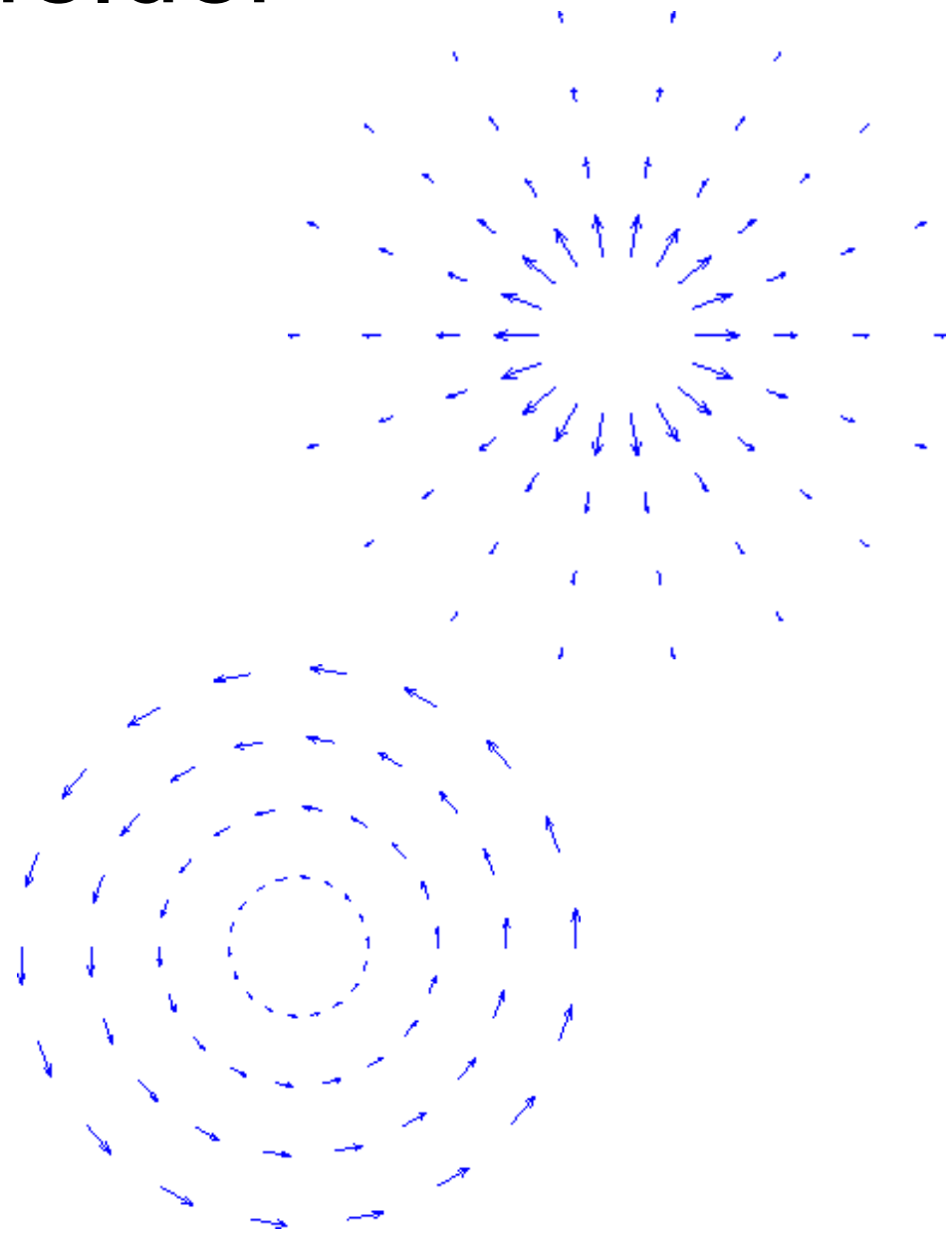
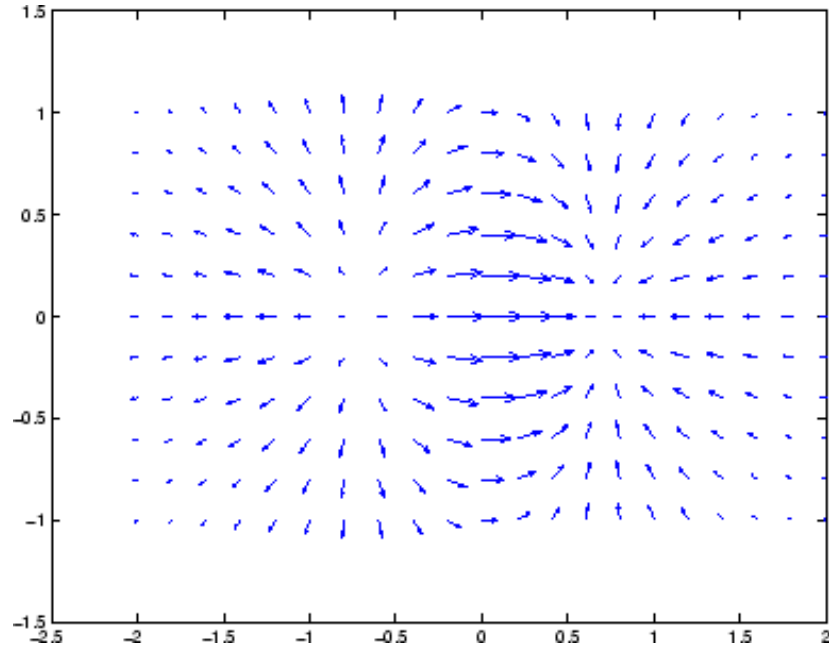
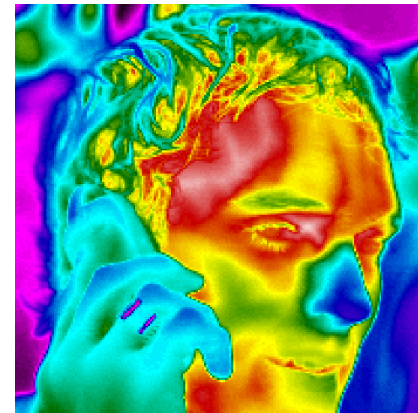
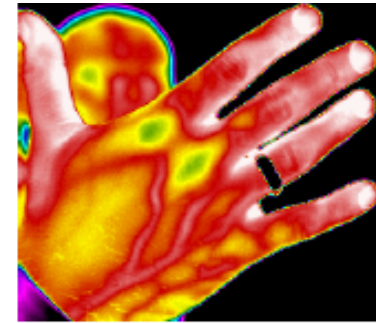


# Vektorfelder



# Temperaturverteilung mittels Thermographie



## 2.4 Konservatives Kraftfeld und potentielle Energie

Im Allgemeinen sind physikalische Grössen ortsabhängig; z.B ist die Temperaturverteilung  $T(x, y, z)$  im Hörsaal oder die Geschwindigkeitsverteilung  $\vec{v}(x, y, z)$  der Wasserteilchen eines Flusses eine Funktion des Ortes. Im ersten Fall gehört zu jedem Raumpunkt eine skalare Grösse  $T$ , im zweiten Fall sind jedem Punkt drei Komponenten eines Vektors zugeordnet. Wir nennen  $T(x, y, z)$  ein **skalares Feld**,  $\vec{v}(x, y, z)$  ein **Vektorfeld**.

