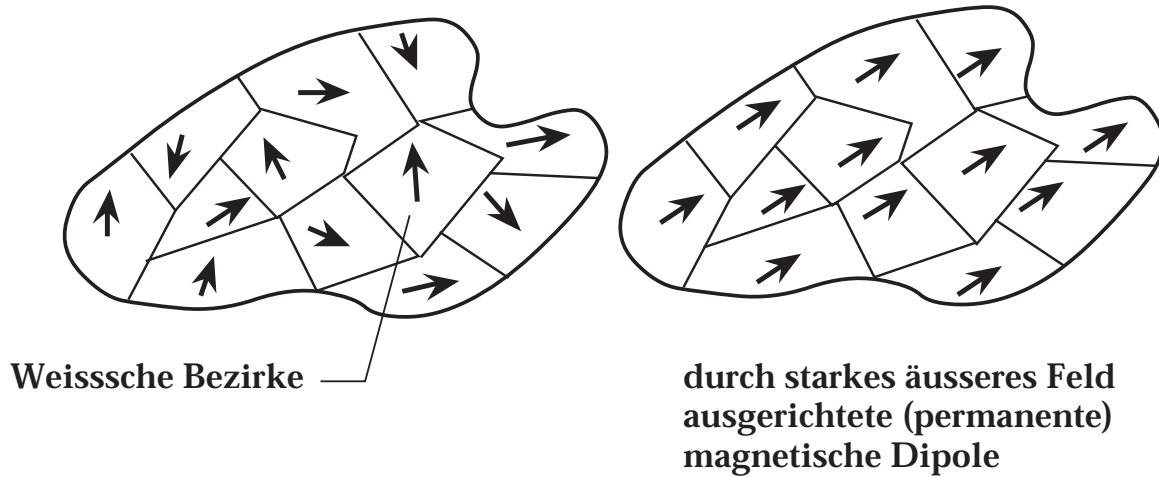
Ferromagnetische Stoffe

Durch einen kollektiven Effekt der Valenzelektronen können Festkörper magnetische Dipole besitzen, die ein äusseres B-Feld verstärken können. Nach dem Abschalten des äusseren Feldes können die ausgerichteten magnetischen Domänen ihre Ausrichtung beibehalten, so dass ein permanentes B-Feld vorhanden ist.

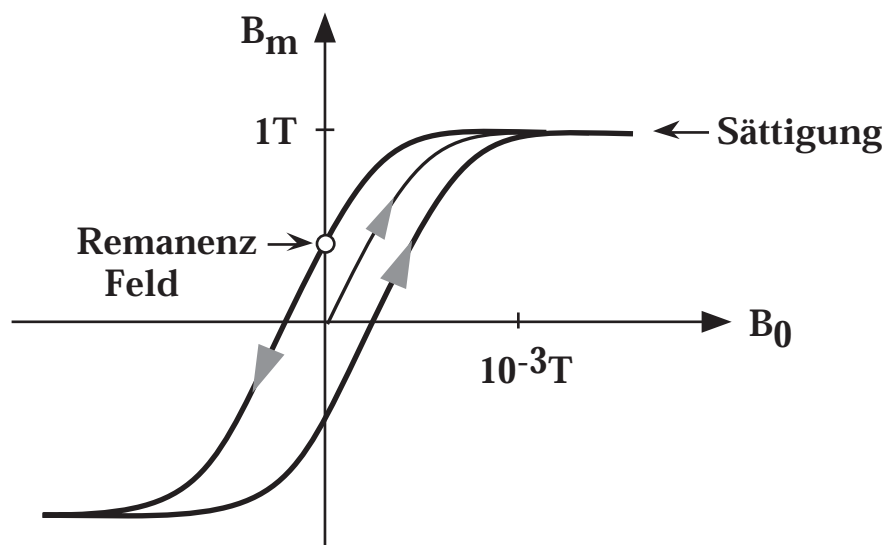
$$B_m = \mu B_0$$

$\mu \gg 1$ für Ferromagnetika

Beispiele: Fe, Co, Ni, Gd, MnAs

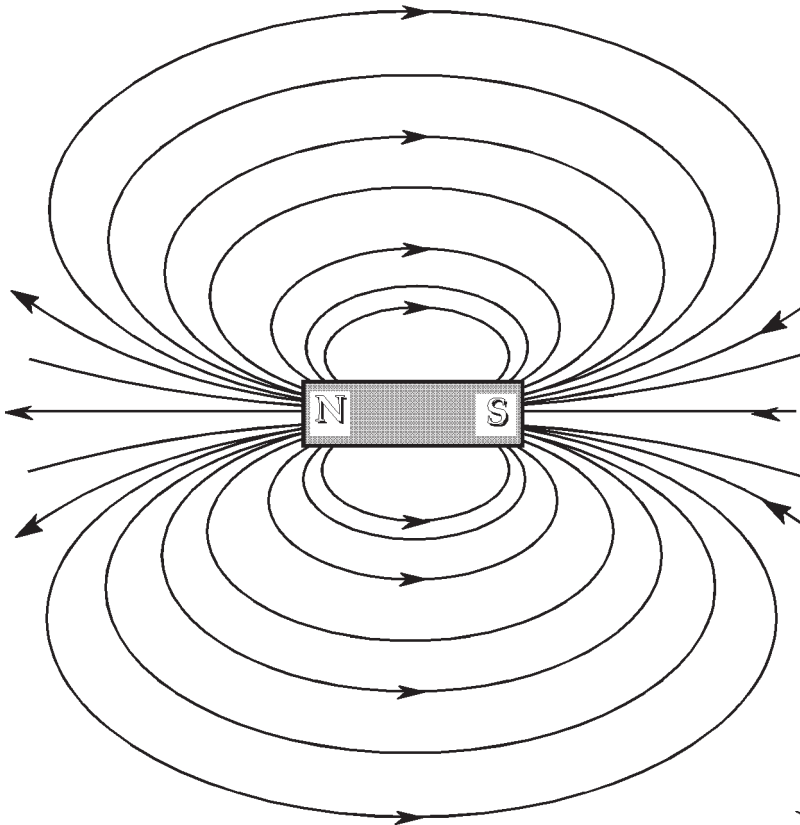


μ hängt vom äusseren Feld ab.



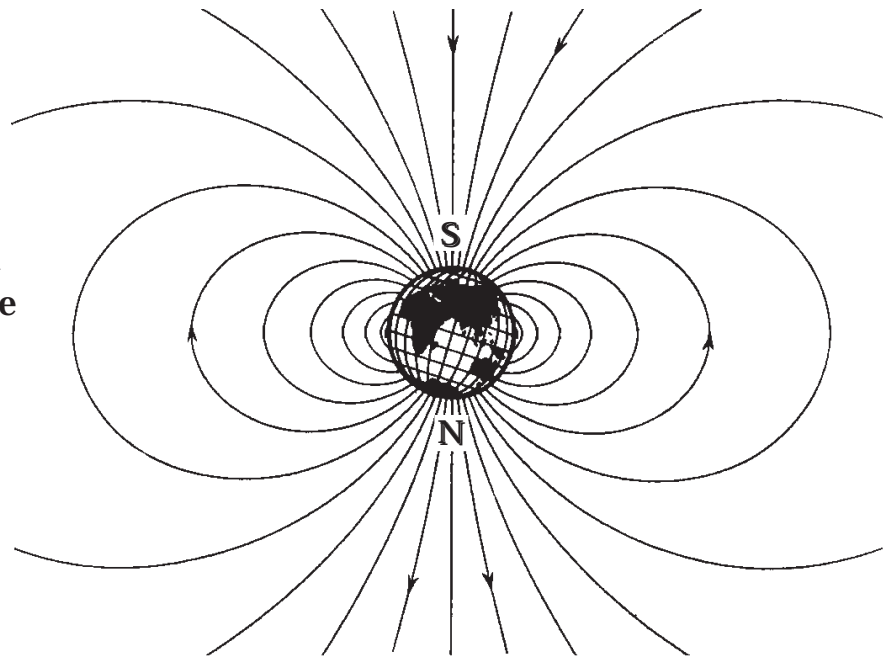
Die Magnetisierung der Ferromagnete zeigt eine Hysterese.

Permanentmagnete



Permanentmagnete sind von einem B-Feld umgeben. Man definiert den magnetischen Nord- und Südpol nach der Richtung der B-Vektoren: die Feldlinien treten am N-Pol aus dem Magneten aus und treten am S-Pol wieder ein. Auch hier stellen die B-Feldlinien geschlossene Kurven dar.

Schematischer Verlauf des B-Feldes der Erde. Die magnetische Süd-Nord Achse ist gegen die Erdrotationsachse um etwa 15° geneigt.



11.2 Berechnung von B-Feldern und Induktion in Anwesenheit von Materie mit der relativen Permeabilität μ

Die bisher behandelten Gesetze, die das B-Feld enthalten, erfahren eine Korrektur beim Übergang vom Vakuum zum materieerfüllten Raum.

	Vakuum	Anwesenheit eines Stoffes mit relativer Permeabilität μ
B-Feld des unendlich langen geraden Leiters	$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$	$B(r) = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$
B-Feld der langen, dünnen Spule	$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$	$B = \mu_0 \mu \frac{NI}{\ell}$
Induktivität einer Spule	$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$	$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 A}{\ell}$
Energiedichte des B-Feldes	$\frac{E_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$	$\frac{E_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu}$

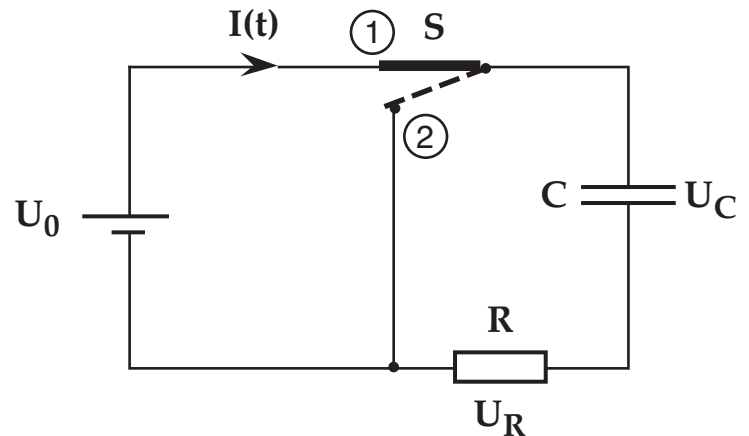
12. Ein- und Ausschaltvorgänge

12.1 RC-Schaltungen

In Stellung 1 des Schalters S wird der Kondensator C aufgeladen.

Wird der Schalter auf Stellung 2 umgelegt, so wird der Kondensator C entladen.

Gesucht: $I(t)$, $U_C(t)$



RC - Ladevorgang

Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter S in Stellung 1 gebracht. Nach der Kirchhoffschen Maschenregel muss gelten

$$U_0 - U_C - U_R = 0$$

$$U_0 - \frac{1}{C}Q - RI = 0 \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$\dot{Q} + RC\dot{I} = 0 \quad \left| \dot{Q} = I \right.$$

$$I + RC\dot{I} = 0$$

diese Differentialgleichung wird erfüllt von

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t} \quad \text{denn} \quad \dot{I}(t) = -\alpha I_0 e^{-\alpha t}$$

eingesetzt

$$I_0 e^{-\alpha t} - RC\alpha I_0 e^{-\alpha t} = 0 \quad \text{ist erfüllt mit} \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

12. Ein- und Ausschaltvorgänge

zur Zeit $t = 0$:

$$I(0) = I_0$$

$$U_0 - I_0 R = 0 \quad (\text{da } Q = 0)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC}$$

Für die Spannung $U_C(t)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_C(t) &= U_0 - U_R \\ &= U_0 - RI(t) \end{aligned}$$

$$U_C(t) = U_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Die Grösse $RC = \tau$ heisst Zeitkonstante
des RC-Gliedes*Beispiel:* $R = 10^6 \Omega, C = 1 \mu\text{F} \rightarrow \tau = RC = 1 \text{ s}$ **RC - Entladevorgang**

analog erhält man den Strom- und Spannungsverlauf für den Entladevorgang.

$$-U_C - U_R = 0$$

$$I + RC \dot{I} = 0$$

wird erfüllt von

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

zur Zeit $t = 0$:

$$U_C(0) = U_0$$

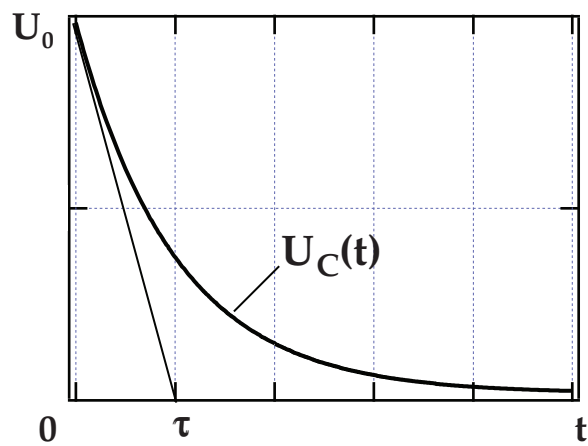
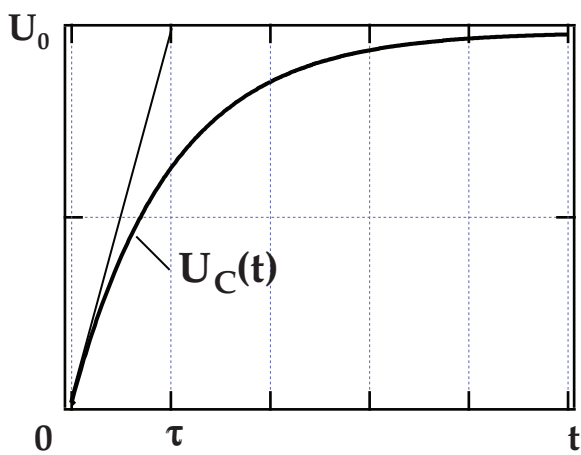
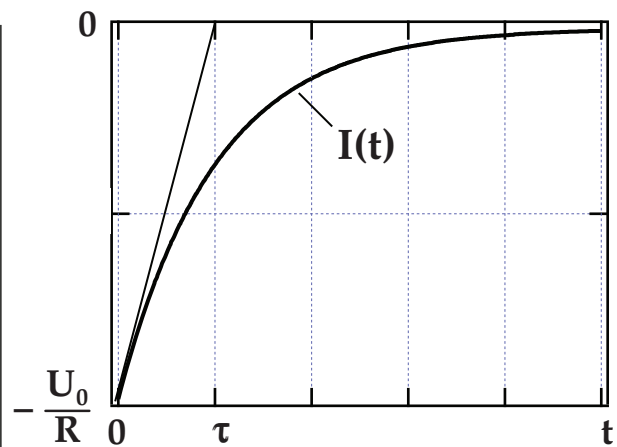
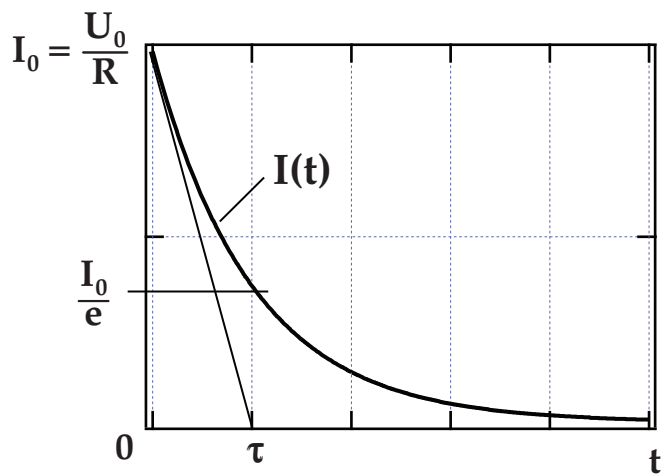
$$= -U_R(0) = -R I(0) = -R I_0$$

$$I_0 = -\frac{U_0}{R}$$

$$I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$U_C = -U_R = -R I(t)$$

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



Einschalten

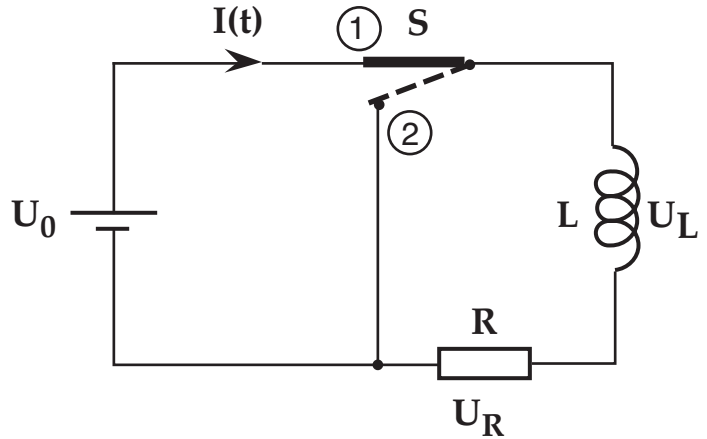
Ausschalten

12.2 RL-Schaltungen

Beim Umlegen des Schalter S in Stellung 1 wird ein B-Feld in der Spule L aufgebaut.

Wird der Schalter in Stellung 2 gebracht, dann sinkt der Strom auf Null.

Gesucht : $I(t)$, $U_L(t)$



analog zum RC-Fall erhält man für den

RL - Einschaltvorgang

$$U_0 + U_L - U_R = 0$$

$$U_0 - L\dot{I} - RI = 0$$

wird erfüllt von der Gleichung

$$I(t) = I_0 (1 - e^{-\alpha t})$$

mit

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{R}{L}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$U_L(t) = -U_0 + RI(t)$$

$$U_L(t) = -U_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$\frac{L}{R} = \tau$ ist die Zeitkonstante des RL Gliedes

RL - Ausschaltvorgang

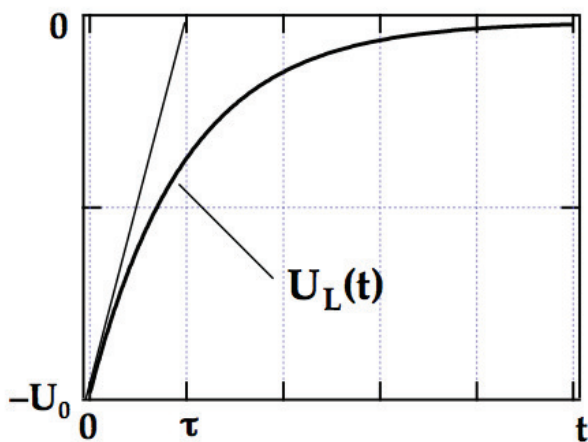
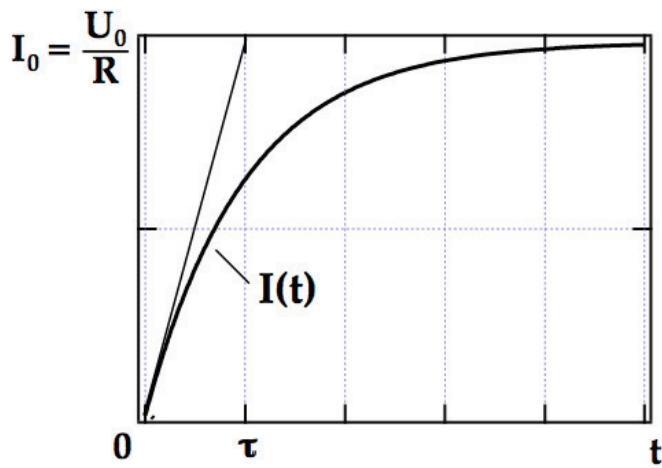
$$-L\dot{I} - RI = 0$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

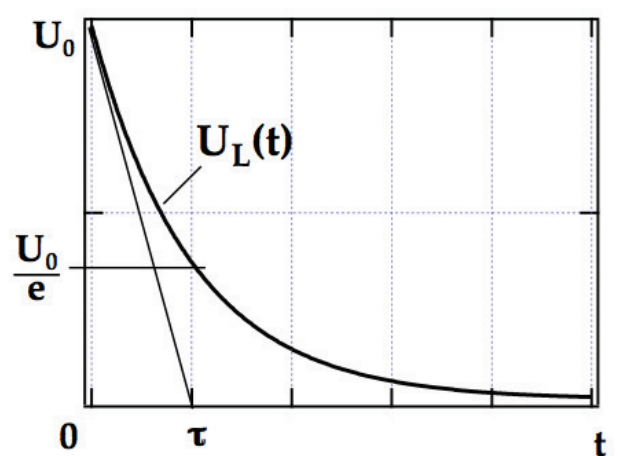
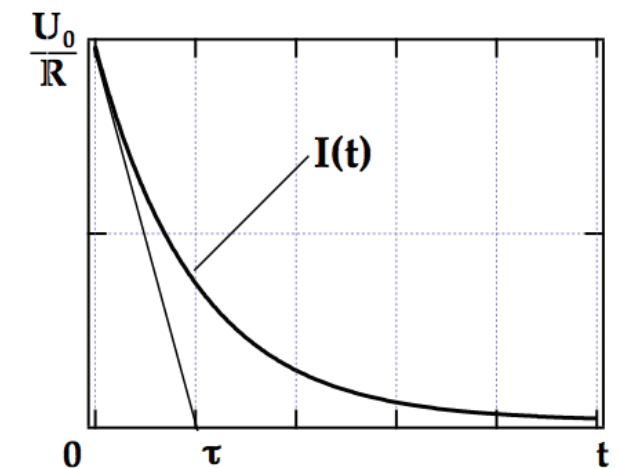
$$U_L(t) = RI(t)$$

$$U_L(t) = RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$U_L(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$



Einschalten



Ausschalten

13. Wechselspannungen und Wechselströme

13.1 Darstellung von harmonischen Wechselspannungen und -strömen

Analog zu den harmonischen Schwingungen können wir harmonische Wechselspannungen und Wechselströme durch Sinus- und Cosinusfunktionen darstellen.

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$$

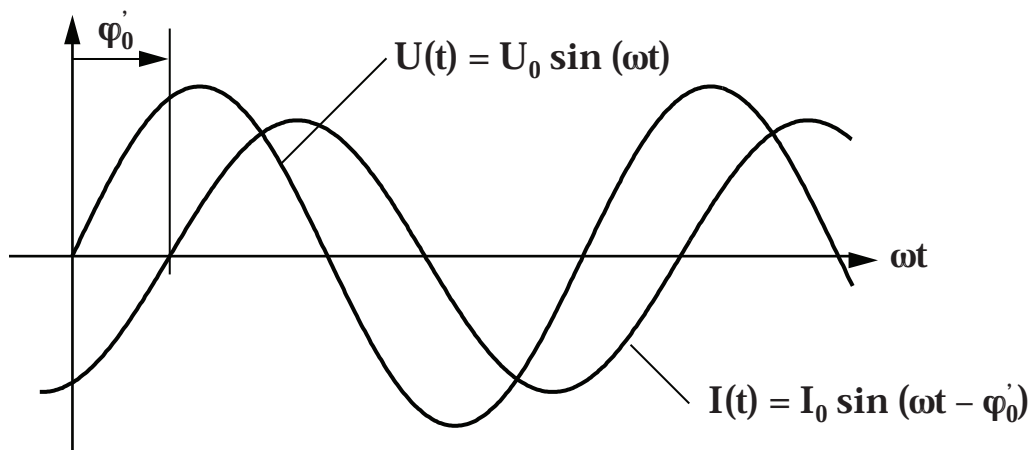
$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi_0')$$

U_0, I_0 : Amplituden oder Spitzenwerte

ω : Kreisfrequenz

φ_0, φ_0' : Phasenwinkel

In nachfolgender Figur wurde als Beispiel $\varphi_0 = 0$ gewählt, und φ_0' besitzt einen positiven Wert.



13.2 Die Leistung im Wechselstromkreis

An einem elektrischen Verbraucher betragen Spannung und Strom

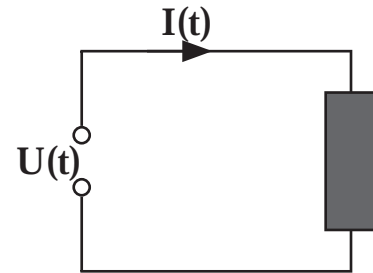
$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$$

Die momentane Leistung beträgt

$$P(t) = U(t) \cdot I(t)$$

$$P(t) = U_0 I_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi_0)$$



Der zeitliche Mittelwert der Leistung berechnet sich nach

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \frac{1}{T} \int_0^T [\cos \varphi_0 - \cos(2\omega t - \varphi_0)] dt \end{aligned}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi_0$$

Zeitlicher Mittelwert der elektrischen Leistung

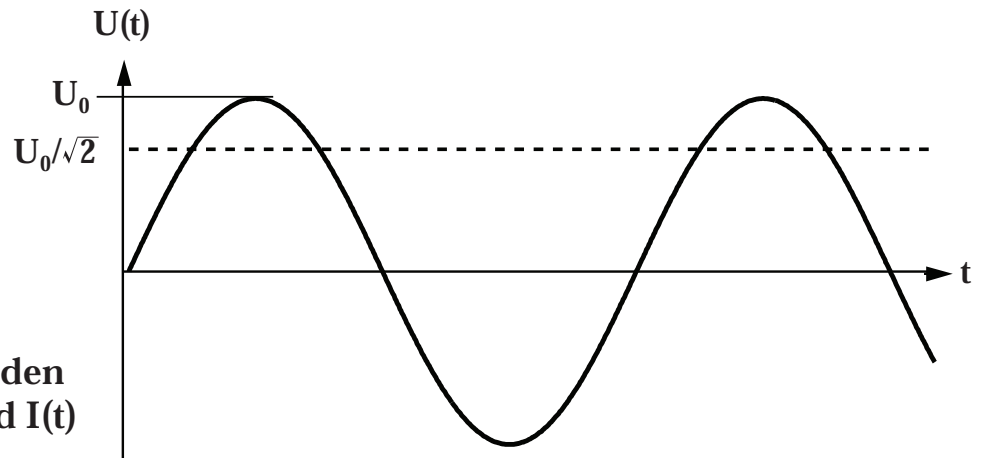
Falls $\varphi_0 = 0$, d.h. wenn Spannung und Strom 'in Phase' sind, gilt:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0$$

Wir definieren Effektivwerte für harmonische Wechselspannungen und -ströme:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$



Die Effektivwerte sind gleich den rms-Mittelwerten von $U(t)$ und $I(t)$

$$\sqrt{U^2(t)} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt \right]^{1/2}$$

$$= U_0 \left[\frac{1}{T} \int_0^T (1 - \cos^2 \omega t) dt \right]^{1/2}$$

$$\sqrt{U^2(t)} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}}$$

Falls Spannung und Strom 'in Phase' sind können wir die elektrische Leistung auch berechnen nach

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

Spannung und Strom sind 'in Phase' oder falls zwischen $U(t)$ und $I(t)$ eine Phasenverschiebung φ vorliegt

$$\bar{P} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi$$

13.3 Das technische Spannungsnetz

Einphasen Haushaltsnetz

Spannung

$$U_{\text{eff}} = 230 \text{ V (früher 220V)}$$

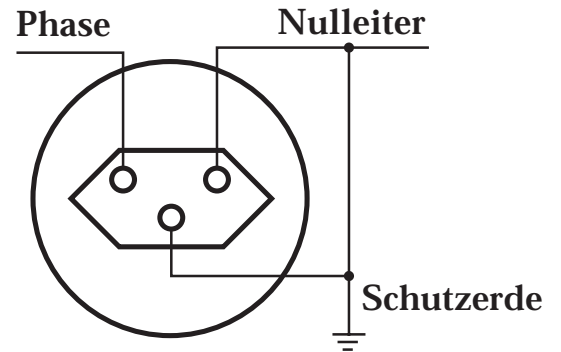
$$U_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}} = 325 \text{ V}$$

$$\nu = 50 \text{ Hz}$$

Spannung zwischen Phase und Nulleiter :

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

Spannung zwischen Nulleiter und Schutzerde : 0 V



Anmerkung: Phase und Nulleiter können auch vertauscht angeordnet sein.

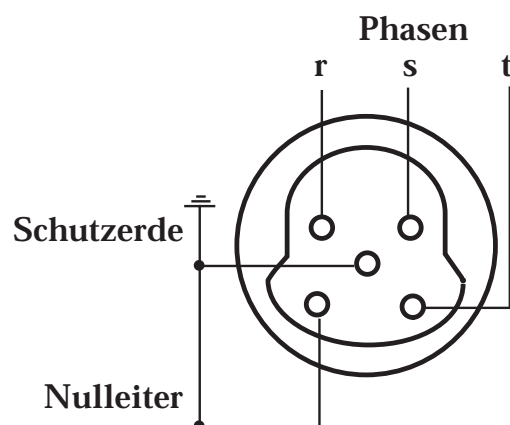
Dreiphasennetz

Die technische Spannungsversorgung ist durch ein Dreiphasennetz realisiert. Eine Dreiphasenspannungsversorgung umfasst drei spannungsführende Leiter (r, s und t), einen Nulleiter und eine Schutzerde.

$$r: U_r = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$s: U_s = U_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$t: U_t = U_0 \sin(\omega t - \pi)$$



zwischen den drei spannungsführenden Leitern besteht also eine Phasenverschiebung von $\frac{2\pi}{3}$.

Spannung zwischen zwei Phasen:

$$U_r - U_s = U_0 \left[\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= U_0 \cdot 2 \cos(\omega t) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

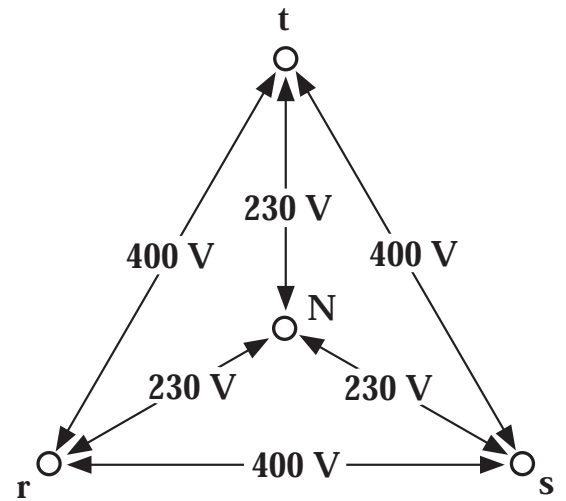
$$U_r - U_s = \Delta U_{rs} = \sqrt{3} U_0 \cos \omega t$$

Spitzenwert: $\Delta U_{rs,0} = \sqrt{3} \cdot 325 \text{ V} = 563 \text{ V}$

Effektivwert: $\Delta U_{rs, \text{eff}} = \frac{\Delta U_{rs,0}}{\sqrt{2}} = 398 \text{ V}$

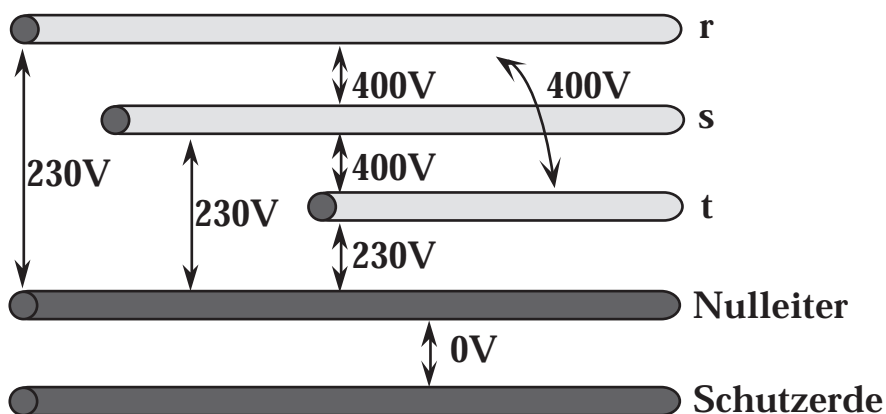
nomielle Effektivwerte:

Einphasennetz: $U = 230 \text{ V}$
 Dreiphasennetz: $U = 400 \text{ V}$



Darstellung der Effektivwerte der Spannungen im Dreieck

Die Effektivwerte zwischen den verschiedenen Phasen und zwischen den Phasen und dem Nulleiter betragen also:



13.4 RLC - Schaltungen im Wechselstromkreis

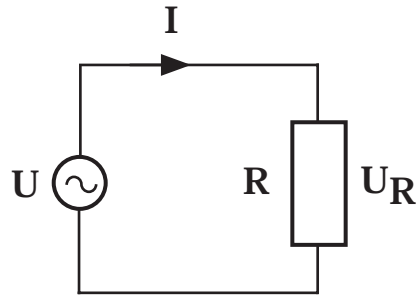
Ohmscher Widerstand

$$U = U_0 \cos \omega t$$

$$U - U_R = 0$$

$$U = U_R$$

$$I = \frac{1}{R} U_R = \frac{U_0}{R} \cos \omega t$$



$$I = I_0 \cos \omega t$$

$$U_R = U_0 \cos \omega t$$

Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom $\varphi = 0$

Kondensator

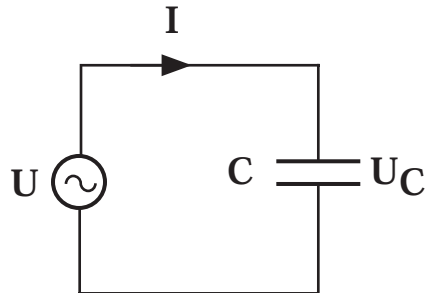
$$U = U_0 \cos \omega t$$

$$U - U_C = 0$$

$$\dot{U} = \frac{1}{C} \dot{Q} = \frac{1}{C} I$$

$$-\omega U_0 \sin \omega t = \frac{1}{C} I$$

$$I = -\omega C U_0 \sin \omega t$$



$$I = \frac{U_0}{1/\omega C} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$U = U_0 \cos \omega t$$

Zwischen Spannung und Strom beträgt die Phasenverschiebung $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

die Strommaxima eilen den Spannungsmaxima um $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ voraus.

$1/\omega C$ interpretieren wir als Wechselstrom-Widerstand. Wir bezeichnen diese Grösse als **Impedanz Z**

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

Induktivität

$$U = U_0 \cos \omega t$$

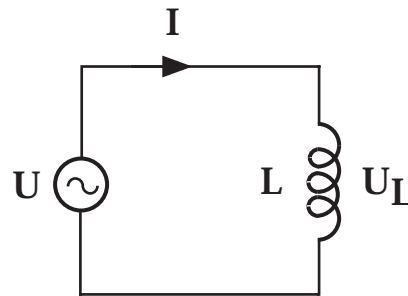
$$U + U_L = 0$$

$$U = +L \frac{dI}{dt}$$

$$\int U dt = L \int dI$$

$$\frac{1}{\omega} U_0 \sin \omega t = L \cdot I$$

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t$$



$$I = \frac{U_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$U = U_0 \cos \omega t$$

Phasenverschiebung des Stroms $\varphi = \frac{\pi}{2}$

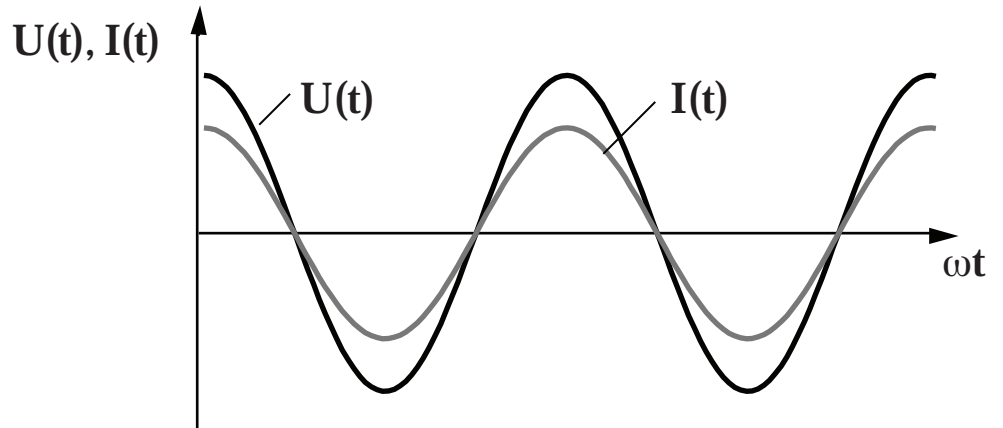
$$Z_L = \omega L$$

Impedanz der Induktivität

Phasenlagen im rein Ohmschen, kapazitiven und induktiven Stromkreis

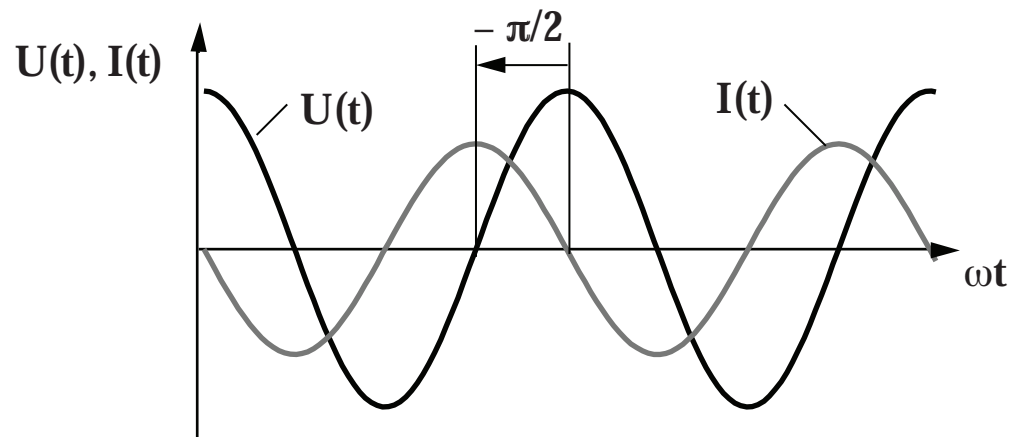
Ohmscher
Widerstand

$$Z_R = R$$



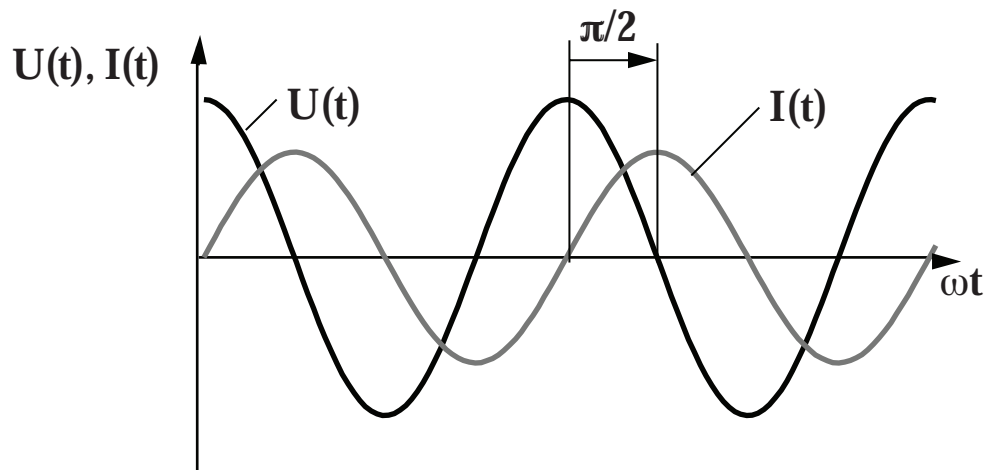
Kapazität

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$



Induktivität

$$Z_L = \omega L$$



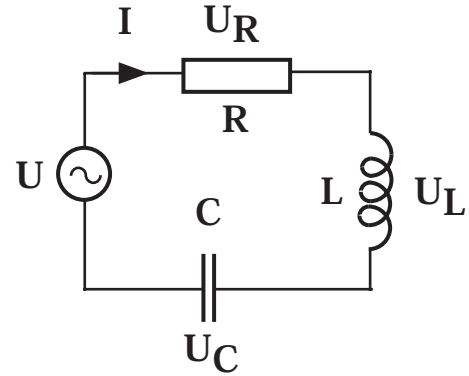
RLC - Kreise

$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Die Impedanz der gesamten RLC Serieschaltung beträgt

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



die Phasenverschiebung φ zwischen dem Strom $I(t)$ und der Spannung $U(t)$ wird durch die Größen R , L , C und ω bestimmt

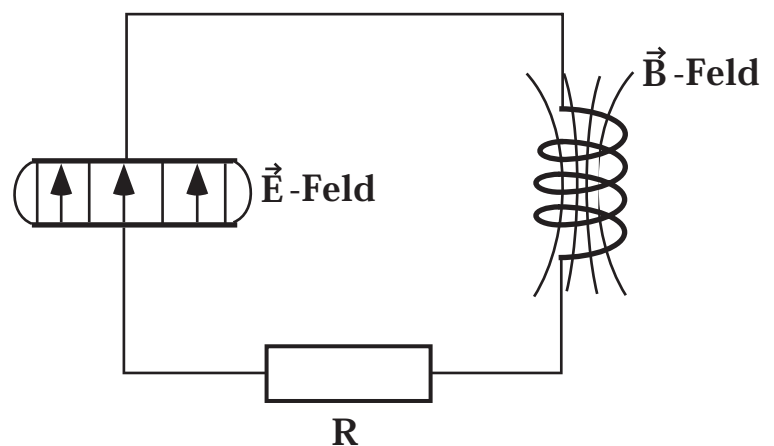
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

(ohne Beweis)

RLC - Schaltungen stellen Schwingkreise dar. Wie bei mechanischen Schwingungen findet auch hier ein Energieaustausch zwischen zwei verschiedenen Energieformen, der Feldenergie des E- und B-Feldes, statt.

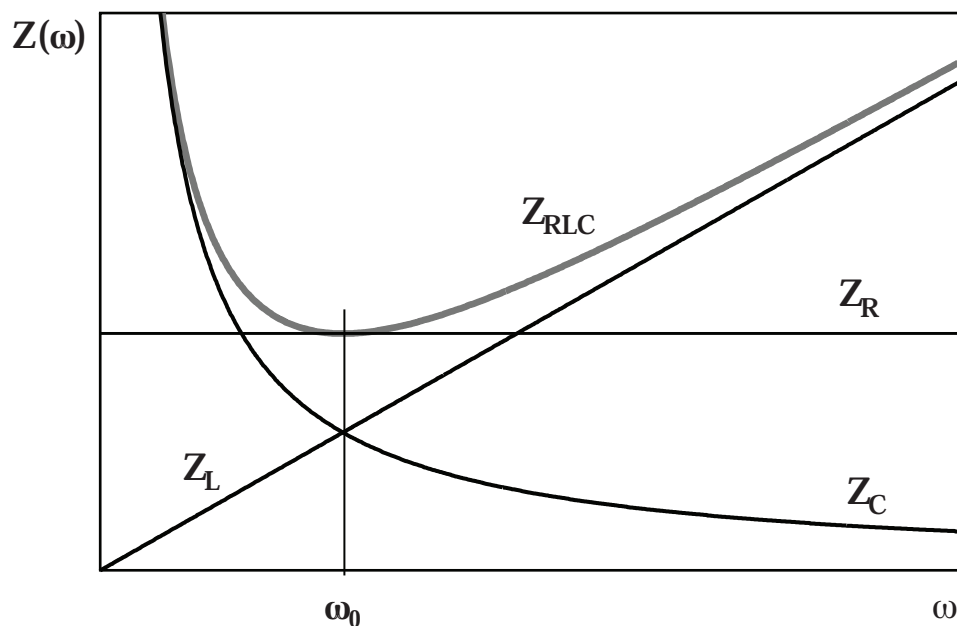
Der Ohmsche Widerstand R ist für die Dämpfung des Systems verantwortlich.

Falls wir eine äussere Spannungsquelle anschliessen (siehe Figur oben), erhalten wir eine erzwungene Schwingung und wir können ein Resonanzverhalten bekommen.



13. Wechselspannungen und Wechselströme

Graphische Darstellung der Impedanzen Z_R , Z_C und Z_L in Abhängigkeit von ω



An der Stelle ω_0 (der Resonanzfrequenz des ungedämpften Oszillators) gilt:

$$Z_C = Z_L$$

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

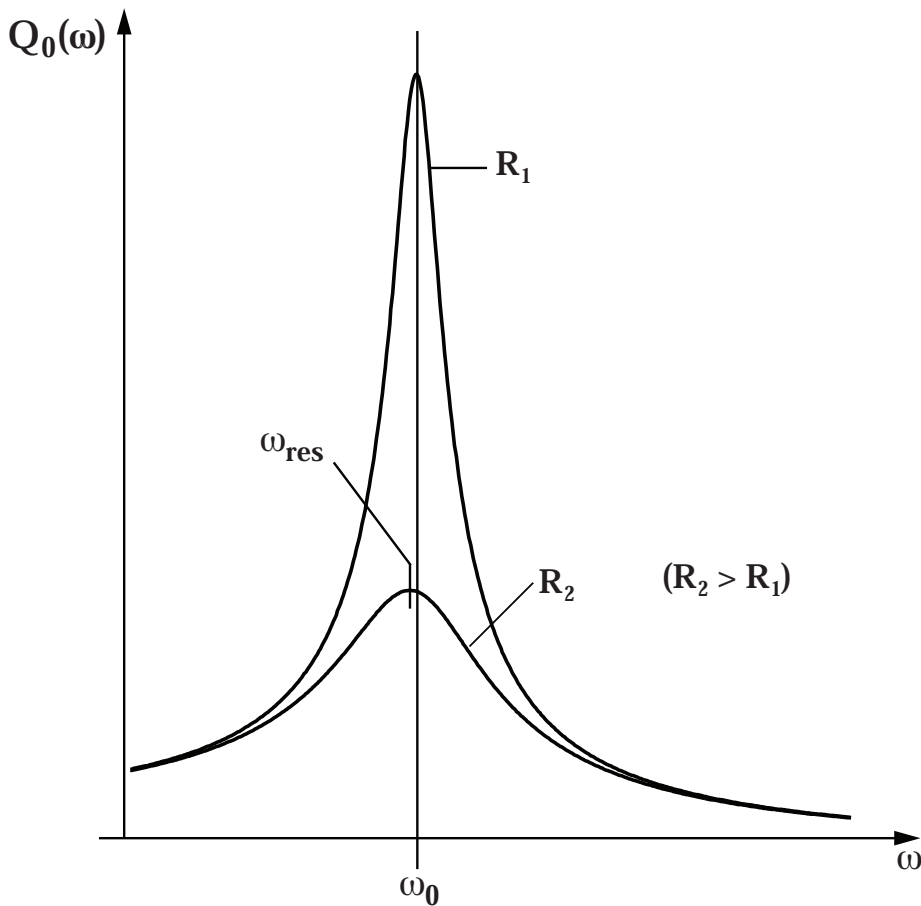
Für die Resonanzfrequenz ω_{res} gilt

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

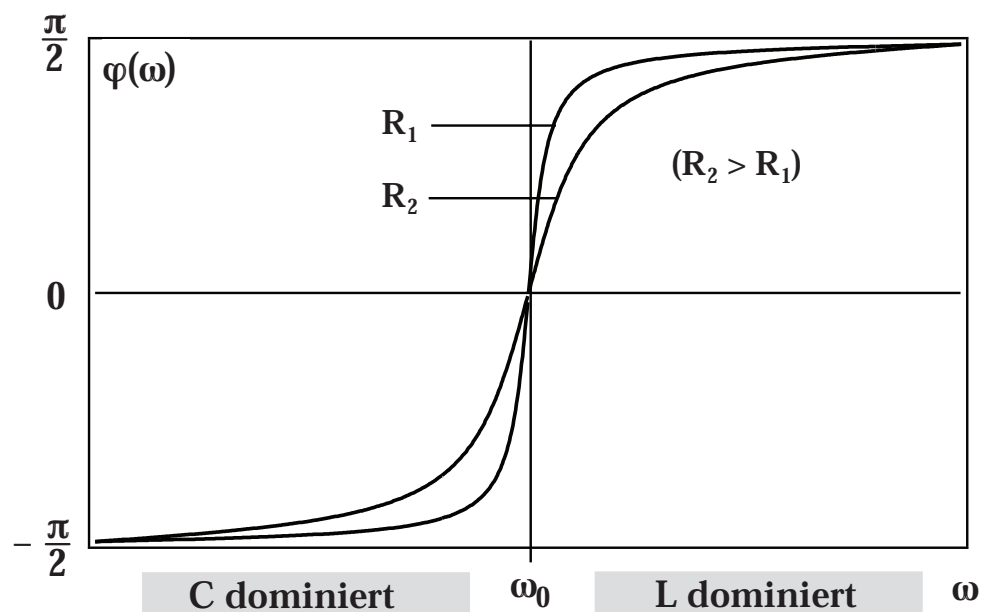
(ohne Beweis)

Bei kleiner Dämpfung gilt

$$\omega_{\text{res}} \cong \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Resonanzkurven $Q_0(\omega)$ für zwei verschiedene Dämpfungen R_1 und R_2 . An Stelle der Stromamplitude ist hier die Amplitude Q_0 der Ladungszosillationen $Q(t)$ aufgetragen.