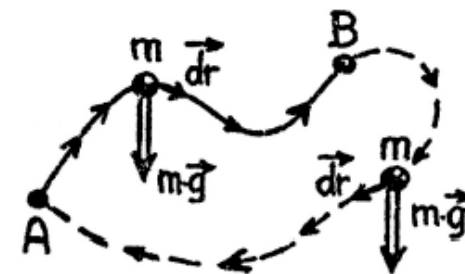
Bei der Berechnung der Hubarbeit haben wir das Feld der Gewichtskraft eines Massenpunktes kennen gelernt. Mit vertikal nach oben gerichteter  $z$ -Achse hat  $\vec{F}$  die Form

$$\vec{F} = (0, 0, -m \cdot g).$$

Es handelt sich um ein **homogenes Feld**, denn jeder Punkt ist bezüglich  $\vec{F}$  gleichwertig. Bringen wir die Masse  $m$  im Feld  $\vec{F}$  von A nach B, leisten wir die Hubarbeit

$$W_H = \int_A^B -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{Hubkraft } \vec{F}_H = -\vec{F})$$

und wir können bei festem Punkt A jedem Punkt B die potentielle Energie



$$E_{pot}(B) = E_{pot}(A) - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{zuordnen.}$$

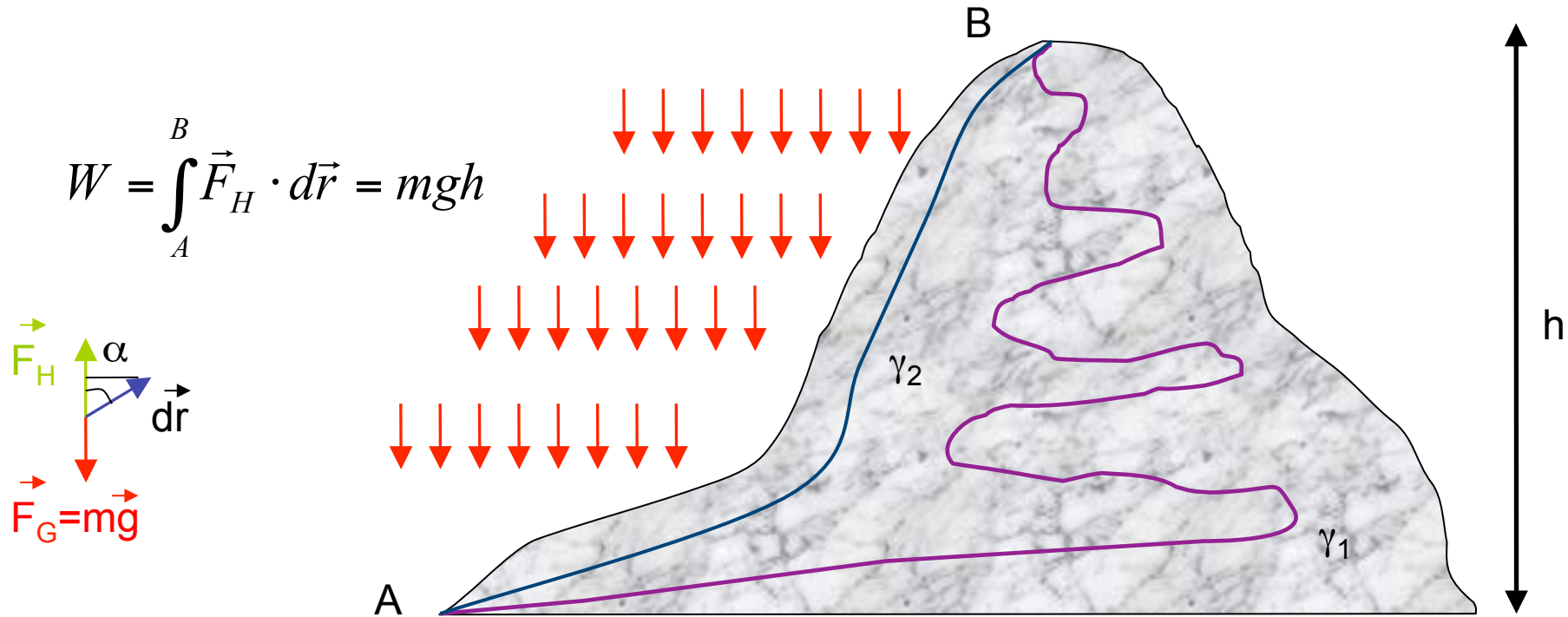
Diese Zuordnung ist eindeutig, weil die Hubarbeit unabhängig vom Integrationsweg immer gleich bleibt. Führt der Weg wieder nach A zurück, wird das Linienintegral der Kraft gerade null, denn

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Die betrachtete Gewichtskraft ist ein spezielles Beispiel einer so genannten **konservativen Kraft**. Konservative Kraftfelder  $\vec{F}(x, y, z)$  sind dadurch ausgezeichnet, dass das Arbeitsintegral zwischen zwei beliebigen, festen Punkten unabhängig vom Integrationsweg immer gleich gross ist. Bezogen auf einen willkürlich gewählten Nullpunkt ist jedem Punkt des Feldes eindeutig eine potentielle Energie  $E_{pot}$  zugeordnet. Für jeden beliebigen geschlossenen Weg gilt dann

$$(31) \quad \oint \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F} \text{ ist konservativ.}$$

# Gravitationsfeld ist konservativ



$$\vec{F}_H \cdot d\vec{r} = F_H \cdot dr \cdot \cos(\alpha) = F_H \cdot dz$$

Hubarbeit ist wegunabhängig. Wenn A=B dann ist W=0.

Beachte, dass konservative Felder nicht von der Zeit abhängen. Auch das eindimensionale Kraftfeld  $F_y = -k \cdot y$  der idealen Feder erfüllt die Beziehung (31). Die Federkraft ist konservativ.

Welche Grösse wird in dieser Klasse von Feldern konserviert?

Nehmen wir an, ein Massenpunkt  $m$  bewege sich im konservativen Kraftfeld unter dem Einfluss von  $\vec{F}(x, y, z)$ . Im Punkt A sei die Geschwindigkeit  $\vec{v}_A$  und die potentielle Energie  $E_{pot}(A)$ . Erreicht m den Bahnpunkt B, ist  $E_{pot}(B)$  definitionsgemäss

$$(32) \quad E_{pot}(B) = E_{pot}(A) - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Für die Geschwindigkeit  $\vec{v}_B$  gilt wegen (30):

$$(33) \quad m \cdot v_B^2/2 = m \cdot v_A^2/2 + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

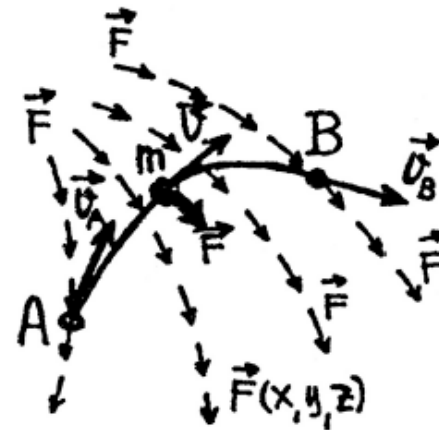
Addition von (32) und (33) führt zu

$$(34) \quad E_{pot}(B) + m \cdot v_B^2/2 = E_{pot}(A) + m \cdot v_A^2/2,$$

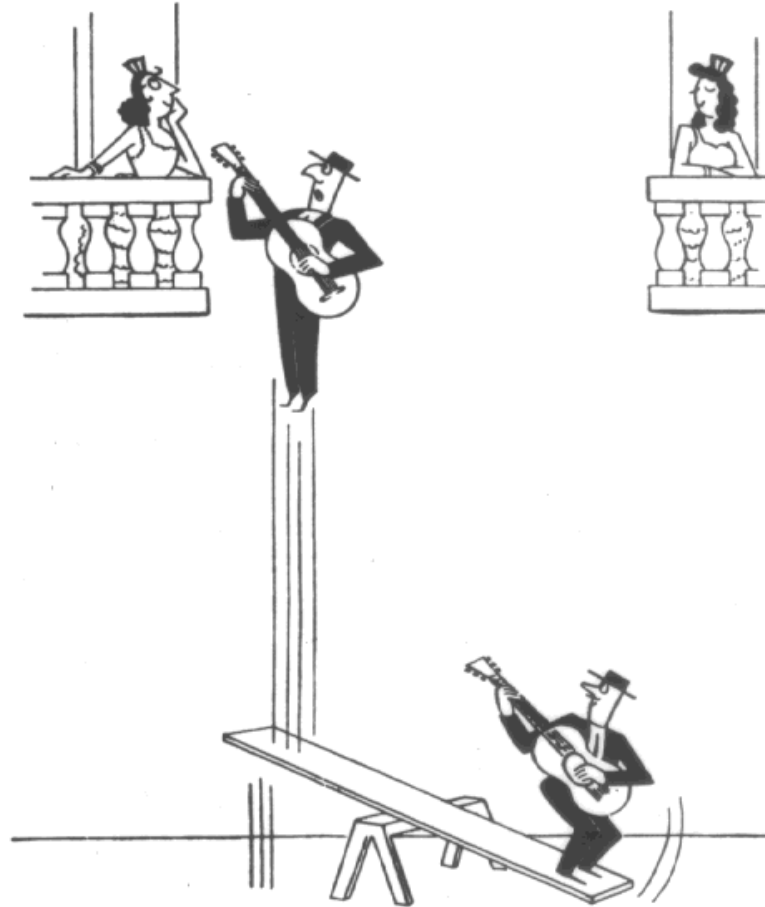
d.h. die Summe von potentieller und kinetischer Energie bleibt erhalten (wird konserviert).

**Bewegt sich ein Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld, so gilt:**

$$E_{pot} + E_{kin} = \text{const.} \quad \text{Energie-Erhaltungssatz der Mechanik.}$$



# Beispiel zur Erhaltung der Energie



# Freier Fall aus Höhe $h_0$

Gesucht: Geschwindigkeit  $\vec{v}_E$  vor dem Aufprall.

Bei der Anwendung von Erhaltungssätzen betrachtet man immer zwei Zustände 1 und 2.

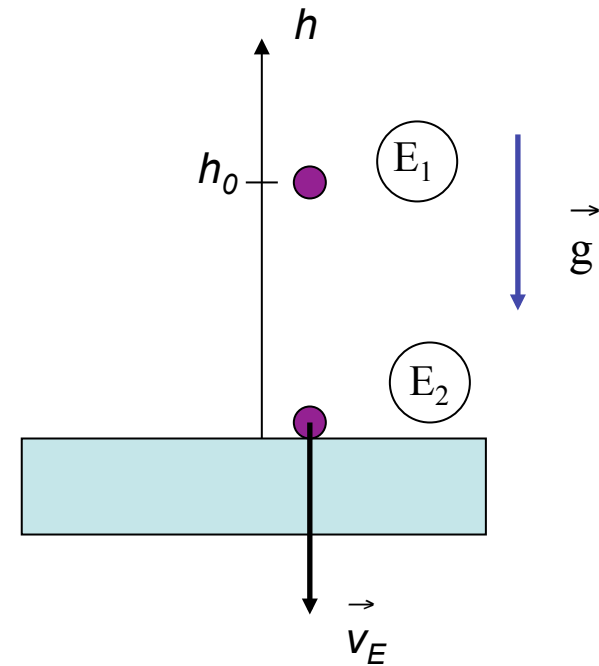
Hier gilt:

$$E_1 = E_2$$

$$E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2}$$

$$0 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_E^2 + 0$$

$$\boxed{v_E = \sqrt{2gh_0}}$$





# Fadenpendel

Pendel wird auf  $\alpha_0$  ausgelenkt und dann losgelassen.

Wie gross ist die Geschwindigkeit  $v$  im tiefsten Punkt

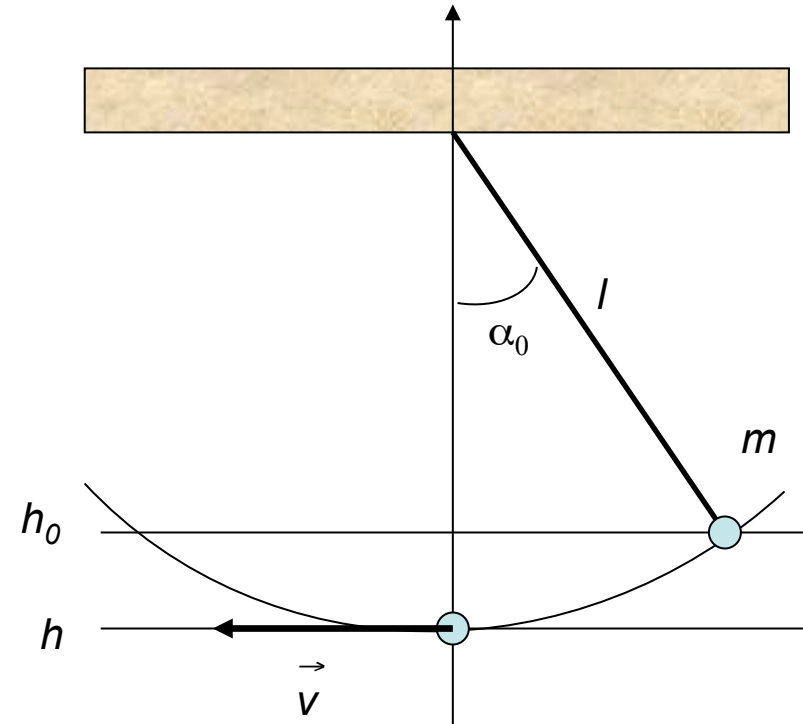
$$E_1 = E_2$$

$$E_{kin1} + E_{pot1} = E_{kin2} + E_{pot2}$$

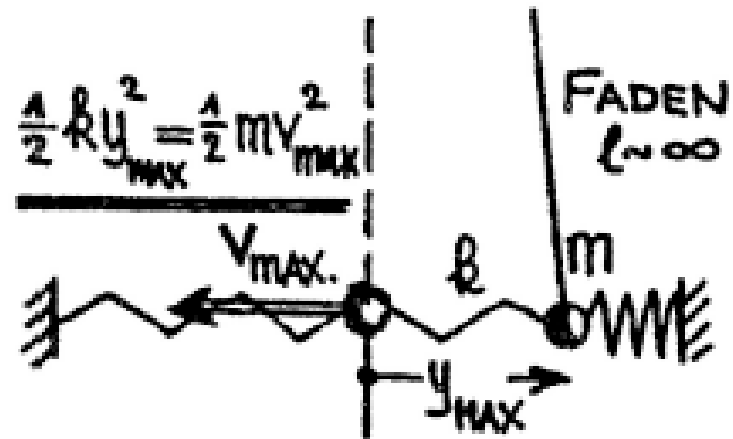
$$0 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$h_0 = l - l \cos \alpha_0 = l(1 - \cos \alpha_0)$$