Phasenverschiebungen $\varphi(\omega)$ zwischen dem Strom $I(t)$ und der Spannung $U(t)$ für zwei verschiedene Dämpfungen

13. Wechselspannungen und Wechselströme

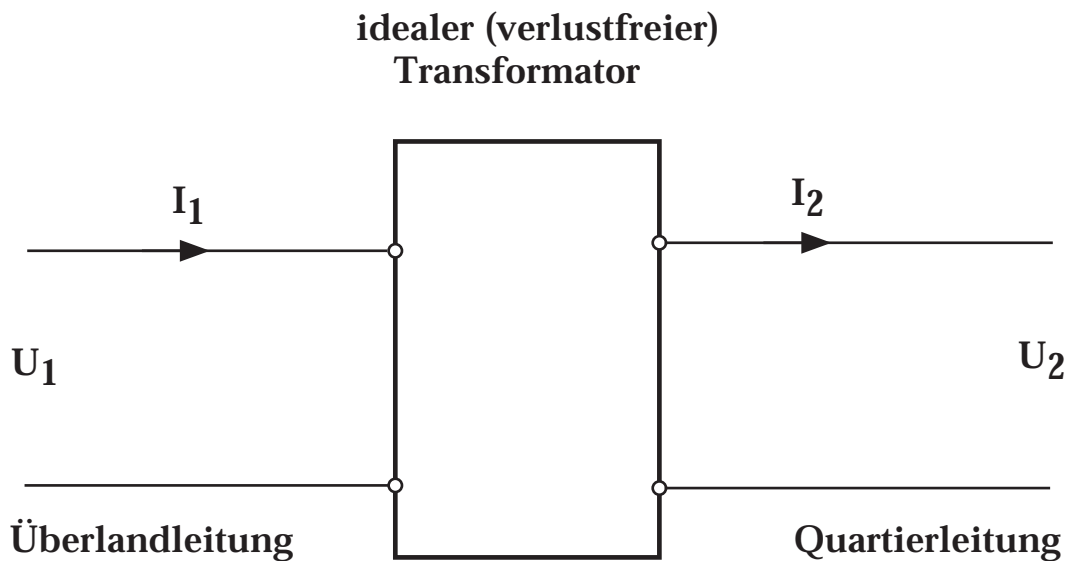
Die Analogie zwischen der erzwungenen Schwingung eines Federpendels (Mechanik Kap. 8.3) und dem RLC - Schwingkreis beruht auf der Analogie der beiden Differentialgleichungen.

mechanisches Pendel	RLC - Schwingkreis
$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Dx = F_0 \cos \omega t$	$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 \cos \omega t$
Masse m Direktionskonstante D Reibung α Auslenkung x Geschwindigkeit \dot{x} potentielle Energie $\frac{1}{2} D x^2$ kinetische Energie $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ Lösung der Differentialgleichung mit $F_0 = 0$ (gedämpfte Schwingung): $x = x_0 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$	Induktivität L reziproke Kapazität $1/C$ ohmscher Widerstand R Ladung Q Strom \dot{Q} elektrostatische Energie $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ magnetische Energie $\frac{1}{2} L I^2$ $\delta = \frac{R}{2L}$ mit $U_0 = 0$: $Q = Q_0 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung (Resonanzfrequenz)	Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung (Resonanzfrequenz)
$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$	$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

13.5 Der Transformator

Ein wesentlicher Grund für die Verwendung von Wechselspannung im technischen Bereich liegt einerseits in der Erzeugung der elektrischen Spannung durch Generatoren, die direkt eine (harmonische) Wechselspannung liefern und andererseits in der einfachen Möglichkeit der Spannungstransformation mit einem Transformator.

Beispiel:



U_1, U_2, I_1, I_2 : Wechselspannungen und -Ströme

$$U_1 = 12800 \text{ V} \quad I_1 = 100 \text{ A} \quad P_1 = U_1 I_1$$

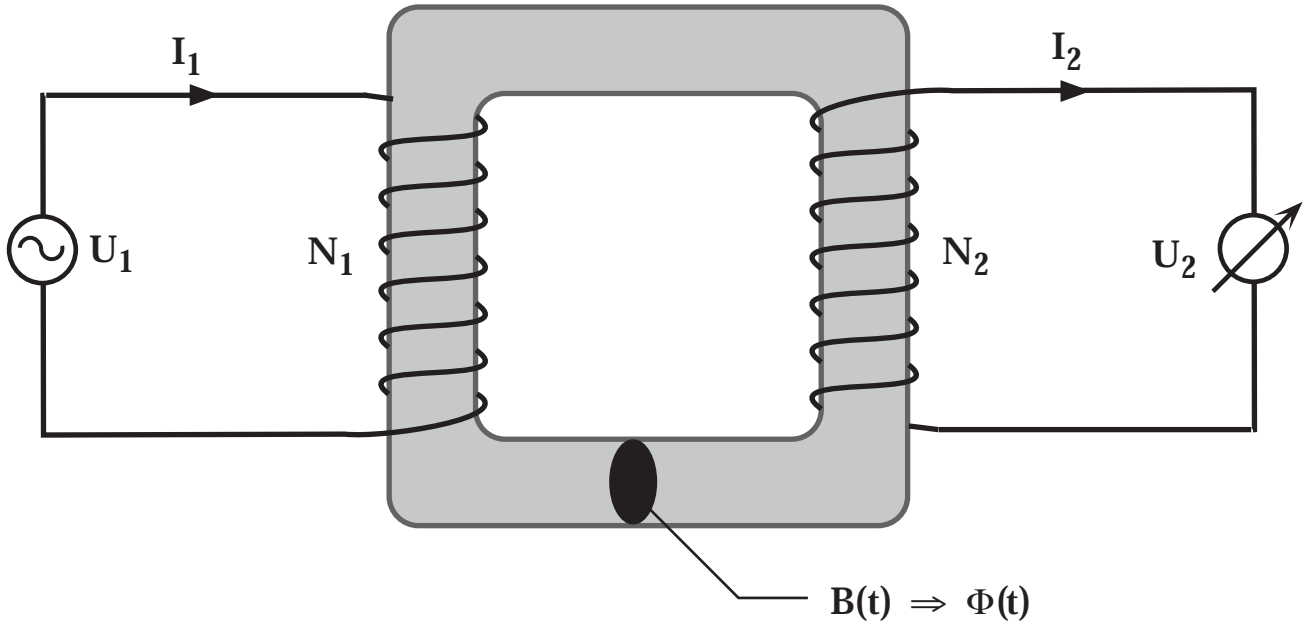
$$P_1 = 1.28 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$U_2 = 400 \text{ V} \quad I_2 = 3200 \text{ A} \quad P_2 = 1.28 \cdot 10^6 \text{ W}$$

verlustfreier Transformator

In diesem Fall wird die Primärspannung U_1 um einen Faktor $1/32$ 'herunter - transformiert'

Aufbau des Transformators



U_1 bewirkt einen Strom I_1 , dessen Phase gegenüber der Spannung um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ verschoben ist. Der entstehende magnetische Fluss Φ ist in Phase mit I_1 . Die Flussänderung $\dot{\Phi}$ erzeugt in der Sekundärspule eine Induktionsspannung, welche wiederum eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ gegenüber $\Phi(t)$ aufweist. Das führt dazu, dass U_1 und U_2 eine Phasenverschiebung von π aufweisen.

Falls der Fluss Φ im ganzen Eisenkern konstant ist, gilt für die Induktionsspannung in jeder Spulenwindung auf der Primär- und Sekundärseite:

$$U' = - \dot{\Phi}$$

$$|U_1| = N_1 |U'|$$

$$|U_2| = N_2 |U'|$$

Daraus ergibt sich das Übersetzungsverhältnis

$$\frac{|U_1|}{|U_2|} = \frac{N_1}{N_2}$$

Übersetzungsverhältnis des idealen, unbelasteten Transformators

U_1 und U_2 sind um $\varphi = \pi$ phasenverschoben.

Ferner gilt für die Leistung auf der Primär- und Sekundärseite beim idealen Transformator:

$$P_1 = P_2$$

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

$$U_1 I_1 = \frac{U_1}{N_1/N_2} \cdot I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

14. Gefahren elektrischer Ströme für den Menschen

Eine direkte Gefahr für den Menschen stellen Gleichströme oder niederfrequente Ströme dar, die durch den Körper hindurch fließen. Die häufigsten Strompfade führen von einer Hand über den Rumpf zur anderen Hand oder von einer Hand über den Rumpf zu den Füßen.

Typische Widerstandswerte (bei trockener Haut)

Vorleungsexperiment: $R_{\text{Hand-Hand}} \approx \dots$
 $R_{\text{Hand-Füsse}} \approx \dots$

Bei einer Spannung von $U = 220 \text{ V}$ würde das zu den Strömen führen

$I_{\text{Hand-Hand}} \approx \dots$
 $I_{\text{Hand-Füsse}} \approx \dots$

Die Wirkungen elektrischer Ströme auf den Menschen lassen sich etwa wie folgt grob klassifizieren

Strom I	Wirkung
< 5mA	keine Wirkung
≈ 5 - 7 mA	Kribbeln
≈ 20 mA	Schmerzhaft, Lösungshemmung (spannungsführende Leitung kann nicht mehr losgelassen werden)
≈ 30 mA	Atmung gestört, Blutdrucksteigerung, Herzunregelmässigkeit
≈ 80 - 200 mA	Bewusstlosigkeit, Herzflimmern
> 200 mA	Herzstillstand, Atmung setzt aus

Häufigste Todesfälle für $80 < I < 200\text{mA}$

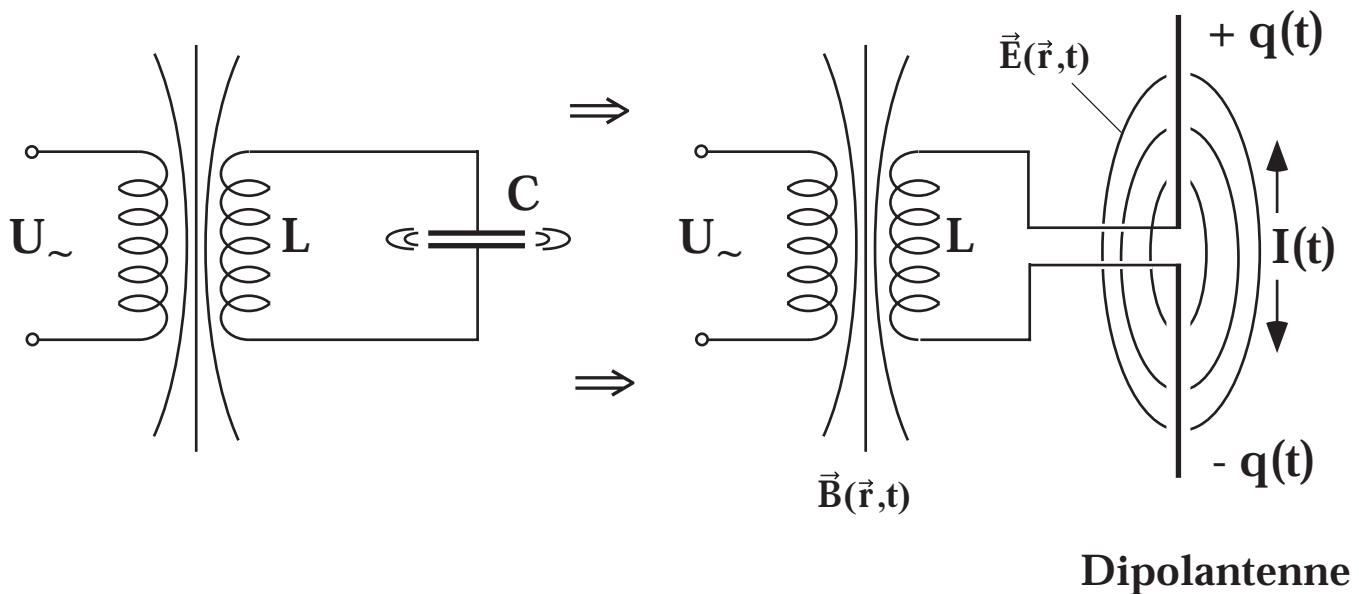
Sprunghaftes Zucken des Herzens → Unterbruch des Bluttransports. Hilfe evtl. durch kontrollierten Elektroschock.

Für $I > 200 \text{ mA}$ bei Herzstillstand
Hilfe durch Herzmassage

15. Elektromagnetische Wellen

15.1 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Ausgangspunkt: elektrische Schwingkreise (LC Schwingkreis) strahlen elektrische und magnetische Felder ab.



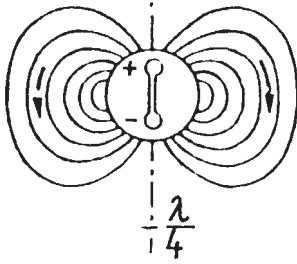
Die Abstrahlung ist ausgeprägt, wenn der Kondensator C durch eine Dipolantenne ersetzt wird (Hertzscher Dipol). Der in der Antenne fließende Strom $I(t)$ und die Ladung $q(t)$ in den beiden Antennenhälften sind zeitabhängig. Der Strom $I(t)$ erzeugt um die Antenne ein Induktionsfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$ und die Ladung $q(t)$ bewirkt ein elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r},t)$.

15. Elektromagnetische Wellen

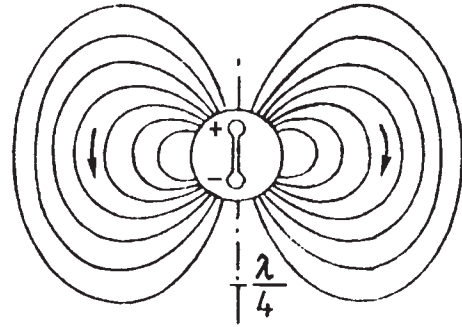
Abstrahlung des E-Feldes bei der Dipolantenne

Die Periodendauer der Ladungsozillationen in der Antenne ist mit T bezeichnet.

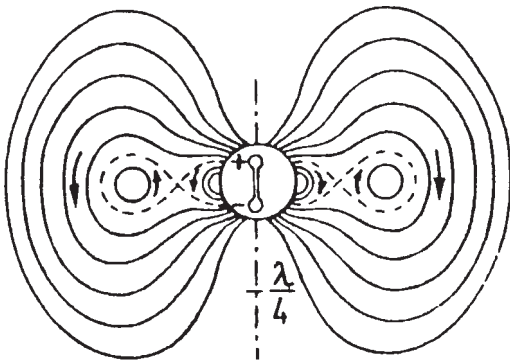
$t = 0.125 T$



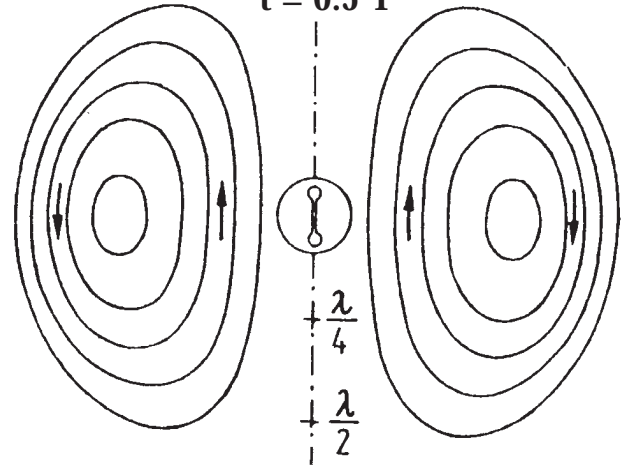
$t = 0.25 T$



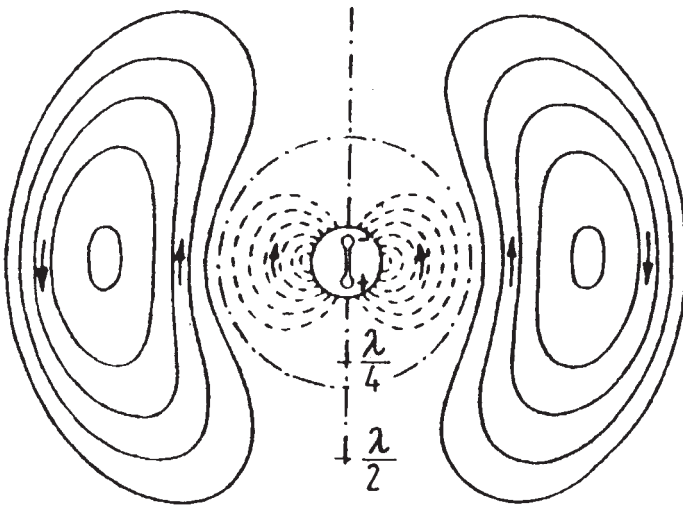
$t = 0.375 T$



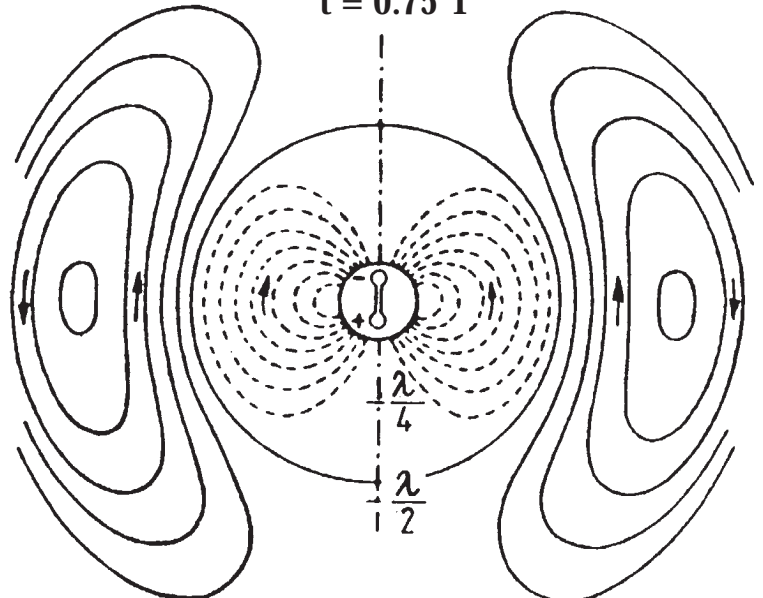
$t = 0.5 T$



$t = 0.625 T$



$t = 0.75 T$



15.2 Eigenschaften der elektromagnetischen Wellen

Die Folge der sich ändernden elektromagnetischen Felder in Antennennähe ist die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle. Für eine Wellenausbreitung in x-Richtung werden die Felder $\vec{E}(\vec{r},t)$ sowie $\vec{B}(\vec{r},t)$ beschrieben durch

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin(kx - \omega t) \\ B &= B_0 \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

wobei die Wellenzahl k definiert ist durch

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt (ohne Beweis):

- die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Vakuum ist

$$c_{\text{vak}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

was der Lichtgeschwindigkeit $c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ entspricht, denn

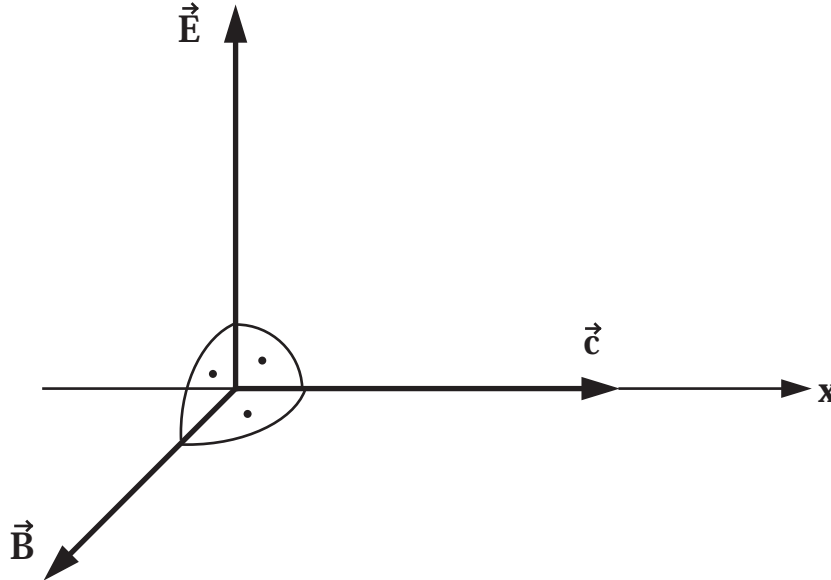
$$c_{\text{vak}} = \frac{1}{\sqrt{8.8542 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}}} = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Materie (charakterisiert durch die relative Dielektrizitätskonstante ϵ und durch die relative magnetische Permeabilität μ) beträgt

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} = \frac{c_{\text{vak}}}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

15. Elektromagnetische Wellen

- $E(x,t)$ und $B(x,t)$ sind in Phase. \vec{E} , \vec{B} und die Ausbreitungsrichtung \vec{c} bilden ein rechtsdrehendes System

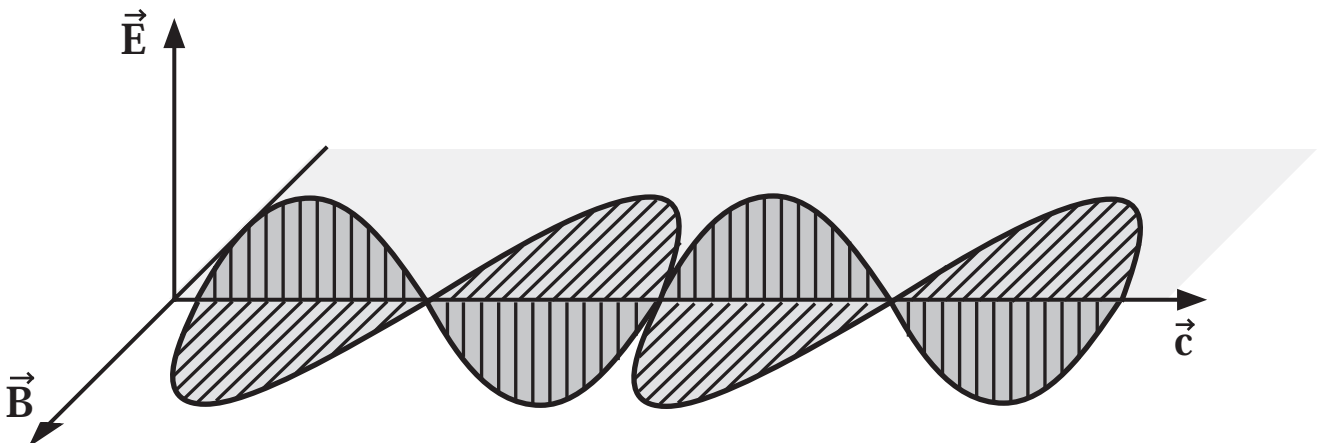


- die Amplituden von $E(x,t)$ und $B(x,t)$ stehen in einer festen Beziehung:

$$E = c B$$

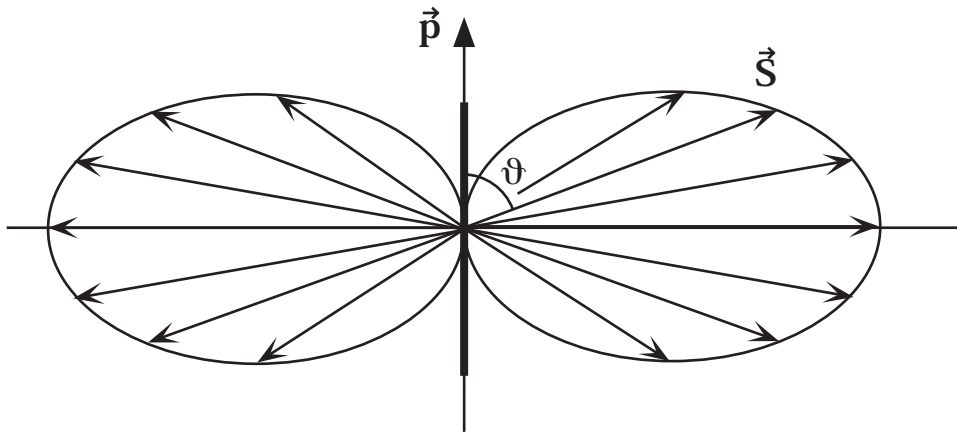
Neben diesen Eigenschaften handelt es sich bei der Welle, die von unserer Dipolantenne ausgeht, um eine polarisierte Welle, da die Schwingungsrichtung (z.B. des \vec{E} -Vektors) immer in derselben Ebene liegt. Als Polarisationsrichtung einer polarisierten Welle definiert man die Richtung des \vec{E} -Vektors.

Elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen



15.3. Abstrahlungscharakteristik der Dipolantenne

Die Intensität der emittierten Welle ist maximal senkrecht zur Antennenrichtung und ist null in Richtung der Antenne. Der \vec{E} -Vektor ist parallel zur Antennenrichtung.



Die Abstrahlcharakteristik des Hertzischen Dipols zeigt Rotationssymmetrie bezüglich der Dipolachse.

15.4 Energietransport der elektromagnetischen Welle

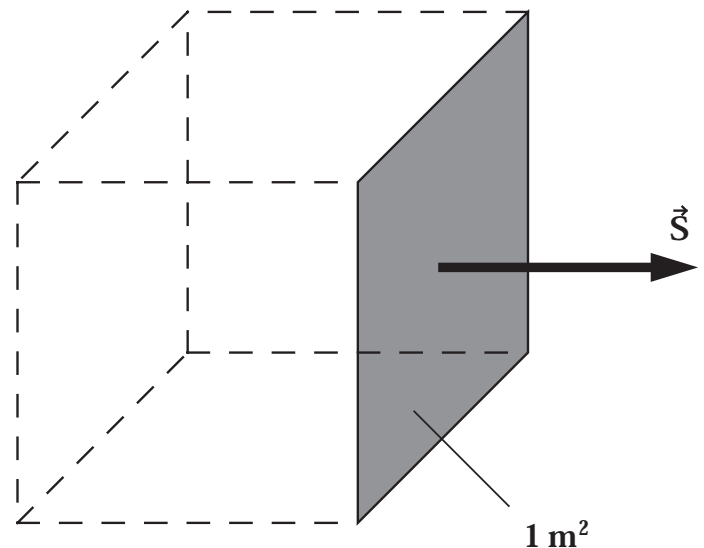
Die Energiedichten des elektrischen und magnetischen Feldes betragen (nach Abschnitt 5.4 und 9):

$$\rho_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2$$

$$\rho_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu}$$

mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit c ergibt sich für die pro Zeit und Fläche transportierte Energie

$$S = c (\rho_{\text{el}} + \rho_{\text{mag}})$$



15. Elektromagnetische Wellen

$$S = \frac{1}{2} c \left(\epsilon_0 \epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu_0 \mu} \right)$$

mit $E = c B$ ergibt sich

$$S = \frac{1}{2} c \left(\epsilon_0 \epsilon c E B + \frac{E B}{\mu_0 \mu c} \right)$$

$$S = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 \mu} E B (\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu c^2 + 1)$$

wobei mit $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}$ dann

$$\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu c^2 = 1$$

ist und somit

$$S = \frac{E B}{\mu_0 \mu}$$

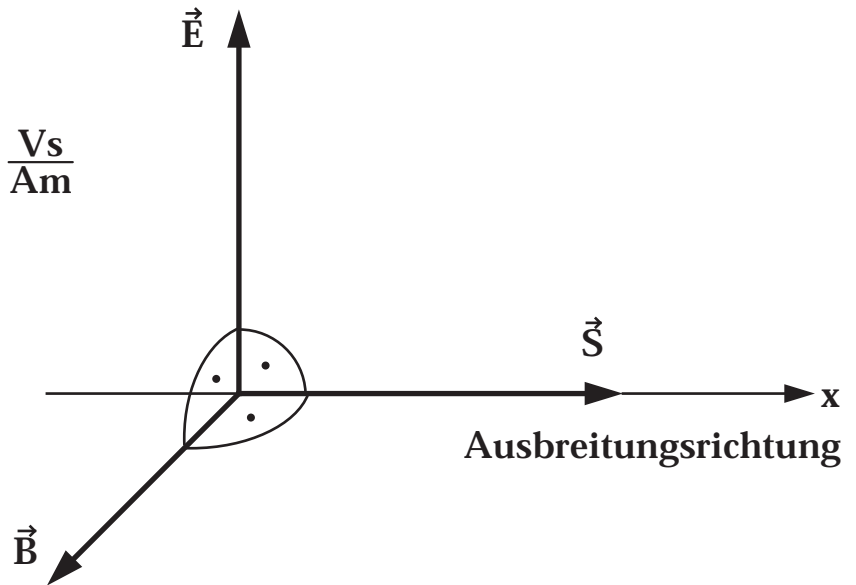
im Vakuum, mit $\mu = 1$ gilt dann

$$S = \frac{E B}{\mu_0}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

oder als Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$



\vec{S} heisst Poynting Vektor

Einheit von S:

$$[S] = [c][\rho] = 1 \frac{m}{s} \frac{Joule}{m^3} = 1 \frac{J}{s m^2} = 1 \frac{W}{m^2}$$

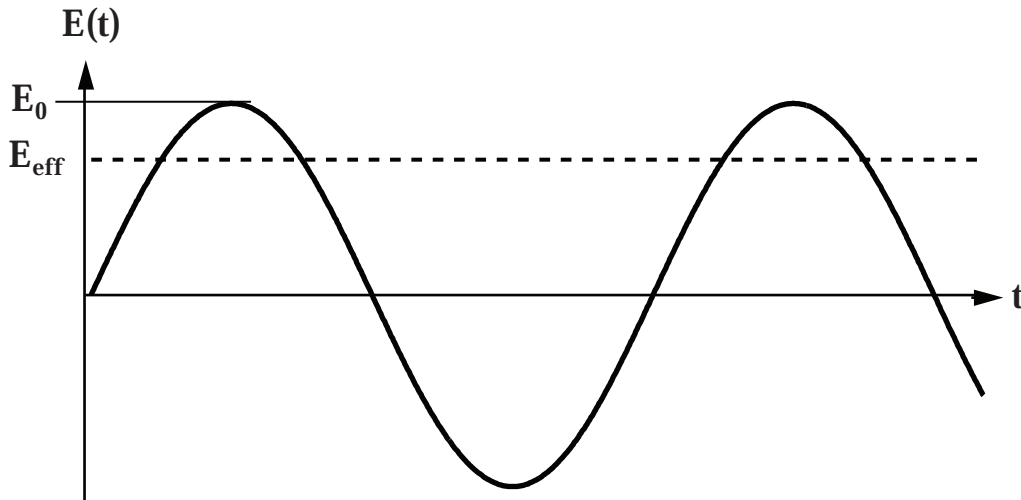
oder

$$[S] = \frac{1}{[\mu_0]} [E][B] = 1 \frac{A \cdot m}{V \cdot s} \frac{V}{m} \frac{V \cdot s}{m^2} = 1 \frac{J}{s \cdot m^2} = 1 \frac{W}{m^2}$$

15.4 Energietransport der elektromagnetischen Welle

Der Begriff des Effektivwertes (siehe Abschnitt 13.2) kann auch hier angewendet werden. Für die Berechnung eines zeitlichen Mittelwerts von S sind in der Formel

$S = \frac{1}{\mu_0} E B$ für E und B die Effektivwerte E_{eff} und B_{eff} einzusetzen.



$$E_{\text{eff}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad B_{\text{eff}} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}$$

Beispiel:

Wie gross ist die elektrische Feldstärke E_{eff} und die Amplitude E_0 des Sonnenlichtes auf der Erdoberfläche wenn die pro m^2 eingestrahelte Leistung $S = 700 \text{ W/m}^2$ beträgt?

$$S = \frac{1}{\mu_0} E B = \frac{1}{\mu_0 c} E^2$$

$$E = \sqrt{\mu_0 c S}$$

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{\mu_0 c S} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 700}$$

$$E_{\text{eff}} = 514 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

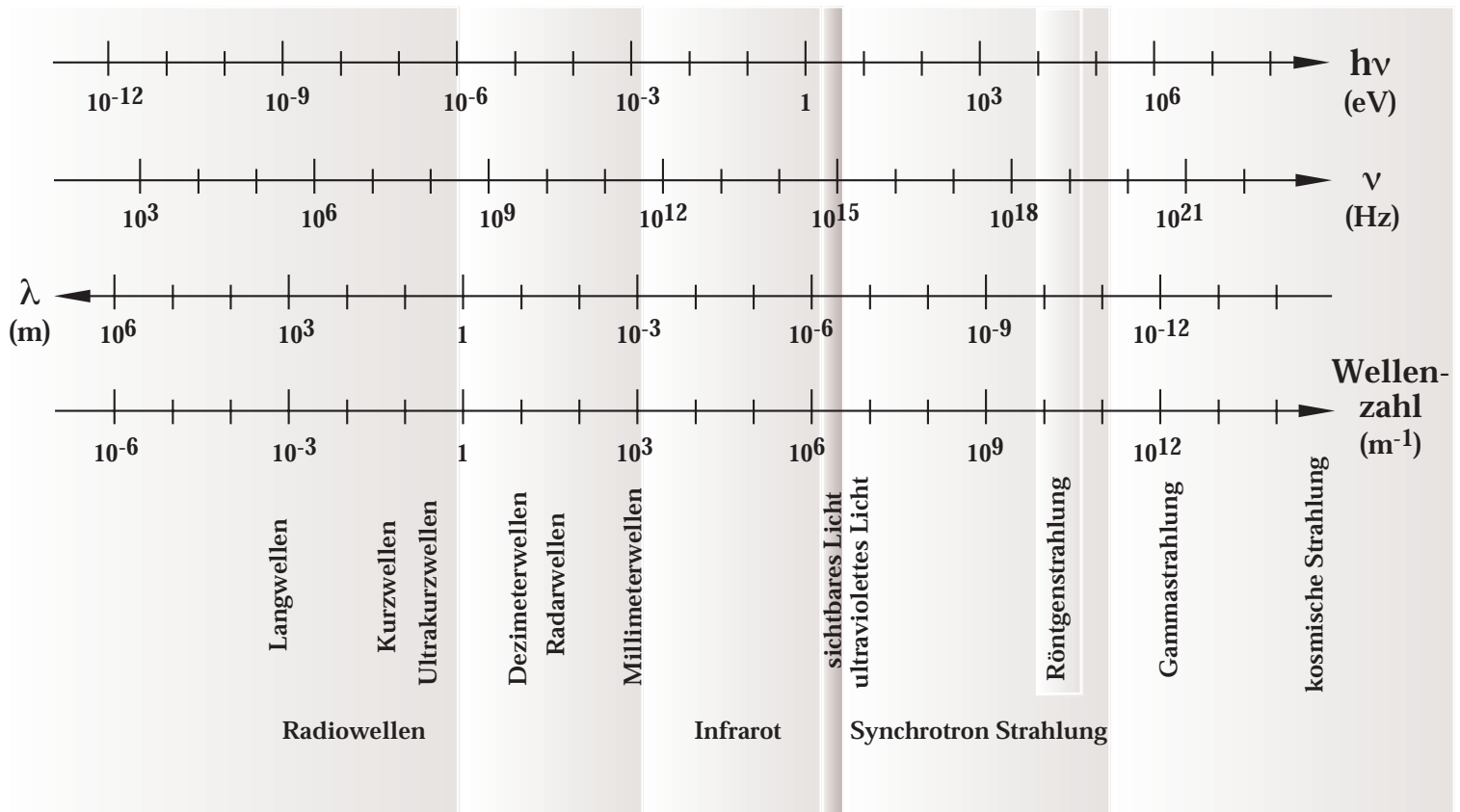
$$E_0 = \sqrt{2} E_{\text{eff}} = 726 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

15.5 Uebersicht über elektromagnetische Wellen

Elektromagnetische Wellen können durch verschiedene physikalische Phänomene entstehen. Die oben besprochenen Eigenschaften gelten aber allgemein und sind nicht abhängig davon wie die Welle erzeugt wird. Elektromagnetische Wellen können entstehen durch:

Effekt	Beispiel
Abstrahlung ab Dipolantenne	Radioantenne
Wärmestrahlung	Glühlampe
Elektronenübergänge in Atomen	Leuchtstoffröhre , Halogenlampe
Kernstrahlung	'Abregung' von Atomkernen und Emission eines γ -Quants

Die nachfolgende Übersicht zeigt die Grössenverhältnisse für die Wellenzahl k , die Wellenlänge λ die Frequenz ν und die Photonenergie $h\nu$. Die Photonenergie wird in Kapitel VI.2 behandelt.



IV . Geometrische Optik

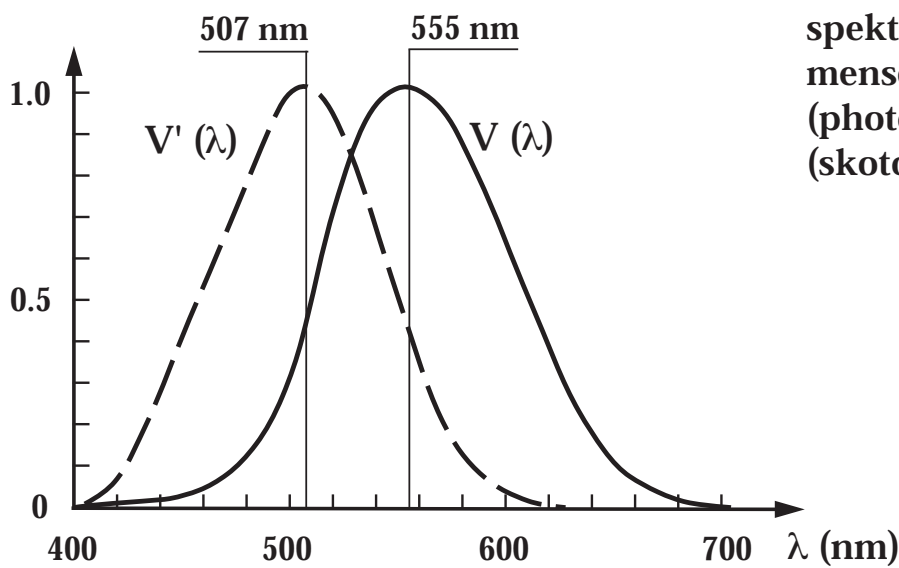
1. Übersicht

Die Optik, als Lehre der Erscheinungen und der Gesetze des Lichtes, umfasst die folgenden Teilgebiete:

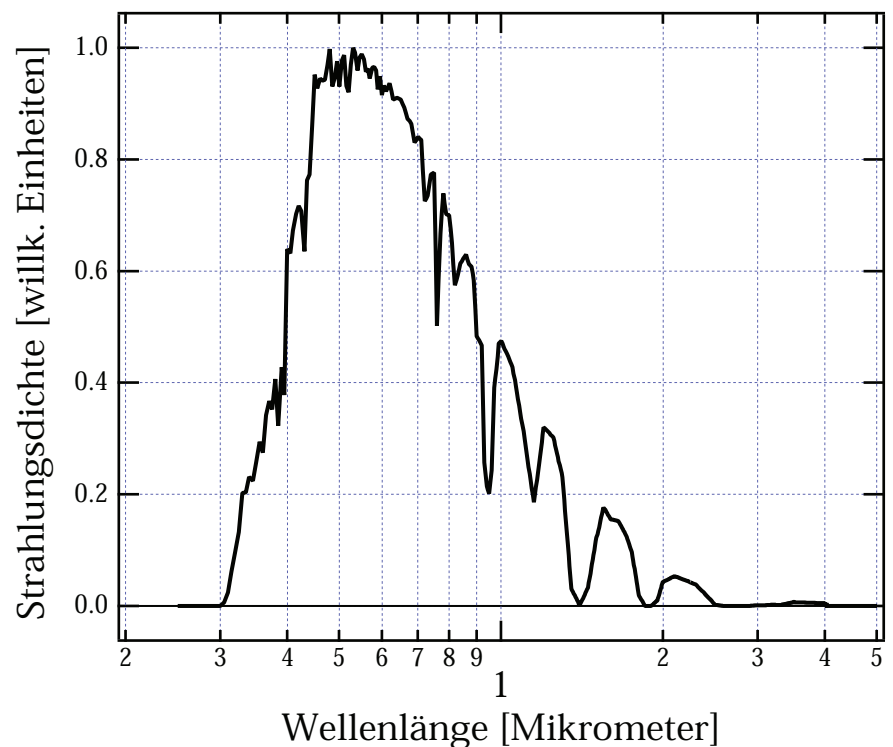
- **geometrische Optik** (\Rightarrow geradlinige Ausbreitung von 'Lichtstrahlen' in homogenen Medien, Vernachlässigung von Beugungs- und Interferenzeffekten)
- **Wellenoptik** (\Rightarrow Licht als Welle, Berücksichtigung von Beugungs- und Interferenzeffekten; siehe Kapitel V)
- **Licht als Quantenphänomen** (\Rightarrow verschiedene Erscheinungen lassen sich nicht durch die klassische Wellenoptik erklären \Rightarrow Quantisierung des Lichtes \Rightarrow Photonen; siehe Kapitel VI)

2. Photometrie, Lichtmessgrössen

Die Intensität elektromagnetischer Strahlung wird angegeben durch die Intensität S in $\text{J/s}\cdot\text{m}^2 = \text{W/m}^2$ (siehe Kap. III 15). Um die Intensität des sichtbaren Lichtes zu quantifizieren führt man neben den rein **physikalisch** definierten Intensitäten auch **physiologisch** bewertete Intensitäten ein. Dabei wird die spektrale Empfindlichkeit des menschlichen Auges berücksichtigt. Diese ist in nachfolgender Figur zusammen mit der Intensitätsverteilung des Sonnenlichtes wiedergegeben.



spektrale Empfindlichkeit des menschlichen Auge, hell adaptiert $V(\lambda)$ (photopisch) und dunkel adaptiert $V'(\lambda)$ (skotopisch)



Spektrum des Sonnenlichts auf der Erde (sogenanntes AM 1.5 Spektrum)

Photometrische Größen

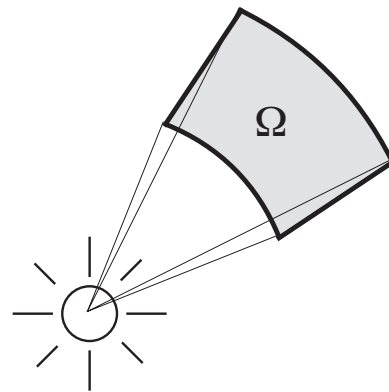
a) SI Basiseinheit: Lichtstärke I

Einheit: 1 Candela = 1 cd

Definition

1 cd ist diejenige **Lichtstärke I** , die dem (mittleren, normierten) Auge gleich hell erscheint wie die Lichtstärke einer Quelle, die grünes Licht der Wellenlänge $\lambda = 555 \text{ nm}$, mit der Intensität $1.464 \text{ mJ pro Sekunde und Steradian}$ aussendet.

Die Lichtstärke 1 cd entspricht rund
1.5 mW/Steradian grünes Licht
(physiologisch bewertete Leistung)



b) Lichtstrom Φ

Einheit: 1 Lumen = 1 ℓm

Definition

Der **Lichtstrom Φ** einer Lichtquelle ist die in den ganzen Raum abgestrahlte physiologisch bewertete Lichtleistung.

Der Lichtstrom Φ ergibt sich somit durch die Integration der Lichtstärke einer Quelle über den gesamten Raumwinkel Ω .

$$1 \ell\text{m} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$$

Beispiel:

Eine Lampe strahlt homogen in alle Richtungen die Lichtstärke $I = 80$ cd ab.

Wie gross ist der Lichtstrom Φ ? Welcher physikalischen Leistung P einer Quelle mit

$\lambda = 555$ nm entspricht dieser Wert?

$$I = \text{Leistung} / \text{Steradian}$$

$$\Phi = I \cdot 4\pi = 1005 \text{ lm}$$

$$P = 1005 \cdot 1.464 \text{ mW} = 1.47 \text{ W} \approx 1.5 \text{ W}$$

c) Beleuchtungsstärke B

Einheit: 1 Lux = 1 lx

Definition

Die **Beleuchtungsstärke B** ist die auf eine Fläche senkrecht auftreffende physiologisch bewertete Lichtleistung pro Fläche

$$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2 = 1 \text{ cd}\cdot\text{sr/m}^2$$

Beispiel:

Wie gross ist die Beleuchtungsstärke B auf eine Wand, die von einer Quelle mit einer Lichtstärke von 400 cd im Abstand von 3 m senkrecht beleuchtet wird?

$$B = \frac{I \Omega}{A} = \frac{400 \cdot 4\pi}{4\pi \cdot 3^2} \frac{\text{cd sr}}{\text{m}^2} = 44.5 \text{ lx}$$

d) Die Leuchtdichte L

Einheit: 1 cd/m²

Definition

Die **Leuchtdichte L** einer Quelle ist gegeben durch die Lichtstärke I der Quelle dividiert durch die emittierende Fläche der Quelle.

2. Photometrie, Lichtmessgrößen

Die folgenden Tabellen zeigen die Größenordnungen der Lichtmessgrößen.

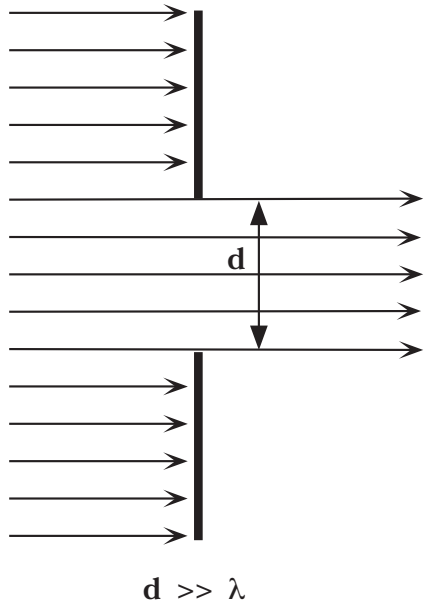
Lichtstrom Φ		ℓm
Kerze		10
Glühlampen	25 W	215
	60 W	620
	100 W	1000
Leuchtstofflampe	25 W	1350
	65 W	3300

Leuchtdichte L		cd/m^2
Sonne		$\sim 1.5 \cdot 10^9$
Lichtbogen		$2 \cdot 10^8$
Hg Hochdrucklampe		$6 \cdot 10^6$
Mond		$3 \cdot 10^3$
Xe Hochdrucklampe		$\leq 10^{10}$
Glühlampenwendel		$\sim 10^7$
Leuchtstofflampe		$\sim 5 \cdot 10^3$

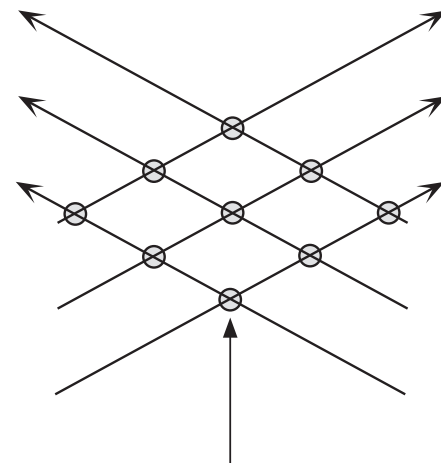
Beleuchtungsstärke B		ℓx
heller Sonnenschein		$\leq 7 \cdot 10^4$
Tageslicht, bedeckter Himmel		$\leq 2 \cdot 10^3$
Arbeitsplatz (je nach Tätigkeit)		100 - 4000

3. Grundlagen der geometrischen Optik

Voraussetzungen: geradlinige Ausbreitung des Lichtes in Form von 'Lichtstrahlen', Beugungs- und Interferenzeffekte (siehe Kapitel V) werden hier vernachlässigt.



zwei sich kreuzende Strahlenbündel



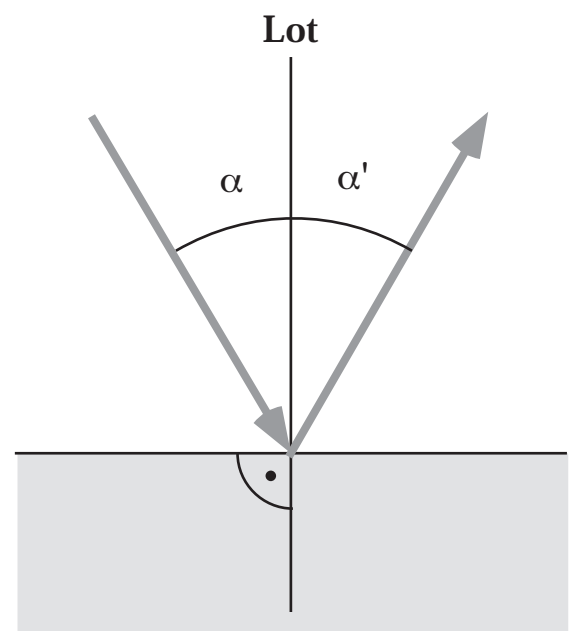
keine Interferenzeffekte
 $I_{\text{tot}} = I_1 + I_2$

3.1 Reflexions- und Brechungsgesetz

Reflexionsgesetz

$\alpha = \alpha'$
 einfallender und reflektierter Lichtstrahl,
 sowie das Lot auf die Grenzfläche, liegen
 in einer Ebene

Das Reflexionsgesetz haben wir bereits in
 Kapitel I 9.6 begründet.