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_0)}$$

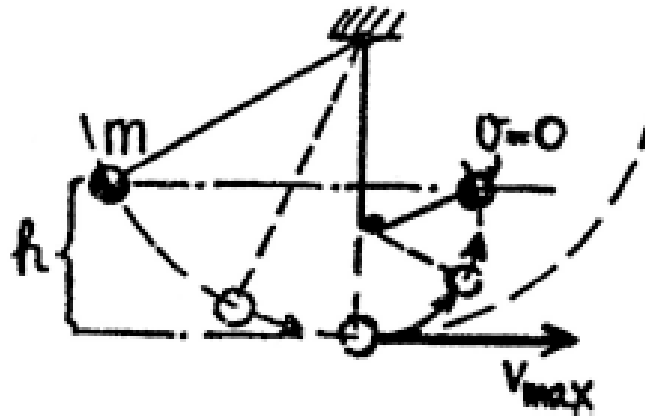


# Federpendel



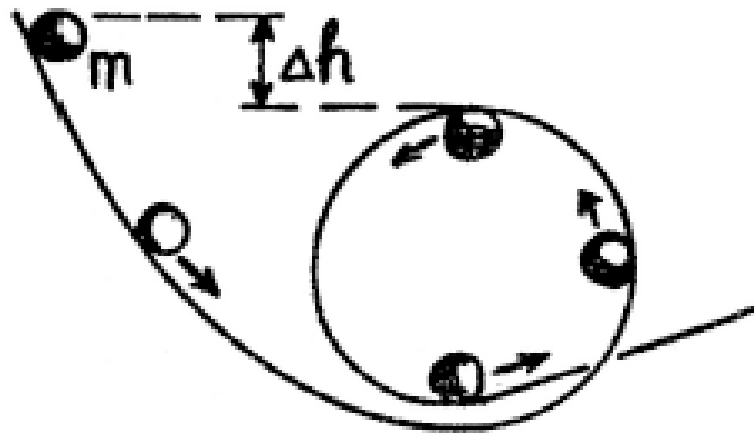
Exp: Überprüfung Energieerhaltung

# Pendel verschiedener Länge

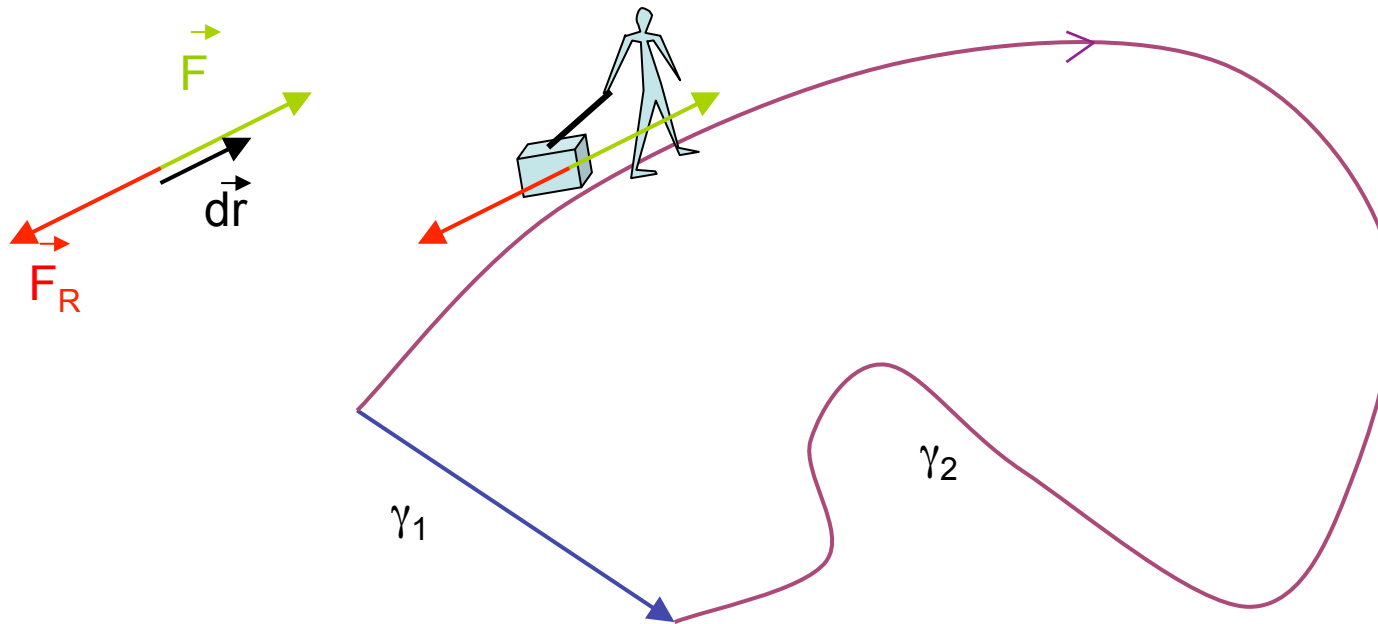


Exp: Pendel versch. Länge und grosses Pendel

# Looping



Sobald nicht konservative Kräfte beteiligt sind, (wie z.B. Reibkräfte), kann keine potentielle Energie mehr definiert werden und der Energie-Erhaltungssatz in obiger Form ist nicht anwendbar.



Reibungskräfte sind nicht konservativ!

d.h. Arbeit hängt vom gewählten Weg ab

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F dr = F \cdot (\text{Weglänge})$$

### 2.4.1 Potentialfunktion und Bewegung

Ohne dass die Newton'sche Bewegungsgleichung gelöst werden muss, können wesentliche Merkmale der Bewegung einer Masse  $m$  in einem konservativen Feld  $\vec{F}$  an der zugehörigen Potentialfunktion  $E_{pot}(x, y, z)$ , abgelesen werden, wenn man die Gesamtenergie  $E = E_{kin} + E_{pot}$  vorgibt. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf eindimensionale Bewegungen; Kraft  $\vec{F}$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  sollen parallel zur y-Achse liegen. Nach (32) wird dann

$$E_{pot}(y) = \text{const.} - \int_0^y F(y) \cdot dy \quad \text{und} \quad \boxed{F(y) = -dE_{pot}(y)/dy.} \quad (35)$$

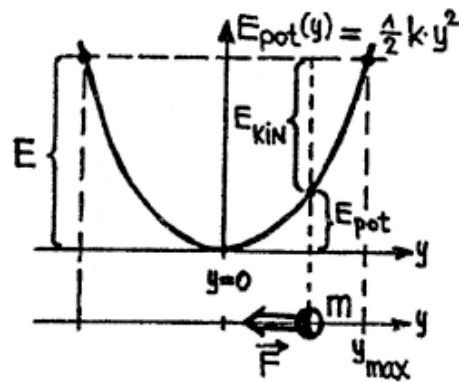
**Die Kraft ist gleich der negativen Steigung der Potentialkurve.**

Nehmen wir als Beispiel unser Federpendel: Hier bewegt sich die Masse in einem parabolischen „Potentialtopf“ der Form

$$E_{pot}(y) = k \cdot y^2 / 2$$

( $E_{pot}(0) = 0$  gesetzt) und es gilt

der Energie-Erhaltungssatz  $m \cdot v^2 / 2 + k \cdot y^2 / 2 = E$ .

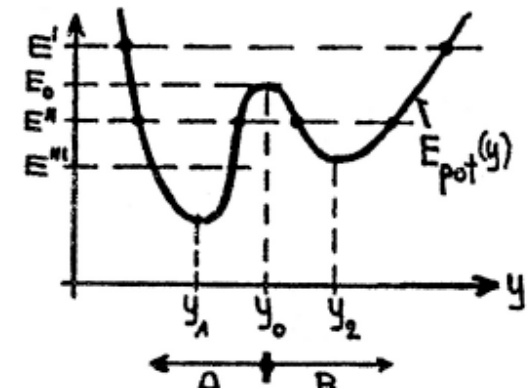


Wir können an der Potentialkurve bei gegebener Totalenergie  $E$  folgendes ablesen:

- die Umkehrpunkte  $+y_{max}$  und  $-y_{max}$  als Schnittpunkte der Parallelen im Abstand  $E$  zur  $y$ -Achse mit der Parabel  $E_{pot}(y)$ .
- $E_{kin} = E - E_{pot}$  für jede Auslenkung.
- $E_{kin}$  ist maximal im Minimum von  $E_{pot}$ .
- $F = -dE_{pot}/dy$  zeigt überall zum Potentialminimum hin, und ist dort null.

Analog gelten diese Betrachtungen für kompliziertere Potentialfunktionen, wie etwa für den Fall eines Potentialberges zwischen zwei Gleichgewichtslagen  $y_1$  und  $y_2$ . Je nach Gesamtenergie  $E$  hält sich die Masse in den Gebieten A und B ( $E = E'$ ), A oder B ( $E = E''$ ) und nur im Gebiet A allein ( $E = E'''$ ) auf. Die Kraft  $F = -dE_{pot}/dy$  zeigt im Gebiet A immer gegen die Stelle  $y_1$  und im Gebiet B immer gegen  $y_2$ . Ist  $E < E_0$ , kann der Potentialberg nie überwunden werden.

Würde man die Masse  $m$  in den Punkten  $y_1$  oder  $y_2$  vollständig zur Ruhe bringen, so würde sie dort liegen bleiben (stabile Lage, Kraft rücktreibend), während im Punkt  $y_0$  die geringste Störung zu einer nach links oder nach rechts beschleunigten Bewegung Anlass geben würde (keine rücktreibende Kraft, instabile Lage). Die potentielle Energie ist offenbar auch eine geeignete Größe zur Diskussion von Stabilitätsfragen.

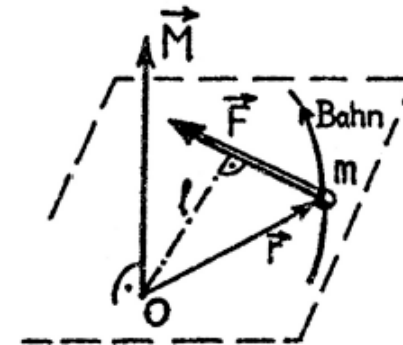


Exp: Schale



## 2.5 Drehmoment, Drall und Drallsatz für einen Massenpunkt

Im Zusammenhang mit rotierenden Bewegungen, eine in der Natur häufig vorkommende Bewegungsform, erweist es sich als sinnvoll, die Begriffe von **Drehmoment**  $\vec{M}$  und **Drall** (oder **Drehimpuls**)  $\vec{L}$  einzuführen. Wir betrachten wieder die Bahn eines Massenpunktes  $m$  unter dem Einfluss einer Kraft  $\vec{F}$ . Das Drehmoment  $\vec{M}$  der Kraft  $\vec{F}$  bezüglich eines festen Punktes  $O$ , den wir gerade als Koordinatenursprung wählen, ist definiert durch



$$(36) \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \text{Drehmoment } \vec{M}.$$

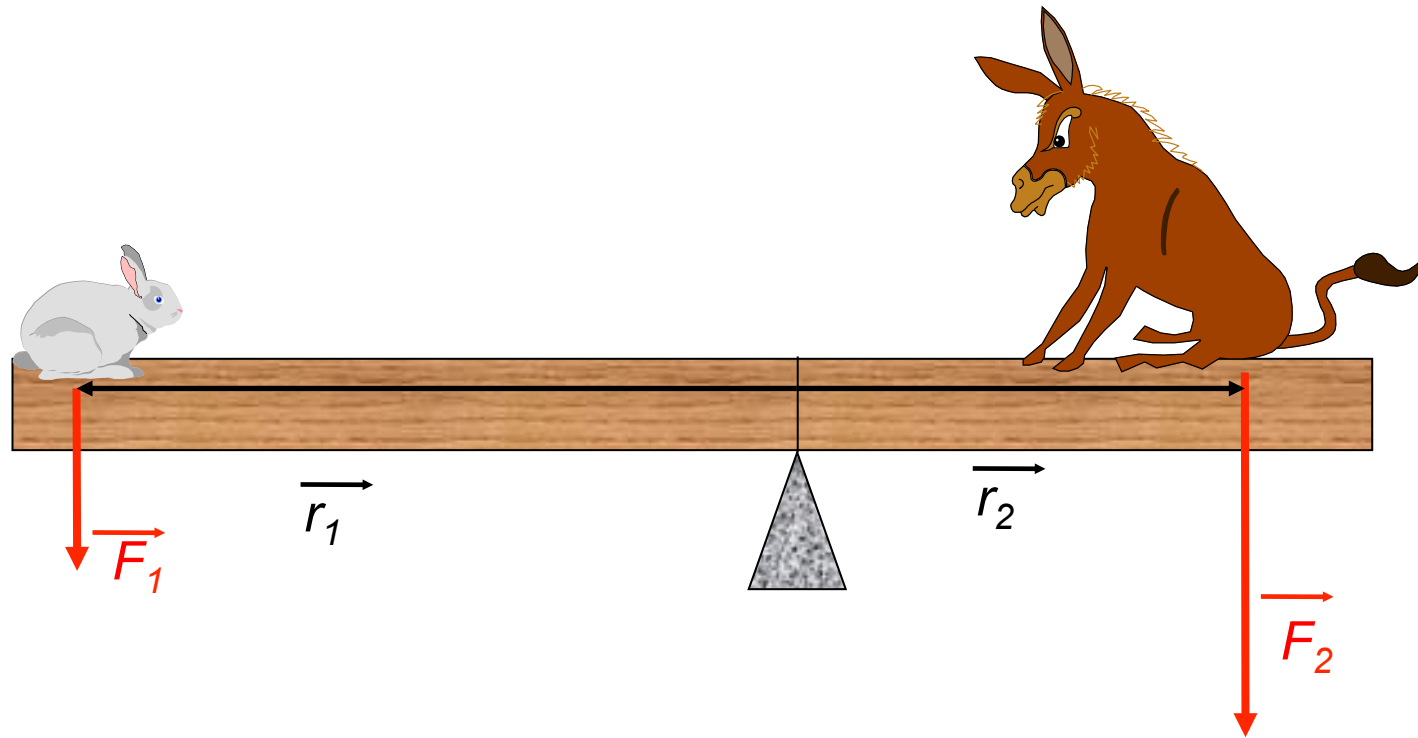
Dimension des Drehmomentes: Kraft · Länge

Einheit: N · m

$\vec{M}$  ist ein Vektor, der senkrecht auf der von  $\vec{r}$  und  $\vec{F}$  aufgespannten Ebene steht und den Betrag  $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$  hat.  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  und  $\vec{M}$  bilden ein Rechtssystem (s. Vektorprodukt). Wenn  $l$  der Abstand des Punktes  $O$  von der Wirkungslinie der Kraft  $\vec{F}$  ist, so gilt auch

$$M = F \cdot l \quad (\text{„Kraft mal Hebelarm“}).$$

# Die Schaukel



Exp: Hebelgesetz

# Hebelgesetz und Drehmoment

Hebelgesetz:

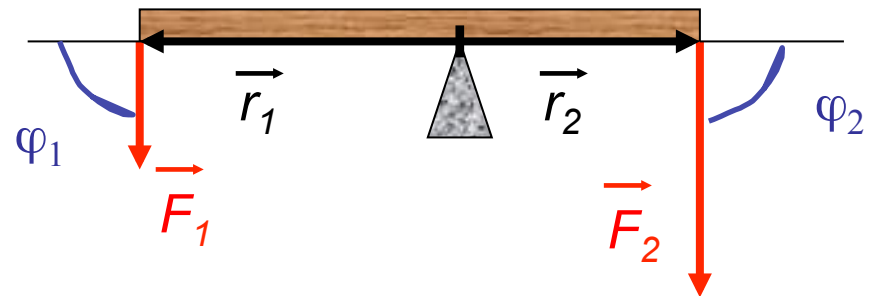
Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

Falls  $\varphi_1, \varphi_2 \neq 90^\circ$  gilt allgemein:

$$F_1 \cdot r_1 \cdot \sin \varphi_1 = F_2 \cdot r_2 \cdot \sin \varphi_2$$

oder vektoriell:  $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$



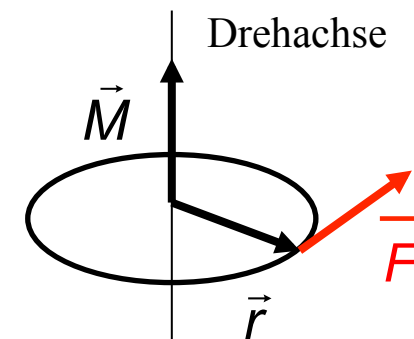
Definition des Drehmomentes:

Das Drehmoment  $M$  einer Kraft  $F$  im Abstand  $r$  von einer Drehachse ist gegeben durch das Vektorprodukt:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Einheit: 1Nm}$$