Brechung und Brechungsindex n

Definition

Der Brechungsindex n eines Mediums ist gegeben durch $n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}$

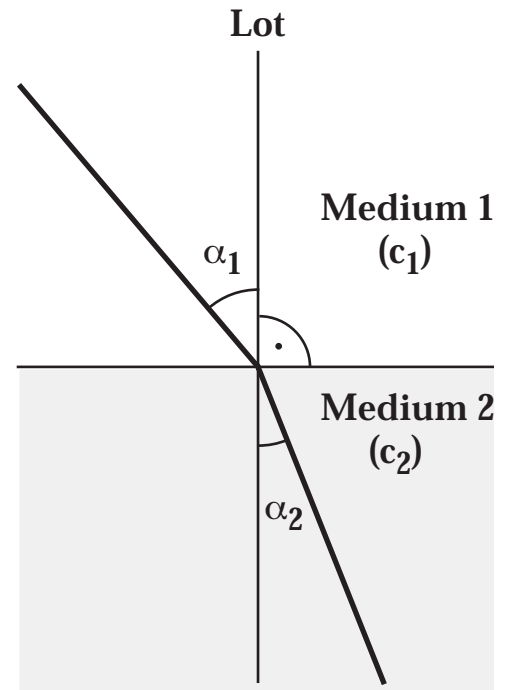
$1/n$ gibt also an, um welchen Faktor die Lichtgeschwindigkeit in einem Medium gegenüber der Vakuumgeschwindigkeit reduziert ist.

Die **optische Brechung** ist eine direkte Konsequenz der Änderung der Lichtgeschwindigkeit beim Durchtritt von Licht durch eine Grenzfläche zwischen zwei Medien.

Brechungsgesetz :

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

einfallender Strahl, gebrochener Strahl und Lot liegen in einer Ebene.



Einen Beweis für das Brechungsgesetz haben wir bereits in Kapitel I 9.6 geliefert.

Brechungsindizes n einiger Stoffe ($\lambda = 650 \text{ nm}$)

Luft (STPD)	1.00029	Wasser	1.33
Steinsalz	1.54	Flusspat	1.43
Kronglas	1.51	Quarzglas	1.46
leichtes Flintglas	1.60	Plexiglas	1.492
schweres Flintglas	1.75	Lexan	1.580
NaJ	1.78	Kanadabalsam	1.542
Spezialglas 900 403	1.89	α -Monobromnaphthalin	1.6582

3.2. Totalreflexion

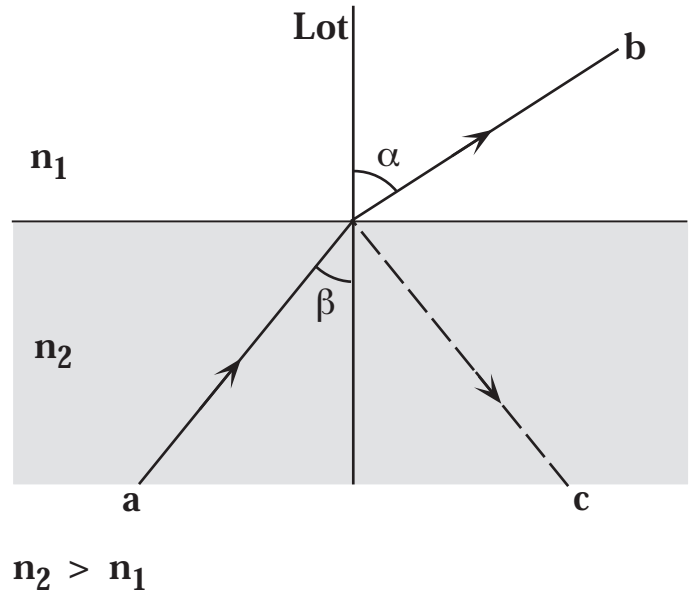
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\sin \alpha = \frac{n_2}{n_1} \sin \beta$$

α wird 90° falls

$$\sin \alpha = \frac{n_2}{n_1} \sin \beta = 1$$

$$\sin \beta_G = \frac{n_1}{n_2}$$



β_G : Grenzwinkel der Totalreflexion

Für $\beta \geq \beta_G$ existiert im optisch dünneren Medium (n_1) kein gebrochener Strahl (b) mehr. Es findet Totalreflexion statt (Strahl c).

Beispiele:

Grenzfläche Wasser ($n = 1.33$) zu Luft ($n = 1.00029$)

$$\sin \beta_G = 1.00029/1.33 \quad \Rightarrow \quad \beta_G = 48.8^\circ$$

Grenzfläche Glas ($n = 1.52$) zu Luft

$$\sin \beta_G = 1.00029/1.52 \quad \Rightarrow \quad \beta_G = 41.2^\circ$$

Anwendung der Totalreflexion:

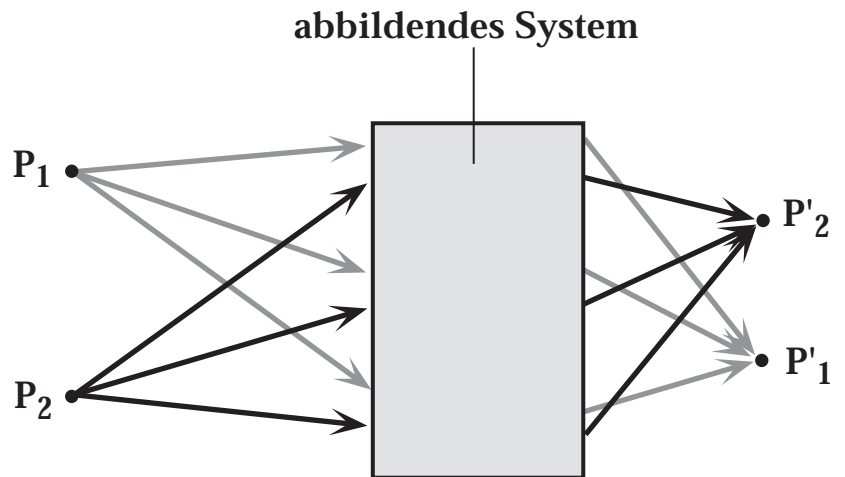
Lichtwellenleiter (Endoskopie, Informationsübertragung, Kaltlichtquellen)

4. Optische Abbildung

Ein Punkt P_i des Gegenstandsraumes wird in einen Punkt P_i' des Bildraumes abgebildet, wenn die von P ausgehenden Strahlen nach dem abbildenden System durch P_i' gehen.

Als abbildende Systeme kommen in Frage:

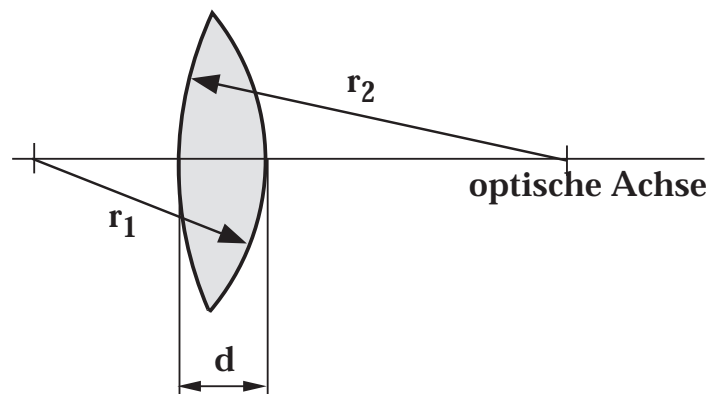
- Linsen
- sphärische Spiegel
- Kombinationen von beiden



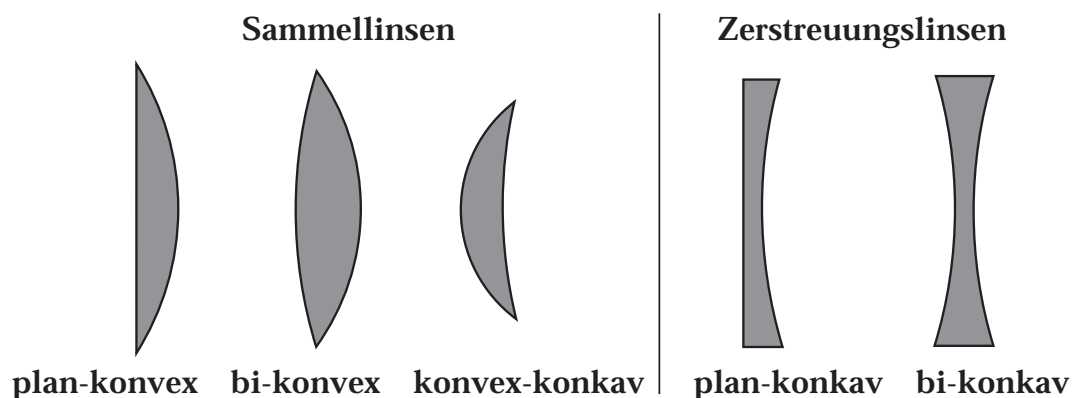
4.1 Dünne Linsen

Wir betrachten sphärische, dünne Linsen, d.h. Linsen, die durch Kugelflächen begrenzt sind und deren Dicke d viel kleiner ist als die Krümmungsradien r_1 und r_2 .

$$d \ll r_1, r_2$$



Arten von Linsen



Die Brennweite f

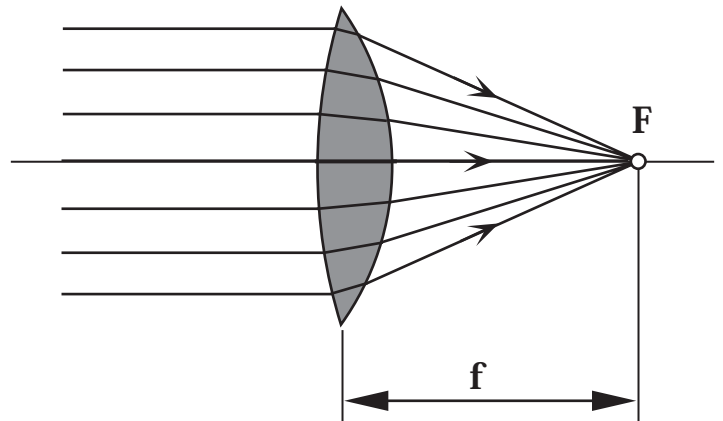
Die Brennweite f ist eine wichtige Grösse für die Charakterisierung von Linsen.

Definition

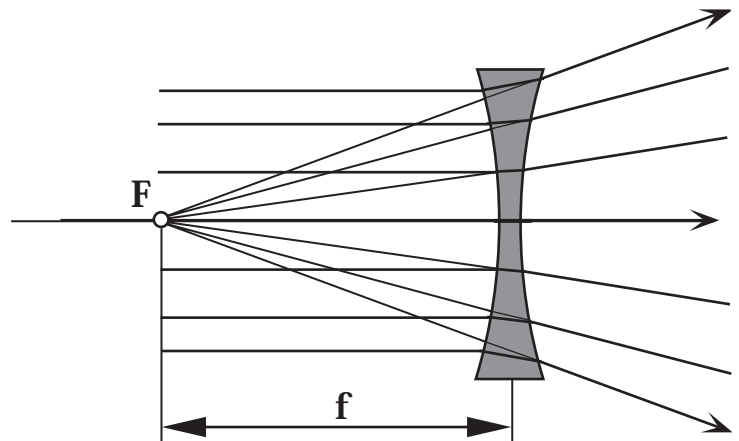
Die Brennweite f ist der Abstand des Bildpunktes eines unendlich entfernten Gegenstandpunktes von der Linse.

Vorzeichendefinition:

$f > 0$ für Sammellinse



$f < 0$ für Zerstreuungslinse



Die Krümmungsradien r_1 , r_2 und der Brechungsindex n bestimmen die Brennweite f der Linse:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad n = \frac{n_{\text{Linse}}}{n_{\text{Medium}}}$$

Einheit der Brennweite: 1 m

Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 4.4 bewiesen.

Brechkraft oder Linsenstärke D

Definition

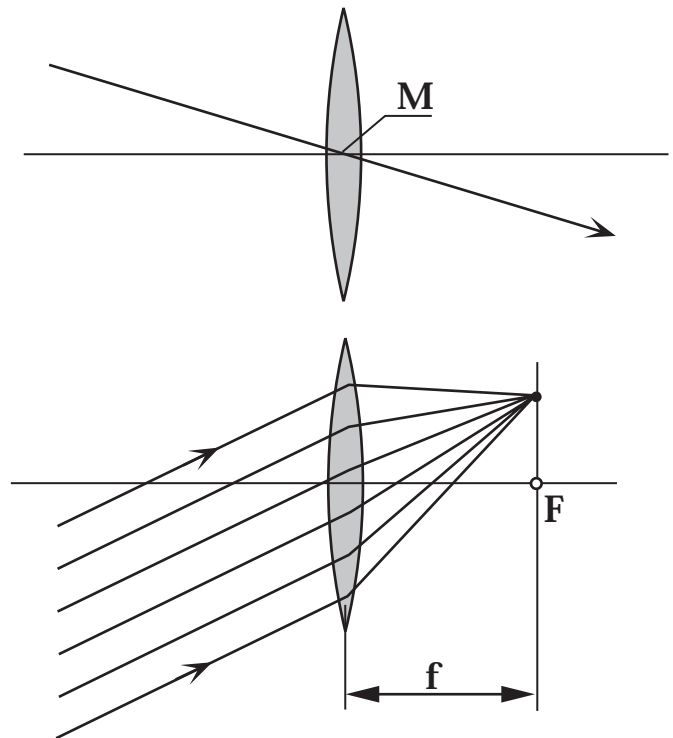
Die Brechkraft (oder Linsenstärke) einer Linse ist gegeben durch
 $D = 1/f$

Einheit : 1 Dioptrie = 1 dpt = 1/m

Konstruktion von Strahlengängen

Rezept: Wahl von ausgezeichneten Strahlen

1. Mittelpunktstrahlen werden nicht abgelenkt (Linse kann im Zentrum durch planparallele Flächen approximiert werden).
2. Parallelstrahlen vereinigen sich in einem Punkt in der Brennebene.



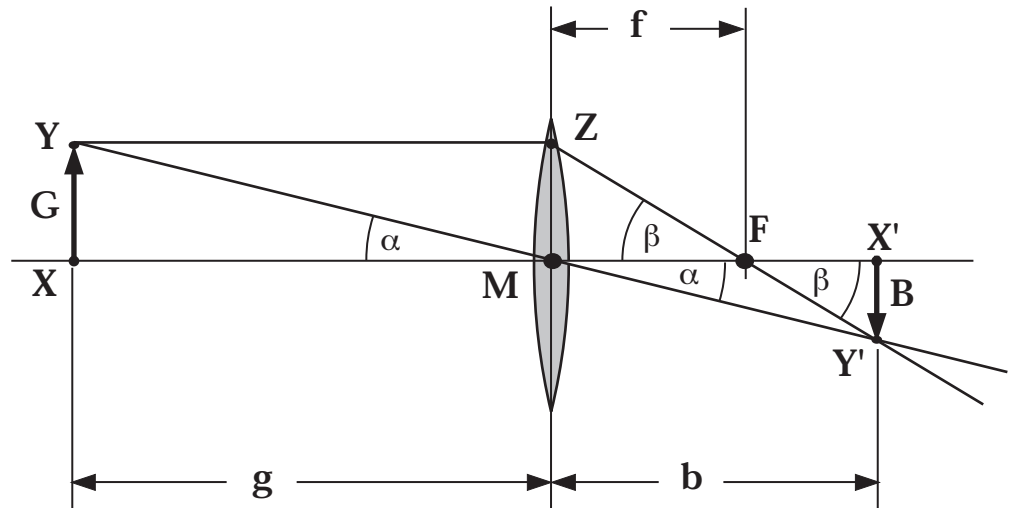
Mit diesen Regeln lassen sich Bilder konstruieren



Abbildungsgesetz (Linsengleichung)

es bedeuten:

- g** Gegenstandsweite
b Bildweite
G Gegenstandsgrösse
B Bildgrösse



Die Dreiecke MXY und MX'Y' sind ähnlich. Daraus folgt

$$\frac{g}{G} = \frac{b}{B}$$

Ebenso sind die Dreiecke FMZ und FX'Y' ähnlich. Daraus ergibt sich

$$\frac{f}{b-f} = \frac{G}{B} = \frac{g}{b}$$

$$fb = bg - gf$$

$$f(b+g) = bg$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

Abbildungsgesetz

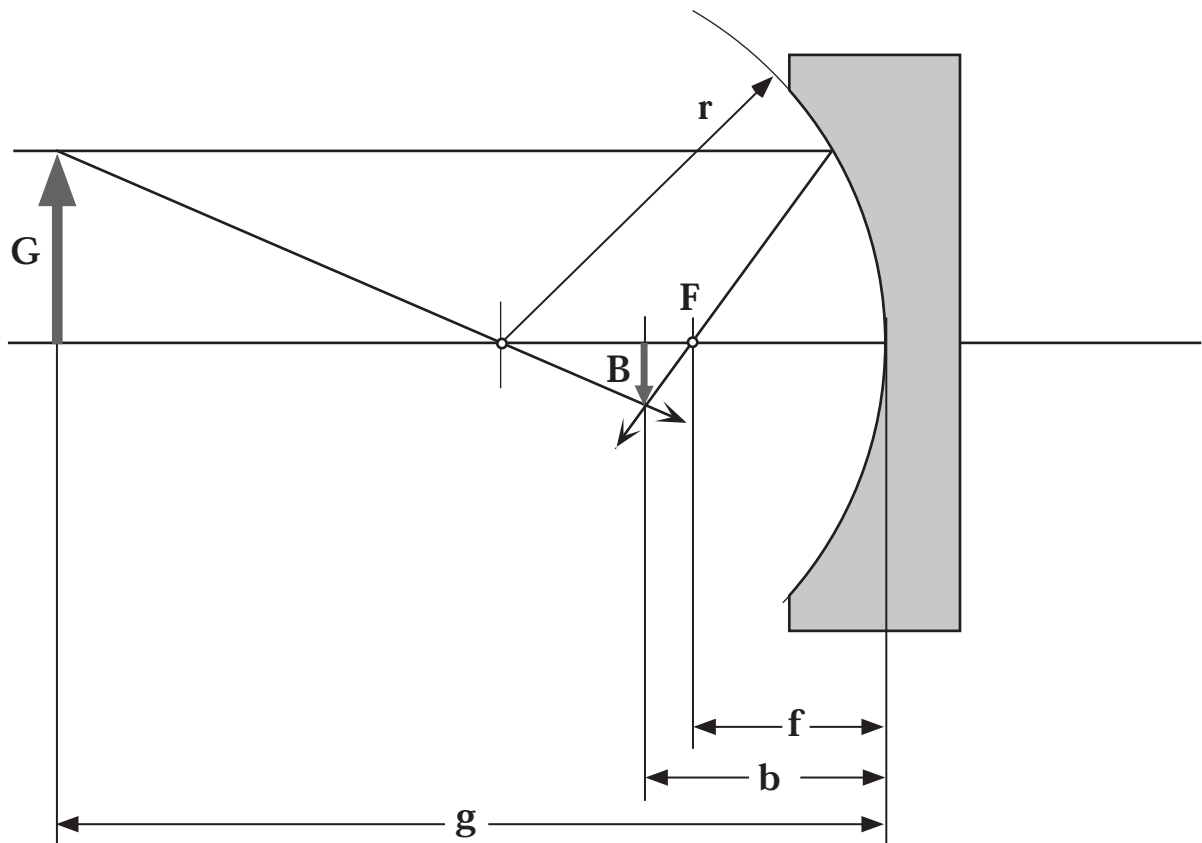
Lateralvergrößerung γ

Definition

$$\gamma \equiv \frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{f}{g-f}$$

4.2 Abbildung durch sphärische Spiegel

Eine sphärische, reflektierende Fläche ist ebenfalls ein abbildendes System. Die Größen Brennweite f , Gegenstandsweite g , Bildweite b und die Lateralergrösserung γ werden hier analog angewendet.



Die Konstruktion des Bildes erfolgt analog derjenigen bei der dünnen Linse. Anstelle des bei der Linse verwendeten Mittelpunktstrahles wird hier der Strahl durch das Krümmungszentrum der Spiegelfläche (welcher in sich reflektiert wird) verwendet.

4. Optische Abbildung

Der Zusammenhang zwischen r , g und b ergibt sich aus folgender Figur

$$\beta = \alpha + \theta$$

$$\gamma = \alpha + 2\theta$$

$$\gamma = \alpha + 2\beta - 2\alpha$$

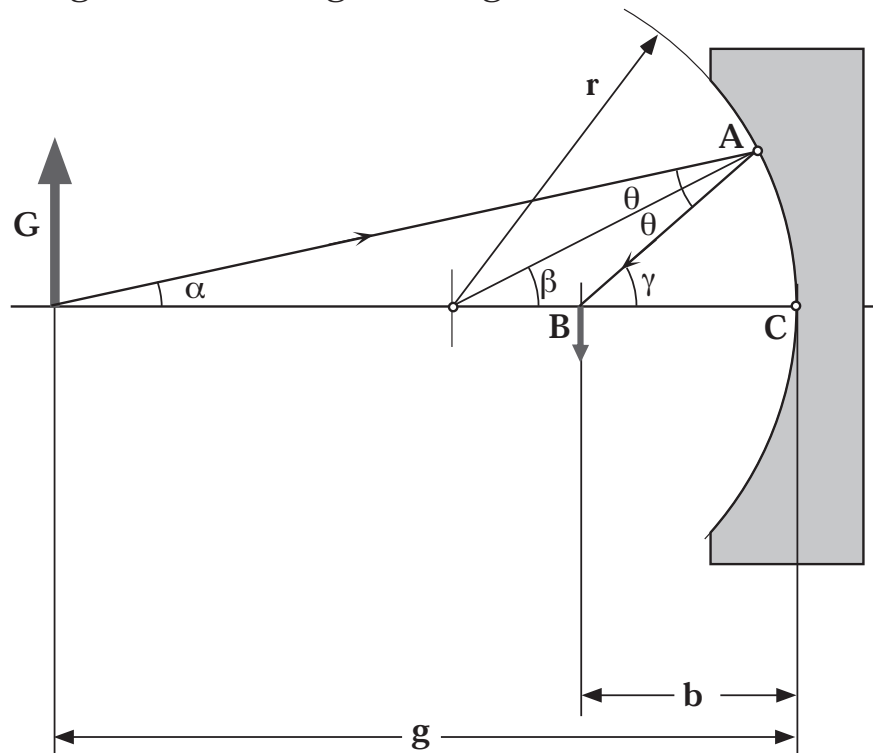
$$\alpha + \gamma = 2\beta$$

für achснаhe Strahlen gilt
(AC bedeutet die Länge des
Bogen AC):

$$\alpha \approx \frac{AC}{g} \quad \beta = \frac{AC}{r}$$

$$\gamma \approx \frac{AC}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{g} + \frac{AC}{b} = \frac{2AC}{r}$$



Wir setzen $\frac{r}{2} = f$

Somit ergibt sich in Analogie zur dünnen Linse das

Abbildungsgesetz für den sphärischen Spiegel

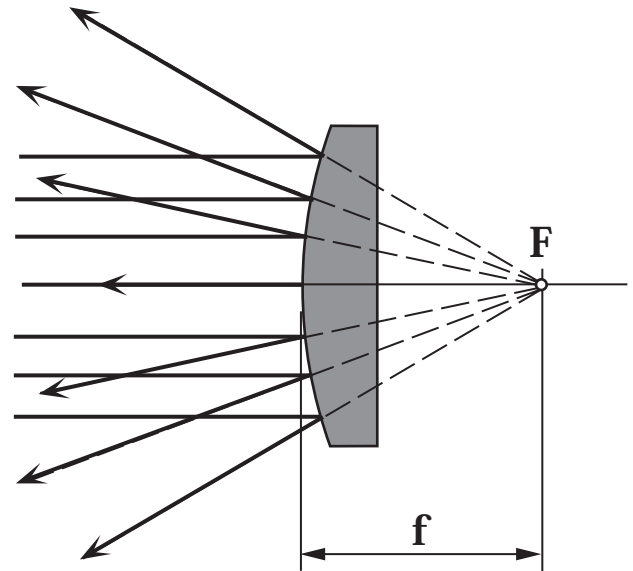
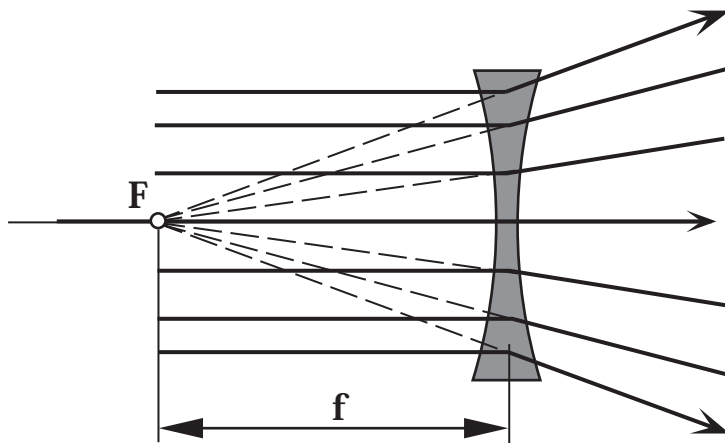
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

mit der Brennweite $f = \frac{r}{2}$

Im Gegensatz zur Linse ist die Brennweite beim sphärischen Spiegel nur von der Geometrie und nicht vom Material abhängig. Das bedeutet, dass die Brennweite nicht abhängig ist von der Wellenlänge des Lichtes.

Negative Brennweiten

Zerstreuungslinsen und konvexe Spiegel erzeugen aus parallel einfallenden Strahlenbündeln divergierende Strahlen.



In diesen Fällen definiert man die Brennweite als negative Grösse. Die Brennpunkte sind **virtuelle Brennpunkte**.

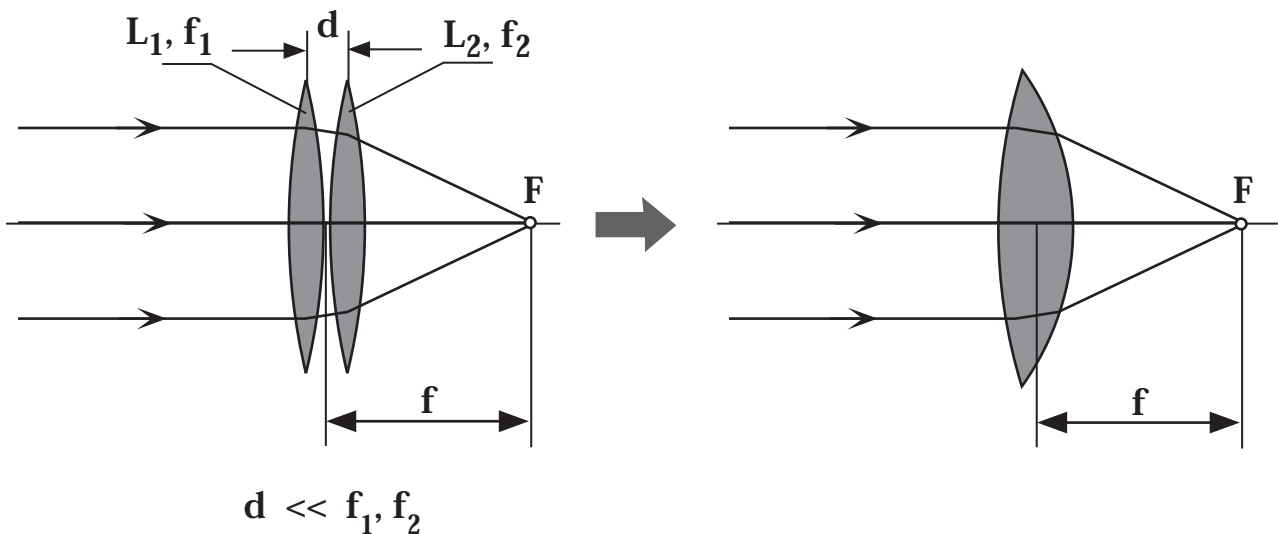
4.3 Linsenkombinationen

Werden zwei Linsen L_1 und L_2 mit den Brennweiten f_1 und f_2 zu einem System kombiniert, so gilt für die Brennweite f_{tot} des Systems :

$$\frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

oder

$$D_{\text{tot}} = D_1 + D_2$$



Beweis:

Wir betrachten ein paralleles Strahlenbündel, das auf die Linse L_1 fällt. Diese erzeugt ein Bild im Abstand f_1 von der Linse. Nun fügen wir die zweite Linse (f_2) hinzu und betrachten F_1 als Gegenstand, der durch die zweite Linse abgebildet wird. Für diesen gilt nun

$$g = -f_1$$

Die Abbildungsgleichung für die zweite Linse lautet dann

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{-f_1} + \frac{1}{b}$$

b ist nun die Bildweite des Linsensystems und somit die gesuchte Brennweite f_{tot}

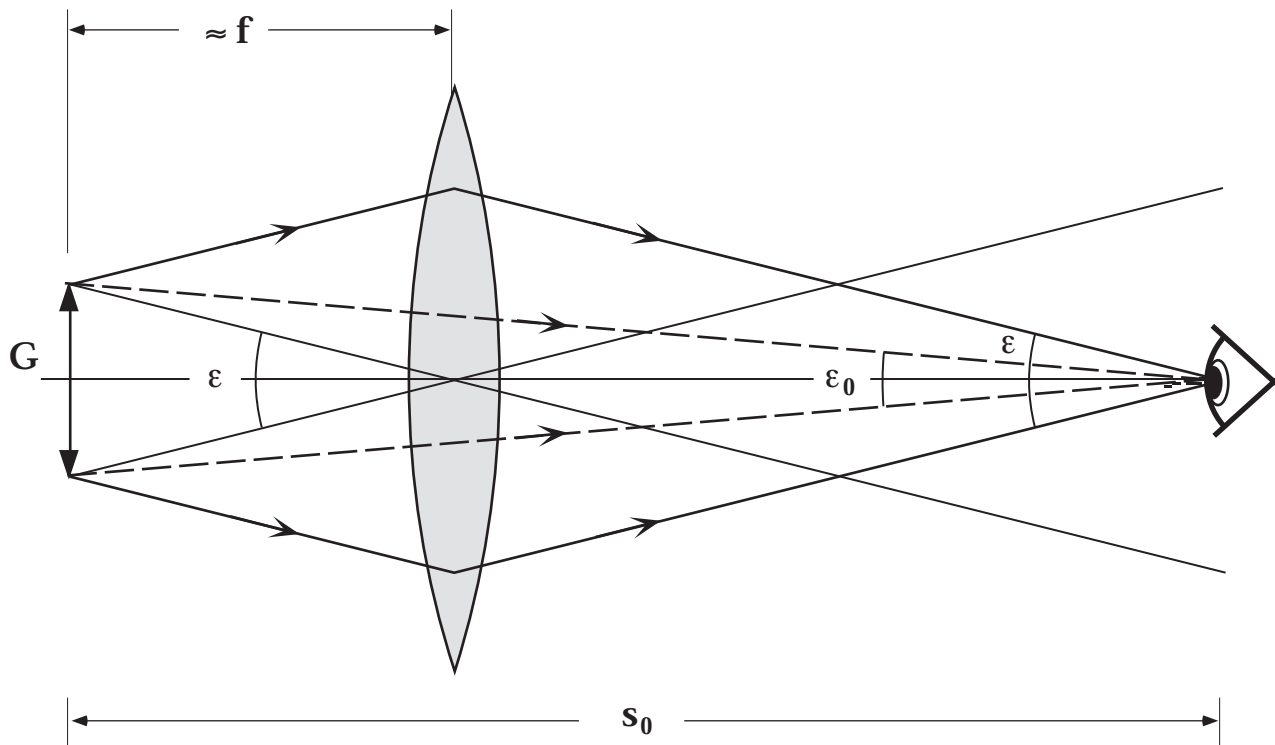
$$\frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Anwendungsbeispiel:

Korrektur der Weitsichtigkeit durch Lesebrille (siehe Kap. 4.7)

4.4 Optische Instrumente

Lupe



gestrichelte Linien: Strahlengang ohne Lupe

ϵ_0 Winkel, unter dem der Gegenstand ohne Lupe gesehen würde

ϵ entsprechender Winkel mit Lupe

s_0 normale Sehdistanz (= 0.25 m)

Angularvergrößerung (Winkelvergrößerung) der Lupe

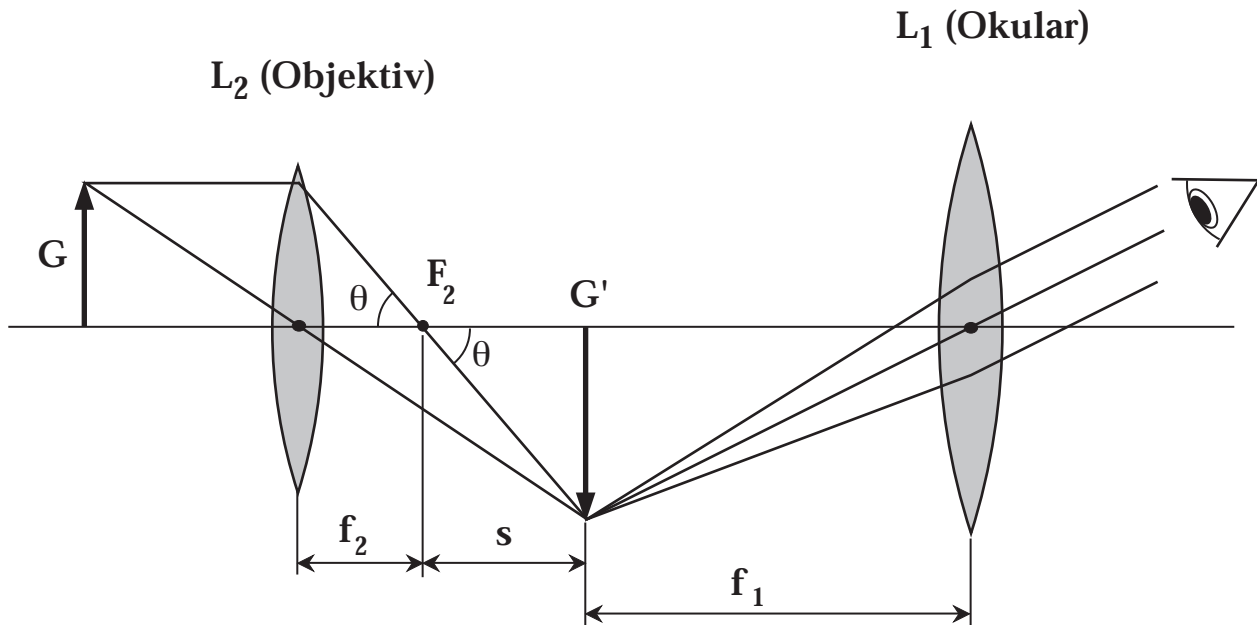
$$\Gamma = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0} \approx \frac{G/f}{G/s_0} = \frac{s_0}{f}$$

$$\Gamma = \frac{s_0}{f}$$

Angularvergrößerung der Lupe

$$s_0 = 0.25 \text{ m}$$

Mikroskop



Die auf das Auge fallenden Strahlen sind parallel, d.h. das Bild liegt im Unendlichen. Die laterale Vergrößerung des Objektivs beträgt

$$\gamma_2 = \frac{G'}{G} = \frac{s \tan \theta}{f_2 \tan \theta} = \frac{s}{f_2}$$

und die Angularvergrößerung des Okulars

$$\Gamma_1 = \frac{s_0}{f_1} \quad s_0 = 0.25 \text{ m}$$

Die Gesamtvergrößerung ergibt sich aus dem Produkt der Vergrößerungen γ_2 und Γ_1

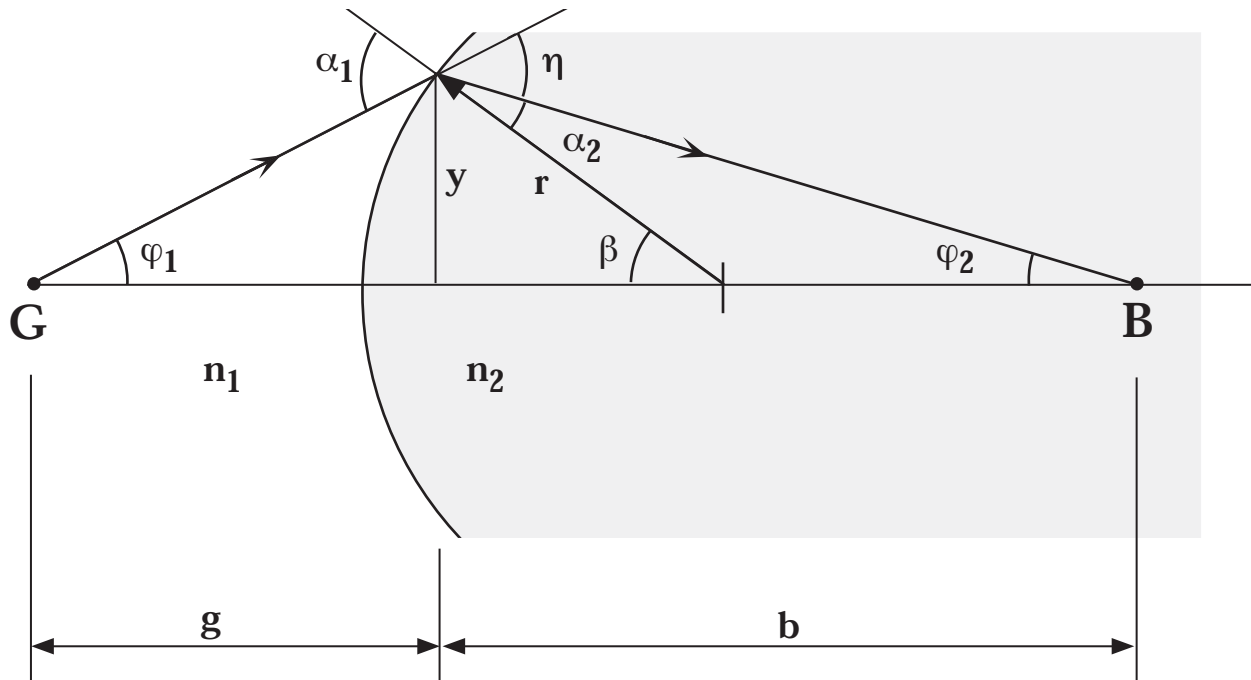
$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \gamma_2 = \frac{s_0}{f_1} \cdot \frac{s}{f_2}$$

Vergrößerung des Mikroskops

$$s_0 = 0.25 \text{ m}$$

s: Tubuslänge des Mikroskops

4.5 Abbildendes System mit einer Grenzfläche



Der Gegenstandspunkt G liegt im Medium n_1 , der Bildpunkt B befindet sich im Medium n_2 . Die Abbildung erfolgt durch nur eine sphärische Grenzfläche.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \approx \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$\varphi_1 \approx \frac{y}{g}, \quad \varphi_2 \approx \frac{y}{b} \quad \text{für achsnahe Strahlen } (\varphi_1 \ll 1, \varphi_2 \ll 1)$$

$$\beta = \alpha_2 + \varphi_2 = \frac{y}{r}$$

$$\eta = \varphi_1 + \varphi_2 = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot \alpha_2 - \alpha_2 = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \cdot \alpha_2 = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)(\beta - \varphi_2) = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \left(\frac{y}{r} - \frac{y}{b}\right) = \frac{y}{g} + \frac{y}{b}$$

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \frac{1}{r} - \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \frac{1}{b} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right) \frac{1}{r} - \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right) \frac{1}{b}$$

4. Optische Abbildung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = (n_2 - n_1) \frac{1}{r}$$

Abbildungsgleichung für abbildendes System mit einer sphärischen Grenzfläche

für $g \rightarrow \infty$ wird $b \equiv f_2$

$$\frac{n_2}{f_2} = (n_2 - n_1) \frac{1}{r}$$

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot r$$

f_2 heisst hintere Brennweite

analog erhält man die vordere Brennweite f_1 für $b \rightarrow \infty$

$$\frac{n_1}{f_1} = (n_2 - n_1) \frac{1}{r}$$

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \cdot r$$

f_1 heisst vordere Brennweite

Das abbildende System besitzt also zwei verschiedene Brennweiten f_1 und f_2 . Die Grössen

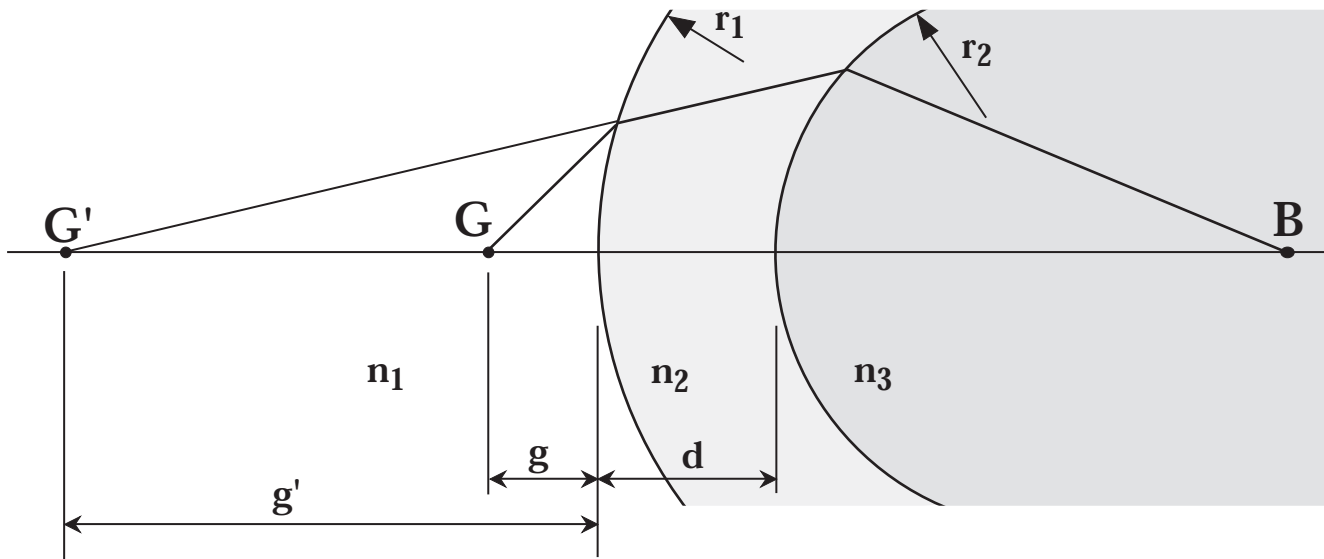
$$\frac{n_1}{f_1} \quad \text{und} \quad \frac{n_2}{f_2} \quad \left(= \frac{n_2 - n_1}{r} \right)$$

sind jedoch identisch. Wir definieren die Brechkraft einer Grenzfläche k zwischen zwei Medien n_i und n_j mit dem Krümmungsradius r_k

$$D_k = \frac{n_j - n_i}{r_k}$$

Brechkraft einer sphärischen Grenzfläche mit Radius r_k . Das Licht breitet sich vom Medium n_i ins Medium n_j aus.

Abbildung durch mehrere Grenzflächen

Bild G' :

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{g'} = (n_2 - n_1) \frac{1}{r_1}$$

Bild B , Gegenstandspunkt G' :

$$\frac{n_2}{d - g'} + \frac{n_3}{b} = (n_3 - n_2) \frac{1}{r_2} \quad (d - g' : \text{Gegenstandsweite})$$

durch Elimination von g' erhält man für kleine Werte von d ($d \approx 0$)

$$(n_2 - n_1) \frac{1}{r_1} - \frac{n_1}{g} = (n_2 - n_3) \frac{1}{r_2} + \frac{n_3}{b} \quad \text{oder}$$

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} = (n_2 - n_1) \frac{1}{r_1} - (n_2 - n_3) \frac{1}{r_2} \quad (1)$$

für $n_1 = n_3 = 1$ und $n_2 = n$ erhält man

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{was der Linsengleichung entspricht, wobei}$$

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

4. Optische Abbildung

lässt man in obiger Gleichung (1) die Gegenstandsweite g unendlich werden, so wird aus der Grösse b die hintere Brennweite f

$$\frac{n_3}{f} = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}$$

$$f = \frac{n_3}{\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}} \quad \text{hintere Brennweite}$$

und die vordere Brennweite f' erhält man für $b \rightarrow \infty$

$$f' = \frac{n_1}{\frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}} \quad \text{vordere Brennweite}$$

Die Gleichung (1) lässt sich somit schreiben

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} = \frac{n_3}{f} = \frac{n_1}{f'} = D$$

Abbildungsgleichung einer Linse mit den ungleichen Medien n_1 und n_3

Die Brechkraft D des obigen Systems ergibt sich auch aus der Summe der Brechkräfte D_1 und D_2 der beiden Grenzflächen:

$$D = D_1 + D_2 = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}$$

Für die Abbildungsgleichung ergibt sich, da

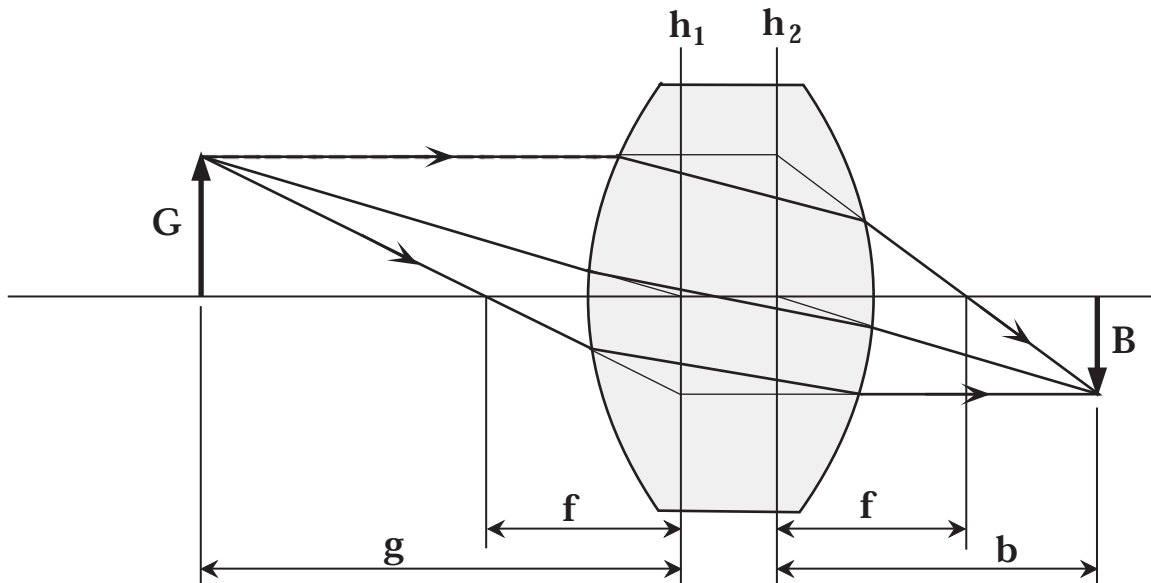
$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} = D$$

obige Gleichung (1)

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_3}{b} = D = \frac{n_2 - n_1}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2}$$

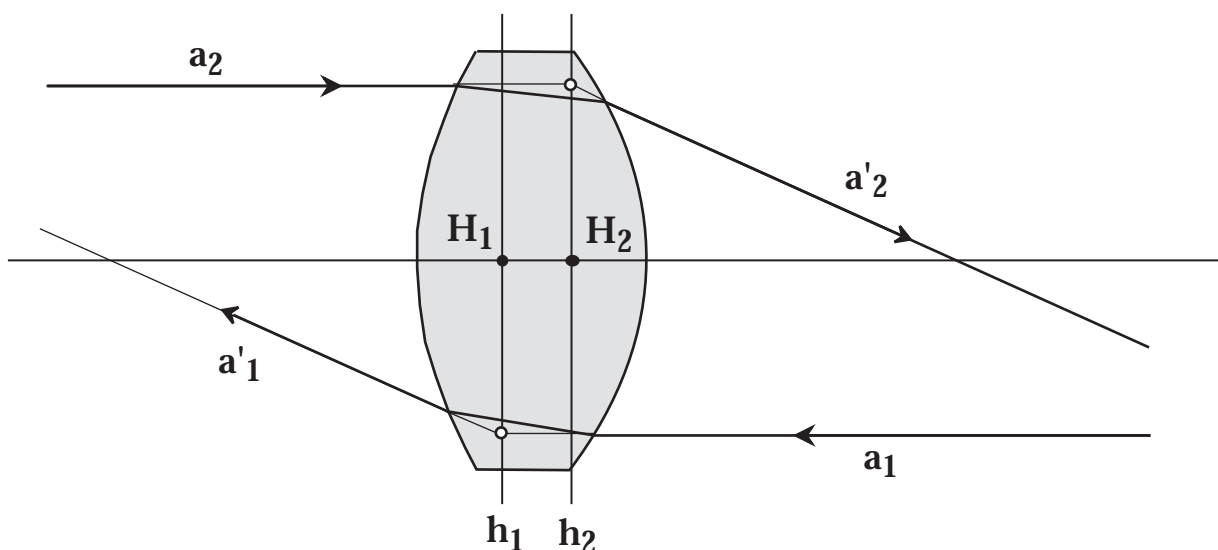
4.6 Dicke Linsen

Bei dicken Linsen dürfen Parallelstrahlen nicht ungebrochen bis zur Mitte gezeichnet werden. Strahlen durch das Linsenzentrum werden zudem parallel verschoben. Um die Abbildung mit dicken Linsen berechnen zu können, führt man die Hauptebenen h_1 und h_2 und die Hauptpunkte H_1 und H_2 ein.