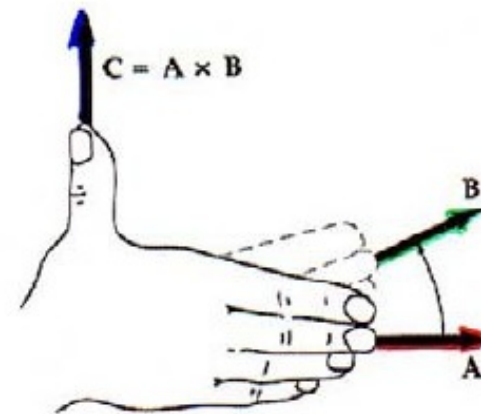
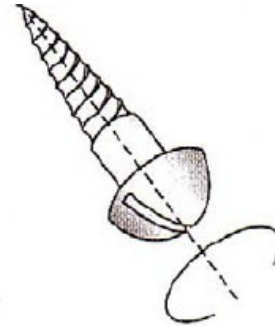
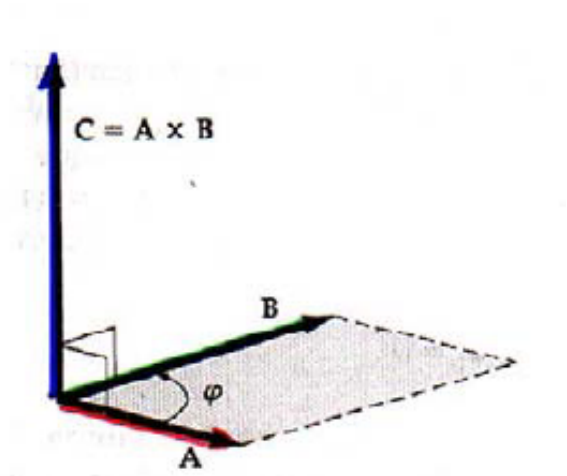
$\vec{M}$  parallel zur Drehachse

Beim Hebel gilt:  $\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$



Exp: Drehmomentschlüssel

# Rechtssystem und Vektorprodukt



Exp: Zapfenzieher

# Drehmomente bei Körperbewegungen

Drehmomente spielen eine wichtige Rolle bei Körperbewegungen. Muskeln erzeugen Drehmomente an Körperteilen um die Gelenke (Drehachsen).

Bsp.: Der Bizepsmuskel greift etwa  $r_1=3.4\text{cm}$  vom Gelenk an. Übt der Muskel die Kraft von  $F = 500\text{N}$  aus, so ist das Drehmoment:

$$|\vec{M}_1| = r_1 \cdot F \cdot \sin \varphi = 0.034\text{m} \cdot 500\text{N} \cdot \sin \varphi = 17\text{Nm} \cdot \sin \varphi$$

Für  $\varphi=90^\circ$  wird das Drehmoment maximal.

Welches Hantelgewicht kann mit diesem Drehmoment noch in der Hand gehalten werden? Der Abstand vom Ellbogengelenk zur Hand beträgt etwa  $r_2=34\text{cm}$ .

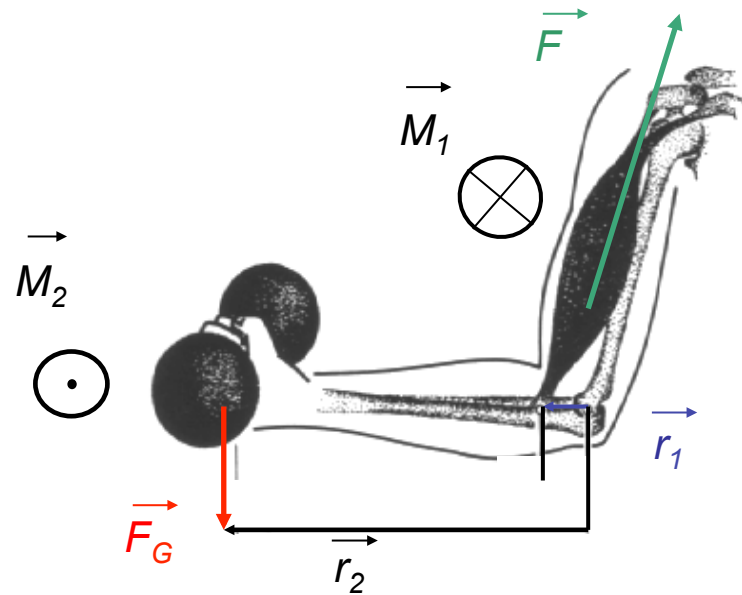
Für  $\varphi=90^\circ$  erhalten wir:

$$F_G = \frac{|\vec{M}|}{r_2} = \frac{17\text{Nm}}{0.34\text{m}} = 50\text{N}$$

50N entspricht einer Masse von  $50\text{N} / 9.81\text{m/s}^2 = 5.1\text{kg}$ .

Beachte: Im Gleichgewicht müssen sich die Drehmomente von der Hantel und vom Muskel gerade aufheben.

$$\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$$

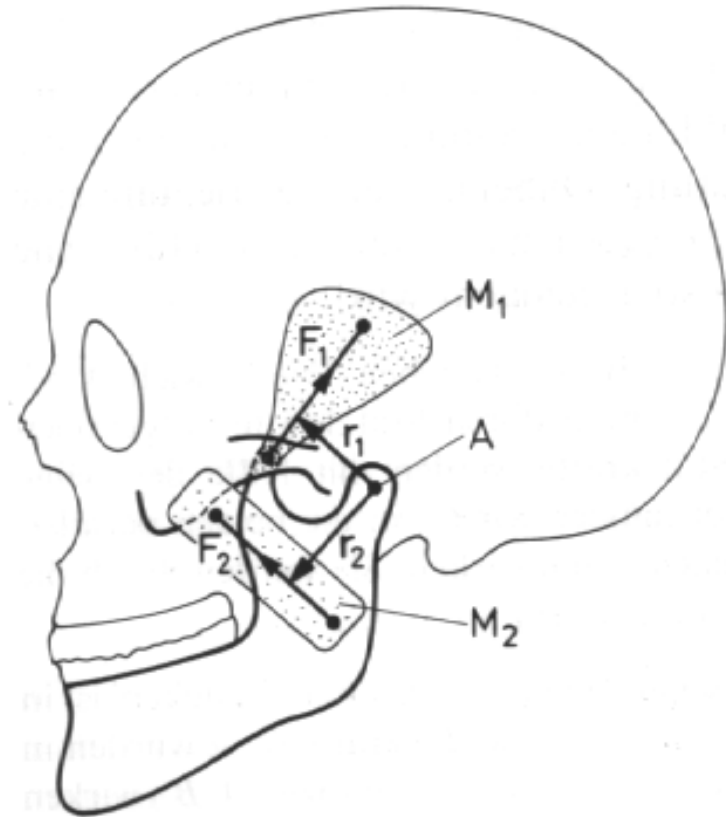


# Kräfte und Drehmomente der Kaumuskulatur

Durch die Kaumuskulatur werden die Kaukräfte erzeugt. Die Muskeln  $M_1$  und  $M_2$  erzeugen Drehmomente der Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  um den Drehpunkt  $A$  des Unterkiefers. Befindet sich Kaugut im Abstand  $r$  vom Drehpunkt  $A$ , so ist die Kaukraft dort:

$$F_{Kau} = \frac{1}{r} (r_1 F_1 + r_2 F_2)$$

Je kleiner  $r$  desto grösser die Kaukräfte. Deshalb wirken die grössten Kaukräfte im Bereich der Backenzähne.

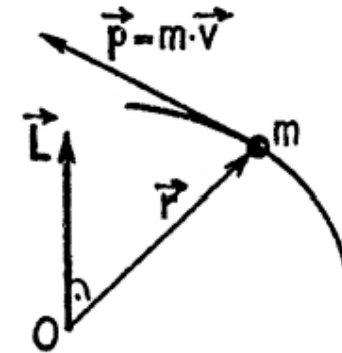


Unter dem Drall oder Drehimpuls  $\vec{L}$  des Massenpunktes  $m$  bezüglich dem Punkt O verstehen wir das Vektorprodukt von  $\vec{r}$  mit dem Impuls  $\vec{p}$ :

$$(37) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{oder} \quad \vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}, \quad \text{Drall.}$$

Dimension des Dralls: Masse  $\cdot$  (Länge)<sup>2</sup>/Zeit  
 oder: Energie  $\cdot$  Zeit  
 Einheit: J  $\cdot$  s

**Wichtig:** Drehimpuls und Drehmoment hängen von der Lage des Bezugspunktes O ab.



Durch die Anwendung der Differentiationsregel für Produkte von Funktionen, die auch beim Vektorprodukt gültig ist, erhalten wir aus (37)

$$d\vec{L}/dt = \vec{r} \times d\vec{p}/dt + d\vec{r}/dt \times \vec{p}.$$

Der zweite Summand der rechten Seite verschwindet aber, weil  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  und  $\vec{p}$  parallele Vektoren sind, so dass

$$(38) \quad d\vec{L}/dt = \vec{r} \times d\vec{p}/dt \quad \text{ist.}$$

Multiplizieren wir die Newton'sche Bewegungsgleichung  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$  auf beiden Seiten von links vektoriell mit  $\vec{r}$ , so folgt

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times d\vec{p}/dt, \quad \text{oder mit (36) und (38)}$$

$$(39) \quad \vec{M} = d\vec{L}/dt, \quad \text{Drallsatz.}$$

**Das wirkende Drehmoment bezüglich eines Punktes ist gleich der zeitlichen Änderung des Dralls bezüglich diesem Punkt.**



## Kapitel 3

# Mechanik eines Systems von Massenpunkten

Im letzten Kapitel haben wir die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes  $m$  unter dem Einfluss eines Kraftfeldes studiert, wobei das Kraftfeld seinen Ursprung in irgendwelchen andern Körpern der Umgebung hatte (z.B. Feder, Faden, Erde).

Jetzt betrachten wir ein System von  $N$  im Raum verteilten Massenpunkten  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ). Jeder Massenpunkt  $m_i$  erfährt eine resultierende Kraft  $\vec{F}_i$  und seine Bahn wird durch einen Ortsvektor  $\vec{r}_i(t)$  beschrieben. Welche allgemeinen Aussagen können wir über die dynamischen Eigenschaften unseres Systems machen?

### 3.1 Innere und äussere Kräfte; Impuls-Erhaltungssatz

Nach Newton III gibt es zu jeder Kraft eine Gegenkraft. Die auf ein  $m_i$  wirkende Resultierende  $\vec{F}_i$  ist im Allgemeinen aus zwei Arten von Kraftanteilen zusammengesetzt: Solche, deren Gegenkraft ausserhalb des Systems liegt und solche, deren Reaktionskraft auf andere zum System gehörende Massenpunkte wirkt. Wir unterscheiden:

#### Innere Kräfte:

Ihre Gegenkräfte liegen im System selbst. Ist  $\vec{F}(ik)$  die Kraft von  $m_i$  auf  $m_k$  so ist  $\vec{F}(ki) = -\vec{F}(ik)$  die Kraft von  $m_k$  auf  $m_i$ .

#### Äussere Kräfte:

Sie werden von Körpern erzeugt, die nicht zum System gehören. Ihre Gegenkräfte liegen daher nicht im System drin.

Nach dem Aktionsprinzip gilt für alle  $m_i$ :

$$\vec{F}_i = m_i \cdot d\vec{v}_i/dt.$$

Wir erhalten  $N$  solche Gleichungen ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Addieren wir linke und rechte Seiten, folgt

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \cdot d\vec{v}_i/dt \quad \text{oder} \quad \sum_i \vec{F}_i = \sum_i d\vec{p}_i/dt.$$

Bei der Summation über alle  $\vec{F}_i$  heben sich aber die stets paarweise auftretenden inneren Kräfte  $\vec{F}(ik)$  und  $\vec{F}(ki)$  gerade auf, so dass nur die Summe aller äusseren Kräfte übrig bleibt. Die rechte Seite ist

die Summe der zeitlichen Änderungen der Einzelimpulse  $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$ , was das Gleiche ist, wie die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses  $\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i$ .

$$(40) \quad \sum_i \vec{F}_i \text{ (äussere)} = d\vec{p}_{tot}/dt \quad \text{Impulssatz.}$$

**Summe der äusseren Kräfte = zeitliche Veränderung des Totalimpulses.**

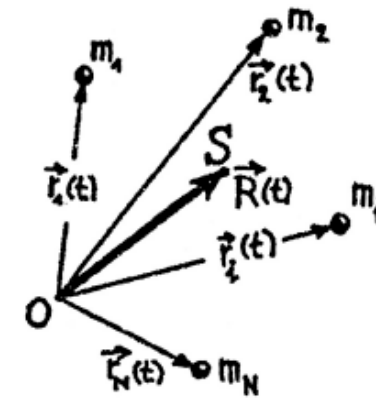
Wenn keine äusseren Kräfte auf das System einwirken, handelt es sich um ein **freies System**, wo offenbar gilt:

$$(41) \quad d\vec{p}_{tot}/dt = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{p}_{tot} = \text{const.} \quad \text{Impuls-Erhaltungssatz.}$$

**In einem freien System ist der Gesamtimpuls konstant.**

## 3.2 Schwerpunkt. Schwerpunktsatz

Aus der Verteilung unserer  $N$  Massenpunkte  $m_i$  an den Stellen  $\vec{r}_i(t)$  zur Zeit  $t$  definieren wir einen Ortsvektor  $\vec{R}(t)$ , der die Lage vom **Schwerpunkt** oder **Massenmittelpunkt S** angibt. Es wird sich zeigen, dass die formale Einführung dieses Bezugspunktes S die Beschreibung der Dynamik unseres Systemes von vielen Massenpunkten enorm erleichtert. Wir definieren  $\vec{R}$  als Summe der mit  $m_i$  gewichteten Ortsvektoren  $\vec{r}_i(t)$ , dividiert durch die Gesamtmasse aller Punkte.



### Definition:

$$(42) \quad \vec{R}(t) = (m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t) + \dots + m_N \vec{r}_N(t)) / (m_1 + m_2 + \dots + m_N),$$

**Ortsvektor des Schwerpunktes.**

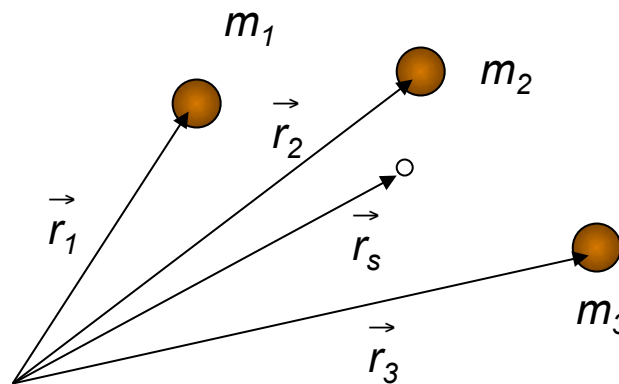
# Der Schwerpunkt

Definition des Schwerpunktes:

Der Schwerpunkt  $\vec{r}_s$  von einem System von  $n$  Massenpunkten  $(m_i, \vec{r}_i)$  ist gegeben durch:

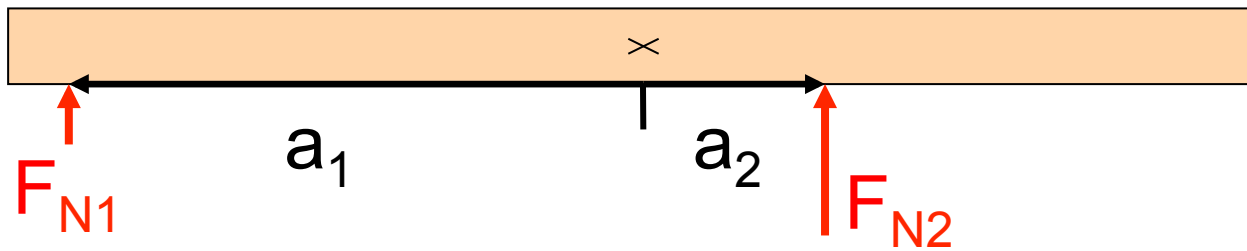
$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i$$

Analog für eine homogene Massenverteilung:  $\vec{r}_s = \frac{1}{\int \rho(\vec{r}) dV} \int \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) dV$