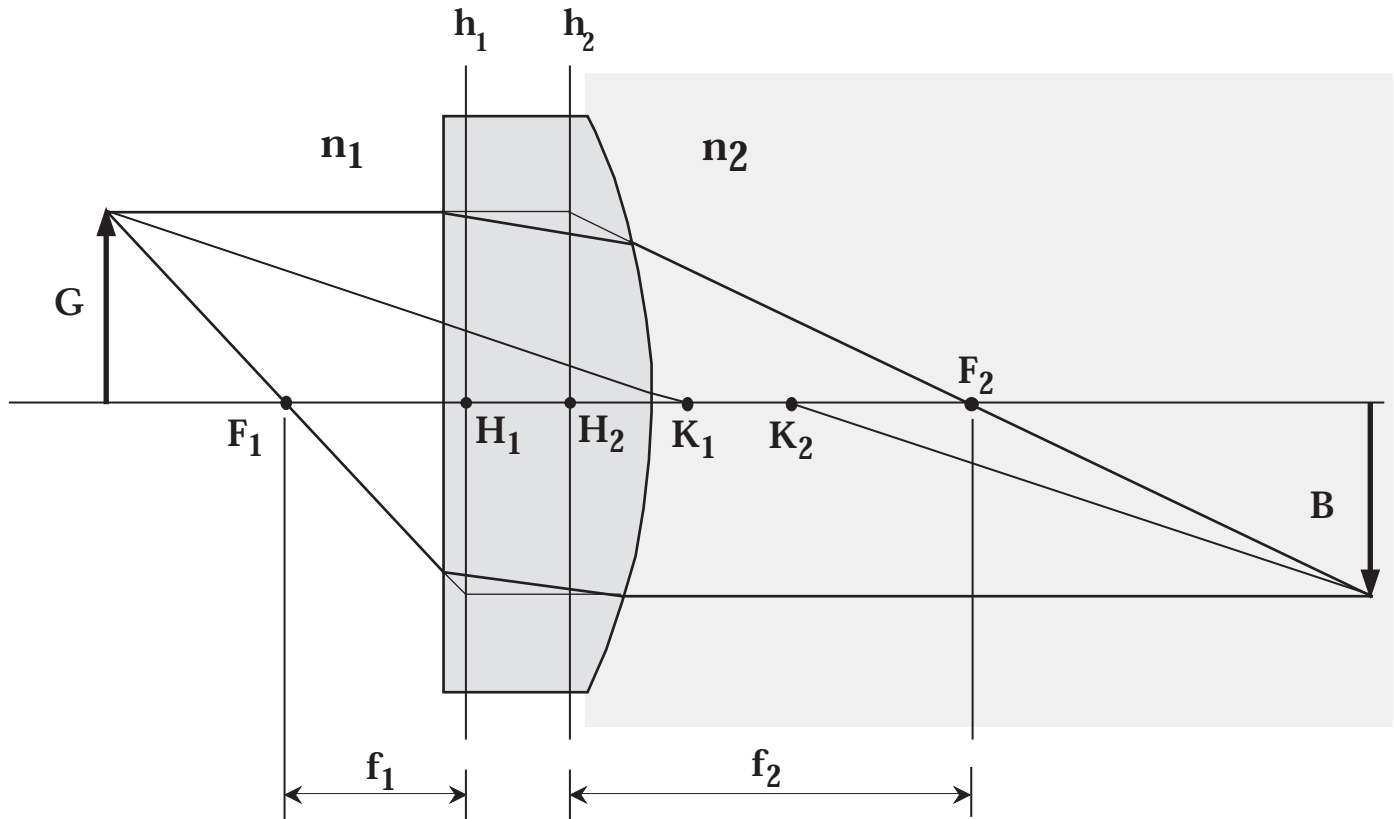
Die Lagen von H_1 und h_1 ergeben sich aus den Schnittpunkten der Strahlen a_1 und a_1' und analog für H_2 und h_2 .

Werden die Gegenstandsweite g und die Bildweite b von den Hauptebenen aus gemessen, dann gilt das Abbildungsgesetz für dünne Linsen auch in diesem Fall.



4. Optische Abbildung

Befindet sich hinter der dicken Linse ein drittes Medium, so werden für die Charakterisierung des optischen Systems auch noch die Knotenpunkte K_1 und K_2 benötigt.



F_1, F_2, H_1, H_2, K_1 und K_2 heißen **Kardinalpunkte** des Systems. Für die Brechkraft der Anordnung gilt nach Kapitel 4.5

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = D$$

Brechkraft des Systems

Im vorliegenden allgemeinen Fall werden nicht die Lichtstrahlen durch die Hauptpunkte sondern durch die Knotenpunkte parallel verschoben.

Es gilt:

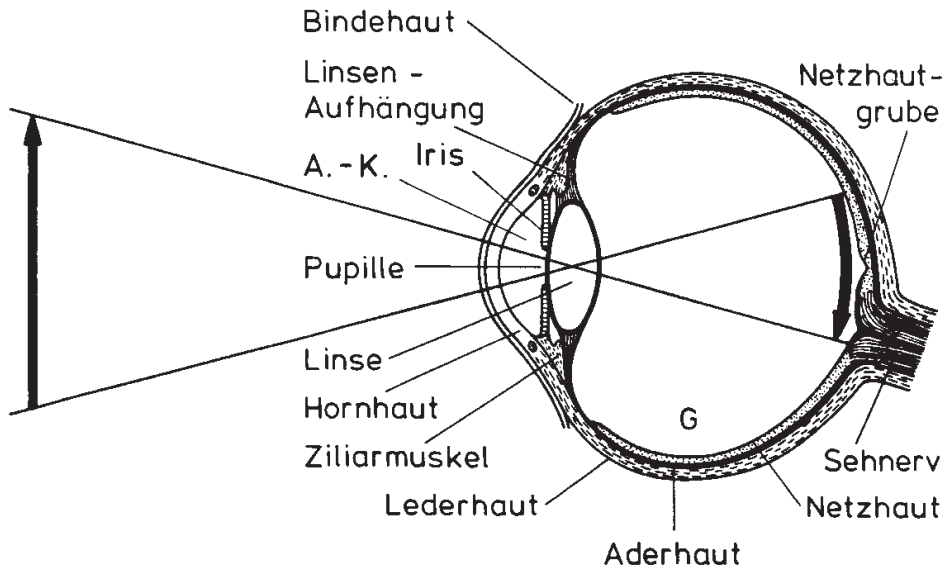
$$\overline{H_1 H_2} = \overline{K_1 K_2}$$

und

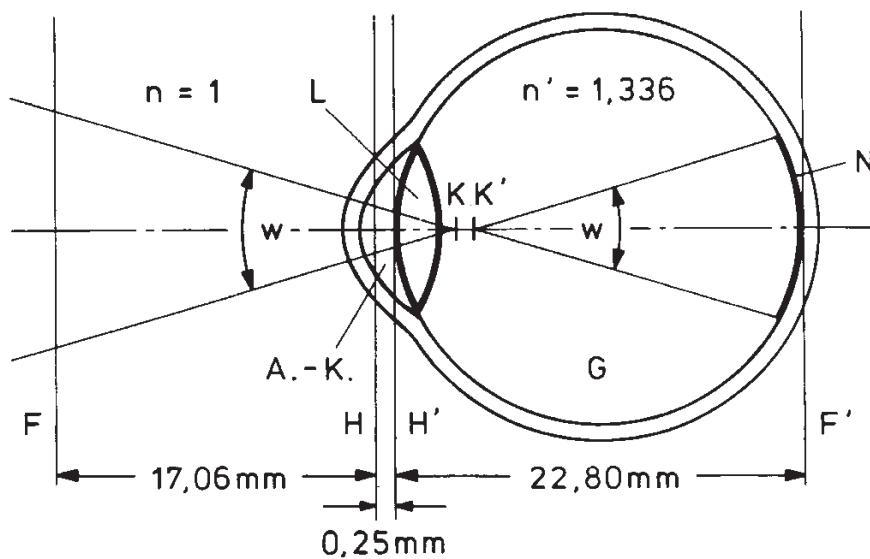
$$\overline{H_1 K_1} = \overline{H_2 K_2} = f_2 - f_1$$

4.7 Anwendung auf das menschliche Auge

Nachfolgende Figur zeigt einen waagerechten Schnitt durch das Auge



Die optischen Verhältnisse lassen sich schematisch wie folgt darstellen



vordere Brennweite* f	17,055 mm	$\overline{HK} = \overline{H'K'} = f' - f$	5,75 mm
hintere Brennweite* f'	22,8 mm	$\overline{HH'} = \overline{KK'}$	0,254 mm
Krümmungsradius der Hornhaut	7,83 mm	Pupillendurchmesser	2 bis 8 mm
Brechungsindizes			
Kammerwasser und Glaskörper n'	1,3365	(* entspanntes Auge)	
Augenlinse n_{Li}	1,358		

4. Optische Abbildung

Brechkraft des entspannten Auges ($g = \infty$)

Die Brechkraft des Auges ergibt sich aus den Brennweiten und den dazugehörigen Brechungsindizes:

$$D = \frac{n_{\text{Luft}}}{f} = \frac{1}{0.017055} = 58.6 \text{ dpt}$$

$$= \frac{n'}{f'} = \frac{1.3365}{0.0228} = 58.6 \text{ dpt}$$

Teilbrechkräfte der Augenlinse und der Grenzfläche Luft - vordere Kammer

Die Gesamtbrechkraft des entspannten Auges D_{∞} setzt sich zusammen aus der Brechkraft der Grenzfläche Luft - vordere Kammer ($D_{L/VK}$) und derjenigen der Augenlinse (D_{Li})

$$D = D_{L/VK} + D_{Li}$$

$D_{L/VK}$ ist nach Kapitel 4.5

$$D_{L/VK} = \frac{n' - n_{\text{Luft}}}{r} = \frac{1.3365 - 1}{0.00783} \approx 43 \text{ dpt}$$

Brechkraft der Grenzfläche
Luft - vordere Kammer

Demnach beträgt die Brechkraft der entspannten Linse

$$D_{Li, \infty} = D_{\infty} - D_{L/VK} \approx 58.6 - 43 \approx 16 \text{ dpt}$$

Brechkraft der entspannten Linse

Aus der Grösse $D_{L/VK}$ lässt sich auch eine vordere und hintere Brennweite $f_{L/VK}$ und $f'_{L/VK}$ berechnen

$$\frac{n'}{f'} = D_{L/VK} \rightarrow f' = \frac{n'}{D_{L/VK}} = \frac{1.3365}{43} = 31.1 \text{ mm} \quad (\text{hintere Brennweite ohne Augenlinse})$$

$$\text{und} \quad f = \frac{n}{D_{L/VK}} = \frac{1.0}{43} = 23.3 \text{ mm} \quad (\text{vordere Brennweite ohne Augenlinse})$$

Das Bild würde also ohne Augenlinse etwa 8 mm hinter der Netzhaut liegen.

Die **Akkommodation** des Auges ermöglicht das scharfe Abbilden eines Gegenstandes der nicht im Unendlichen liegt. Der kleinste Abstand auf den das Auge sich einstellen kann heisst **Nahpunktentfernung**. Sie beträgt beim Kind etwa 7 cm und nimmt i.A. nach dem 40. Lebensjahr stark zu.

Die notwendige Gesamtbrechkraft des Auges für eine Gegenstandsweite g ergibt sich aus Kap. 4.5:

$$\frac{n}{g} + \frac{n'}{b} = D$$

mit $n = 1$; $n' = 1.3365$; $g = 0.25 \text{ m}$; $b = 22.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ergibt sich

$$D_{0.25} = \frac{1}{0.25} + \frac{1.3365}{0.0228} = (4 + 58.6) \text{ dpt}$$

für $g = 0.07 \text{ m}$

$$D_{0.07} = \frac{1}{0.07} + \frac{1.3365}{0.0228} = (14.3 + 58.6) \text{ dpt}$$

Beispiele :

- Die Nahpunktsentfernung eines Menschen betrage $g = 0.4 \text{ m}$. Welche Brechkraft müssen die Brillengläser aufweisen, damit diese Distanz auf 0.25 m verkürzt wird?

$$D_{0.4} = \frac{1}{0.4} + 58.6 = 61.1 \text{ dpt}$$

$$D_{0.25} = \frac{1}{0.25} + 58.6 = 62.6 \text{ dpt}$$

$$D_{\text{Brille}} = D_{0.25} - D_{0.4} = 1.5 \text{ dpt}$$

- Wie gross ist die hintere Brennweite des Auges bei Akkomodation auf $g = 0.25 \text{ m}$?

$$D = 62.6 \text{ dpt} = \frac{n'}{f'}$$

$$f'_{0.25} = \frac{n'}{D_{0.25}} = \frac{1.3365}{62.6} = 21.35 \text{ mm}$$

zum Vergleich

$$f'_{\infty} = \frac{n'}{D_{\infty}} = \frac{1.3365}{58.6} = 22.81 \text{ mm}$$

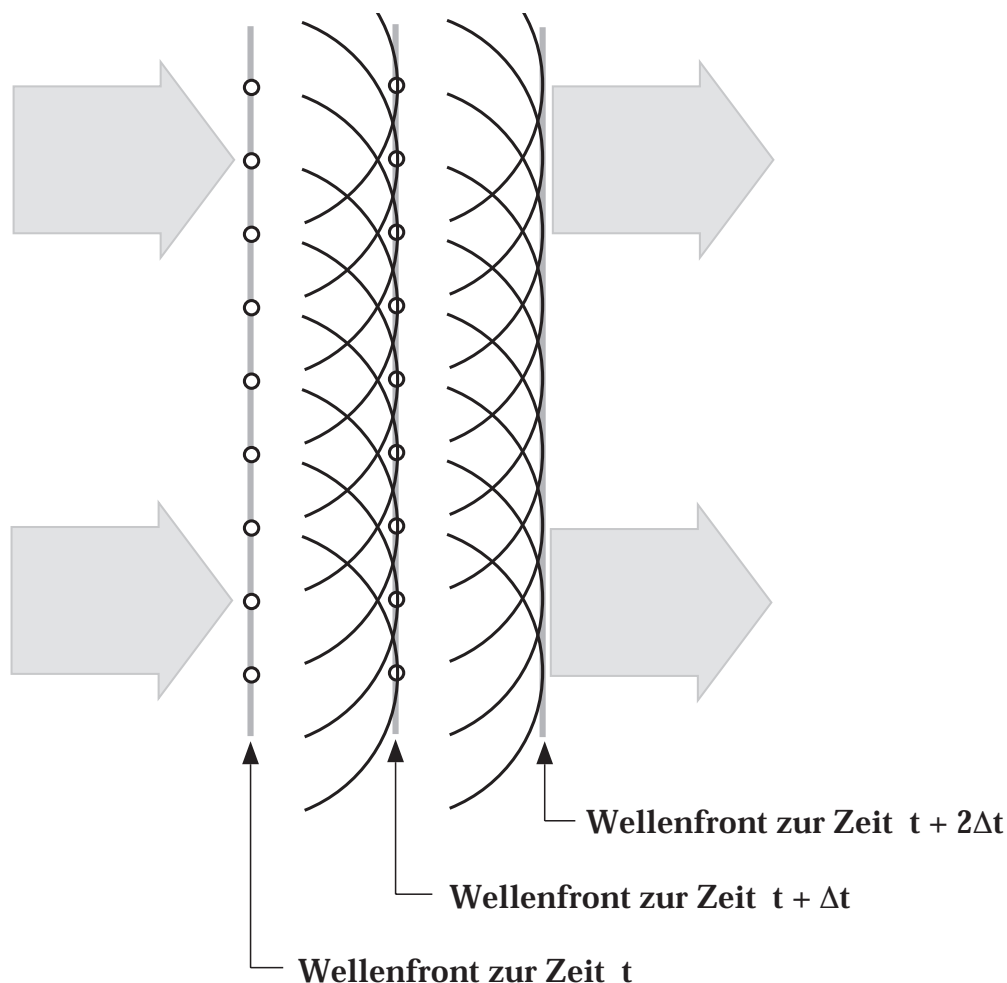
V. Wellenoptik

In diesem Kapitel spielt die **Wellennatur** des Lichtes eine entscheidende Rolle. Im Gegensatz zur geometrischen Optik beschreibt die Wellenoptik die Ausbreitung des Lichtes auch dann richtig, wenn Blenden, Öffnungen, Linsendurchmesser und Spaltbreiten von der Größenordnung der Lichtwellenlänge sind.

1. Prinzip von Huygens

Das Prinzip von Huygens (1678) stellt ein Modell zur Beschreibung der Ausbreitung von Lichtwellen dar (siehe auch Kapitel I/9.5).

Jeder Punkt einer Wellenfront zur Zeit t kann als Punktquelle für die Erzeugung von sphärischen Sekundärwellen betrachtet werden. Die Wellenfront zur Zeit $t + \Delta t$ ergibt sich durch Tangentenbildung an diese Sekundärwellen.



1. Prinzip von Huygens

Ebene Wellen, die auf einen Spalt fallen

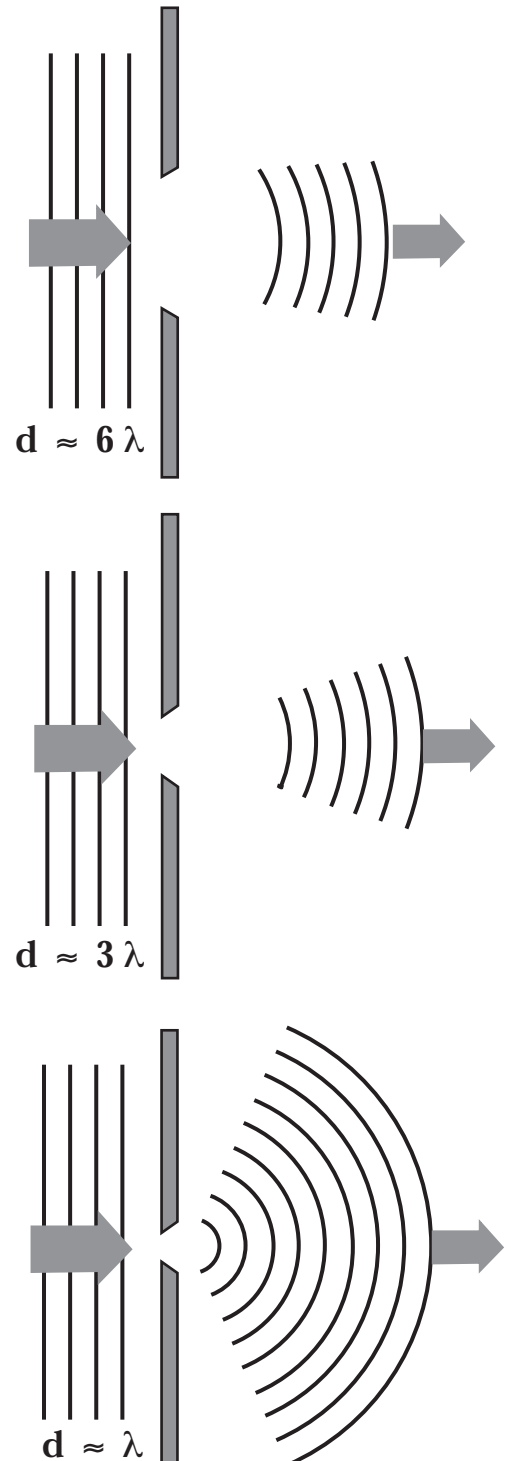
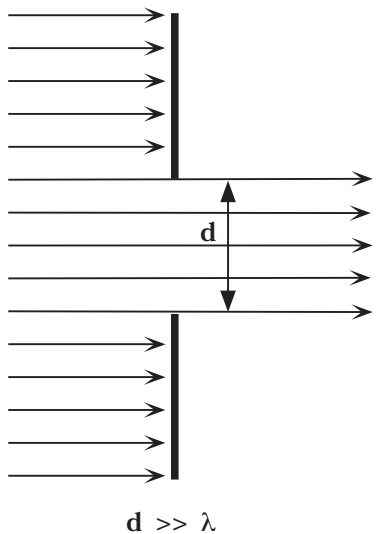
Nachfolgende Figur zeigt, wie durch Verkleinern der Spaltbreite d (bzw. des Verhältnisses d/λ) die Wellennatur des Lichtes sich verstärkt auswirkt.

Qualitativ lässt sich dieses Verhalten mit dem Prinzip von Huygens erklären.

Für $d \approx 6\lambda$ hat man Verhältnisse wie sie durch die geometrische Optik recht gut beschrieben werden.

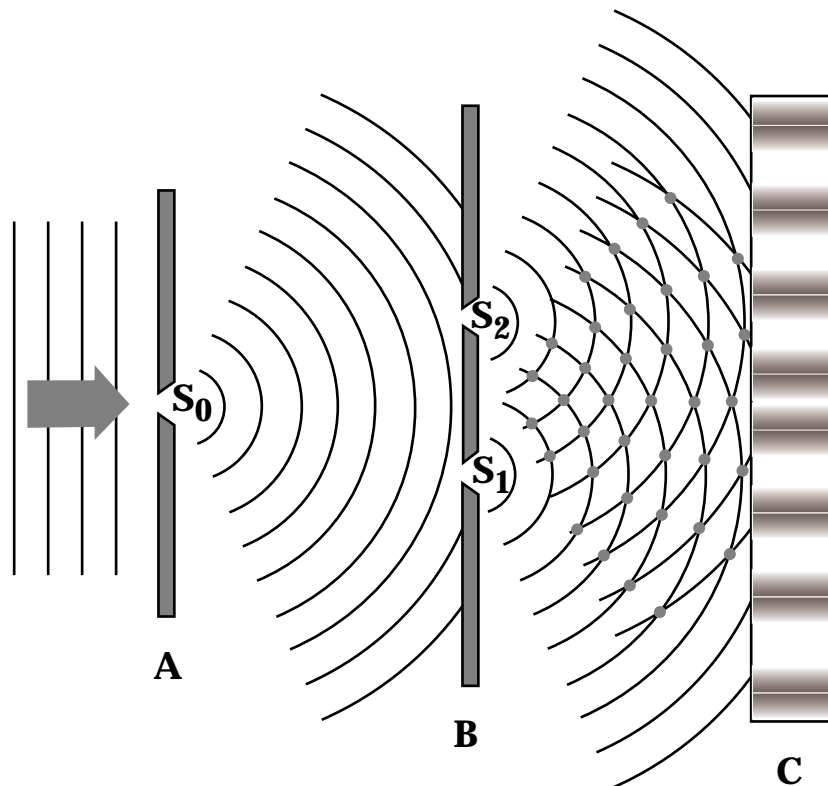
Im Fall $d \approx \lambda$ ist die Spaltbreite so klein, dass der Spalt (nach Huygens) als Ausgangslinie einer Zylinderwelle betrachtet werden kann.

Ausbreitung von Lichtstrahlen, wie sie in der geometrischen Optik angenommen wird (siehe Kapitel IV/3)



2. Youngs Experiment

Young demonstrierte 1801 in einem Experiment die Wellennatur des Lichtes, indem er zwei Wellenpakete überlagerte und damit Interferenzphänomene direkt zeigen konnte.



Das Experiment besteht aus folgenden Stufen :

- Die einfallende ebene Welle trifft auf einen ersten Spalt S_0 und wird (nach dem Huygensschen Prinzip) **gebeugt**
- Das auf die Ebene B fallende Licht wird nun an zwei Spalten S_1 und S_2 gebeugt. Dadurch entstehen zwischen den Ebenen B und C zwei Wellenzüge, die sich **gegenseitig überlagern**. Überlagern heisst, dass sich die Wellenamplituden (E und B) lokal addieren.
- Da die beiden Wellenzüge aus derselben Lichtquelle entstanden sind, besitzen sie die **gleiche Frequenz ν** und in jedem Punkt zwischen den Ebenen B und C eine **feste Phasenverschiebung $\Delta\varphi$** gegeneinander. Dadurch entstehen auf dem Schirm C **lokale Intensitätsminima und -maxima**. Diese Phänomen heisst **Interferenz**

3. Kohärente Wellen

3.1 Begriff der Kohärenz

Falls im Experiment von Young die Spalten S_1 und S_2 durch unabhängige, punktförmige Lichtquellen ersetzt werden, beobachtet man auf dem Schirm C keine Interferenzmuster sondern nur eine monoton beleuchtete Fläche. Dies ist dadurch zu erklären, dass die beiden Wellenzüge, die sich überlagern, keine feste Phasenbeziehung besitzen. Zu einem festen Zeitpunkt entstehen zwar auch lokale Minima und Maxima. Diese verschieben sich zeitlich jedoch so, dass sie nicht beobachtet werden können.

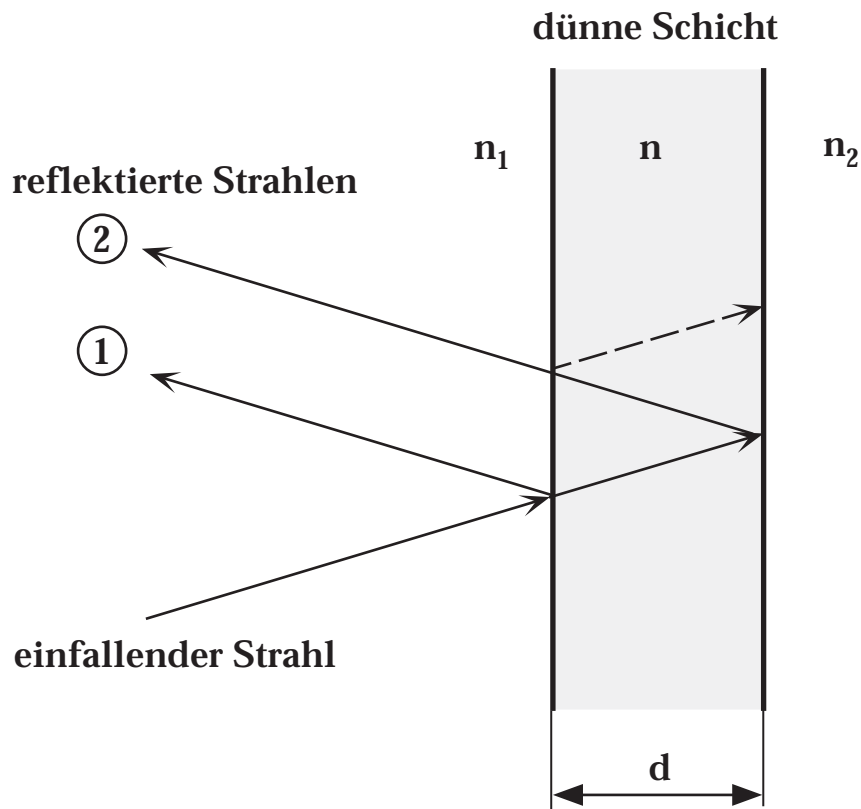
Interferenz zwischen zwei Wellen kann also nur beobachtet werden wenn die Wellen **gleiche Frequenz** und in jedem Punkt des Raumes eine **konstante relative Phasenverschiebung** aufweisen. In diesem Fall spricht man von **kohärenten Wellen**. Im Youngschen Experiment wird die Kohärenz dadurch erreicht, dass die beiden interferierenden Wellenzüge denselben Ursprung besitzen.

Die Kohärenz zweier Wellenzüge ist eine notwendige Voraussetzung für die Beobachtung von Interferenzphänomenen

In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Interferenzeffekte näher behandelt.

3.2 Interferenz an dünnen Schichten

Die Farben von Seifenblasen oder eines Ölfilms auf einer Regenpfütze entstehen durch Interferenz von kohärenten Lichtstrahlen, die, je nach Beobachtungswinkel, gewisse Lichtwellenlängen bevorzugt reflektieren.



Die Strahlen 1 und 2 besitzen dieselbe Wellenlänge und eine feste Phasenverschiebung. Je nach der gegenseitigen Phasenlage können die Strahlen konstruktiv oder destruktiv interferieren. Damit sich die beiden Strahlen 1 und 2 zu maximaler Intensität überlagern, müssen sie eine Phasenverschiebung besitzen, die einem ganzzahligen Vielfachen von λ entspricht.

Die Ursachen der Phasenverschiebung sind:

- der Strahl 2 legt zusätzlich den Weg $2 \cdot d$ zurück (bei senkrechtem Lichteinfall)
- der Strahl 1 erfährt bei der Reflexion an der Oberfläche einen Phasensprung von π (dieser Phasensprung entsteht immer bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium)

Maximale Intensität ergibt sich somit wenn

$$2d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_n \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

wobei der Summand $\frac{1}{2}$ den Phasensprung bei der Reflexion an der Oberfläche berücksichtigt und λ_n die Wellenlänge des Lichts im Medium mit Brechungsindex n bedeutet.

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$$

Die Bedingung für Interferenzmaxima bei der Reflexion mit einem Phasensprung lautet somit

$$2n d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Entsprechend erhält man für destruktive Interferenz die Bedingung für Interferenzminima

$$2n d = m \cdot \lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Diese Bedingungen für Interferenzmaxima und -minima gelten, falls ein Strahl einen Phasensprung von π erfährt. Dies ist dann der Fall, wenn in obiger Figur gilt

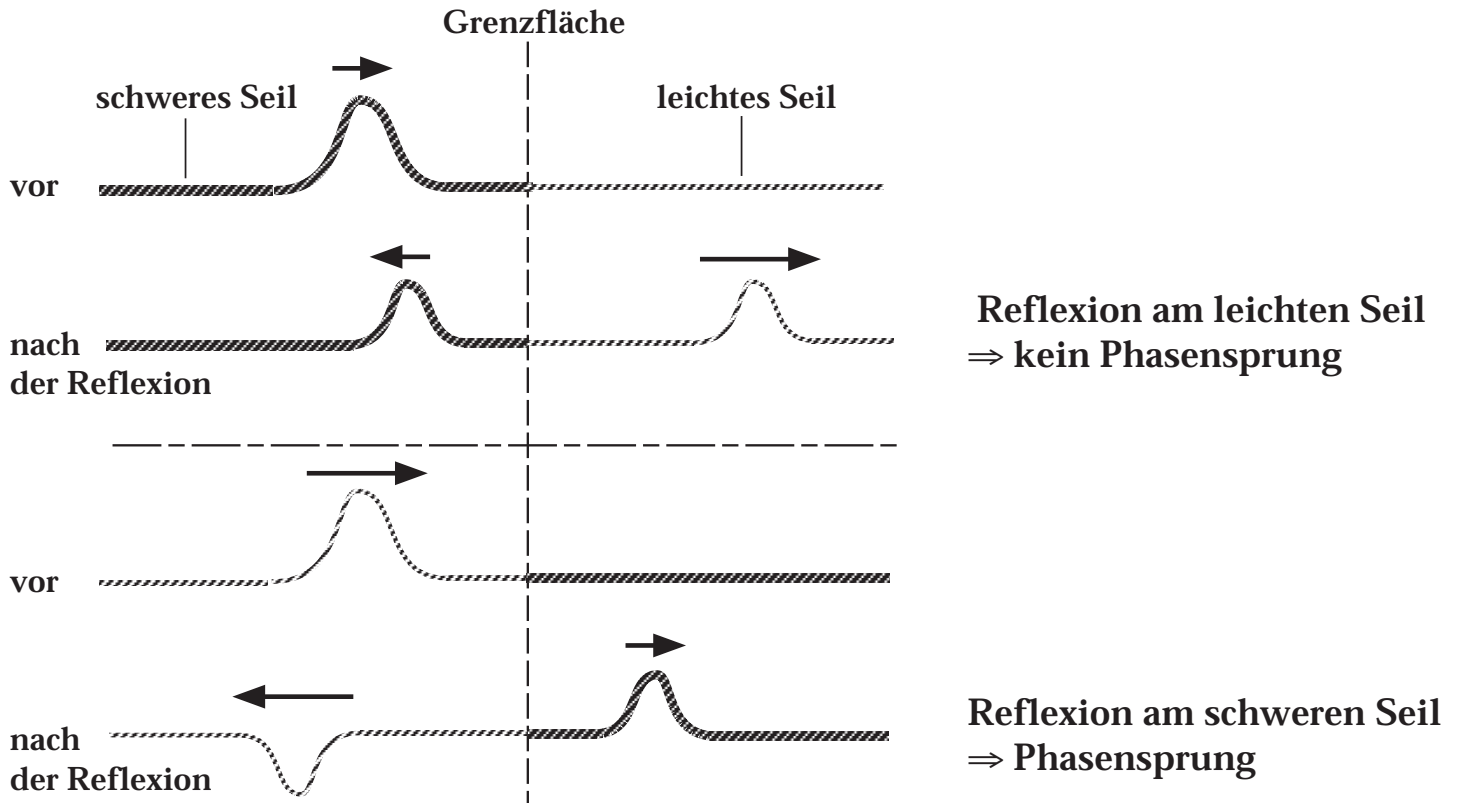
$$n > n_1 \quad \text{und} \quad n > n_2$$

3. Kohärente Wellen

Phasensprünge an Grenzflächen

Eine analoge Situation der Wellenreflexion an Grenzflächen findet man bei Seilwellen, welche ebenfalls Transversalwellen sind, vor.

Werden zwei verschiedene Seile aneinandergesekelt, so verhält sich die Phasenumkehr bei der Reflexion an der Grenzfläche wie bei der Lichtreflexion.

**Beispiel:**

Entspiegelung einer Linse ($n_{\text{Glas}} = 1.5$)

welche Dicke d muss eine Entspiegelungsschicht aus MgF_2 mit $n = 1.38$ haben, damit Licht der Wellenlänge $\lambda = 550 \text{ nm}$ eine minimale Reflexion erfährt?

In diesem Fall findet sowohl an der Oberfläche wie an der Grenzfläche Schicht/Glas ein Phasensprung statt. Für Interferenzminima gilt also die Bedingung

$$2n d = (m + \frac{1}{2}) \lambda$$

für $m = 0$ (minimale Schichtdicke) folgt

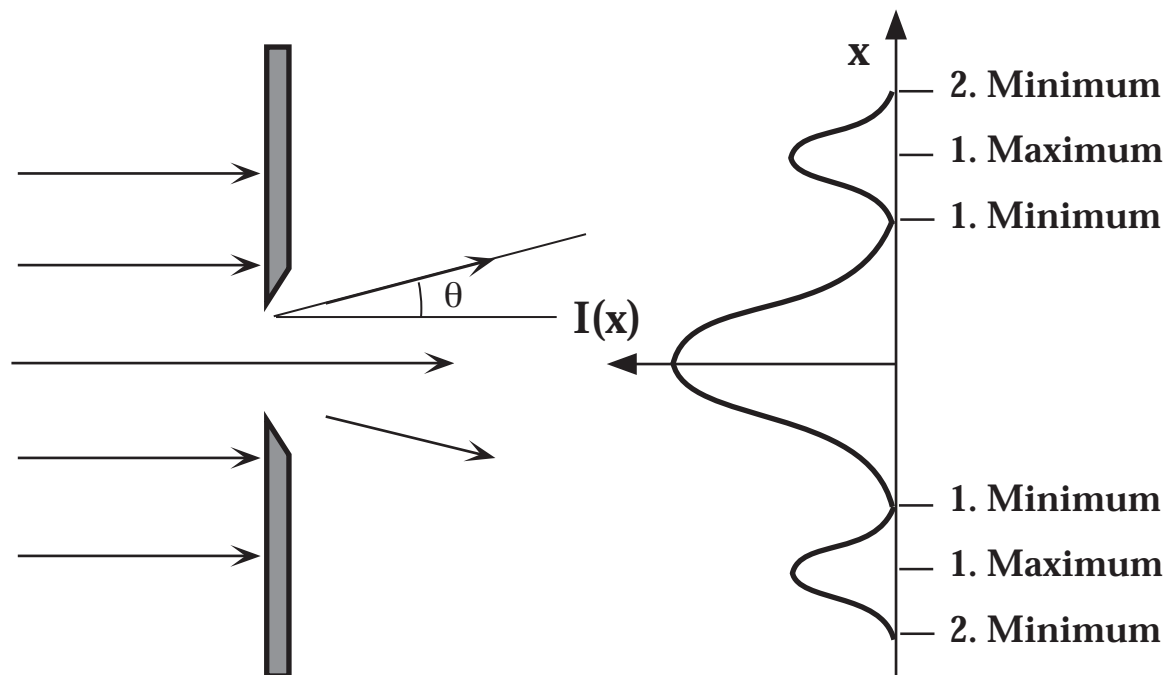
$$2n d = \frac{1}{2} \lambda$$

$$d = \frac{\lambda}{4 \cdot n} = \frac{550 \text{ nm}}{4 \cdot 1.38} = 100 \text{ nm}$$

4. Beugung kohärenter Wellen

4.1 Beugung am Einfachspalt

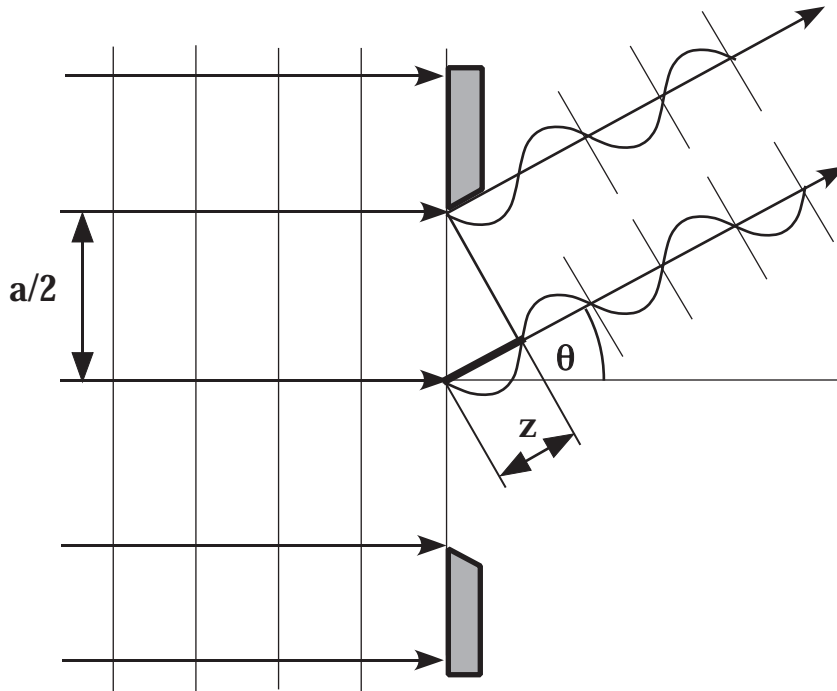
Falls wir einen intensiven Strahl von kohärentem Licht auf eine Spaltblende richten, so beobachten wir auf einem dahinterliegenden Schirm eine Intensitätsverteilung, die Minima und Maxima aufweist.



Die Intensitätsminima und -maxima entstehen durch destruktive bzw. konstruktive Interferenz der Wellen, die von der Spaltblende ausgehen. Im Folgenden wollen wir uns überlegen, unter welchen Winkeln θ wir Maxima und Minima der Intensität beobachten können.

Lage der Minima

Für die Berechnung der Winkel θ_n , für die Intensitätsminima beobachtet werden, unterteilen wir die Spaltbreite a in eine geeignete Anzahl von Streifen. Die Wellenzüge, die von diesen Streifen ausgehen, können hinter der Blende destruktiv oder konstruktiv interferieren.



Die Spaltbreite a wird in i Streifen unterteilt. Das erste Intensitätsminimum erhält man, wenn der Gangunterschied z für $i/2$ Streifenpaare (zwischen dem 1. und $i/2 + 1.$, zwischen dem 2. und $i/2 + 2.$ Streifen, etc.) gerade $\lambda/2$ beträgt.

$$z = \frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$$

θ ist der Winkel, unter dem das erste Minimum beobachtet wird.

Ebenso findet man Auslöschung, wenn zwischen dem 1. und $i/4 + 1.$, zwischen dem 2. und $i/4 + 2.$ Streifen, etc. der Gangunterschied $\lambda/2$ beträgt. Das bedeutet, dass dieses Minimum bei

$$\frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$\sin \theta = 2 \frac{\lambda}{a}$$

liegt. Oder allgemein

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Lage der Minima der Intensität beim Einfachspalt}$$

Lage der Maxima

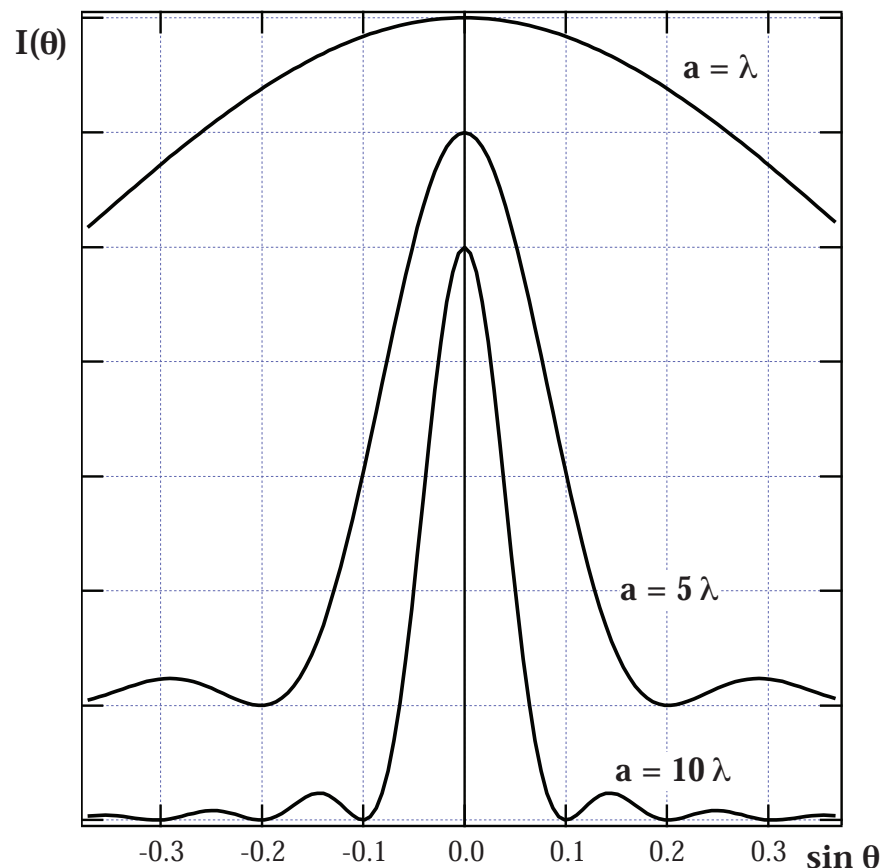
Die Winkel unter denen die Intensitätsmaxima auftreten, leiten wir hier nicht her. Das Hauptmaximum der Intensität liegt bei $\theta = 0$, die Nebenmaxima liegen zwischen den Minima.

Die Intensitätsverteilung $I(\theta)$ kann durch folgende Beziehungen angegeben werden (ohne Beweis):

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

wobei für α gilt

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$



4. Beugung kohärenter Wellen

Die Lochblende

Als Beugungsfiguren von kreisrunden Lochblenden entstehen kreisförmige Intensitätsminima und -maxima. Die Minima liegen bei den Winkeln θ_n (ohne Beweis).

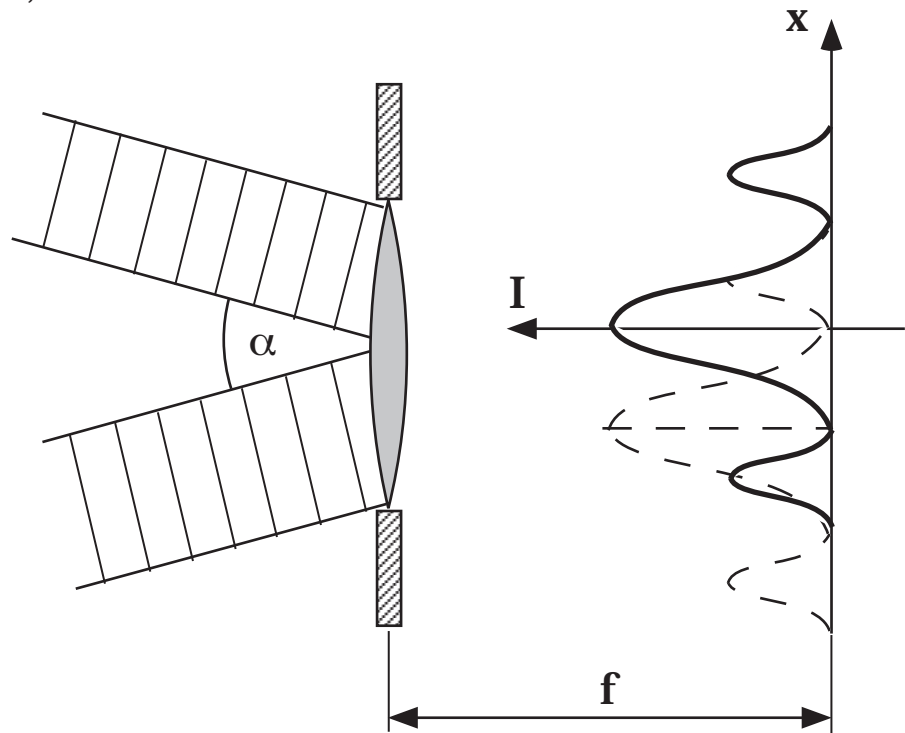
$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{d}$$

wobei n die Werte 1.22, 2.23, 3.24, ... annimmt.

Das Auflösungsvermögen

Die Beugung spielt auch eine wichtige Rolle beim Auflösungsvermögen einer Linse. Nach dem Rayleighschen Auflösungskriterium können zwei punktförmige Objekte gerade noch aufgelöst werden, wenn

$$\sin \alpha \geq 1.22 \cdot \frac{\lambda}{d}$$



In diesem Fall fällt das Hauptmaximum des ersten Objektes auf das erste Minimum des zweiten Objektes.

Beispiele:

1. Der Durchmesser des astronomischen Teleskops auf Mount Palomar beträgt 5 m. Der kleinste Winkel unter dem zwei Sterne noch als zwei Objekte beobachtet werden können beträgt also für $\lambda = 500 \text{ nm}$

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx 1.22 \frac{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{5 \text{ m}}$$

$$\alpha = 1.22 \cdot 10^{-7} \quad \text{im Bogenmass}$$

$$= \frac{1.22 \cdot 10^{-7}}{2 \pi} 360 \text{ Grad}$$

$$\alpha = 7 \cdot 10^{-6} \text{ Grad } (= 0.025'')$$

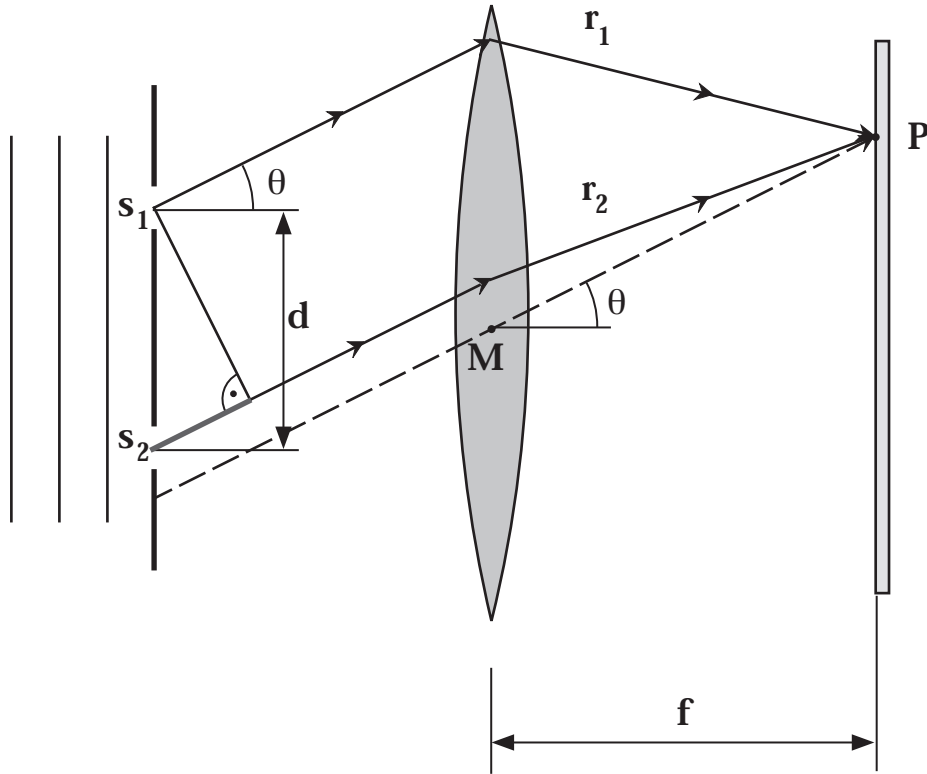
2. Beugungserscheinungen machen sich auch beim menschlichen Auge bemerkbar. Wie gross ist das durch Beugungserscheinungen bedingte Auflösungsvermögen a auf der Netzhaut, wenn für den Pupillendurchmesser 2 mm, für die Brennweite 22 mm und die Lichtwellenlänge $\lambda = 500 \text{ nm}$ angenommen wird?

$$\begin{aligned} a &= f \cdot \sin \alpha = \frac{f \cdot 1.22 \cdot \lambda}{d} \\ &= \frac{22 \cdot 10^{-3} \cdot 1.22 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-3}} = 6.7 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 6.7 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Interessant ist in diesem Zusammenhang der Vergleich mit den Abständen der Sehzellen in der Netzhaut. Die Zäpfchenzellen haben einen Abstand von rund $5 \mu\text{m}$, was von der gleichen Grössenordnung ist wie das beugungsbedingte Auflösungsvermögen bei einem Pupillendurchmesser von 2 mm.

4.2 Der Doppelspalt

Unter welchen Winkeln θ werden nach dem Durchtritt von Licht durch einen Doppelspalt Intensitätsminima und -maxima beobachtet ?



Die beiden interferierenden Strahlen r_1 und r_2 können sich entweder gegenseitig addieren, oder im anderen Extremfall, gerade gegenseitig auslöschen. Dies bezeichnet man als konstruktive oder destruktive Interferenz.

Konstruktive Interferenz entsteht, wenn die beiden Strahlen r_1 und r_2 eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ besitzen.

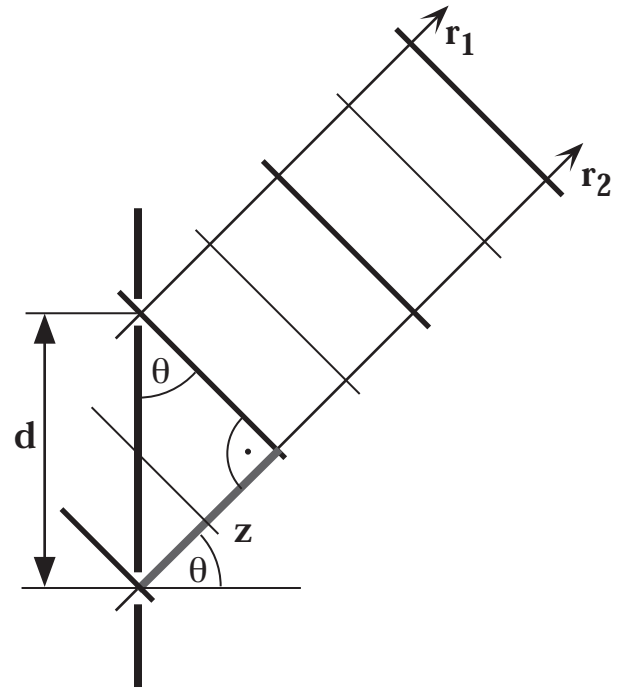
Damit die Bedingung $\Delta\varphi = m \cdot 2\pi$ erfüllt ist, muss der Gangunterschied z ein ganzzahliges Vielfaches von λ sein

$$z = d \cdot \sin \theta_{\max} = m \cdot \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

unter den Winkeln θ_{\max} beobachtet man **Intensitätsmaxima**

$$\sin \theta_{\max} = m \cdot \frac{\lambda}{d}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



Destruktive Interferenz entsteht, wenn die Strahlen r_1 und r_2 eine Phasenverschiebung von

$$\Delta\varphi = 2(m + 1/2)\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

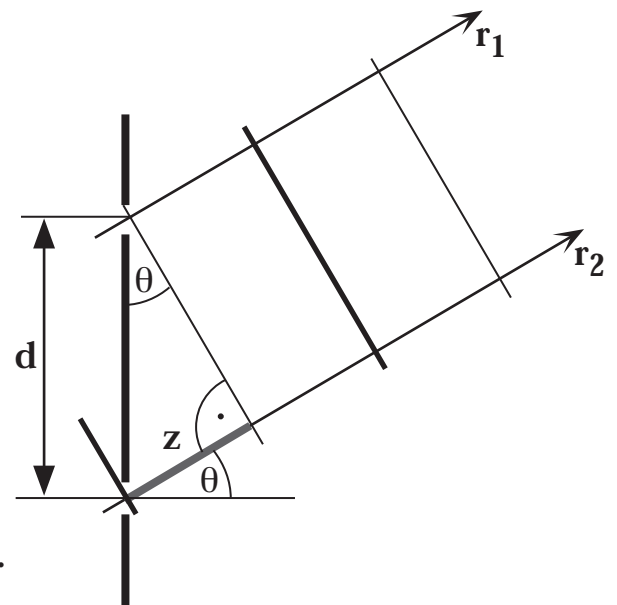
besitzen. Für den Gangunterschied z muss dann gelten

$$z = d \cdot \sin \theta_{\min} = (m + \frac{1}{2}) \lambda$$

unter den Winkeln θ_{\min} beobachtet man **Intensitätsminima**

$$\sin \theta_{\min} = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{d}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



4 Beugung kohärenter Wellen

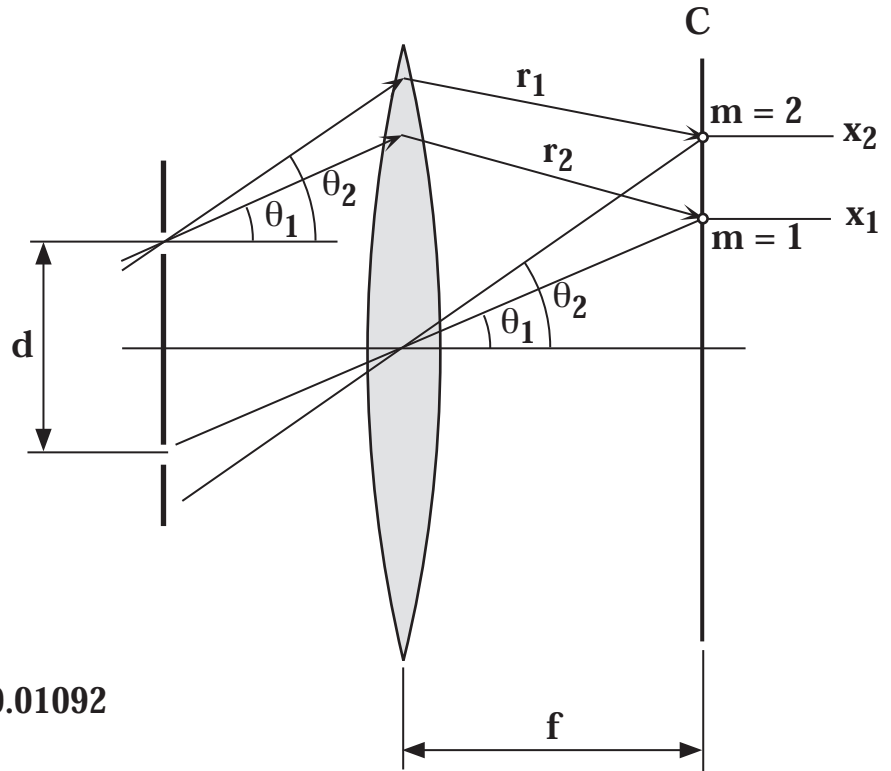
Beispiel:

In welchem Abstand liegen die Maxima für $m = 1$ und $m = 2$ auf dem Schirm C, wenn von folgenden Größen ausgegangen wird:

$$\lambda = 546 \text{ nm}$$

$$d = 0.1 \text{ mm}$$

$$f = 50 \text{ cm}$$



$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{d} = \frac{0.546 \mu\text{m}}{100 \mu\text{m}} = 0.00546$$

$$\sin \theta_2 = \frac{2\lambda}{d} = \frac{2 \cdot 0.546 \mu\text{m}}{100 \mu\text{m}} = 0.01092$$

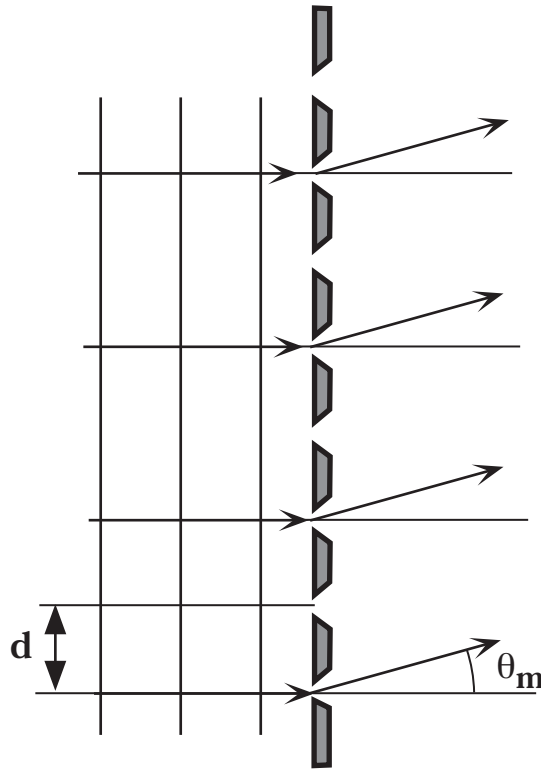
da $\theta \ll 1$, kann $\sin \theta \approx \tan \theta$ gesetzt werden

$$x_2 - x_1 = f (\theta_2 - \theta_1) = 0.00546 \cdot 0.5 \text{ m} = 2.73 \text{ mm}$$

Falls d bekannt ist und im Experiment $x_2 - x_1$ bestimmt wird, kann damit λ bestimmt werden.

4.3 Beugung am Gitter

Ein Beugungsgitter besteht aus N lichtdurchlässigen Spalten mit konstantem Abstand d .



Wie beim Doppelspalt liegen die Intensitätsmaxima bei

$$\sin \theta_m = m \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

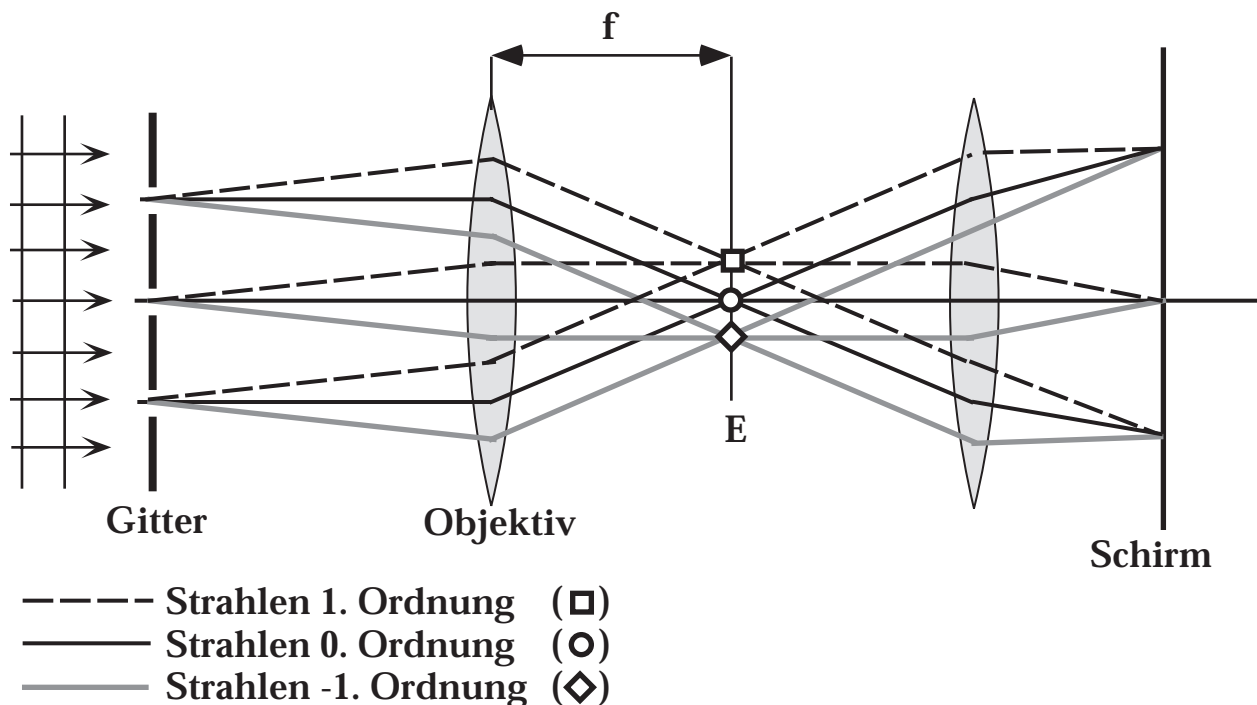
θ_m : Maximum m -ter Ordnung

Wichtige Anwendung von Beugungsgittern:
spektrale Zerlegung von nicht monochromatischem Licht (Monochromatoren)

5. Abbesche Theorie der Auflösung des Lichtmikroskops

5.1 Abbildung durch Überlagerung verschiedener Beugungsordnungen

Wir betrachten die Abbildung eines feinen Gitters, auf das paralleles Licht fällt, in einem Mikroskop



In der Ebene E entsteht ein primäres Bild, ein Beugungsbild des Gitters. Die Strahlen nullter Ordnung sind entlang der Linie \circ vereinigt, die Strahlen 1. Ordnung in \square und die Strahlen -1. Ordnung in \diamond . Wenn man mit einer Blende in der Ebene E die gebeugten Strahlen ausblendet (\pm erste und höhere Ordnungen) und nur die nullte Ordnung auf den Schirm fällt, kann kein Bild auf dem Schirm beobachtet werden. Das bedeutet, dass die Abbildung durch die kohärente Überlagerung verschiedener Beugungsordnungen zustande kommt.

5.2 Auflösungsvermögen des Lichtmikroskops

Die Minimalbedingung, um ein Bild zu erhalten, ist also eine Überlagerung der nullten und ersten Beugungsordnung. Daraus lässt sich das Auflösungsvermögen des Mikroskops ableiten.

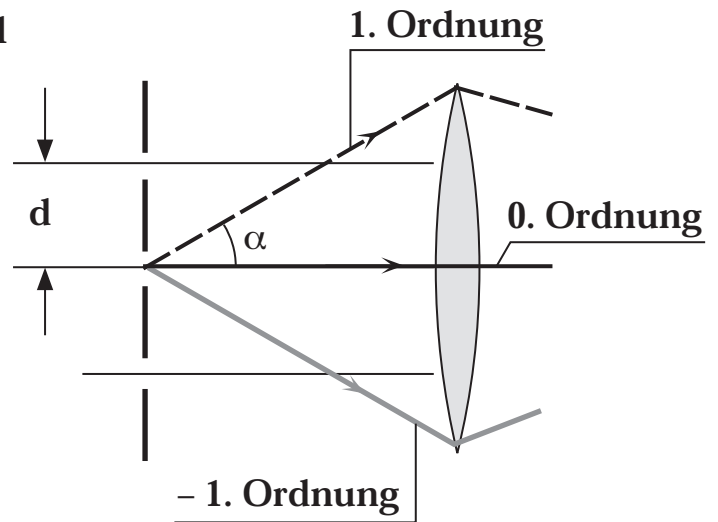
Der Furchenabstand d sei die kleinste Distanz, die ein Mikroskop gerade noch auflösen kann.

Die erste Beugungsordnung kann gerade noch zur Abbildung beitragen, falls für den Winkel α gilt (siehe Abschnitt 4.3)

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{d}$$

es können also Objekte abgebildet werden für die gilt

$$d \geq \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$



Die Auflösung kann noch verbessert werden, indem zwischen Objekt und Objektiv ein Medium mit Brechungsindex $n > 1$ gebracht wird (z.B. Oel mit $n \approx 1.4$). In diesem Fall gilt für die kleinste Distanz, die noch aufgelöst werden kann

$$d \geq \frac{\lambda}{n \cdot \sin \alpha}$$

Auflösung des Immersionsmikroskops

Da $n \cdot \sin \alpha$ von der Größenordnung 1 ist gilt

$$d \approx \lambda$$

Um zu einem besseren Auflösungsvermögen zu kommen, muss man Wellen kleinerer Wellenlänge λ verwenden, wie z.B. Elektronenstrahlen im Elektronenmikroskop (siehe Kapitel VI/3).

6. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Medien

6.1 Brechungsindex und Dispersion

Wenn sich eine elektromagnetische Welle in einem Medium ausbreitet, findet zwischen der Strahlung und der Materie eine Wechselwirkung statt. Diese Wechselwirkung äussert sich in einer gegenüber der Ausbreitung im Vakuum reduzierten Ausbreitungsgeschwindigkeit c .

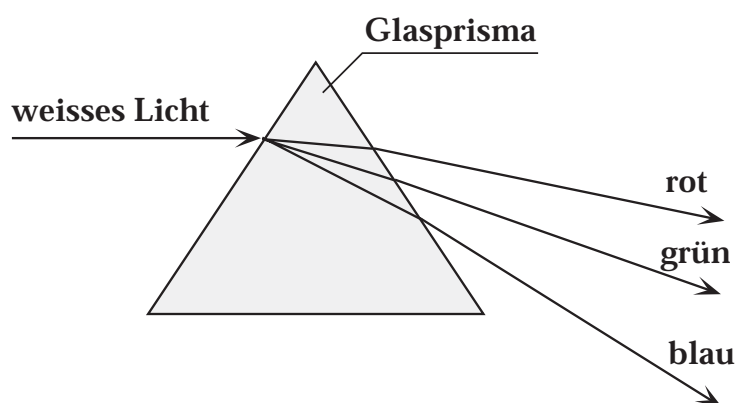
Den Brechungsindex n eines Mediums haben wir über die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_{Medium} einer elektromagnetischen Welle im betreffenden Medium definiert (Kapitel IV/3):

$$n = \frac{c}{c_{\text{Medium}}}$$

Definition des Brechungsindex

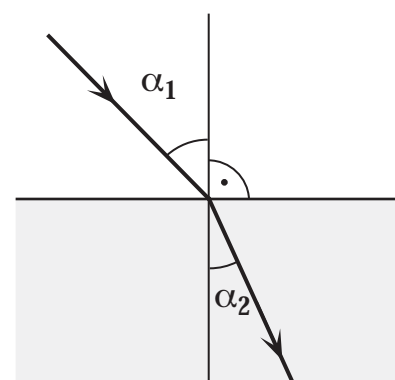
c : Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Der Brechungsindex n beschreibt somit die Ausbreitung von Licht in einem Medium. Die Brechung von weissem Licht und dessen Zerlegung in die Spektralfarben an einem Glasprisma zeigt jedoch, dass der Brechungsindex frequenzabhängig ist.



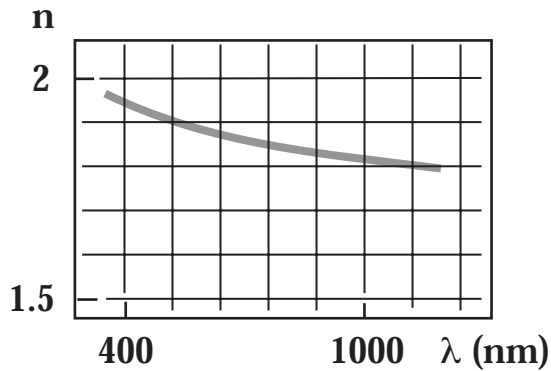
Nach dem Brechungsgesetz (Kap. IV/3) und unserer Definition des Brechungsindex gilt

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



6. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Medien

Gläser zeigen im sichtbaren Bereich des Lichtes einen Brechungsindex, der mit zunehmender Wellenlänge abnimmt. Man bezeichnet dieses Verhalten als normale Dispersion.



Das entgegengesetzte Verhalten, zunehmender Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge, bezeichnet man entsprechend als anomale Dispersion.

Brechungsindizes n bei verschiedenen Wellenlängen λ

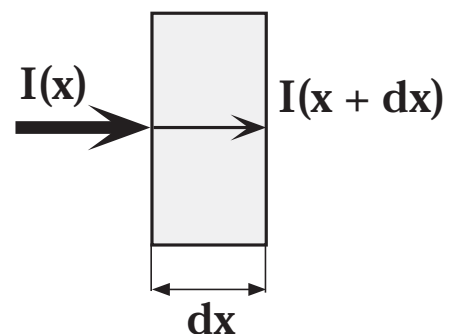
λ / nm	397	486,1	589,3	656,3
Wasser	1.3435	1.3371	1.3330	1.3312
Plexiglas 55		1.5014	1.4950	1.4928
Kronglas BK 1	1.5246	1.5157	1.5100	1.5076
Lexan		1.5995	1.5854	1.5800
Flintglas F 3	1.6542	1.6246	1.6128	1.6081

6.2 Absorption elektromagnetischer Strahlung in Medien

Beim Durchgang elektromagnetischer Strahlung durch ein Medium nimmt die Strahlungsintensität in einer vorgegebenen Schichtdicke um einen bestimmten Faktor ab. Diese Intensitätsabnahme wird als Extinktion bezeichnet.

$$I(x + dx) - I(x) = dI$$

Die Intensitätsabnahme dI ist proportional zur Intensität I und der Schichtdicke dx



6.2 Absorption elektromagnetischer Strahlung in Medien

$$dI = -\mu I dx$$

oder

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\mu I(x)$$

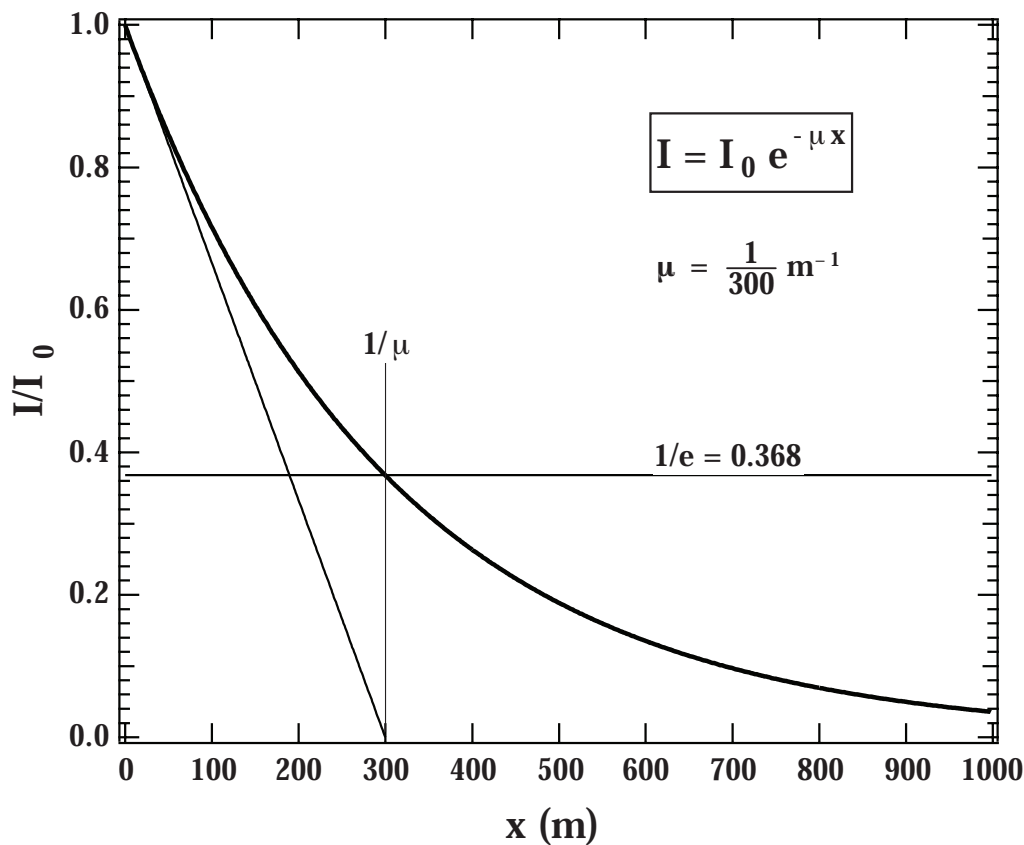
$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

Lambertsches Extinktionsgesetz (J. H. Lambert, 1728 - 1777)

μ : Schwächungskoeffizient

Einheit : m^{-1}

Wie der Brechungsindex n ist auch μ von der Lichtwellenlänge abhängig: $\mu = \mu(\lambda)$



Im Diagramm wurde als Beispiel $\mu = \frac{1}{300} m^{-1}$ gewählt.

Für $x = 1/\mu$ beträgt die Intensität

$$I(x = \frac{1}{\mu}) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot 1/\mu} = \frac{1}{e} I_0 = 0.368 \cdot I_0$$

$1/\mu$ definieren wir als die mittlere Reichweite R des Lichtes

6. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Medien

Beispiel:

Wasser $\mu = 2.4 \text{ m}^{-1}$ ($\lambda = 770 \text{ nm}$)

$$R = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2.4} \text{ m}^{-1}$$

$$R = 0.417 \text{ m}$$

Die Lichtextinktion kann dazu benutzt werden, die Konzentration von gelösten Stoffen in Lösungen zu bestimmen.

Bei kleinen Konzentrationen ist μ proportional zur Konzentration c des gelösten Stoffes (Beersches Gesetz).

Benutzen wir eine Eichlösung (c_E, μ_E), so können wir durch eine Vergleichsmessung (bei gleicher Probendicke) die unbekannte Konzentration c_x einer Lösung bestimmen.

Für die Eichlösung gilt

$$\frac{I_E}{I_0} = e^{-\mu_E \cdot d}$$

und für die Lösung mit unbekannter Konzentration

$$\frac{I_x}{I_0} = e^{-\mu_x \cdot d}$$

$$\frac{\ln(I_x/I_0)}{\ln(I_E/I_0)} = \frac{\mu_x}{\mu_E} = \frac{c_x}{c_E}$$

$$c_x = \frac{\ln(I_x/I_0)}{\ln(I_E/I_0)} c_E$$

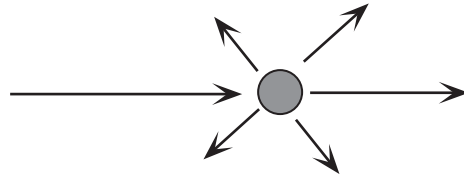
Bestimmung einer unbekanntes Konzentration c_x mit einer Eichlösung der Konzentration c_E .

I_x/I_0 heisst Transmission der Probe

6.3 Lichtstreuung

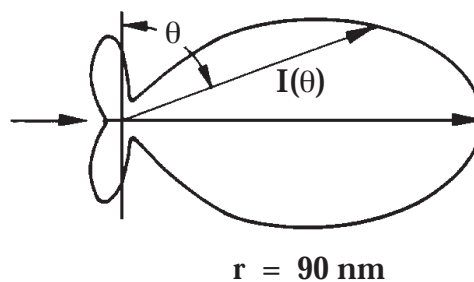
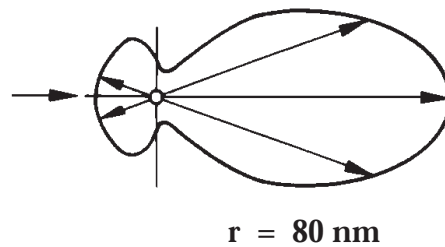
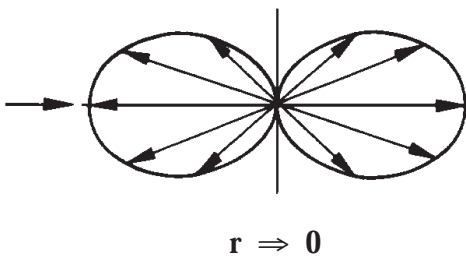
Miesche Streuung an Teilchen

Wenn Licht auf ein undurchsichtiges Teilchen auftrifft, wirkt dieses als Streuzentrum und je nach Grösse des Teilchens wird Licht in alle Richtungen gestreut



Beispiel:

Polardiagramme für die Lichtstreuung ($\lambda = 550 \text{ nm}$) an Goldkugeln mit verschiedenen Radien r

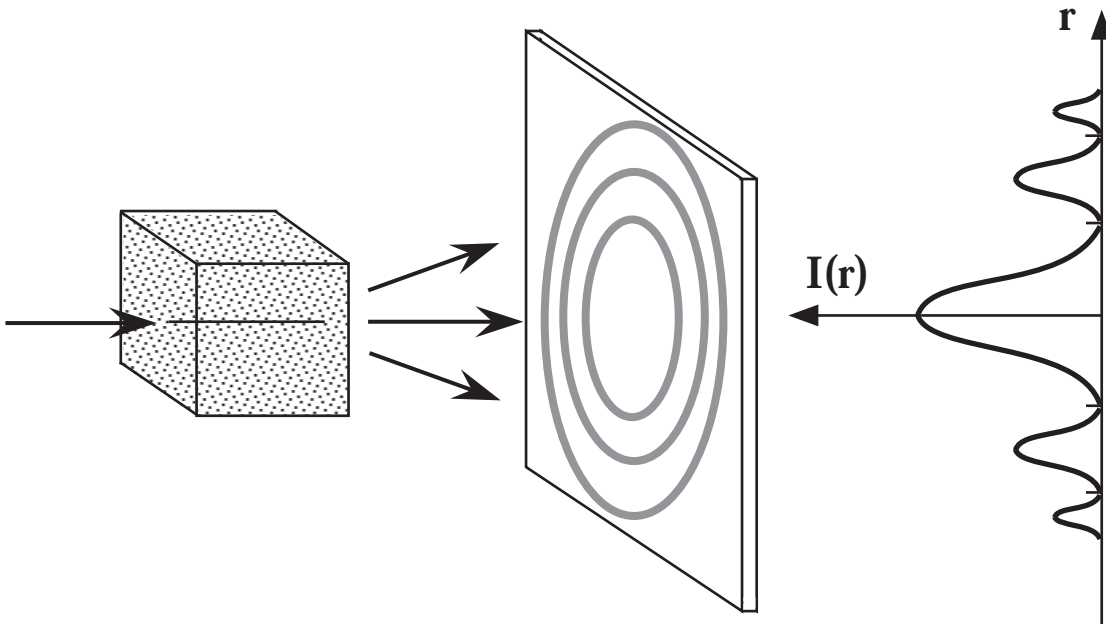


Bei kleinen Radien ist die Abstrahlung ähnlich wie bei einem Dipol (Kap. III/15), bei grossen Radien findet die Streuung vor allem in Vorwärtsrichtung statt.

Anwendung: Bestimmung von Grösse und Konzentration von Partikeln in verunreinigter Luft.

Streuung von Licht an vielen Teilchen

Bei der Streuung von Licht an einem grossen Kollektiv von einzelnen ungeordnete Teilchen entsteht ein Beugungsbild aus konzentrischen hellen und dunklen Ringen, ähnlich dem Beugungsbild von Licht an einer runden Blende.



Beispiele:

Mondhöfe, die durch Beugung von Licht an einem Wolkenschleier entstehen oder Beugung an Partikeln auf einer Glasplatte

Anwendung:

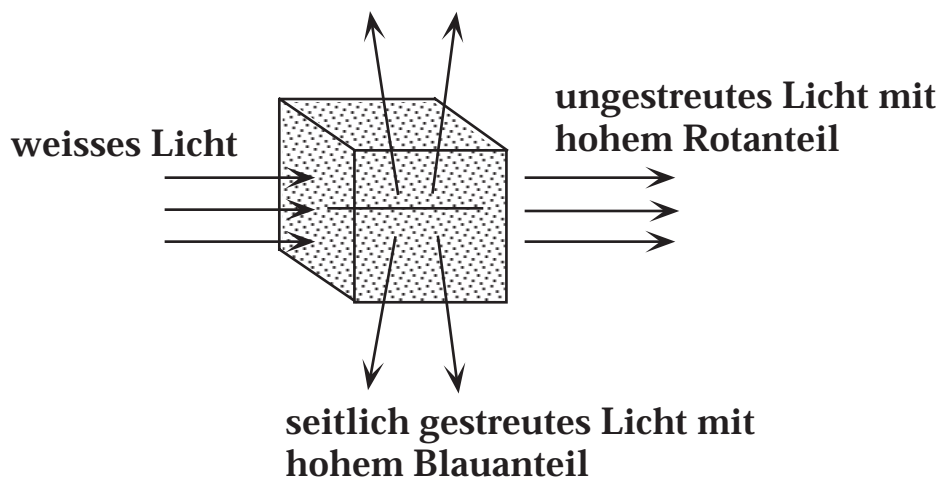
Da die Beugungsfigur Informationen über die Teilchengrösse und Teilchendichte enthält, können Messungen der Lichtbeugung zur Charakterisierung von kolloidalen Systemen verwendet werden.

Rayleighsche Streuung von Licht

Die Lichtstreuung an submikroskopischen Teilchen und Molekülen zeigt eine starke Frequenz- oder Wellenlängenabhängigkeit. Die Intensität I des gestreuten Lichtes ist proportional zu ν^4

$$I \sim \nu^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}$$

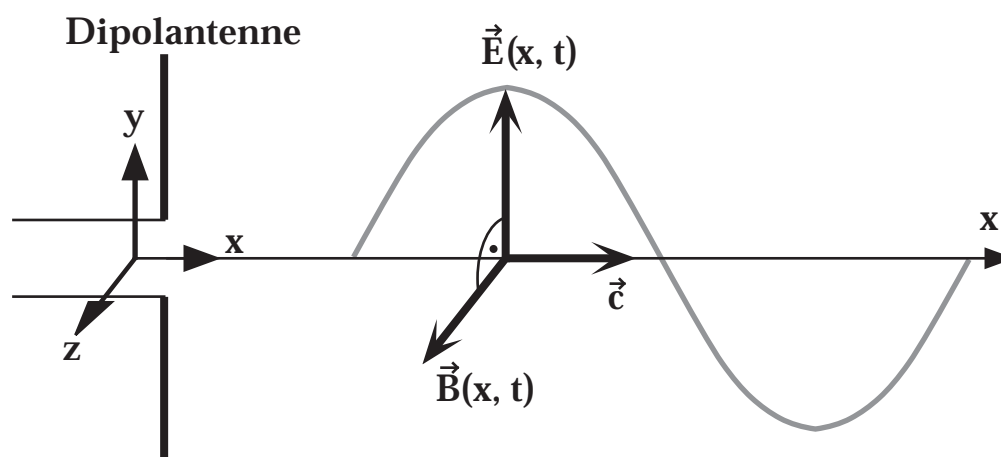
Das bedeutet, dass blaues Licht ($\nu \approx 8 \cdot 10^{14}$ Hz) 16 mal stärker gestreut wird als rotes Licht ($\nu \approx 4 \cdot 10^{14}$ Hz). Dies erklärt die Farbe des wolkenlosen Himmels und die Rotfärbung des Himmels beim Sonnenuntergang.



7. Polarisation des Lichtes

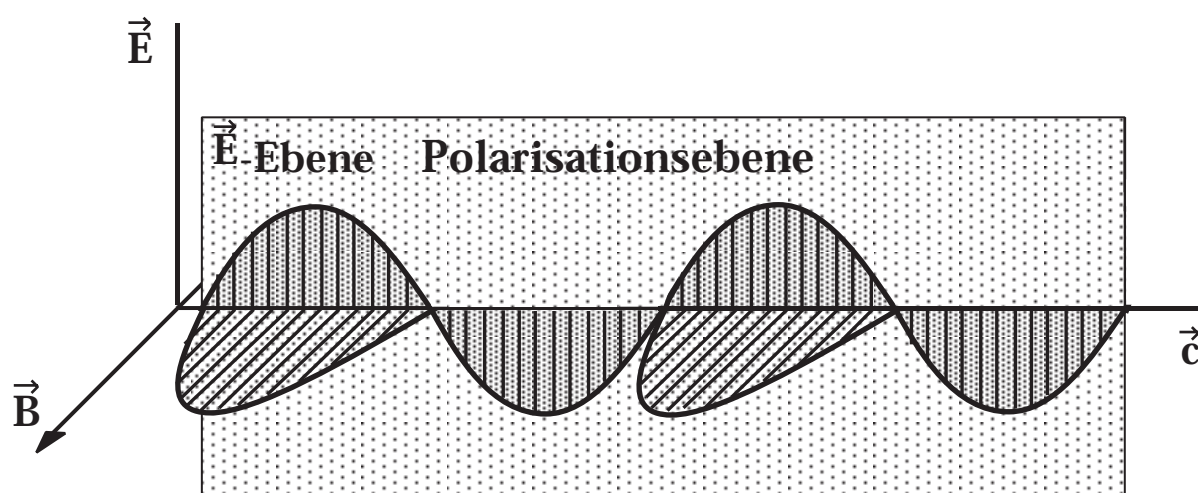
7.1 Eigenschaften des polarisierten Lichtes

Im Kapitel 15 der Elektrizitätslehre haben wir gesehen, wie die Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen von einer Dipolantenne, zustandekommt.



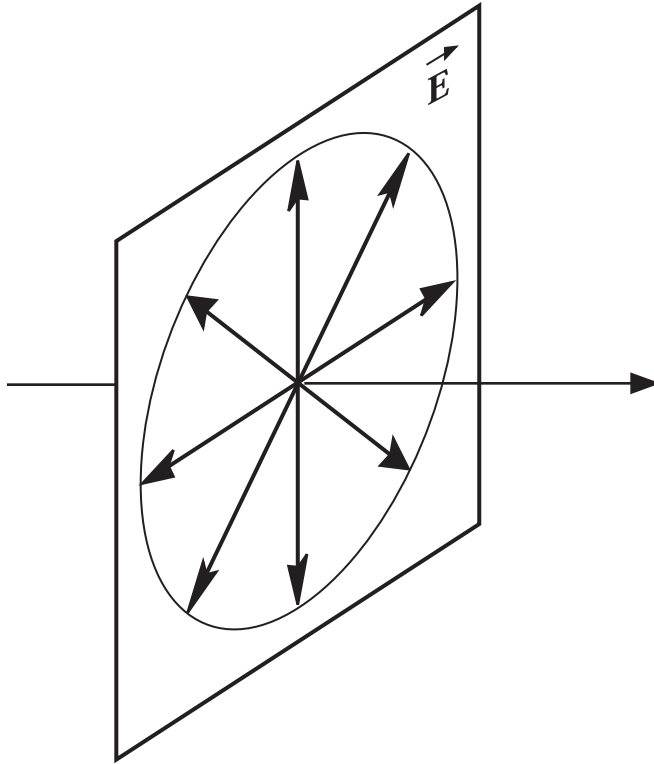
Der \vec{E} -Vektor steht zu jedem Zeitpunkt parallel zur Dipolantenne und der \vec{B} -Vektor steht senkrecht zu \vec{E} .

Bei einer polarisierten ebenen Welle stehen die \vec{E} -Vektoren zu jedem Zeitpunkt parallel zur Polarisations Ebene und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.



7. Polarisation des Lichtes

Eine Lichtquelle liefert im Allgemeinen unpolarisiertes Licht. In diesem Fall können die \vec{E} -Vektoren eine beliebige Richtung in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung annehmen.

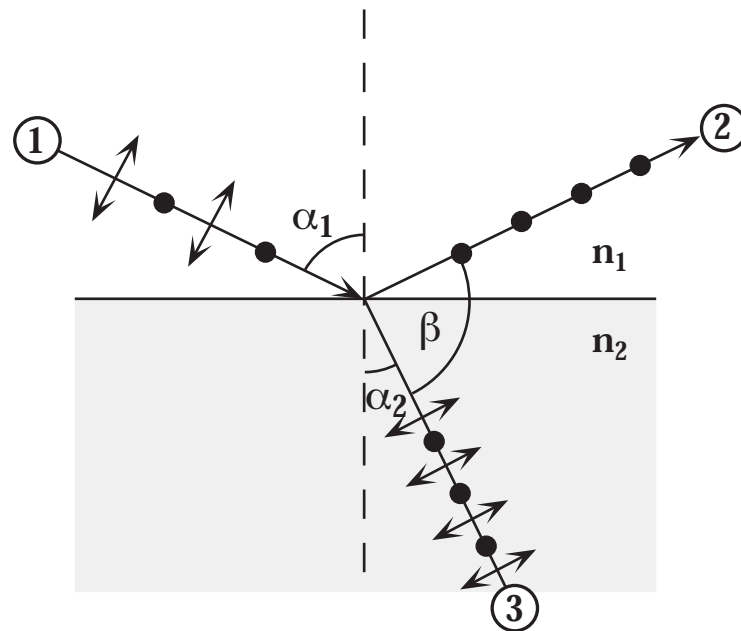


7.2 Erzeugung von polarisiertem Licht

7.2.1 Polarisation durch Reflexion

Beobachtung: bei der Reflexion von unpolarisiertem Licht an einem optisch dichteren, nicht absorbierendem Medium ($n_2 > n_1$), ist der reflektierte Lichtstrahl (2) mindestens teilweise polarisiert. Die Polarisationsrichtung ist senkrecht zu der Ebene, die durch den einfallenden und den reflektierten Strahl definiert ist.

Experimentell (und theoretisch, durch eine Herleitung, die von den Maxwell'schen Gleichungen ausgeht) kann man zeigen, dass die reflektierte Welle (2) genau dann vollständig polarisiert sind, wenn der Winkel $\beta = 90^\circ$ beträgt. Die Welle (3) ist nur teilweise polarisiert.



$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta = 90^\circ$$

Bedingung für vollständige Polarisation

Der Winkel, unter dem eine vollständige Polarisation stattfindet, kann mit Hilfe des Brechungsgesetzes berechnet werden:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_2 \sin (90^\circ - \alpha_1) = n_2 \cos \alpha_1$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

In diesem Fall bezeichnet man den Winkel α_1 als Brewster Winkel α_B (nach Sir David Brewster, 1781-1868, der diesen Zusammenhang empirisch fand)

$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}$$

Brewstersches Gesetz

Beispiel:

Grenzfläche Vakuum/Glas

$$n_{\text{Glas}} = 1.51$$

$$\alpha_B = \arctan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = \arctan \frac{1.51}{1} = 56.49^\circ$$

7.2.2 Polarisation durch Doppelbrechung

Optisch isotrope Stoffe besitzen Brechungsindizes, die in allen Richtungen gleich sind.

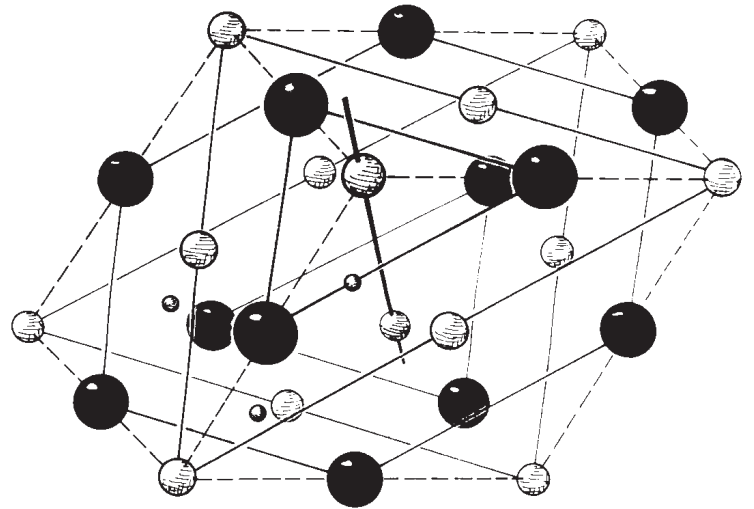
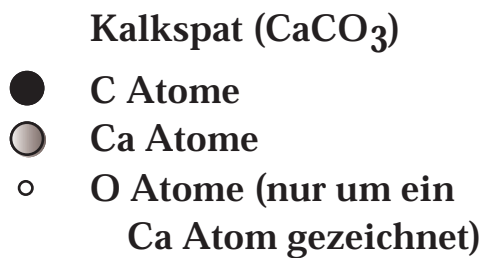
Beispiele :

Gase, homogene Flüssigkeiten, Festkörper mit kubisch symmetrischem Kristallbau (NaCl, CsCl, Diamant), amorphe Festkörper wie Fensterglas oder amorpher Quarz (amorphes SiO_2)

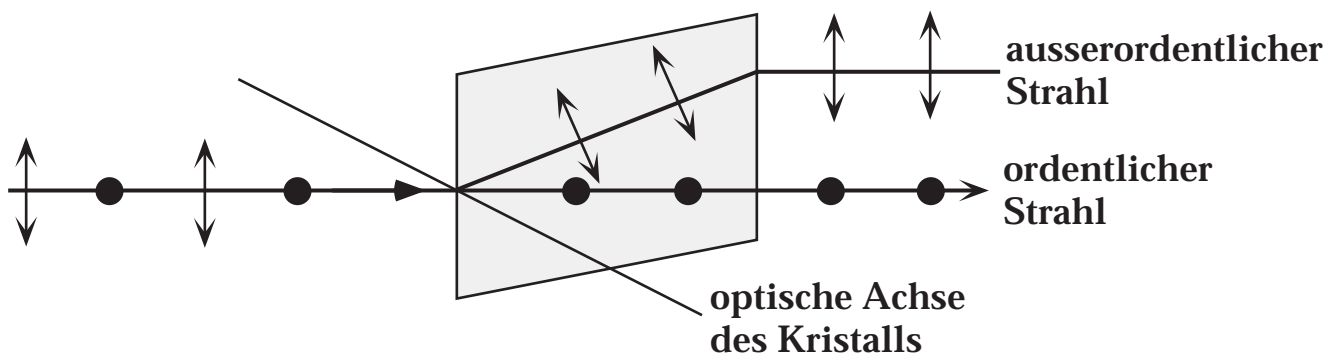
Optisch anisotrope Stoffe besitzen richtungsabhängige Brechungsindizes. Diese entstehen durch nicht-kubischen Kristallbau, was zu Kristallachsen mit niedrigerer Symmetrie führt.

Beispiel:

Kalkspat (CaCO_3), Quarz-Kristall



Unpolarisiertes Licht, das auf einen geeignet geschnittenen Kalkspat Kristall fällt, wird in zwei Teilstrahlen unterschiedlicher Polarisation aufgespalten.



Im Nicolschen Prisma wird dieser Effekt ausgenutzt, um polarisiertes Licht zu erzeugen.

7.2.3 Polarisation durch Dichroismus

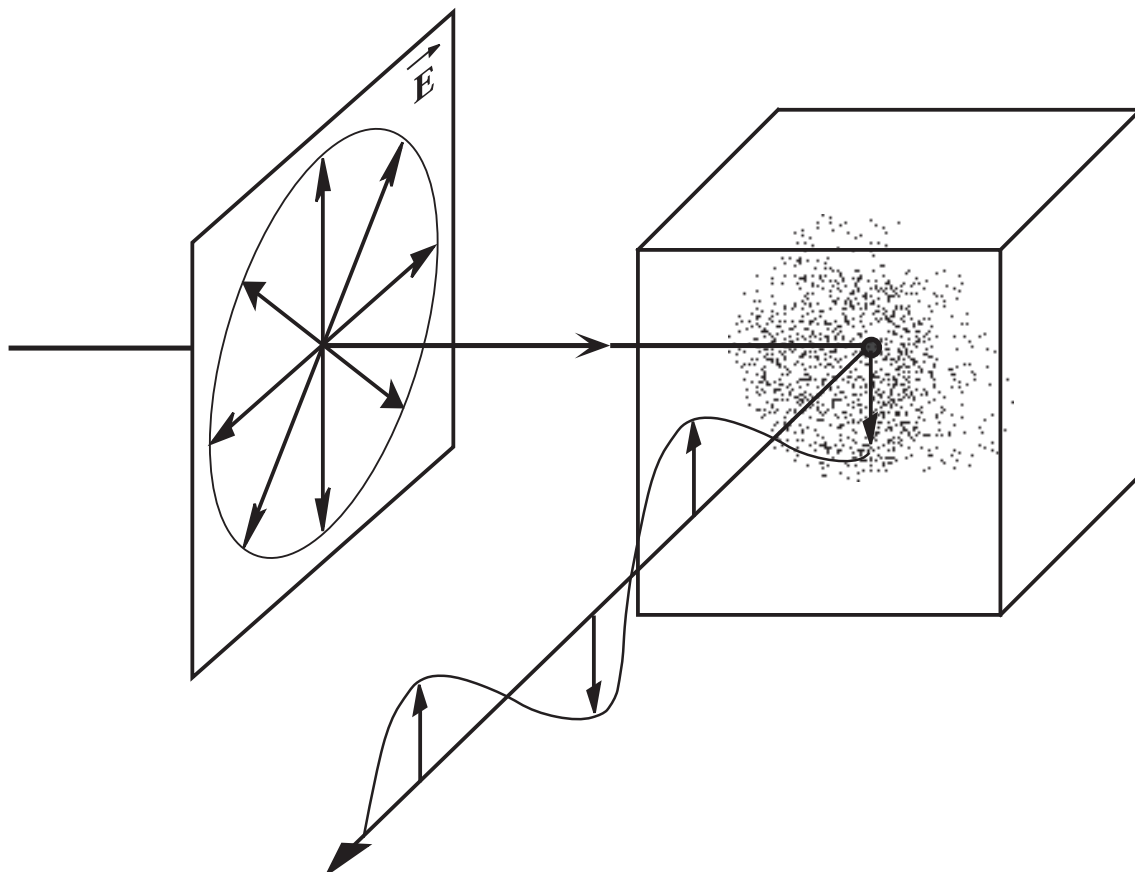
Es existieren Kristalle, die den ordentlichen und den ausserordentlichen Strahl unterschiedlich stark absorbieren.

Beispiele:

Turmalin, Jod, Polarisationsfilter (Einbettung von kleinen orientierten Kristallen in Polymerfolien)

7.2.4 Entstehung von polarisiertem Licht durch Lichtstreuung

Unpolarisiertes Licht, das an Streuzentren (Staubteilchen, Russ, Wassertröpfchen) seitlich gestreut wird, ist polarisiert.



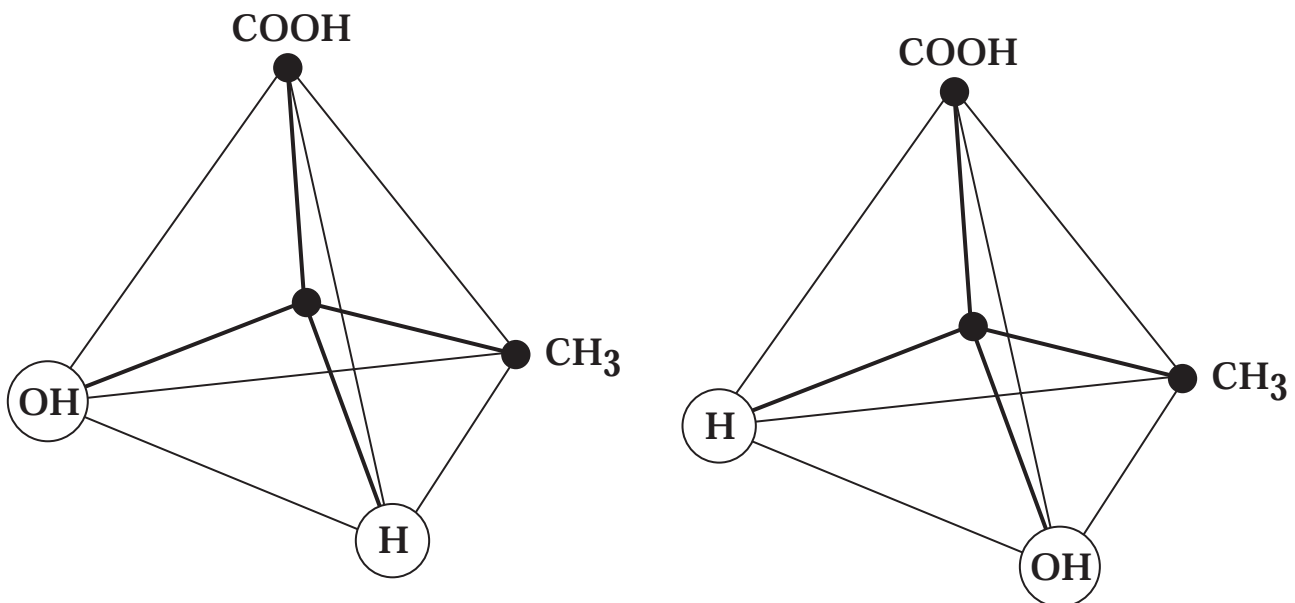
Anschauliche Begründung: die Anregung von Ladungsträgern in den Streuzentren erfolgt in einer Richtung parallel zur Ebene E . Für die seitliche Abstrahlung ist dann nur die Anregung der Streuzentren in vertikaler Richtung massgebend. Deshalb ist die seitlich gestreute Welle dann auch vertikal polarisiert.

7.3 Optische Aktivität

Optisch aktive Stoffe haben die Eigenschaft die Richtung von polarisiertem Licht zu drehen. Der Winkel α , um den die Drehung erfolgt, ist stoffabhängig. Ferner ist α proportional zum zurückgelegten Weg des Lichtes im betreffenden Stoff. Die Drehung der Polarisation kann nach rechts oder links erfolgen. Man spricht deshalb von rechts und links drehenden Stoffen. Die Ursache der optischen Aktivität liegt in der molekularen Struktur der Materialien. Nur Stoffe, die eine Chiralität besitzen (d. h. einen definierten Drehsinn haben), sind optisch aktiv.

Beispiele:

Quarzkristall (rechts und links drehende Kristalle sind etwa gleichhäufig), Zuckerkristalle, Lösungen mit chiralen Molekülen



D (rechtsdrehende) und L (linksdrehende) Konfiguration des Milchsäuremoleküls

Die optische Aktivität von Lösungen existiert, obschon die chiralen Moleküle in der Flüssigkeit völlig statistisch orientiert sind.

Die Messung des Drehvermögens α einer Lösung kann zu analytische Zwecken verwendet werden, da α proportional zur Konzentration des gelösten Stoffes angenommen werden kann.

$$\alpha = \varphi \cdot c \cdot d$$

c : Konzentration des gelösten Stoffes

d : Dicke der Flüssigkeitsschicht

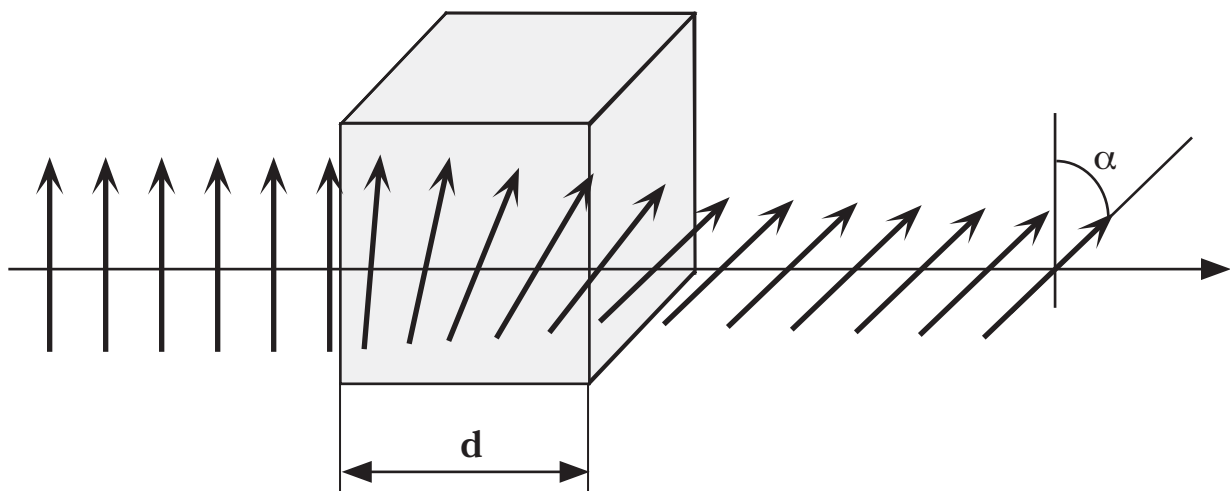
φ : spezifisches Drehvermögen einer Substanz

Einheit [φ]

$$[\varphi] = \frac{[\alpha]}{[c] \cdot [d]}$$

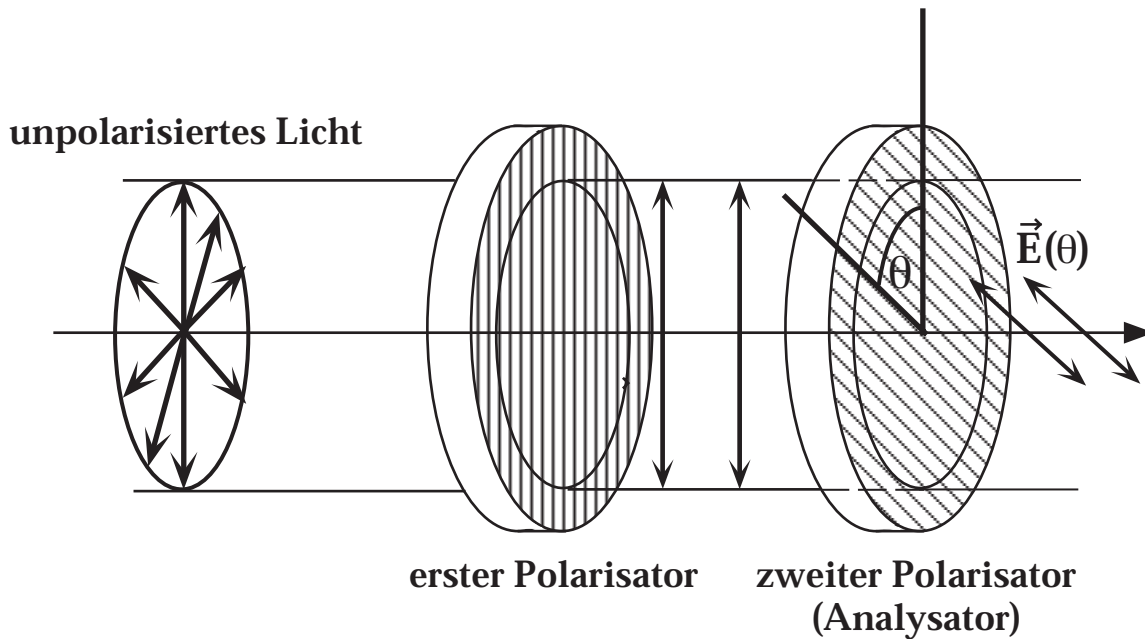
Beispiel:

$$[\varphi] = \frac{\text{Grad}}{\frac{\text{mol}}{\ell} \cdot \text{m}}$$



7.4 Gesetz von Malus

Das unpolarisierte Licht, das von einer Lichtquelle ausgeht, werde mit einem Polarisator polarisiert. Folgt im Strahlengang nach dem Polarisator ein zweiter Polarisator, so hängt die gemessene Intensität hinter dem dem zweiten Polarisator vom relativen Verdrehungswinkel θ der beiden Polarisatoren ab.



Die Amplitude des E-Vektors, $E(\theta)$, hinter dem Analysator

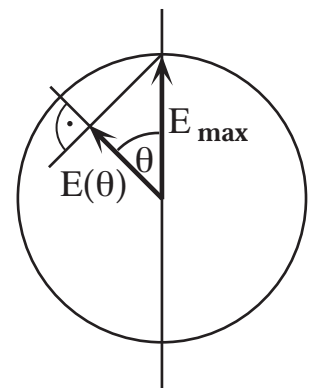
ist gegeben durch

$$E(\theta) = E_{\max} \cdot \cos \theta$$

Da die Intensität proportional zu E^2 ist, gilt dann

$$I(\theta) = I_{\max} \cdot (\cos \theta)^2$$

Gesetz von Malus (nach Etienne Louis Malus, 1809)



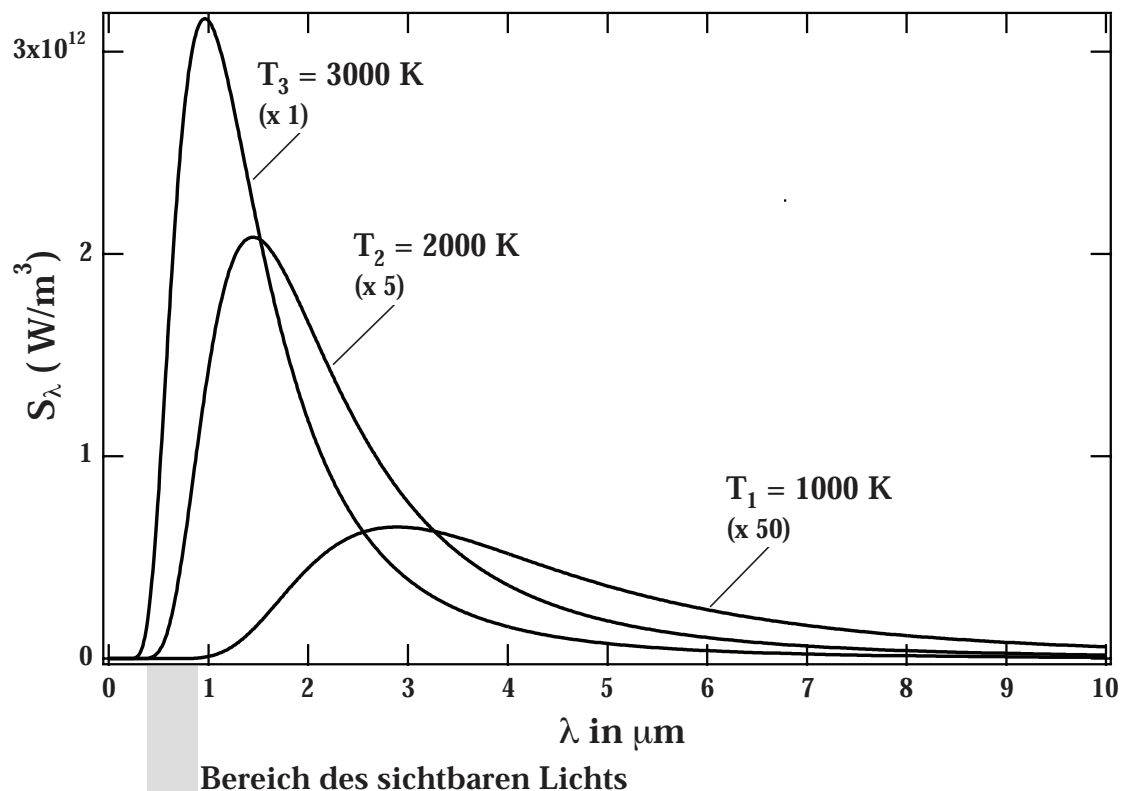
VI. Dualismus Wellen und Quanten

1. Die Wärmestrahlung

1.1 Phänomene

Jeder Körper, der eine endliche Temperatur T besitzt ($T \neq 0$) sendet elektromagnetische Strahlung aus, die wir als **Wärmestrahlung** bezeichnen. Das Spektrum der pro Flächeneinheit emittierten Strahlung hängt von der **Temperatur** und der **Oberfläche** (Material, Farbe) ab.

Beispiel: Emissionsspektrum S_λ eines Wolframbandes bei 3 verschiedenen Temperaturen.



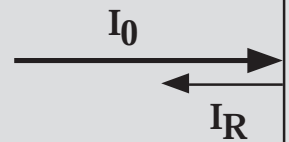
1.2 Emission und Absorption, Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

Der Einfluss der Oberfläche auf die emittierte Strahlungsleistung wird im **Emissionsvermögen** ε zusammengefasst. ε ist eine dimensionslose Grösse und nimmt maximal - im Falle eines sogenannten schwarzen Körpers - den Wert 1 an.

Definition

Das **Reflexionsvermögen** R einer Oberfläche ist gegeben durch das Leistungsverhältnis der reflektierten (I_R) und einfallenden Strahlung (I_0)

$$R = \frac{I_R}{I_0}$$



Das **Absorptionsvermögen** α eines absorbierenden Stoffes ist gegeben durch $\alpha = 1 - R$

Die vom Stoff absorbierte Leistung I_A ist somit

$$I_A = I_0 - I_R = I_0 (1 - R) = I_0 \alpha$$

R und α hängen im Allgemeinen von der Wellenlänge λ ab.

Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

Für jede Wellenlänge λ gilt

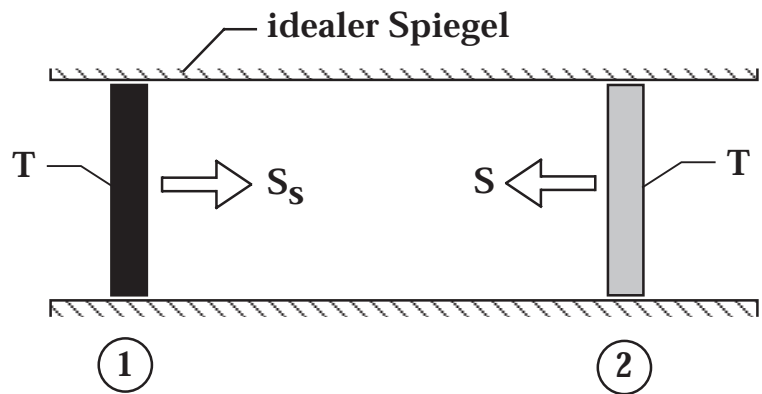
$$\varepsilon(\lambda) = \alpha(\lambda)$$

Beweis:

Wand 1

ideal schwarz, d.h. $\alpha_s = 1$
(bei allen Wellenlängen)

emittierte Leistung S_s



Wand 2

Absorptionsvermögen $\alpha (<1)$

emittierte Leistung S

im Gleichgewicht muss für beide Wände (wegen dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik) gelten:

emittierte Leistung = absorbierte Leistung

Wand 1 : $S_s = S + S_s (1 - \alpha)$ | $S_s (1 - \alpha)$ ist die an Wand 2 reflektierte Strahlung

Wand 2 : $S = \alpha \cdot S_s$

für beide Gleichungen gilt

$$\frac{S}{\alpha} = S_s \quad (1)$$

Das Emissionsvermögen ε definieren wir nun durch

$$\varepsilon = \frac{S}{S_s}$$

und es ergibt sich aus obiger Formel (1)

$$\frac{S}{S_s}(\lambda) = \varepsilon(\lambda) = \alpha(\lambda)$$

Kirchhoffsches Gesetz (R. Kirchhoff, 1824 - 1887)

1. Die Wärmestrahlung

1.3 Hohlraumstrahlung

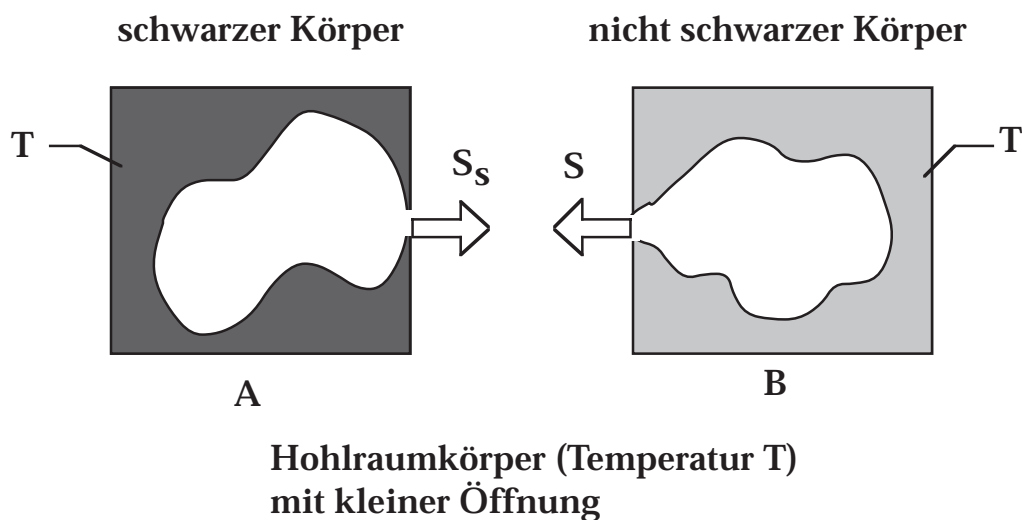
Die maximal mögliche Strahlungsleistung eines Körpers der Temperatur T wird von einem schwarzen Körper emittiert, da in diesem Fall gilt:

$$\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 1$$

und somit

$$S = S_s$$

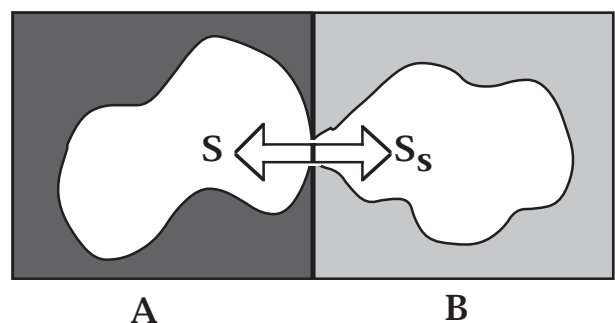
Die Strahlung des schwarzen Körpers kann durch die **Hohlraumstrahlung** ideal simuliert werden.



Die aus den kleinen Öffnungen emittierte Strahlung entspricht in beiden Fällen A und B der Strahlung des schwarzen Körpers.

Beweis:

Falls $S \neq S_s$ wäre, würde sich ein Körper auf Kosten des andern erwärmen, was nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik verboten ist.



1.4 Das Gesetz von Stefan-Boltzmann

Die gesamte Wärmestrahlungsleistung S_s , die von 1 m^2 Oberfläche eines schwarzen Körpers der Temperatur T emittiert wird, ist gegeben durch

$$S_s = \sigma \cdot T^4$$

Gesetz von Stefan-Boltzmann

(J. Stefan, 1835 - 1893 und L. Boltzmann, 1844 - 1906)

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

σ : Stefan-Boltzmann-Konstante

Für einen nicht schwarzen Körper mit dem (mittleren) Emissionsvermögen ε kann man die emittierte Strahlungsleistung angeben durch

$$S = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

Beispiel:

Wie gross ist die von einer glühenden Wolframoberfläche abgegebene Strahlungsleistung P wenn von folgenden Grössen ausgegangen wird:

$$A = 1 \text{ cm}^2, \quad T = 2500 \text{ K}, \quad \varepsilon = 0.26$$

$$P = A \cdot S = A \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

$$= 10^{-4} \cdot 0.26 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (2500)^4 \frac{\text{m}^2 \text{ W K}^4}{\text{m}^2 \text{ K}^4}$$

$$P = 57.6 \text{ W}$$

1.5 Das Wiensche Gesetz

Die Lage des Maximums λ_{\max} im Emissionsspektrum wird durch das Wiensche Gesetz beschrieben

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{T}$$

Wiensches Gesetz (W. Wien, 1864 - 1928)

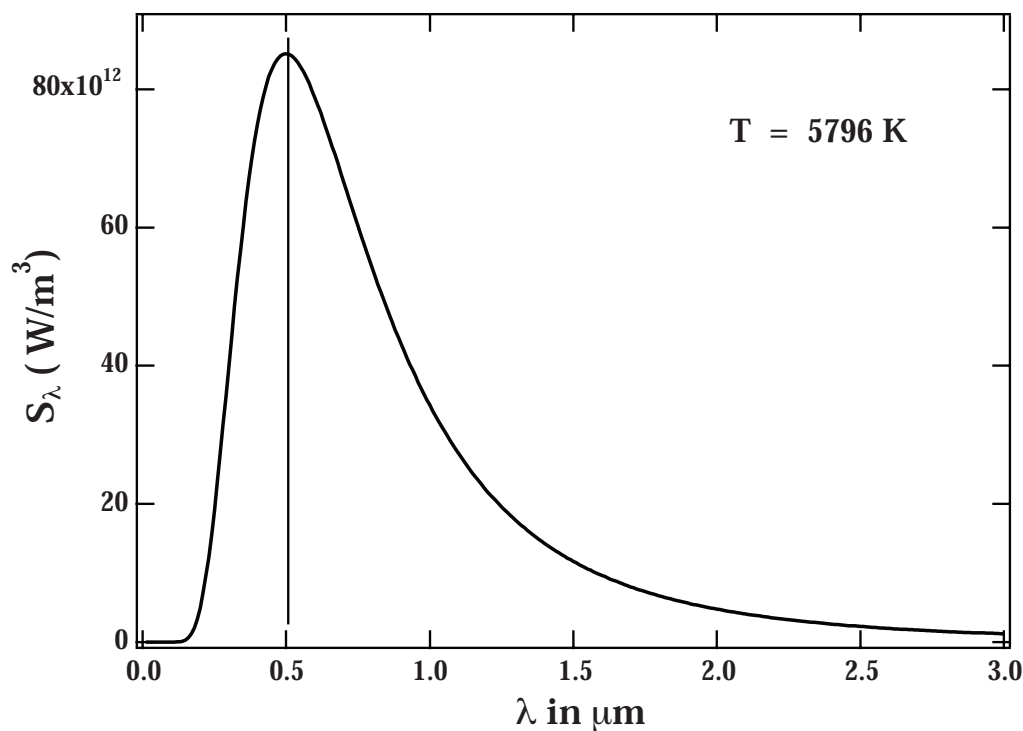
Die Grösse $b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ heisst Wiensche Konstante

Beispiel:

Wie gross ist die Oberflächentemperatur der Sonne wenn für $\lambda_{\max} = 500 \text{ nm}$ angenommen wird? (Die Sonne kann näherungsweise als schwarzer Körper betrachtet werden)

$$T = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{\lambda_{\max}} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}}$$

$$T = 5796 \text{ K}$$



1.6 Das Plancksche Strahlungsgesetz

Max Planck (1858 - 1947) hat eine Theorie entwickelt, welche die korrekte Beschreibung des Emissionsspektrums des schwarzen Körpers lieferte. Diese Theorie basierte auf elektromagnetischen Oszillatoren welche Licht absorbieren und emittieren können. Dabei machte Planck die folgenden einschneidenden Voraussetzungen:

1. Ein Oszillator kann nicht beliebige Energiewerte besitzen sondern nur Werte, die gegeben sind durch

$$E = n h \nu$$

ν ist die Frequenz des Oszillators, h ist eine Konstante und n ist eine ganze Zahl. Damit ist die Energie eine **quantisierte Grösse**.

$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ Plancksches Wirkungsquantum

2. Falls ein Oszillator Energie emittiert oder absorbiert, ist die Energieänderung gegeben durch

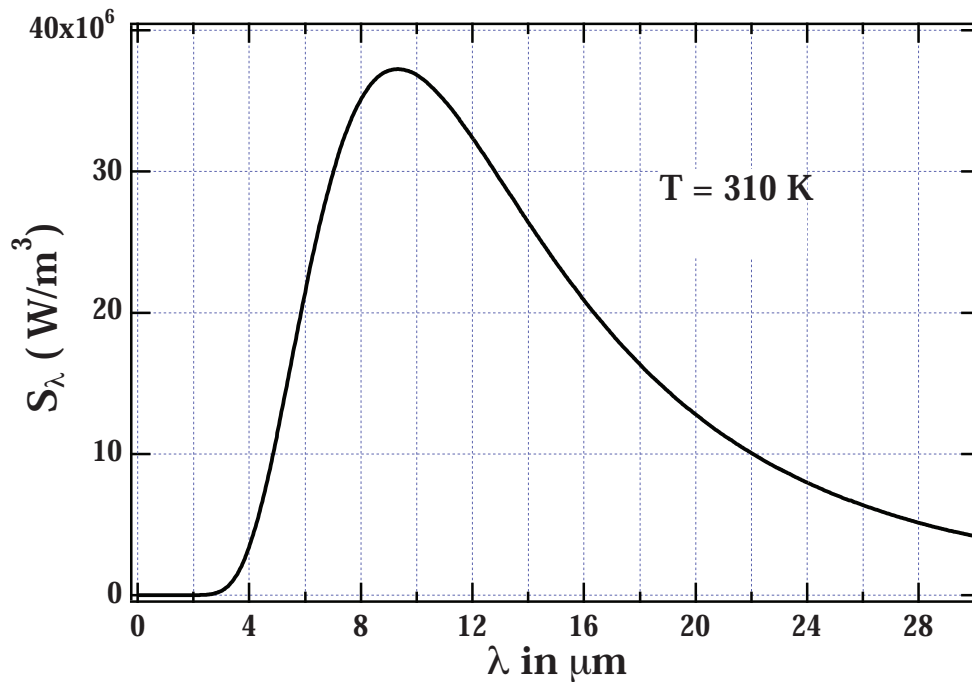
$$\Delta E = m h \nu - n h \nu$$

Solange der Oszillator in einem Quantenzustand verweilt, gibt er weder Energie ab noch nimmt er Energie auf.

Plancksches Strahlungsgesetz

(vorgestellt durch M. Planck am Freitag, 14. Dezember 1900 vor der Berliner Physikalischen Gesellschaft)

$$S_{\lambda} = \frac{2 \pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1}$$



Damit hat Planck im Jahre 1900 eine neue Epoche der Physik begründet und die Basis für die **Quantenmechanik** gelegt.

1.7 Anwendungen der Wärmestrahlung

Berechnung der (mittleren) Oberflächentemperatur der Erde und der Sonne auf der Basis der Solarkonstante.

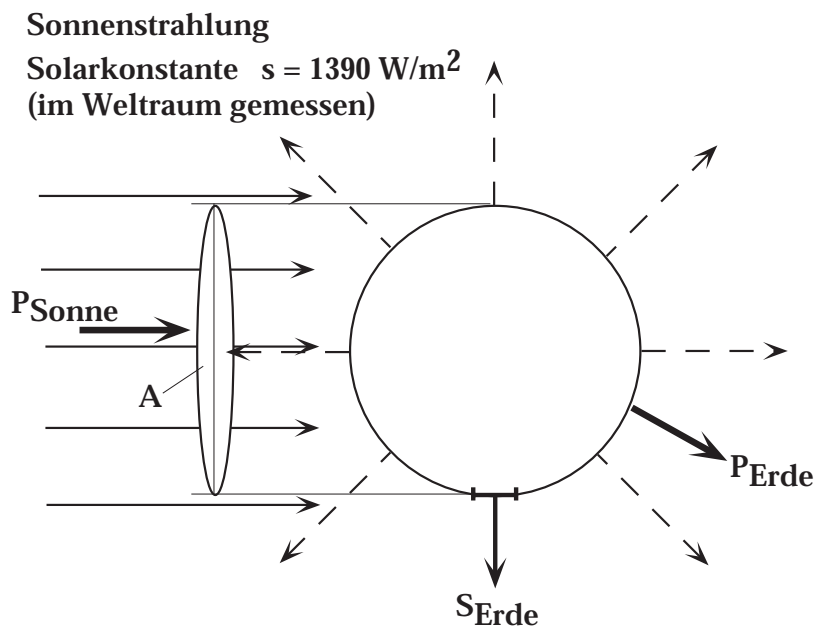
Wir behandeln Erde und Sonne als schwarze Körper.
Im Gleichgewicht muss gelten:

$$P_{\text{Sonne}} = P_{\text{Erde}}$$

$$P_{\text{Sonne}} = A \cdot s = \pi \cdot r_E^2 \cdot s$$

$$S_{\text{Erde}} = \frac{\pi \cdot r_E^2 \cdot s}{4\pi \cdot r_E^2} = \frac{1390}{4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$S_{\text{Erde}} = 348 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$



Gesetz von Stefan-Boltzmann

$$S_{\text{Erde}} = \sigma T_{\text{Erde}}^4$$

$$T_{\text{Erde}} = \sqrt[4]{S_{\text{Erde}} / \sigma} = \sqrt[4]{348 / 5.67 \cdot 10^{-8}} \quad \sqrt[4]{\frac{\text{W m}^2 \text{ K}^4}{\text{m}^2 \text{ W}}}$$

$$T_{\text{Erde}} = 280 \text{ K} = 7 \text{ }^\circ\text{C}$$

(die effektive mittlere Temperatur der Erdoberfläche beträgt $14.2 \text{ }^\circ\text{C}$)

1. Die Wärmestrahlung

- Bei welcher Wellenlänge liegt das Maximum der emittierten Strahlung der Erde?

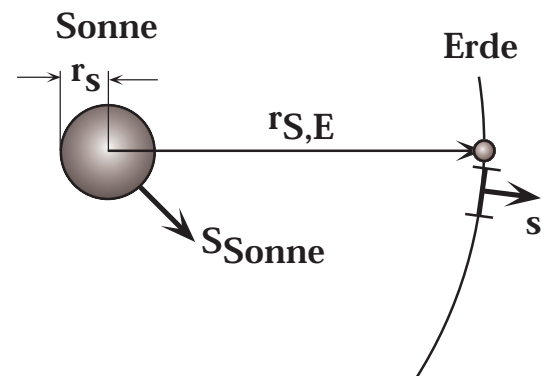
$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3} \text{ mK}}{280 \text{ K}}$$

$$\lambda_{\max} = 10.7 \text{ } \mu\text{m}$$

λ_{\max} liegt im infraroten Bereich (hier absorbiert CO_2 !)

- Berechnung der Oberflächentemperatur der Sonne T_{Sonne} aus der Solarkonstante:

Sonnenradius	$r_S = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Abstand Sonne - Erde	$r_{S,E} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Solarkonstante	$s = 1390 \text{ W/m}^2$



$$S_{\text{Sonne}} = \frac{\text{total emittierte Leistung } P_S}{\text{Oberfläche der Sonne } A_S}$$

$$= \frac{4 \pi r_{S,E}^2 \cdot s}{4 \pi r_S^2} = \frac{(1.496 \cdot 10^{11})^2}{(6.96 \cdot 10^8)^2} \cdot 1390$$

$$S_{\text{Sonne}} = 6.42 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$S_{\text{Sonne}} = \sigma T_{\text{Sonne}}^4$$

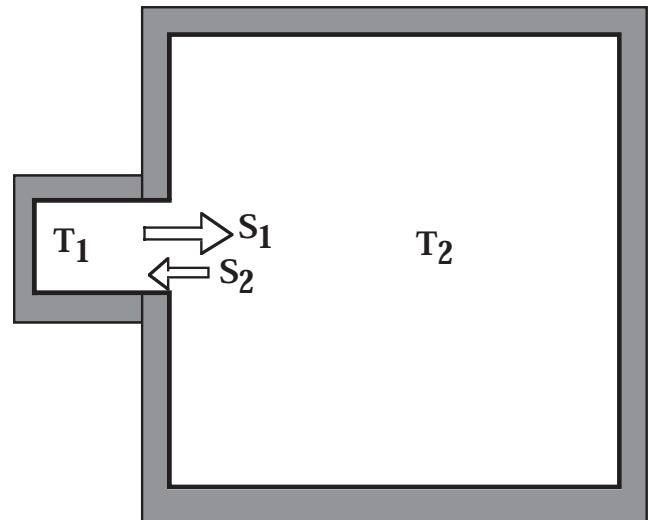
$$T_{\text{Sonne}} = \sqrt[4]{\frac{S_{\text{Sonne}}}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{6.42 \cdot 10^7}{5.67 \cdot 10^{-8}}} \sqrt[4]{\frac{\text{Wm}^2\text{K}^4}{\text{m}^2\text{W}}}$$

$$T_{\text{Sonne}} = 5800 \text{ K}$$

Netto- Abstrahlung von Wärme

Ein Ofen der Temperatur $T_1 = 500 \text{ K}$ strahlt Wärme ab in einen Raum der Temperatur $T_2 = 300 \text{ K}$.

Wie gross ist die abgestrahlte Nettoleistung des Ofens?



$$\frac{P}{A} = S_1 - S_2 = \sigma T_1^4 - \sigma T_2^4$$

$$\frac{P}{A} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

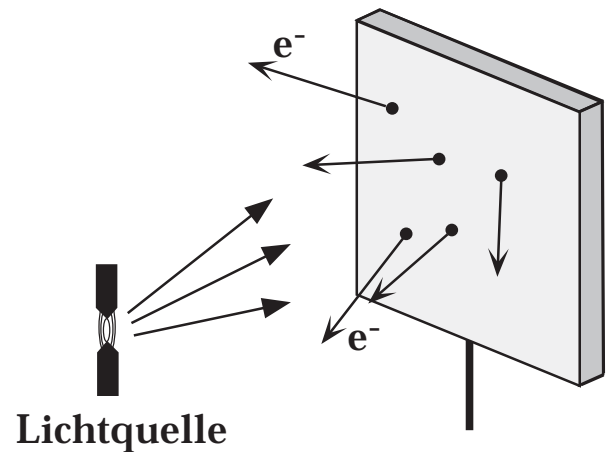
$$= 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 5.44 \cdot 10^{10} \quad \frac{\text{W K}^4}{\text{m}^2 \text{ K}^4}$$

$$\frac{P}{A} = 3.084 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

2. Einsteins Photonentheorie

2.1 Der Photoeffekt

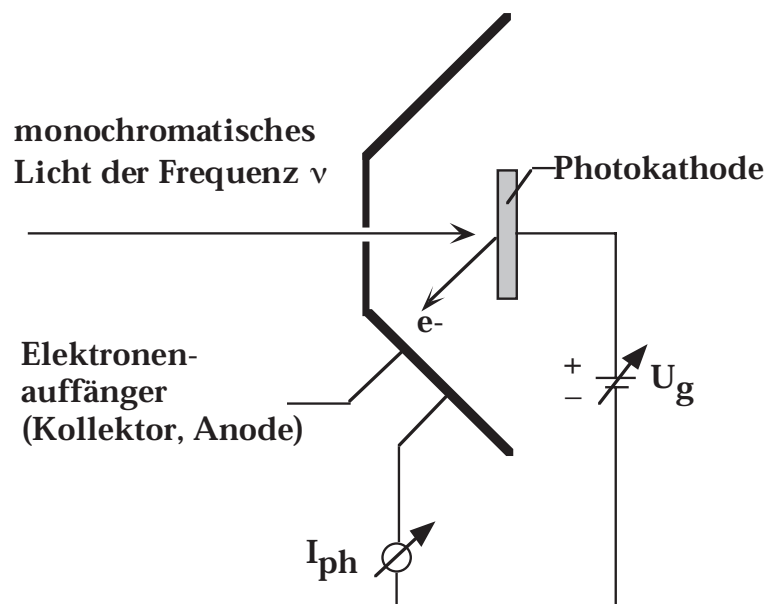
Wird eine Metallplatte mit ultraviolettem Licht bestrahlt, so lädt sie sich auf ein positives Potential auf. Diese Aufladung entsteht durch die Emission von Elektronen aus der Metallplatte. Das Experiment zeigt, dass unabhängig von der Lichtintensität keine Elektronenemission erfolgt, wenn ein UV-Filter zwischen die Lichtquelle und die Metallplatte gehalten wird. Das bedeutet, dass offenbar nur oberhalb einer minimalen Lichtfrequenz ν_0 eine Elektronenemission erfolgt.



2.2 Maximalenergie der Photoelektronen

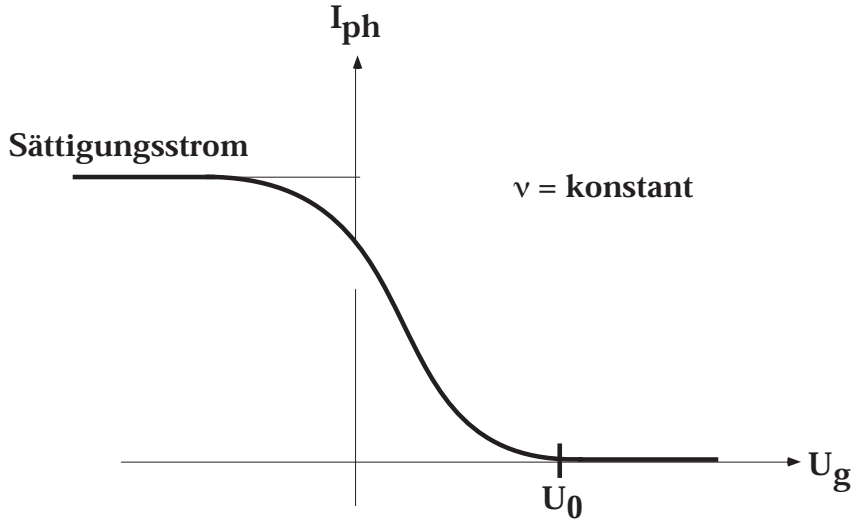
Die Maximalenergie der Photoelektronen kann mit einem einfachen Experiment bestimmt werden.

Das Ampèremeter misst den Strom I_{ph} der Photoelektronen. Die Batterie U_g erzeugt ein elektrisches Bremsfeld für die aus der Photokathode emittierten Photoelektronen.

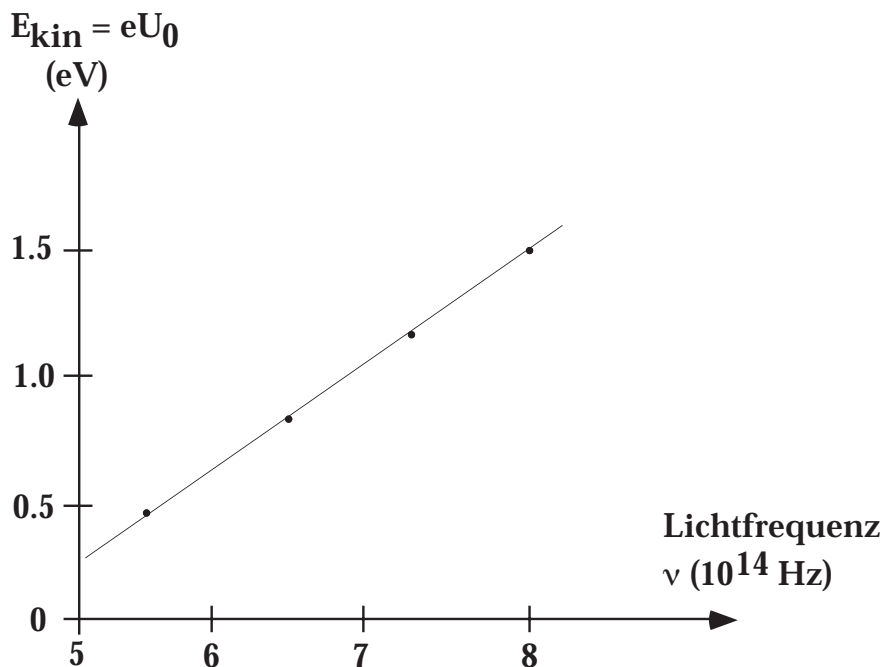


2. Einsteins Photonentheorie

Der Photostrom I_{ph} hängt stark von U_{g} ab.



Bei der Spannung $U_{\text{g}} = U_0$ ist der Strom I_{ph} auf null abgesunken. Die höchsten kinetischen Energien der Photoelektronen E_{kin} reichen somit gerade bis zur Energie eU_0 . Wird das Experiment mit verschiedenen Lichtfrequenzen durchgeführt so erhält man folgendes Resultat:



Die Messpunkte liegen auf einer Geraden (der Einsteinschen Geraden)

$$eU_0 = E_{\text{kin}} = a \cdot \nu + b$$

Für die Konstante a liefert das Experiment den Wert $4 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} = 6.4 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Dieser Wert entspricht dem Planckschen Wirkungsquantum

$$\begin{aligned} h &= 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ &= 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

2.3 Lichtquanten

Der Photoeffekt lässt sich nicht durch Anwendung der Maxwell'schen Gleichungen auf der Basis der Wellennatur des eingestrahlteten Lichtes erklären.
Einstein übernahm das Konzept von Planck, der den Oszillatoren (Atomen) in den Wänden der Hohlraumstrahler die Energie

$$E = n h \nu$$

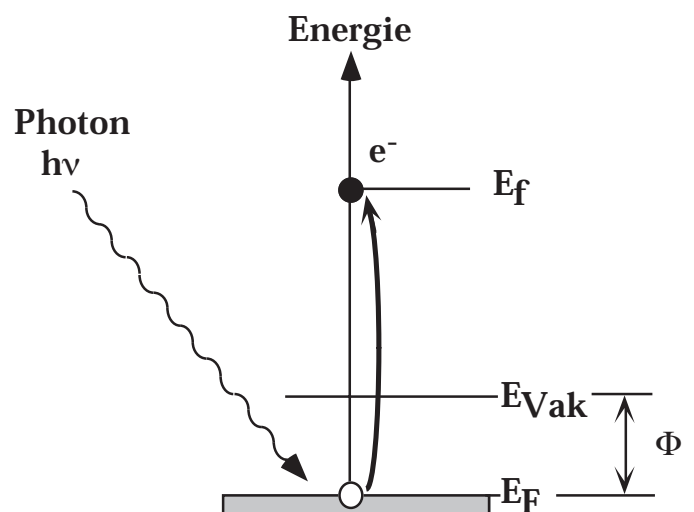
zuordnete. In diesem Bild kann Licht der Frequenz ν als Korpuskelstrahl (Teilchenstrahl) interpretiert werden. Die Teilchen werden als **Lichtquanten** oder **Photonen** bezeichnet und besitzen die Energie

$$E = h \nu \quad \text{Photonenenergie}$$

Mit diesem Modell lässt sich der Photoeffekt zusammen mit dem Energiesatz ganz zwanglos erklären.

E_F : höchstes von Elektronen besetztes Niveau im Metall

E_{Vak} : Vakuumniveau (entspricht der Energie eines ruhenden Elektrons im Vakuum)



2. Einsteins Photonentheorie

Durch Absorption des Photons $h\nu$ wird ein Elektron vom Niveau E_F auf die Energie E_f angehoben. Der Energiesatz verlangt

$$E_f = E_F + h\nu$$

Die kinetische Energie E_{kin} des emittierten Elektrons ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_f - E_{\text{Vak}} \\ &= h\nu - (E_{\text{Vak}} - E_F) \end{aligned}$$

$$E_{\text{Vak}} - E_F = \phi \quad \text{ist die Austrittsarbeit der Photoelektronen}$$

$$E_{\text{kin}} = eU_0 = h\nu - \phi$$

Einsteinsche Gerade
(A. Einstein 1879 - 1955)

Eigenschaften der Photonen

Energie

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

Masse

aus $E = mc^2$ folgt

$$m = \frac{h\nu}{c^2} = h \frac{1}{\lambda c}$$

Impuls

$$p = mc$$

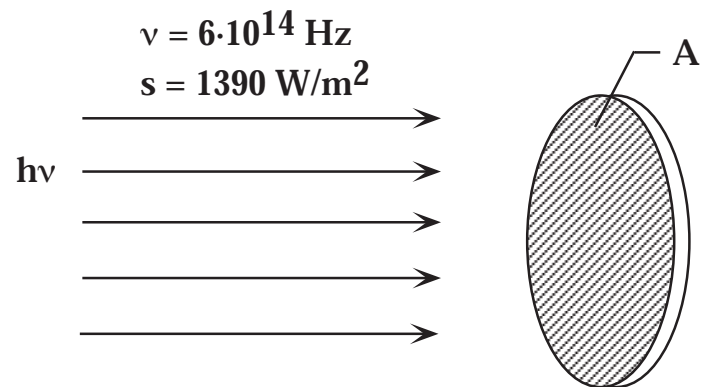
$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Photonen besitzen somit wie ein klassisches Teilchen eine Energie, eine Masse und einen Impuls.

Beispiel:

Licht, das auf eine Fläche A fällt und reflektiert wird, erzeugt über die Impulsänderung der Photonen einen Strahlungsdruck auf A .

Gesucht: Strahlungsdruck p_s der Sonnenstrahlung auf eine (reflektierende) Scheibe.



Druck

$$p_s = \frac{F}{A} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{A}$$

Photonenstrom I_{ph} auf A

$$I_{ph} = \frac{s}{h\nu} \cdot A$$

Impulsänderung pro Zeit

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = 2 \cdot I_{ph} \cdot \frac{h\nu}{c}$$

$$p_s = 2 \cdot \frac{s}{h\nu} \cdot A \cdot \frac{h\nu}{c} \cdot \frac{1}{A}$$

$$p_s = 2 \frac{s}{c}$$

$$p_s = 2 \frac{1390}{3 \cdot 10^8} \frac{\text{Nms}}{\text{sm}^2\text{m}} = 9.3 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$$

(entspricht etwa dem Druck in einem Hochvakuumgefäß)

2.4 Andere Lichtquantenphänomene

Der Comptoneffekt (1923)

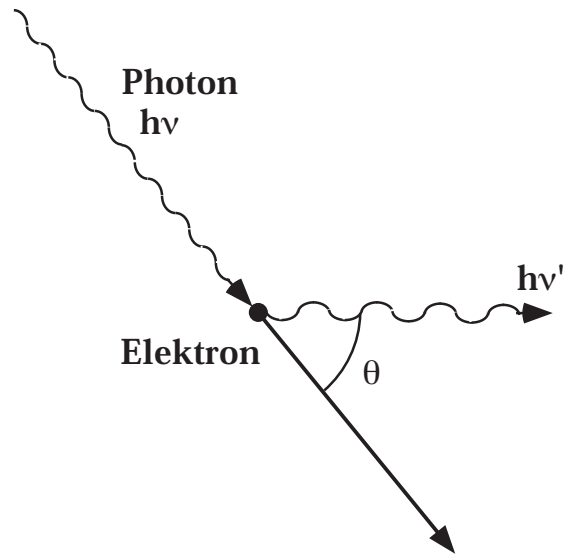
(A. H. Compton, 1892 - 1962)

Phänomen:

Eine elektromagnetische Welle der Frequenz ν (Wellenlänge λ) wird an (ruhenden) Elektronen gestreut. Die gestreute Welle besitzt eine kleinere Frequenz ν' (Wellenlänge λ').

Der Effekt kann erklärt werden als Zweierstoss zwischen dem Photon $h\nu$ und dem vor dem Stoss ruhenden Elektron. Energie- und Impulserhaltungssatz liefern

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

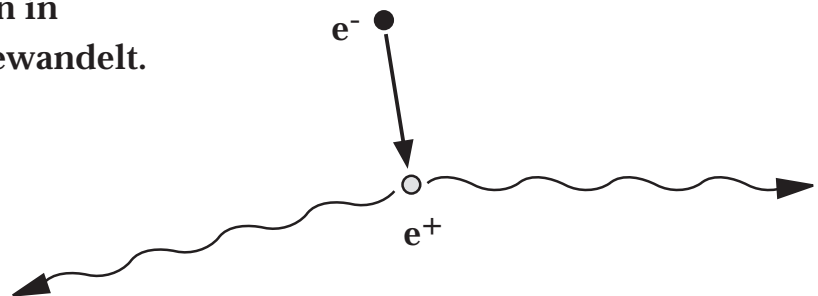


Positronenannihilation

Phänomen:

Trifft ein langsames Positron (Antiteilchen des Elektrons, das positiv geladen ist) auf ein Elektron, so findet ein Annihilationsprozess statt. Positron und Elektron werden in zwei Lichtquanten E_γ und E'_γ umgewandelt.

$$E_\gamma = 511 \text{ keV}$$



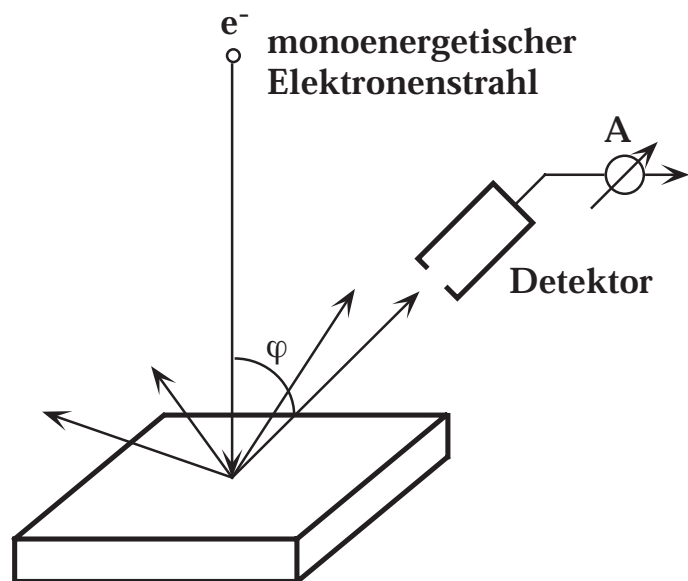
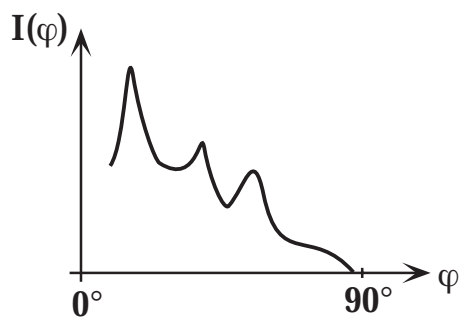
3. Dualismus Welle-Korpuskel

3.1 Materiewellen

Louis de Broglie (1892- 1987) schlug 1924 vor, dass Teilchenstrahlen (z.B. Elektronenstrahlen), ähnlich wie die elektromagnetische Strahlung, auch den Dualismus Welle - Korpuskel zeigen sollten.

Eine typische Eigenschaft von Wellen ist die Beugung. 1927 ist es C. J. Davisson und L. H. Germer gelungen in einem Experiment die Beugung von Elektronenstrahlen an einem Kristall zu zeigen.

Die rückgestreuten Elektronen weisen Intensitätsmaxima in bestimmten Richtungen auf, die durch Beugung einer Welle am Kristallgitter erklärt werden können.



Einen analogen Effekt kann man durch Beugung von elektromagnetischen Wellen (in diesem Fall Röntgenstrahlung) an einem Kristall beobachten.

3.2 de Broglie Wellen

Der Elektronenstrahl wird für die Interpretation des Experiments von Davisson und Germer durch eine Welle mit folgenden Eigenschaften dargestellt:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

de Broglie Wellenlänge

wobei p der Elektronenimpuls bedeutet und h das Plancksche Wirkungsquantum ist.

Die Frequenz der de Broglie Welle ist gegeben durch

$$\nu = \frac{E}{h}$$

Diese Beziehungen sind identisch mit denjenigen der Photonen.

Nach der Wellenoptik ist die Bedingung für Beugungseffekte dadurch gegeben, dass die Wellenlänge λ der Strahlung von der gleichen Grössenordnung wie die Gitterkonstante a sein muss.

$$\lambda \approx a$$

Beispiel: Beugung von Elektronenstrahlen mit $E = 100 \text{ eV}$ an einem Kristall.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E}} \\ &= \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 100 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}} \quad \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\sqrt{\text{kg} \cdot \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}} \end{aligned}$$

$$\lambda = 1.2 \text{ \AA}$$

3.3 Heisenbergsche Unschärferelation

Nach der Heisenbergschen Unschärferelation ist die Messung des Ortes und des Impulses für ein Teilchen nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit möglich.

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}$$

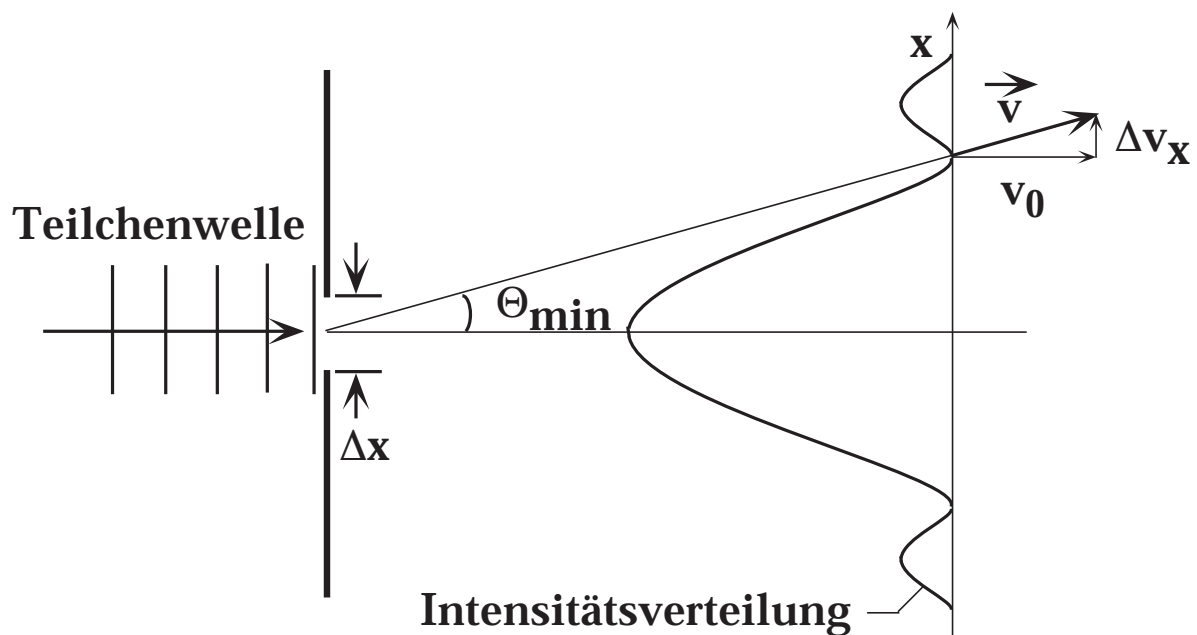
Heisenbergsche Unschärferelation, 1927

(W. Heisenberg, 1901 - 1976)

Δx : Ortsunschärfe

Δp_x : Impulsunschärfe

Eine anschauliche Begründung für dieses Gesetz erhält man durch die Beugung einer de Broglie Welle an einem Spalt.



3. Dualismus Welle - Korpuskel

Die Spaltbreite Δx bestimmt die Genauigkeit der Ortsbestimmung in x-Richtung. Die Intensitätsverteilung erhält jetzt die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, dass ein Teilchen unter einem bestimmten Winkel θ abgelenkt wird.

Aus der Wellenoptik folgt

$$\sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{\Delta x}$$

oder für kleine Winkel θ

$$\theta_{\min} \approx \frac{\lambda}{\Delta x} \approx \frac{\Delta v_x}{v_0}$$

$$\Delta v_x \cdot \Delta x \approx v_0 \cdot \lambda$$

die de Broglie Wellenlänge λ beträgt

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v_0}$$

eingesetzt

$$\Delta v_x \cdot \Delta x \approx v_0 \cdot \frac{h}{m v_0}$$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \approx h$$

VII. Atome, Moleküle, Festkörper

1. Atombau

1.1 Kern und Elektronenhülle

Die Atome sind die Bausteine der chemischen Elemente. Sie bestehen aus dem Atomkern, der die positive Ladung $Z \cdot e$ besitzt und der negativen Elektronenhülle mit der Ladung $-Z \cdot e$. Z ist die Ordnungszahl des Atoms.

Dimensionen

Atomradius r_A

Abschätzung aus der Dichte und der Atommasse eines Festkörpers:

$$\rho = 2.7 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

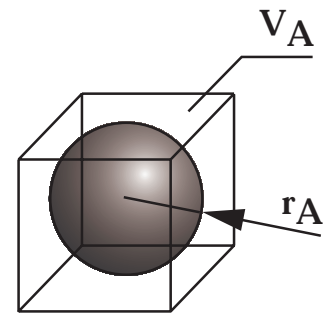
$$A = 27 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

Volumen eines Atoms

$$V_A = \frac{A}{\rho N_A} = \frac{27 \cdot 10^{-3}}{2.7 \cdot 10^3 \cdot 6.02 \cdot 10^{23}} \frac{\text{kg m}^3 \text{ mol}}{\text{mol kg}}$$

$$V_A = 1.66 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3$$

$$r_A = \frac{1}{2} \sqrt[3]{V_A} = 1.3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$



1. Atombau

Kernradius r_K

$$r_K \approx 5 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 5 \text{ fm}$$

Größenverhältnis Atom / Atomkern:

$$\frac{r_A}{r_K} \approx 10^5$$

Massenverhältnisse:

Elektron: $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Proton: $m_p = 1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Neutron: $m_n = 1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Beispiel: He - Atom $Z = 2$

Massenverhältnis

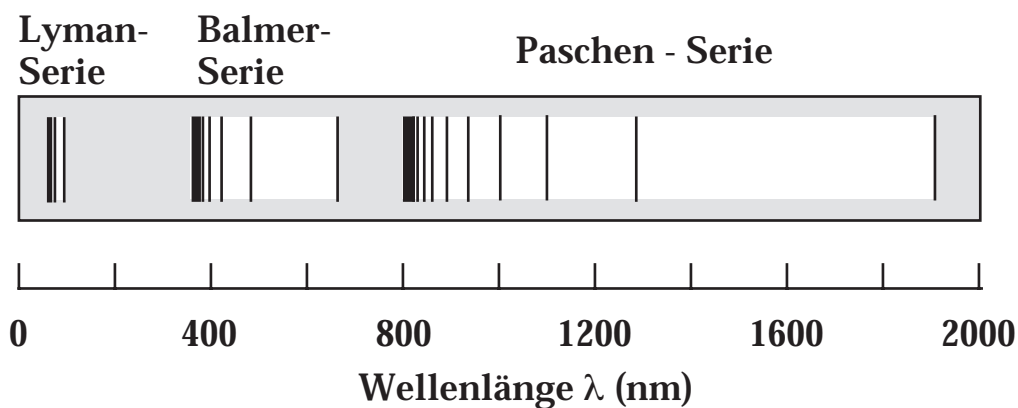
$$\frac{m_{\text{Kern}}}{m_{\text{Hülle}}} \approx \frac{4 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27}}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}$$
$$\frac{m_{\text{Kern}}}{m_{\text{Hülle}}} \approx 3740$$

In Kapitel VIII werden wir näher auf den Atomkern eingehen.

1.2 Linienspektren des Wasserstoffatoms

Bei der Wärmestrahlung haben wir gesehen, dass die emittierte Strahlung ein kontinuierliches Spektrum darstellt. Im Gegensatz dazu zeigen Atome bei der Lichtabsorption und Emission Linienspektren.

Das Wasserstoffatom zeigt Serien von Linien, die im ultravioletten, sichtbaren und infraroten Bereich liegen:



Niels Bohr (1885 - 1962) schlug 1913 ein Modell vor, das die Wellenlängen des Linienspektrums des H-Atoms (oder H-ähnlichen Atomen wie He^+ , Li^{++}) sehr genau erklärte.

2. Bohrsches Atommodell

2.1 Bohrsche Postulate

Das Bohrsche Atommodell basiert auf 3 Postulaten

Für das Elektron existieren diskrete Energieniveaus E_n . Auf diesen Niveaus strahlt das Elektron nicht. Strahlung kann nur beim Übergang zu einem zweiten Niveau abgegeben werden und es gilt

$$h\nu = E_k - E_j$$

(erstes und drittes Bohrsches Postulat)

Annahme: Das Elektron bewegt sich auf einer Kreisbahn

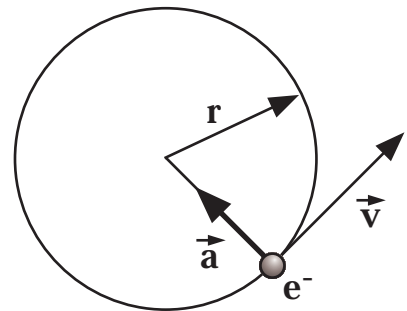
$$F = m_e a$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z \cdot e) e}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Z \cdot e^2}{r}$$

$$E_{\text{pot}} = -eU = -\frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$



Gesamtenergie E

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{Z \cdot e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

E ist damit als Funktion von r ausgedrückt.

2. Bohrsches Atommodell

Aus obigen Formeln lassen sich auch die Bahngeschwindigkeit v , die Frequenz ν_0 , der Impuls p und der Bahndrehimpuls L angeben:

$$v = \sqrt{\frac{Z \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e \cdot r}}$$

$$\nu_0 = \frac{v}{2\pi r} = \sqrt{\frac{Z \cdot e^2}{16\pi^3 \cdot \epsilon_0 \cdot m_e \cdot r^3}}$$

$$p = m_e v = \sqrt{\frac{Z \cdot m_e \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}}$$

$$L = r p = \sqrt{\frac{Z \cdot m_e \cdot e^2 \cdot r}{4\pi\epsilon_0}}$$

Nach dem zweiten Bohrschen Postulat ist der Bahndrehimpuls L quantisiert:

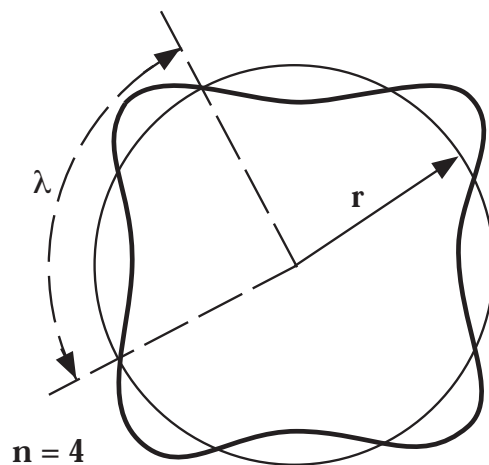
Der Bahndrehimpuls ist quantisiert und nimmt die Werte an

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dieses Postulat ergibt sich anschaulich durch die Annahme einer stehenden de Broglie Welle auf einer Kreisbahn.

$$2\pi r = n \cdot \lambda = n \frac{h}{p}$$

$$L = r \cdot p = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$



eingesetzt in den Bahndrehimpuls erhalten wir

$$n \frac{h}{2\pi} = \sqrt{\frac{Z \cdot m_e \cdot e^2 \cdot r}{4\pi\epsilon_0}}$$

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi \cdot Z \cdot m_e \cdot e^2} \cdot n^2$$

eingesetzt in die Energie E liefert die möglichen Werte E_n

$$E_n = - \frac{Z^2 e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$= - 13.6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2}$$

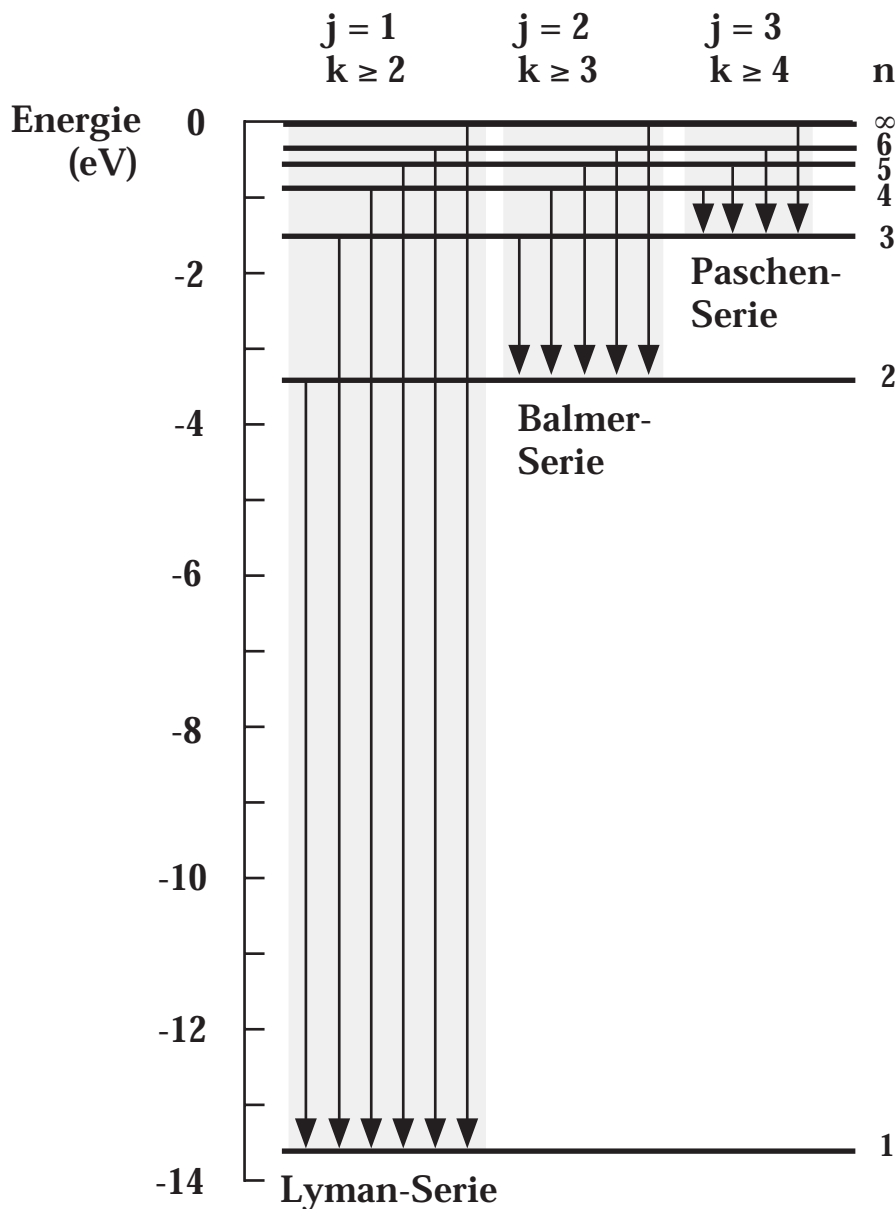
Die Energiewerte E_n erklären das Linienspektrum des H-Atoms exakt, obwohl in der Quantenmechanik später gezeigt wurde, dass die korrekte Quantisierung des Bahndrehimpulses lautet

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \cdot \frac{h}{2\pi}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

2.2 Termschema des H-Atoms

Die erlaubten Energien $h\nu$ für die Lichtabsorption oder Emission ergibt sich nun aus den Energiedifferenzen zwischen zwei Zuständen E_j und E_k .

$$h\nu = \frac{Z^2 e^4 m_e}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$



3. Quantenzahlen

3.1 Beschreibung von Elektronenzuständen

Für die Beschreibung von Elektronenzuständen im dreidimensionalen Raum werden (entsprechend der Anzahl Freiheitsgrade) vier Quantenzahlen benötigt:

Hauptquantenzahl n

Bahnquantenzahl ℓ

magnetische Bahnquantenzahl m_ℓ

Spinquantenzahl m_s

Quantenzahl	mögliche Werte Bezeichnung	Anzahl möglicher Werte
Hauptquantenzahl n	1, 2, 3, 4, ... K, L, M, N, ...	
Bahnquantenzahl ℓ	0, 1, 2, 3, ... s, p, d, f, ...	n $L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$
magnetische Quantenzahl m_ℓ	$-\ell, -\ell+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell-1, \ell$	$2\ell+1$ pro ℓ -Wert
Spinquantenzahl m_s	$\pm 1/2$	2

Die magnetische Bahnquantenzahl m_ℓ gibt die Richtung des Bahndrehimpulses (z.B. relativ zu einem äusseren Magnetfeld) an.

Zu jeder Bahnquantenzahl ℓ existieren für den Bahndrehimpuls L $2\ell+1$ Einstellungsmöglichkeiten (Richtungsquantisierung).

3. Quantenzahlen

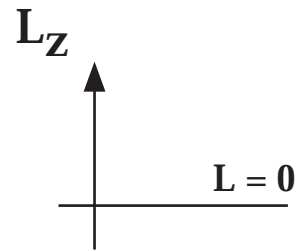
$$n = 1$$

$$\ell = 0$$

$$m_\ell = 0$$

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \hbar = 0$$

$$L_Z = 0$$



$$n = 2$$

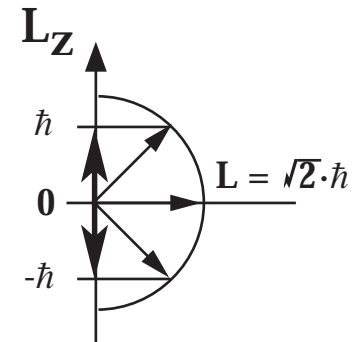
$$\ell = 0, 1$$

$$m_\ell = -1, 0, 1$$

$$\ell = 1$$

$$L = \sqrt{2} \hbar$$

$$L_Z = m_\ell \hbar$$



$$n = 3$$

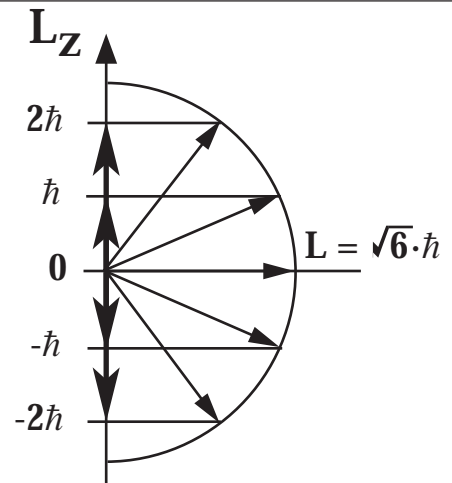
$$\ell = 0, 1, 2$$

$$m_\ell = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$\ell = 2$$

$$L = \sqrt{6} \hbar$$

$$L_Z = m_\ell \hbar$$



$$n = 4$$

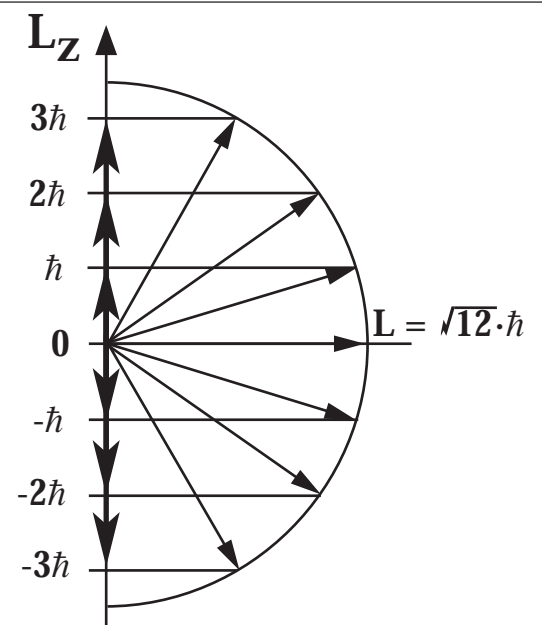
$$\ell = 0, 1, 2, 3$$

$$m_\ell = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$\ell = 3$$

$$L = \sqrt{12} \hbar$$

$$L_Z = m_\ell \hbar$$



3.2 Pauli Prinzip

Das Pauli Prinzip (Wolfgang Pauli, 1900 - 1958) macht eine Aussage über die Art der Besetzung von Elektronenzuständen:

Ausschlussprinzip von W. Pauli

Ein elektronischer Quantenzustand, der durch die vier Quantenzahlen n , l , m_l und m_s charakterisiert ist, darf höchstens von einem Elektron besetzt sein.

Im **Grundzustand** eines Atoms besetzen die Elektronen die möglichen Zustände so, dass die Gesamtenergie minimal ist.

Besetzungen im Grundzustand

Ordnungszahl	Element	K-Schale			L-Schale		
		1s	2s	2p	2s	2p	2p
1	H	↑					
2	He	↑↓					
3	Li	↑↓	↑				
4	Be	↑↓	↑↓				
5	B	↑↓	↑↓	↑			
6	C	↑↓	↑↓	↑↑			
7	N	↑↓	↑↓	↑↑↑			
8	O	↑↓	↑↓	↑↑↑↓			
9	F	↑↓	↑↓	↑↑↑↓↓			
10	Ne	↑↓	↑↓	↑↑↑↓↓↓			

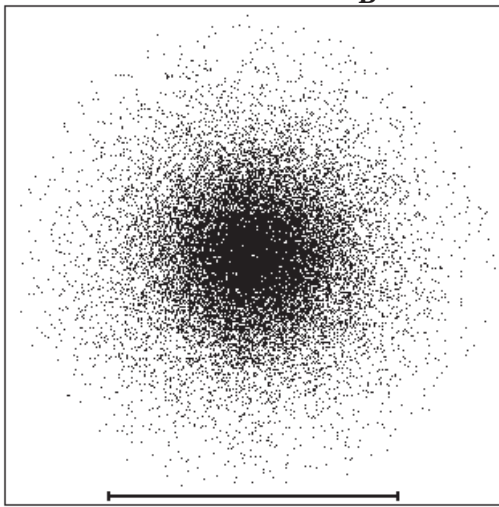
3.3 Orbitale

Orbitale beschreiben die räumliche Verteilung der Elektronenladungsdichten. Diese ergeben sich aus den Elektronen-Wellenfunktionen $\psi_{n,l}(\vec{r})$. Das Quadrat der Wellenfunktion $\psi_{n,l}^2(\vec{r})$ hat die Bedeutung einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons im Zustand n, ℓ .

Beispiele:

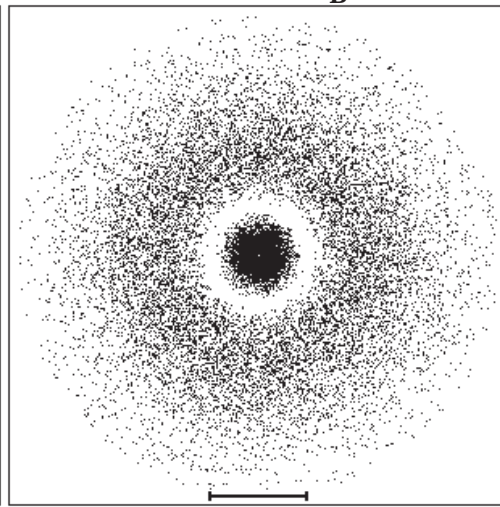
1s, 2s, 2p Orbitale des H-Atoms (r_B ist der Bohrsche Radius: $r_B = 0.52918 \cdot 10^{-11} \text{m}$)

$n = 1$
 $\ell = 0$



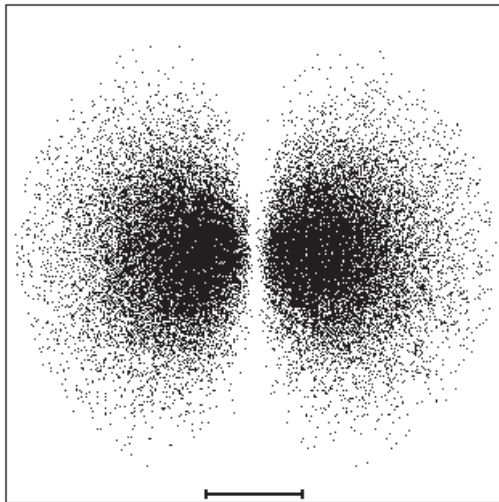
$4 \cdot r_B$

$n = 2$
 $\ell = 0$



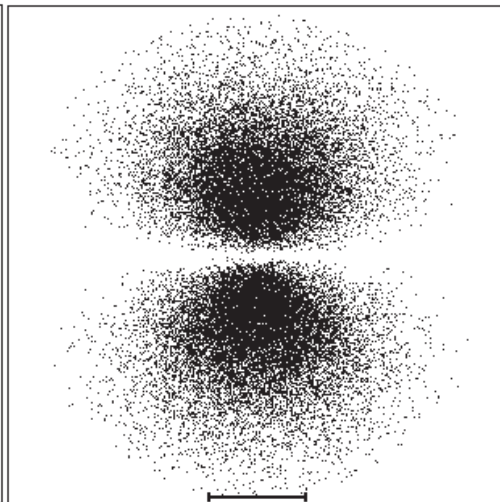
$4 \cdot r_B$

s Zustände



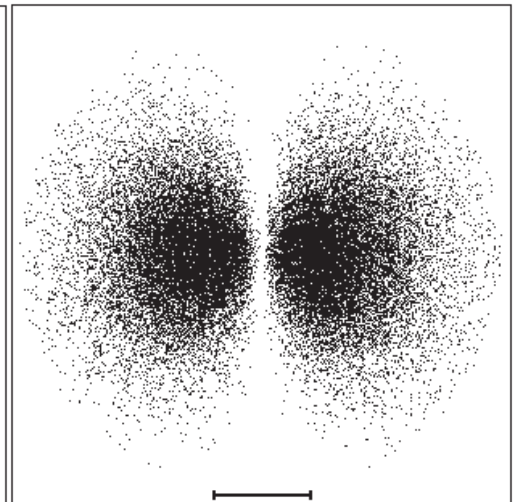
$4 \cdot r_B$

$m_\ell = -1$



$4 \cdot r_B$

$m_\ell = 0$



$4 \cdot r_B$

$m_\ell = +1$

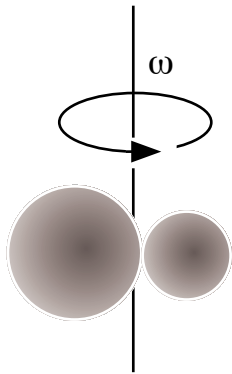
$n = 2$

$\ell = 1$

p Zustände

4. Molekülspektren

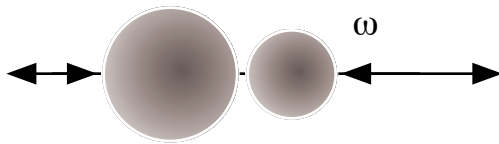
Molekülspektren sind wesentlich komplizierter als Atomspektren. Polare Moleküle (z.B. HCl) können über Rotations- und Vibrationszustände zusätzlich Strahlung absorbieren oder emittieren (Rotations- und Vibrationsbanden).



Rotationszustände

$$\hbar\omega_{\text{rot}} \approx 10^{-3} \text{ eV}$$

$$\lambda_{\text{rot}} \approx 1 \text{ mm} \quad (\text{fernes Infrarot})$$



Vibrationszustände

$$\hbar\omega_{\text{vibr}} \approx 10^{-2} \dots 10^{-1} \text{ eV}$$

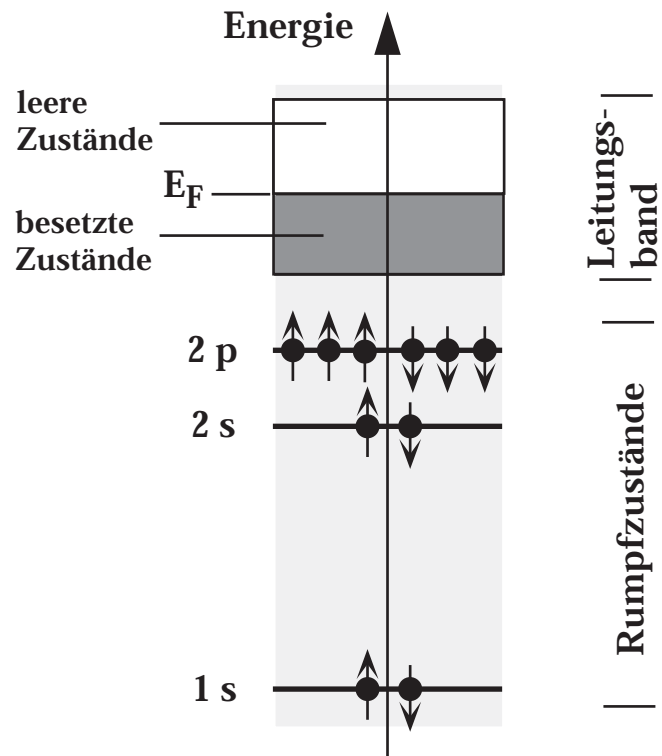
$$\lambda_{\text{vibr}} \approx 10 \dots 100 \mu\text{m} \quad (\text{nahes Infrarot})$$

5. Festkörper

In einem Festkörper (oder allgemeiner in kondensierter Materie) findet eine Wechselwirkung zwischen den Valenzelektronen statt. Diese Wechselwirkung kommt dadurch zustande, dass sich die Wellenfunktionen benachbarter Atome überlappen und als Folge davon neue Zustände in der Form von sogenannten **Bändern** bilden.

Beispiel: Natrium

E_F : höchstes besetztes Energieniveau im Grundzustand

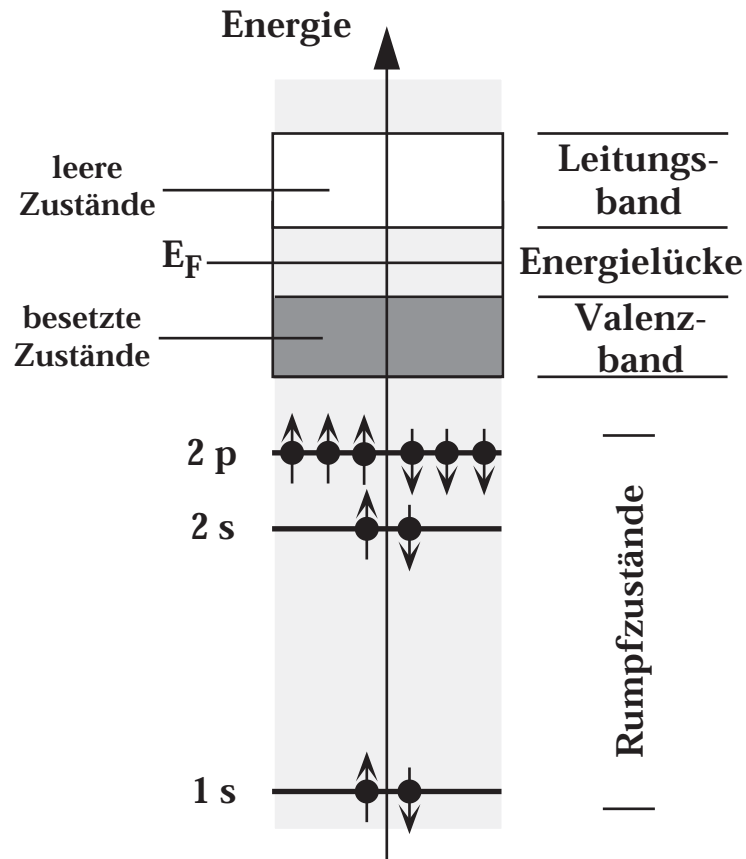


Das Leitungsband besitzt eine Breite von einigen Elektronenvolt. Da jedes Atom einige Valenzelektronen besitzt, ergibt sich eine sehr hohe Dichte von elektronischen Zuständen im Leitungsband von der Größenordnung 10^{23} Zustände pro eV und Mol. Das Leitungsband ist also quasi kontinuierlich von Elektronen besetzt.

5. Festkörper

Die Valenzelektronen können auch zwei Bänder bilden, die durch eine Energielücke getrennt sind.

Beispiel: Silizium



Bei einem Metall liegt die Fermienergie innerhalb eines Bandes, während bei einem Isolator (oder Halbleiter) die Fermienergie in einer Energielücke liegt.

6. Anwendungen

Bei vielen physikalischen Effekten und technischen Anwendungen spielen elektronische Übergänge zwischen diskreten Energieniveaus in Atomen, Gasen oder Festkörpern eine zentrale Rolle.

Beispiele:

Lumineszenz, Fluoreszenz

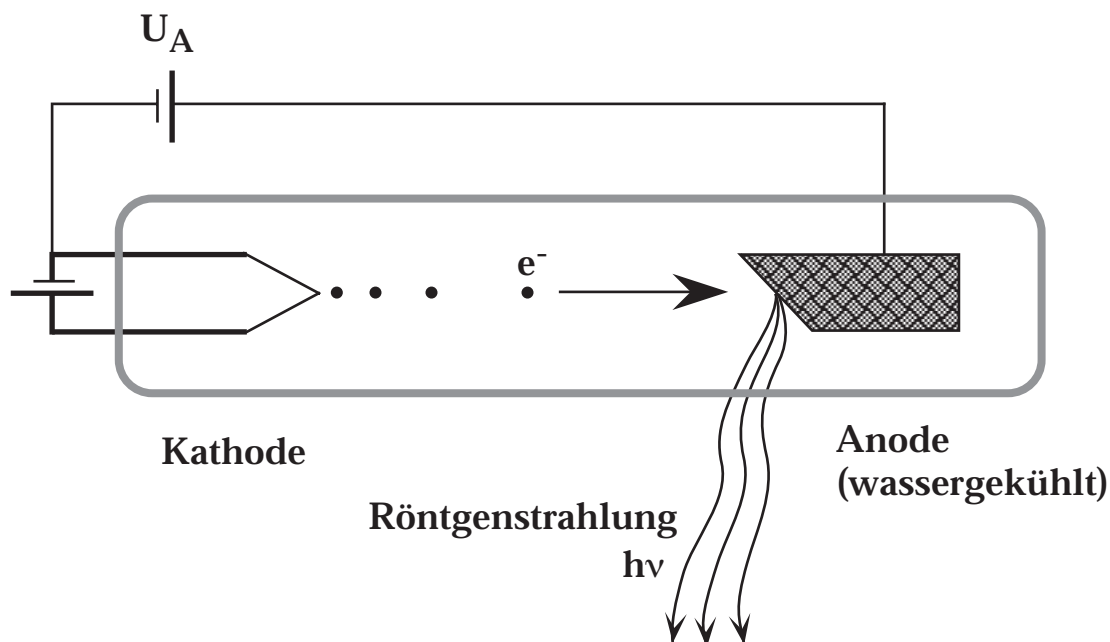
Laser ('Light amplification by stimulated emission of radiation')

Röntgenstrahlung

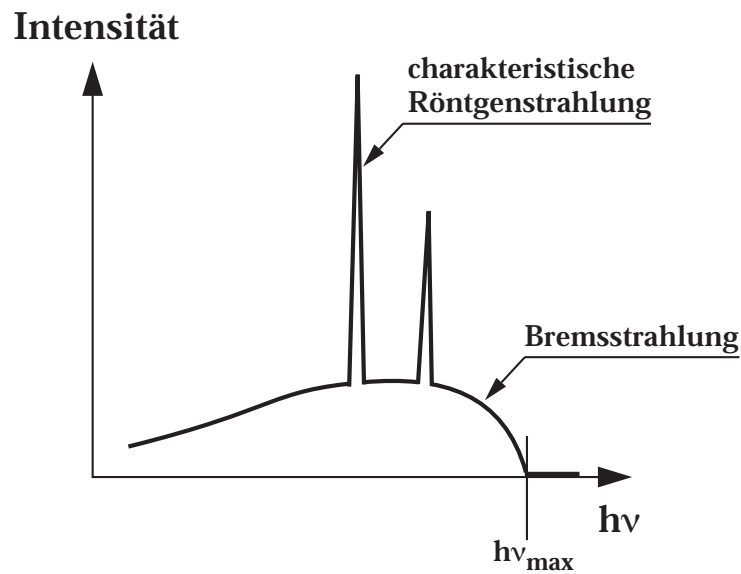
Erzeugung von Röntgenstrahlung

Bei Experimenten mit Gasentladungen bei hohen elektrischen Spannungen hat W. C. Röntgen (1845 - 1923) 1895 die Emission harter elektromagnetischer Strahlung entdeckt

Aufbau einer Röntgenröhre



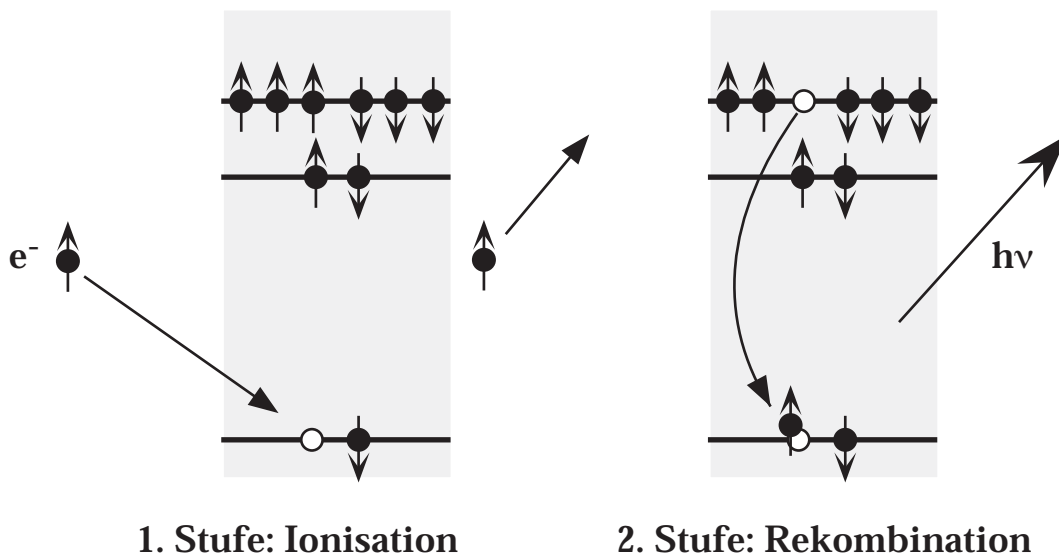
Spektrum der emittierten Strahlung



$$\text{Maximalenergie } h\nu_{\max} = eU_A$$

Die **Bremsstrahlung** entsteht durch das rasche Abbremsen der Elektronen beim Aufprall auf die Anode.

Die **charakteristische Röntgenstrahlung** entsteht durch Ionisation eines Rumpfniveaus des Anodenmaterials. Als Folge davon rekombiniert ein Elektron von einem höheren Energieniveau mit dem unbesetzten Zustand und sendet dabei ein Photon mit einer charakteristischen Energie aus.



VIII. Der Atomkern und Kernstrahlung

1. Aufbau des Atomkerns

1.1 Bausteine des Atomkerns

Der Atomkern ist aus den Nukleonen aufgebaut. Dazu gehören die **Protonen (p)** und die **Neutronen (n)**.

Eigenschaften der Protonen und Neutronen

	Proton	Neutron
Masse	$1.672623 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$1.674929 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Ladung	$1.602189 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	0
Lebensdauer	$> 10^{31} \text{ Jahre}$	900 s
Spin	$\frac{1}{2} \hbar$	$\frac{1}{2} \hbar$
magnetisches Moment	$2.79 \mu_K$	$-1.91 \mu_K$

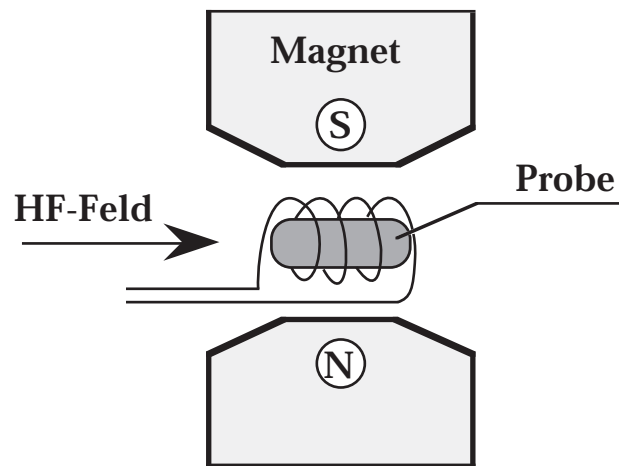
μ_K : Kernmagneton ($\mu_K = eh/4\pi m_p = 5.0508 \cdot 10^{-27} \text{ A}\cdot\text{m}^2$)

1. Aufbau des Atomkerns

Die Tatsache, dass das Proton ein magnetisches Moment besitzt, wird in der Medizin in der **Kernspintomographie** angewendet.

Kernspinresonanz (NMR, 'nuclear magnetic resonance')

Das magnetische Moment des Protons kann im B-Feld nur bestimmte Orientierungen annehmen. Durch das HF Feld kann der Spinzustand bei gewissen Frequenzen (im Resonanzfall) geändert werden. Im Tomographen kann damit ein Bild der Wasserstoffdichte erzeugt werden.



Kernspintomographie:
grosser Hirntumor

Dimension der Nukleonen

$$r \approx 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

Massendichte der Nukleonen

$$\rho = \frac{1.7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{4\pi/3 \cdot 10^{-45} \text{ m}^3}$$

$$\rho = 4 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

(schwerstes chemisches Element: Osmium $\rho = 2.257 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

1.2 Kernnomenklatur

Massenzahl A: Anzahl der Nukleonen im Kern

Ordnungszahl Z: Anzahl der Protonen im Kern
(Kernladungszahl)
Z kennzeichnet das chemische Element

Neutronenzahl N:

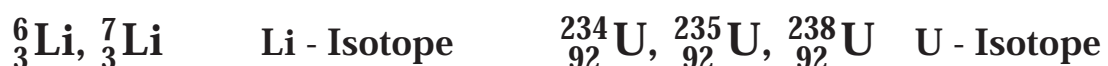
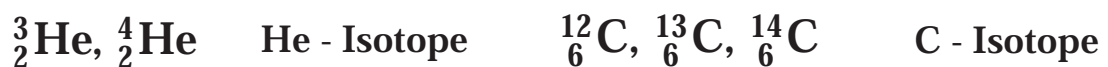
$$A = Z + N$$

Schreibweise eines Elements E der Massenzahl A, Ordnungszahl Z und Neutronenzahl N:

$$\frac{A}{Z} \text{E}_N \quad \text{oder kurz} \quad \frac{A}{Z} \text{E}$$

Isotope: Atomkerne gleicher Ordnungszahl Z, jedoch mit unterschiedlicher Neutronenzahl

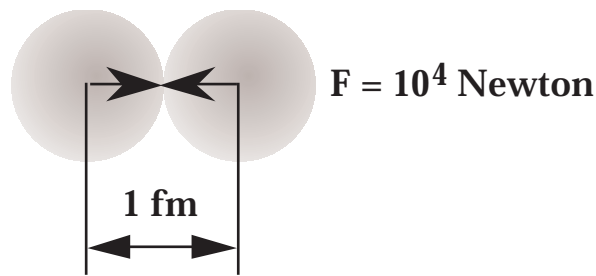
Beispiele:



1.3 Bindungsenergie des Kerns

Die 'starke Wechselwirkung' ist dafür verantwortlich, dass sich die Nukleonen anziehen. Die starke Wechselwirkung besitzt nur eine kurze Reichweite. Bei Abständen von zwei Nukleonen von mehr als 2.5 fm ist sie wirkungslos.

Anziehende Kraft zwischen zwei Nukleonen im Abstand von 1 fm: 10^4 Newton



Damit überwiegt die starke Wechselwirkung die Coulombabstossung bei Weitem, wirkt allerdings nur zwischen benachbarten Nukleonen.

Bindungsenergie E_B des Kerns

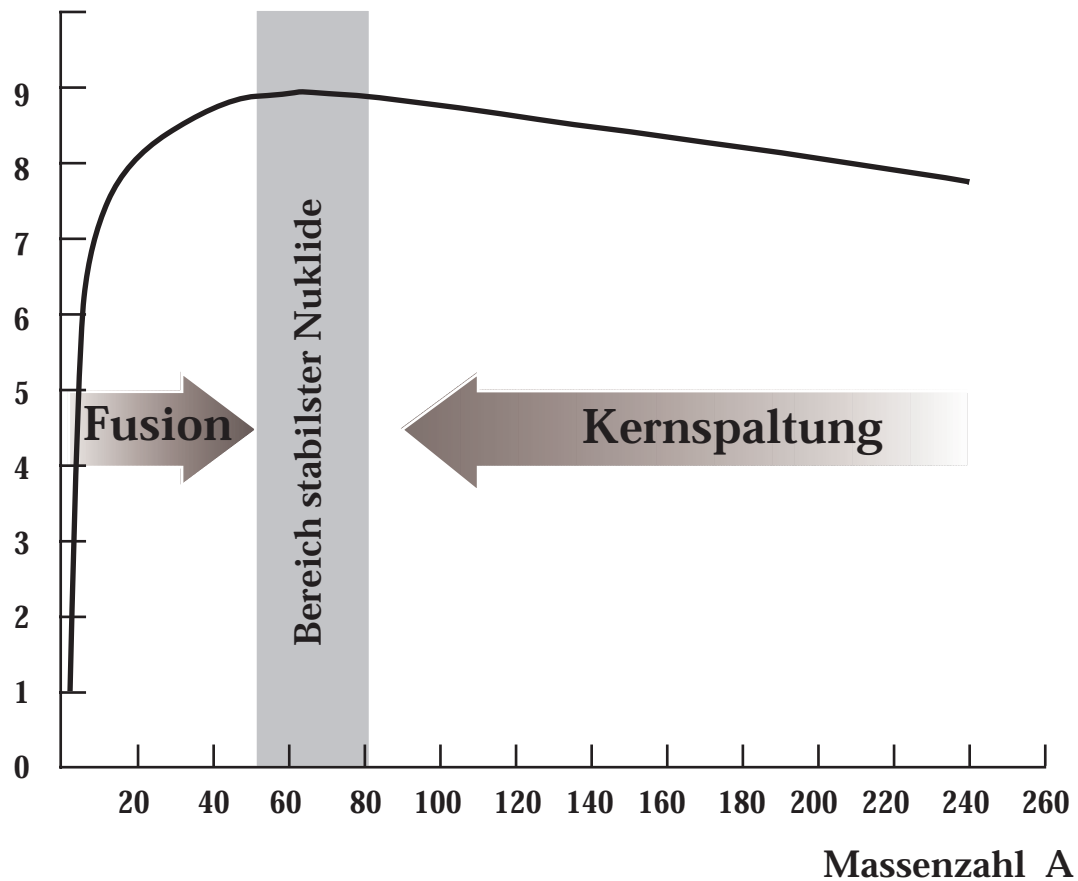
$$E_B = \underbrace{Z \cdot m_p \cdot c^2 + N \cdot m_n \cdot c^2}_{\text{Summe der Massen der Nukleonen} \cdot c^2} - m_{\text{Kern}} \cdot c^2$$

Summe der Massen
der Nukleonen $\cdot c^2$

$$\cong 8 \text{ MeV / Nukleon} \quad (\text{für } A \gtrsim 20)$$

⇒ Die Kernmasse ist kleiner als die Summe der Masse der Nukleonen (Massendefekt)

Bindungsenergie pro Nukleon
 E_B/A (MeV)

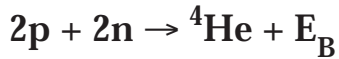


Die maximale Bindungsenergie liegt etwa bei $A \approx 60$.

Die Bindungsenergie pro Nukleon ist bei den schweren Kernen wegen der Coulombabstossung und bei den leichten Kernen wegen der hohen Oberflächenspannung reduziert.

Bei der Spaltung von schweren Kernen und bei der Fusion (Verschmelzung) von leichten Kernen wird somit Energie freigesetzt, weil die Produkte stärker gebunden sind.

1. Aufbau des Atomkerns

*Beispiele:**Fusion*

$$E_B = 2m_p \cdot c^2 + 2m_n \cdot c^2 - m_{4\text{He}} \cdot c^2$$

$$E_B = (2 \cdot 938.28 + 2 \cdot 939.57 - 3727.4) \text{ MeV}$$

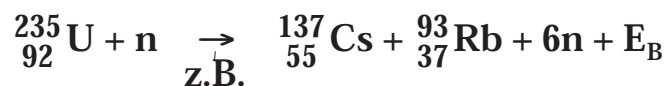
$$E_B = 28.3 \text{ MeV}$$

Bei der Bildung von 1 Mol ${}^4\text{He}$ würde somit die Energie E frei:

$$E = E_B \cdot N_A = 28.3 \cdot 10^6 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 1.70 \cdot 10^{31} \text{ eV}$$

$$E = 2.73 \cdot 10^{12} \text{ J} = 0.76 \cdot 10^6 \text{ kWh}$$

(Damit könnten rund 200 Familien während einem Jahr mit elektrischer Energie versorgt werden.)

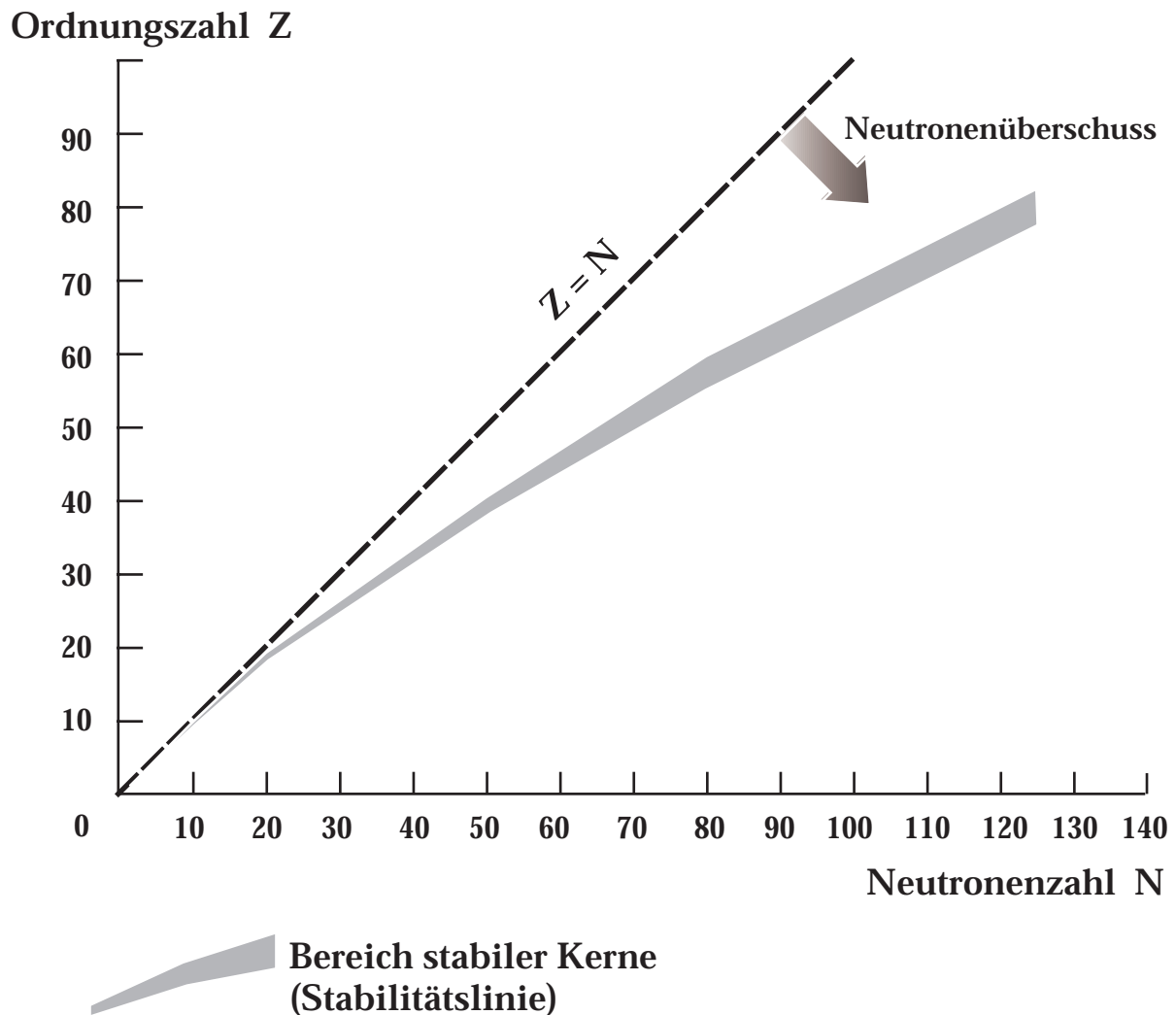
Spaltung

$$Q \approx 200 \text{ MeV}$$

Bei der Spaltung von 1 Mol ${}^{235}\text{U}$ wird eine Energie frei von $\approx 5 \cdot 10^6 \text{ kWh}$

1.4 Stabilitätslinie in der N-Z Ebene

Schwere Kerne sind stabiler, falls die Neutronenzahl etwas grösser ist als die Protonenzahl, da dadurch die Schwächung der Bindung durch die Coulombabstossung etwas kompensiert wird. Durch die Auftragung der stabilen Kerne in der N-Z Ebene erhält man die Stabilitätslinie.



2. Radioaktivität

2.1 Stabile und instabile Nuklide

Radioaktivität ist die Umwandlung (Zerfall) eines Nuklids in ein stärker gebundenes unter Emission von Kernstrahlung (α -, β - oder γ -Strahlung). Bei der natürlichen Radioaktivität erfolgt dieser Prozess spontan und rein statistisch. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist unabhängig von äusseren Einflüssen wie Temperatur oder Druck.

Nur instabile Nuklide zerfallen spontan. Bei der künstlichen Radioaktivität erfolgt der Zerfallsprozess durch eine Kernreaktion. Von den ca. 3000 bekannten Nukliden sind nur etwa 300 stabil.

Beispiele:

stabile Nuklide ^1H , ^4He , ^{12}C , ^{40}Ca , ^{91}Zr , ^{138}Ba , ...

instabile Nuklide ^3H , ^5He , ^{14}C , ^{45}Ca , ^{93}Zr , ^{139}Ba , ...

Von allen Elementen gibt es instabile Isotope.

Von fast allen Elementen gibt es stabile Isotope.

Technetium (^{43}Tc), Promethium (^{61}Pm) und die Elemente mit $Z \geq 84$ besitzen keine stabilen Isotope.

2. Radioaktivität

2.2 Zerfallsarten

 α - Zerfall

Beim Zerfall emittiert der Kern einen ${}^4\text{He}$ -Kern (' α -Teilchen').

$$\begin{aligned} Z' &= Z - 2 \\ A' &= A - 4 \end{aligned}$$

(Mutternuklid ${}^Z_A\text{M}$, Tochternuklid ${}^{Z'}_{A'}\text{T}$)

Beispiel:



Die Wärmetönung tritt als kinetische Energie des α -Teilchens auf.

 β - Zerfall

Der zerfallende Kern emittiert ein Elektron (' β^- -Zerfall') oder ein Positron (' β^+ -Zerfall').

Der β -Zerfall ist immer von der Emission eines Neutrinos begleitet.

(Positron: Antiteilchen des Elektrons mit der Ladung $+e$, sonst gleiche Eigenschaften)

Neutrino, ν : Teilchen mit Ruhemasse null ($m_0 = 0$)

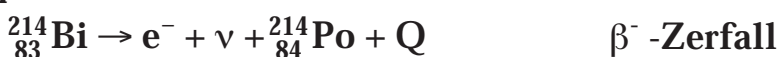
Die beim β -Zerfall emittierten Elektronen oder Positronen entstehen durch entsprechende Umwandlungen von Neutronen und Protonen.



daraus ergibt sich



Beispiel:

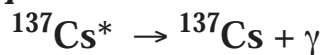


γ - Zerfall

Der Kern emittiert ein energiereiches Photon (γ -Quant). Der Kern geht dabei von einem angeregten Zustand (*) in einen energetisch tiefer liegenden Zustand über.

$$Z' = Z \quad , \quad A' = A$$

Beispiel:



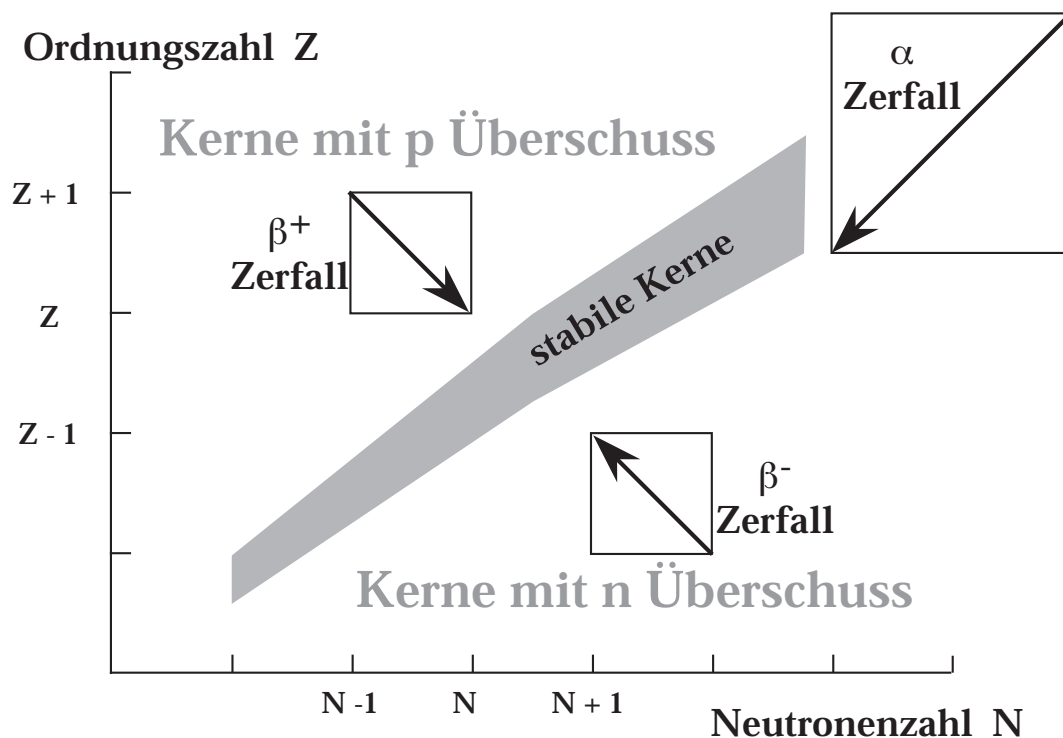
K - Einfang

Der Kern fängt ein Elektron aus der eigenen Atomhülle ein (meistens aus der K-Schale) und wandelt ein Proton in ein Neutron um.

$$Z' = Z - 1 \quad , \quad A' = A$$

Beim K - Einfang wird erst dann Strahlung emittiert, wenn das Loch in der K-Schale mit einem Elektron rekombiniert. Dieser Prozess führt zur Emission eines Röntgenquants.

Die spontanen Kernzerfälle gehen immer in Richtung der stabilen Nuklide.



2. Radioaktivität

2.3 Zerfallsgesetz

Zerfallskonstante λ und mittlere Lebensdauer τ

Der Zerfall eines Nuklids erfolgt statistisch. Das bedeutet, dass für den Zerfall in einer vorgegebenen Zeit nur eine Zerfallswahrscheinlichkeit λ angegeben werden kann.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit (oder Zerfallskonstante) λ eines Nuklids gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Kern innerhalb einer Sekunde zerfällt.

Einheit von λ : s^{-1}

Die mittlere Lebensdauer τ eines Kerns ist definiert durch $\tau = 1 / \lambda$

Das Zerfallsgesetz

Eine Substanz enthalte zur Zeit t die Zahl $N(t)$ Atomkerne, die eine Zerfallswahrscheinlichkeit λ besitzen.

Die Zahl dN der in der Zeit dt zerfallende Kerne ist dann gegeben durch

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \cdot N(t)$$

Diese Differentialgleichung wird erfüllt von der Funktion

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{Zerfallsgesetz}$$

N_0 : Zahl der Kerne zur Zeit $t = 0$

λ : Zerfallskonstante (s^{-1})

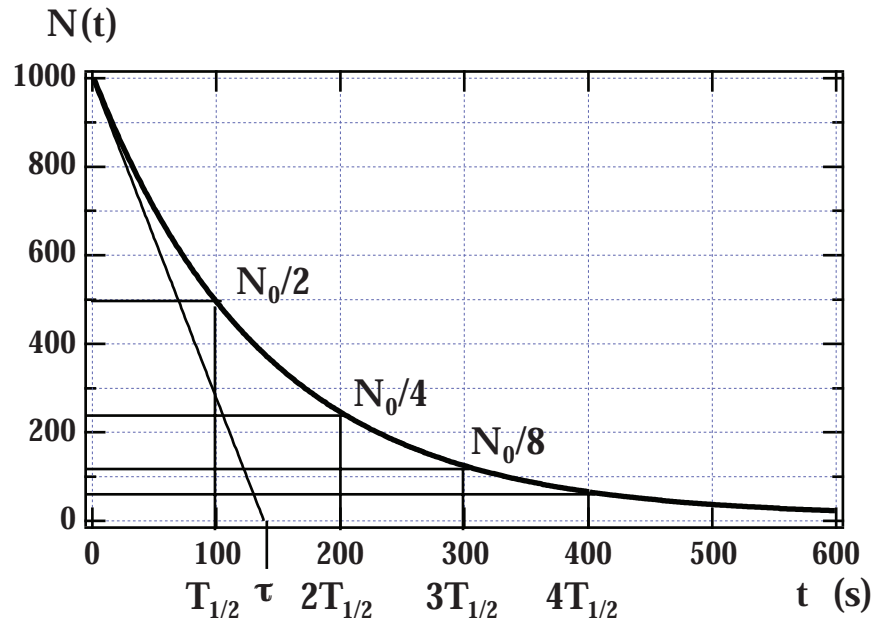
Die Halbwertszeit $T_{1/2}$

$T_{1/2}$ gibt an, nach welcher Zeit die Zahl N der Kerne auf $N/2$ abgesunken ist.

$$N(T_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = N_0/2$$

$$\ln 2 = \lambda T_{1/2}$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2$$



Die Aktivität A

Die Aktivität A einer radioaktiven Substanz ist gegeben durch die Anzahl der Zerfälle pro Zeit.

SI - Einheit: 1 Zerfall / s = 1 Becquerel = 1 Bq

alte Einheit:

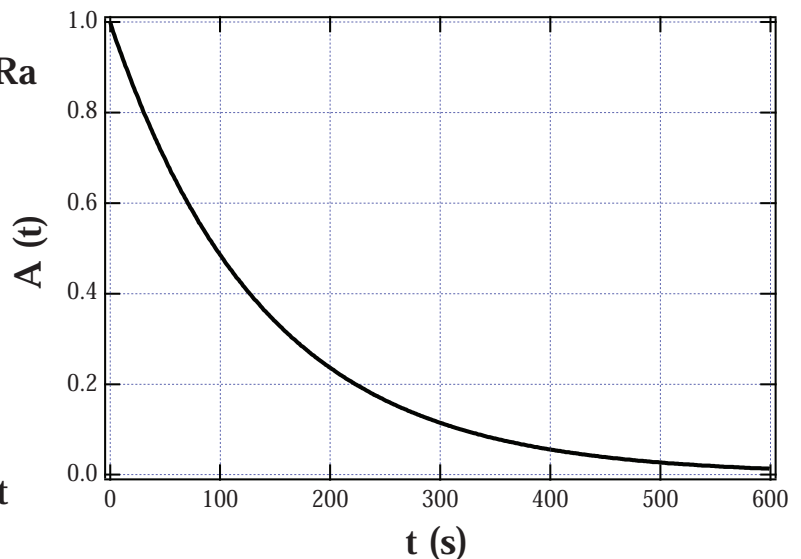
1 Curie entspricht der Aktivität von 1g ^{226}Ra

Umrechnung

1 Curie = 1 Ci = $3.7 \cdot 10^{10}$ Bq

$$A = \lambda \cdot N(t)$$

Die Aktivität einer Substanz nimmt also auch exponentiell mit der Zeit ab (kann als Datierungsmethode verwendet werden falls die Anfangsaktivität bekannt ist).



3. Wechselwirkung der Kernstrahlung mit Materie

3.1 α - und β -Strahlung

Die Wechselwirkung der Kernstrahlung mit der Materie ist wesentlich für die Abschirmungen von Strahlung. Dabei ist entscheidend wie die energiereichen geladenen Teilchen (α , β) und Photonen (γ) ihre Energie abgeben können.

Wechselwirkung der α - und β -Teilchen mit Materie

Ionisation

α - und β -Teilchen ionisieren im Vorbeiflug und erzeugen dadurch eine Spur ionisierter Atome. Dadurch verlieren diese Teilchen schrittweise ihre kinetische Energie bis sie zur Ruhe kommen. Die mittlere Eindringtiefe der Teilchen in die Materie bezeichnet man als **mittlere Reichweite**.

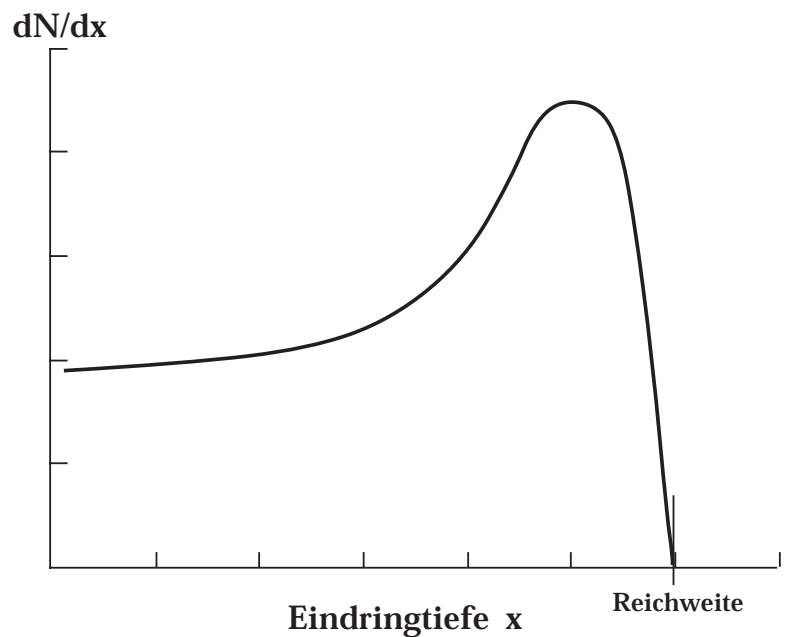
Reichweiten von α -Teilchen in verschiedenen Stoffen

Energie (MeV)	in Luft (mm)	in Gewebe (mm)	in Aluminium (mm)
4	25	0.031	0.016
6	46	0.056	0.030
8	74	0.091	0.048
10	106	0.130	0.069

3. Wechselwirkung der Kernstrahlung mit Materie

Die Ionisationsdichte der Materie nimmt zu mit abnehmender kinetischer Energie der eindringenden α - oder β -Strahlung.

Qualitativer Verlauf der spezifischen Ionisation dN/dx (Anzahl erzeugte Ionen pro zurückgelegtem Weg).



Reichweiten von β -Teilchen

Energie (MeV)	in Luft (mm)	in Gewebe (mm)	in Aluminium (mm)
1	$3 \cdot 10^3$	10	2

Daraus folgt, dass sich Strahlung in der Form von geladenen Teilchen sehr gut abschirmen lässt.

3.2 γ - (und Röntgen-) Strahlung

Die Wechselwirkung erfolgt über den

- Photoeffekt (vollständige Absorption des γ -Quants)
- Comptoneffekt (das γ -Quant gibt einen Teil der Energie ab)
- Paarerzeugung (Umwandlung in ein Elektron / Positronenpaar)

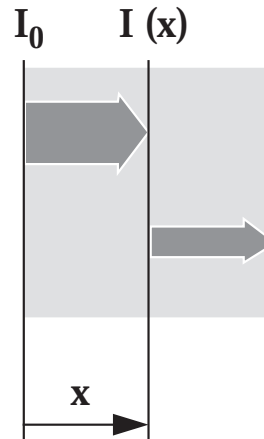
Für die γ -Quanten kann keine Reichweite angegeben werden. Die Intensität der Strahlung nimmt bei Durchgang durch Materie exponentiell ab (analog zum Licht in Materie).

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$

$$I_0 = I(x=0)$$

μ : Absorber Schwächungs-
koeffizient

$$[\mu] = \text{m}^{-1}$$



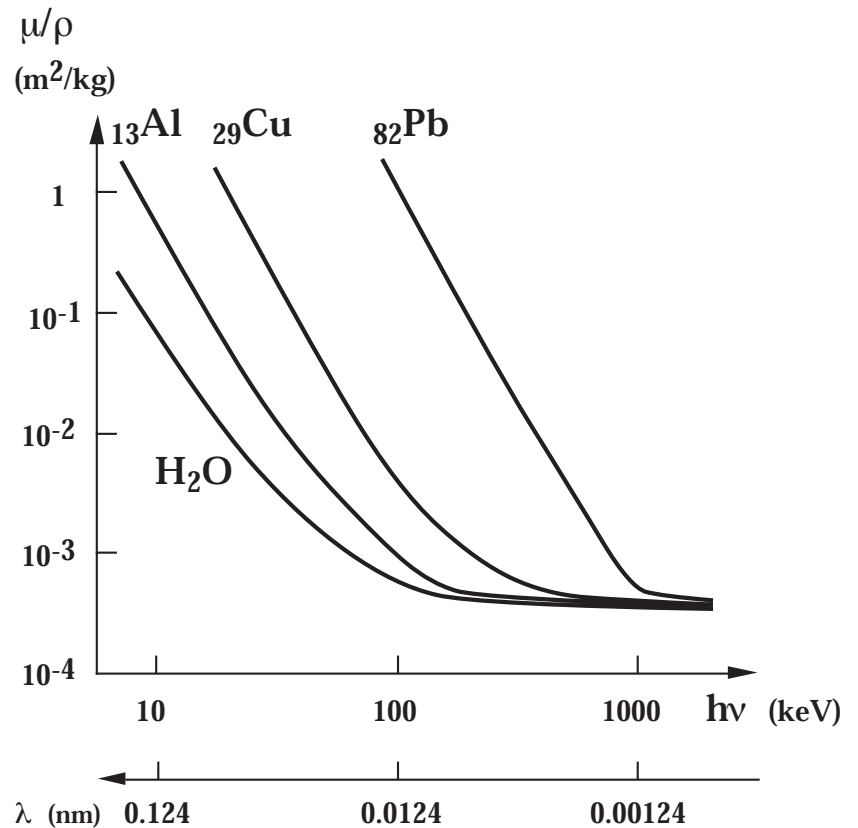
μ hängt stark von der Energie der γ -Quanten und dem Absorbermaterial ab.

Massenschwächungskoeffizient μ/ρ

Meistens arbeitet man nicht mit dem Parameter μ sondern mit dem Massenschwächungskoeffizient μ/ρ , wobei ρ die Massendichte des Absorbermaterials darstellt.

$$[\mu / \rho] = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$$

qualitativer Verlauf des
Massenschwächungs-
koeffizient für verschiedene
Materialien



Massenschwächungskoeffizient von Wasser, Al, Cu und Pb
(Kurven zeigen nur qualitatives Verhalten)

3. Wechselwirkung der Kernstrahlung mit Materie

Halbwertsdicken $d_{1/2}$

Die Halbwertsdicke $d_{1/2}$ eines Absorbermaterials ist diejenige Schichtdicke welche die Strahlungsintensität auf die Hälfte reduziert.

$$I(d_{1/2}) = \frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu d_{1/2}}$$

$$\ln 2 = \mu \cdot d_{1/2}$$

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Halbwertsdicken für γ -Quanten in verschiedenen Materialien

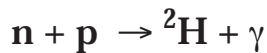
Energie	in Luft	in Gewebe	in Beton	in Blei
2 MeV	150 m	15 cm	5 cm	1.5 cm

3.3 Neutronen

Neutronenstrahlung ist schwer abschirmbar, da die Neutronen ungeladen sind und nur mit dem Atomkern wechselwirken können. Der grösste Energieverlust tritt dann auf wenn ein Stoss mit einem Kern vergleichbarer Masse (z.B. mit einem H-Kern) stattfindet.

Beim Durchgang durch Materie werden die energiereichen Neutronen allmählich thermalisiert, d.h. auf eine kinetische Energie von kT (≈ 0.02 eV) abgebremst. Die Absorption der Neutronen erfolgt dann über eine Neutroneneinfangreaktion.

Beispiel:



Halbwertsdicken für Neutronen

Energie	Beton	Wasser
schnelle Neutronen (≈ 2 MeV)	10 cm	8 cm
thermische Neutronen (≈ 0.02 eV)	5 cm	2 cm

3.4 Andere Strahlenarten

Mit Hilfe von Beschleunigern und Kernreaktoren können andere energiereiche Teilchenstrahlen erzeugt werden.

Beispiele:

$\pi^{+/-}$ - Mesonen, $\mu^{+/-}$ - Myonen

Für die Wechselwirkung dieser geladenen Teilchen mit Materie gilt das gleiche wie für α - und β -Teilchen:

es handelt sich um ionisierende Strahlung und es existiert eine maximale Reichweite, die von der Energie und dem Material abhängt.

IX. Dosimetrie und Strahlenschutz

1. Dosimetrie

1.1 Aktivität

Die Aktivität A einer Substanz ist gegeben durch die Anzahl der zerfallenden Kerne pro Zeit

$$A = \frac{|dN|}{dt}$$

Einheit: $[A] = 1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Becquerel} = 1 \text{ Bq}$

1.2 Energiedosis

Die Dosis D ist das Mass für die physikalische Strahlenwirkung

$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m}$$

ΔW : absorbierte Strahlungsenergie

Δm : Masse des Absorbers

Einheit: $[D] = 1 \text{ Joule /kg} = 1 \text{ Gray} = 1 \text{ Gy}$

alte Einheit:

$$1 \text{ rad} = 10^{-2} \text{ Gy}$$

1.3 Äquivalentdosis

Bei der Äquivalentdosis D_E wird die biologische Wirksamkeit der betreffenden Strahlenart berücksichtigt.

$$D_E = Q \cdot D$$

Q : Bewertungsfaktor ('Qualitätsfaktor' = RBW 'relative biologische Wirksamkeit' = ω_R 'Strahlengewichtungsfaktor')

Einheit: $[D_E] = 1 \text{ Sievert} = 1 \text{ Sv}$

alte Einheit:

$$1 \text{ rem} = 10^{-2} \text{ Sv}$$

Empfohlene Q-Werte

Teilchen	Energie	Q
γ , Röntgenstrahlung, β , Myonen	alle Energien	1
α - und schwere Teilchen	alle Energien	20
Neutronen	< 10 keV	5
	10 - 100 keV	10
	100 - 2000 keV	20
	> 2 MeV	10

1.4 Dosisleistung

Die Dosisleistung ist die pro Zeit absorbierte Dosis oder Äquivalentdosis

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt} \quad \text{und} \quad \dot{D}_E = \frac{dD_E}{dt}$$

Einheiten: $\frac{\text{Gy}}{\text{s}}$, $\frac{\text{Gy}}{\text{h}}$, $\frac{\text{Gy}}{\text{a}}$, $\frac{\text{Sv}}{\text{s}}$, $\frac{\text{Sv}}{\text{h}}$, $\frac{\text{Sv}}{\text{a}}$

2. Toleranzdosen

2.1 Nicht beruflich strahlenexponierte Personen

Zusätzlich zur natürlichen Strahlenbelastung ist bei Ganzkörperbestrahlung zulässig

$$D_{E,\max} = 1 \frac{\text{mSv}}{\text{a}} \quad (= 0.1 \frac{\text{rem}}{\text{a}})$$

2.2 Beruflich strahlenexponierte Personen

Bei beruflich strahlenexponierten Personen muss die aufgenommene Strahlendosis periodisch kontrolliert werden. Die Toleranzdosis für Ganzkörperbestrahlung beträgt

$$D_{E,\max} = 20 \frac{\text{mSv}}{\text{a}}$$

Besonders gefährdet sind junge Menschen bei Strahlenbelastung.

Die Toleranzdosis für Personen unter 16 Jahren wird deshalb auf 0 Sv / a festgelegt.

Zum Vergleich: die 50% Letalitätsdosis LD50 bei einer einmaligen Ganzkörperbestrahlung beträgt 3 Sv.

Die oben angegebenen Toleranzdosen werden für die Schweiz in der Strahlenschutzverordnung (StSV) festgelegt (siehe dort *Grenzwerte*).

3. Natürliche und künstliche Strahlenbelastung

3.1 Natürliche Radioaktivität

Terrestrische Strahlung

Sie besteht grösstenteils aus γ -Strahlung und geht von radioaktiven Nukliden in Gesteinen aus. Eine hohe Belastung geht von Granitgesteinen aus.

Typische Werte für die Schweiz:

0.2 - 3 mSv / a

Kosmische Strahlung

Strahlenart: etwa 90% hochenergetische Protonen (bis zu 10^{14} MeV) und 10% ^4He Ionen und schwere Teilchen.

Durch Wechselwirkung mit der Atmosphäre entsteht sekundäre Strahlung: Neutronen, Protonen, Elektronen, Photonen.

Typische Werte :

0.3 mSv /a auf einer Höhe von 300 m ü. M.
1.5 mSv /a auf einer Höhe von 3'000 m ü. M.

Endogene Strahlung

Die interne Bestrahlung erfolgt vor allem durch das ^{40}K , das über die Nahrung aufgenommen wird.

Typischer Wert :

0.4 mSv /a

3. Natürliche und künstliche Strahlenbelastung

Radon in Gebäuden

Das Edelgas ^{222}Rn entsteht über das ^{226}Ra aus dem ^{238}U welches in erhöhter Konzentration in vielen Gebieten der Schweizer Alpen in den kristallinen Gesteinen vorkommt.

Typische Werte :

0.3 - 150 mSv /a

Summe der Dosisleistungen der natürlichen Strahlenbelastung ≈ 3.5 mSv /a

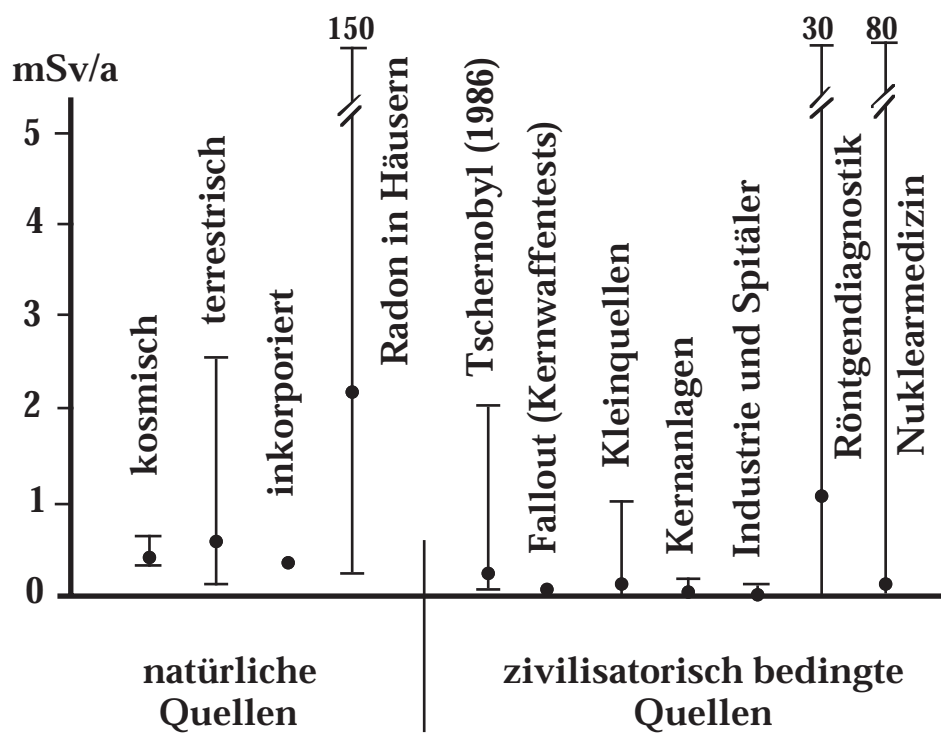
3.2 Künstliche Radioaktivität

Quellen künstlicher (von Menschen verursachter) Strahlenbelastung sind beispielsweise

- Fallout von Kernwaffentests
- Strahlenbelastung durch Reaktorkatastrophe von Tschernobyl (1986)
- Kleinquellen (Tritium ^3H in Leuchtziffern von Uhren, Uran in Keramiken, Thorium in optischen Linsen, TV und PC Bildschirme)
- Kernanlagen
- Röntgendiagnostik
- Nuklearmedizin

Die Summe dieser Belastungen ist von der Grössenordnung ≈ 1.5 mSv /a

Die Summe der natürlichen und künstlichen Strahlenbelastung der Bevölkerung liegt also etwa bei 5 mSv /a.



Natürliche und künstliche Strahlenbelastung in der Schweiz (Äquivalentdosisleistungen) nach KUeR, 1989 (Kommission zur Überwachung der Radioaktivität)

4. Wirkung der radioaktiven Strahlung auf den Menschen

(nach 'DTV-Atlas zur Ökologie', 1990 und 'Strahlung und Mensch - Anwendung und Wirkung', Hrsg. Schweiz. Physikalische Gesellschaft, 1992)

In der strahlenbiologischen Wirkungskette unterscheidet man Primär- und Sekundärreaktionen.

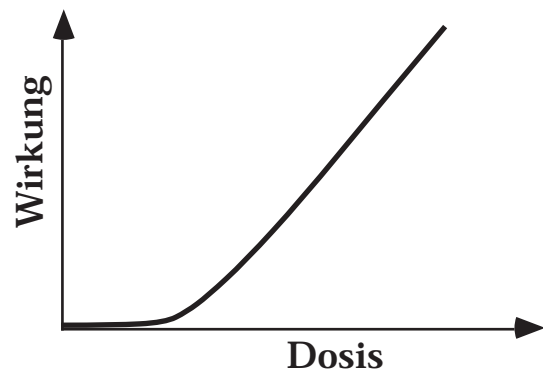
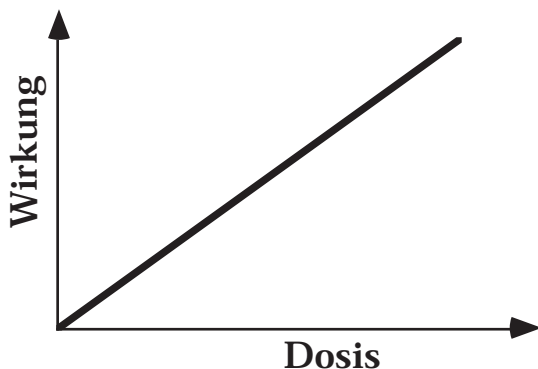
Primärreaktionen

α - und β -Strahlen reagieren mit Atomen in Primärreaktionen und verfügen bei geringer Durchdringungsfähigkeit über eine hohe biologische Wirksamkeit.

Die Gefährdung des Organismus ist vor allem dann hoch, wenn α - und β -Strahler inkorporiert werden.

Die Ionisationsdichten von α , β und γ -Strahlung verhalten sich etwa wie $10^4 : 10^2 : 1$. Strahlen hoher Ionisationsdichte (α -Strahlen und schnelle Neutronen) zeigen einen linearen Verlauf in der Dosis-Wirkungs-Kurve (nachfolgende Kurve links).

Strahlen mit niedriger Ionisationsdichte (β - und γ -Strahlung) zeigen erst nach einem anfänglich flachen Verlauf eine linear steigende Wirkung (nachfolgende Kurve rechts).



Sekundärreaktionen

In den Sekundärreaktionen geben langsame Neutronen und γ -Strahlen Energie an Elektronen ab, die dann als hochenergetische Elektronen auf dem Weg durch die Materie viele Molekülbindungen aufbrechen können, was zur Bildung von chemisch reaktiven Spezies führt (z.B. der Radikale OH^\cdot und H^\cdot).

4. Wirkung der radioaktiven Strahlung auf den Menschen

Strahlenschäden

Das Ergebnis der Primär- und Sekundärwirkung sind chemische Reaktionen in den Körper- und Keimzellen, insbesondere des genetischen Materials. Die Zellteilung kann gestört werden. Die Zellform und -größe kann verändert werden. Am DNS Molekül kann es zu Einzel- und Doppelstrangbrüchen kommen.

Hohe Strahlendosen

Akute somatische Schäden treten beim Menschen bei einer intensiven Bestrahlung von 1 Sv an auf (Hautverbrennungen, Haarausfall, Veränderung des Blutbildes). Auf Organ-ebene führen Zellteilungsstörungen zu malignen Wucherungsprozessen (Krebs) und in den ersten Schwangerschaftswochen zu embryonalen Missbildungen, v.a. des Gehirns. Wegen den höheren Zellteilungsfrequenzen sind Jugendliche stärker gefährdet als Erwachsene.

Ab 0.5 Sv tritt als Strahlungssyndrom Übelkeit und Durchfall auf.

Ab 2 Sv kann die Dosis tödlich sein.

Ab 5 Sv ist die Bestrahlung zwingend tödlich.

Niedrige Dosen

Niedrige Dosen bewirken keine somatischen Frühschäden. Die Strahlenwirkung ist jedoch nicht schwächer, sondern nur seltener.

Somatische Spätschäden sind Leukämie und andere Krebsarten.

Basenschäden und Einzelstrangbrüche, die schon bei 1 mSv auftreten, werden durch zelleigene Reparatursysteme behoben. Doppelstrangbrüche ab 50 mSv führen zu irreparablen Deletionen (Verlust von Chromosomenstücken) und Translokationen (Anlagerung von Chromosomenstücken) und in der Regel zum Tod des Lebewesens.

Strahlensensibilität einzelner Organe

strahlensensibel	Lymphatisches und blutbildende Systeme (Lymphknoten, Milz, Thymus, Knochenmark), Darmschleimhaut, Gonaden, Augenlinse
mässig strahlenempfindlich	Lunge, Augen (ohne Linse)
mässig strahlenresistent	Haut, Leber, Niere
strahlenresistent	Muskulatur, Bindegewebe

Wichtige Regeln für den Strahlenschutz

Die Strahlenbelastung ist durch entsprechende Massnahmen so klein wie möglich zu halten:

- Strahlenabschirmungen verwenden
- mit möglichst geringen Strahlendosen arbeiten
- Abstand halten von der Quelle (bei einer punktförmigen Quelle nimmt die Strahlenintensität mit $1/(\text{Abstand})^2$ ab)
- Expositionszeit möglichst klein halten

SI - Basiseinheiten

1. Meter

Der Meter ist jene Distanz, die das Licht in $1/299'792'458$ einer Sekunde durchläuft.

2. Kilogramm

Das Kilogramm ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

3. Sekunde

Die Sekunde ist das $9'192'631'770$ fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Atoms des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

4. Ampere

Das Ampere ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stroms, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern mit je 1 Meter Leiterlänge die Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.

5. Kelvin

Das Kelvin, die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der $273,16$ te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

6. Mol

Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in $0,012$ Kilogramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind.

7. Candela

Das Candela ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, welche monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hertz aussendet, und deren Strahlstärke in dieser Richtung $1/683$ Watt pro Steradian beträgt.

Mathematische Beziehungen

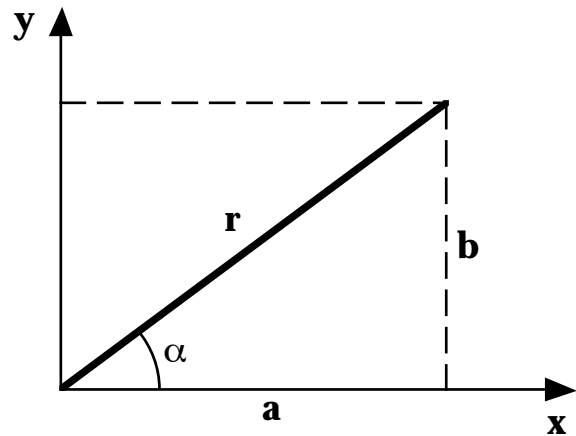
Trigonometrische Funktionen

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} \quad \cos \alpha = \frac{a}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \sin \frac{b}{r} = \operatorname{arc} \cos \frac{a}{r}$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b}{a} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{a}{b}$$



Trigonometrische Identitäten

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Symmetrie

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Periodizität

$$\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \alpha$$

$$\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Physikalische Konstanten

Gravitationskonstante	γ	$6.673 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.9979 \cdot 10^8$	m s^{-1}
Avogadro- oder Loschmidtsche Zahl	N_A	$6.0221 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Boltzmann Konstante	k	$1.3807 \cdot 10^{-23}$	J K^{-1}
Universelle Gaskonstante	R	8.3145	$\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$
Elektrische Elementarladung	e	$1.6022 \cdot 10^{-19}$	A s
Elektrische Feldkonstante	ε_0	$8.8542 \cdot 10^{-12}$	$\text{A s V}^{-1} \text{m}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$\text{V s A}^{-1} \text{m}^{-1}$
Plancksche Konstante	h	$6.6261 \cdot 10^{-34}$	J s
Stefan-Boltzmann Konstante	σ	$5.6705 \cdot 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Wiensche Konstante	$\lambda_{\text{max}} \cdot T$	$2.8978 \cdot 10^{-3}$	K m