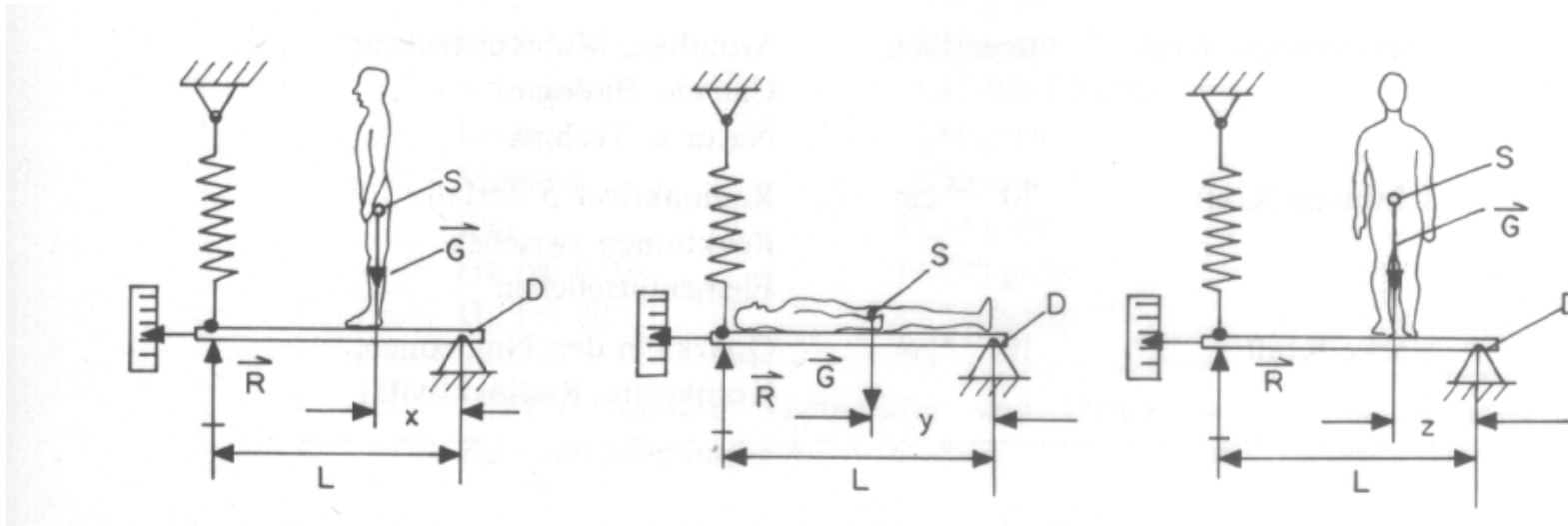
Exp: Schinkenblech, Schwerpunkt Holzstab

# Finde den Schwerpunkt



Hebelgesetz: Kraft mal Hebelarm  $\Rightarrow F_{N1} a_1 = F_{N2} a_2$   
Die Auflagekraft ist bei grossen Abständen kleiner  
und damit auch die Reibungskraft:  $F_R = \mu F_N$

# Schwerpunkt des Menschen



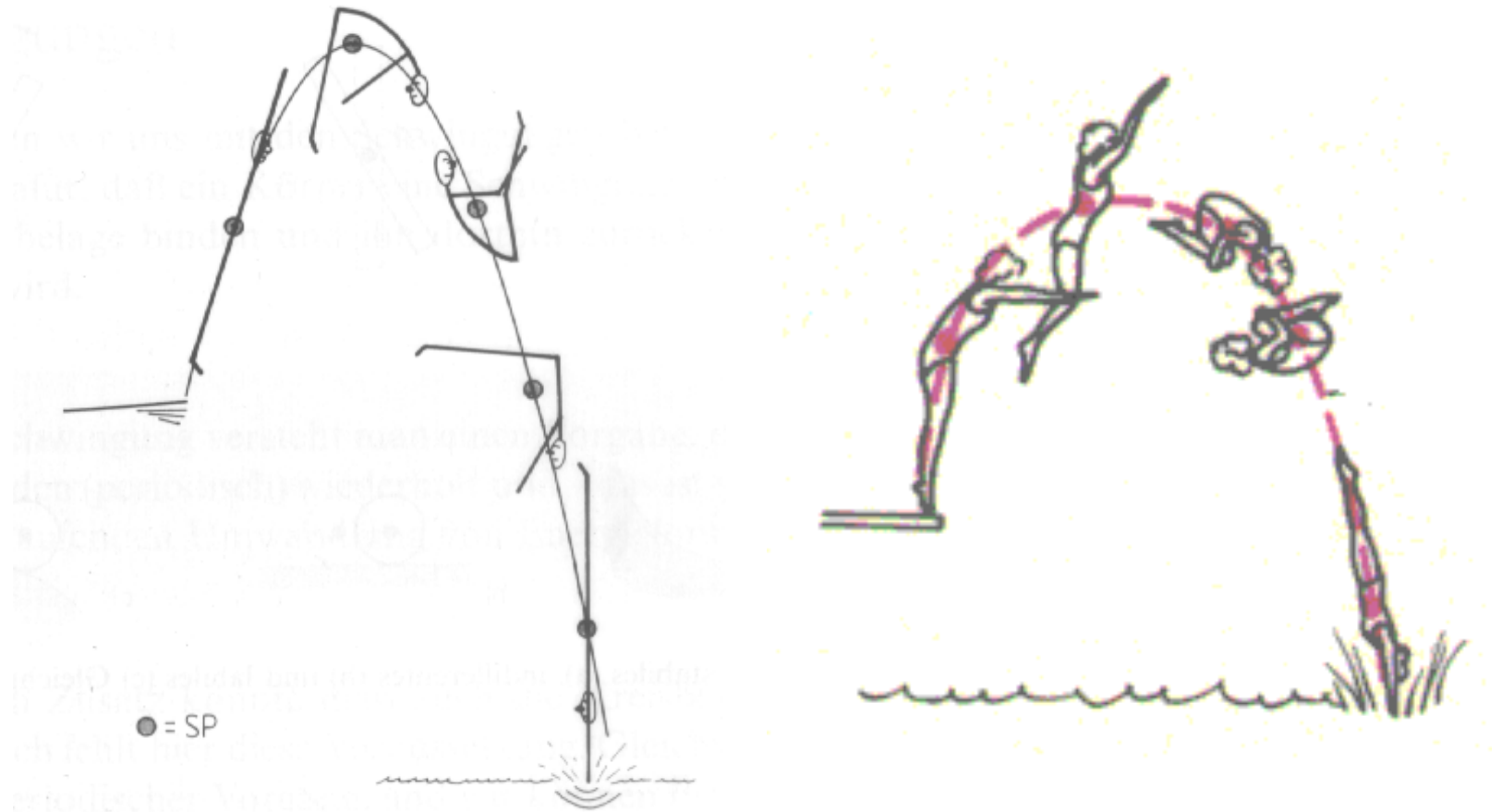
Der Schwerpunkt eines Menschen kann mittels der Momentenmethode bestimmt werden. Aus der Federkraft  $R$  im Abstand  $L$  kann auf die Position  $x$  des Schwerpunktes geschlossen werden, wenn die Gewichtskraft  $G$  bekannt ist.

$$x = \frac{R \cdot L}{G}$$

Die Drehmomente müssen sich aufheben!

Das gleiche Vorgehen gilt für alle 3 Raumrichtungen ( $x, y, z$ ).

# Zum Schwerpunkt (1)



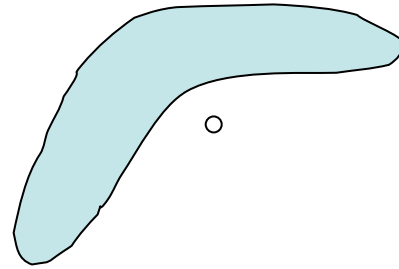
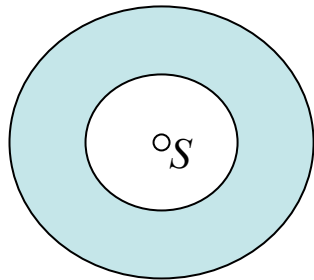
**Turmspringen:** Der Schwerpunkt bewegt sich auf einer Parabel (siehe schiefer Wurf). Gleichzeitig führt die Springerin eine Drehung aus. Vor dem Eintauchen bewirkt das Strecken eine Vergrößerung des Trägheitsmoments und bewirkt damit eine Verkleinerung der Winkelgeschwindigkeit.



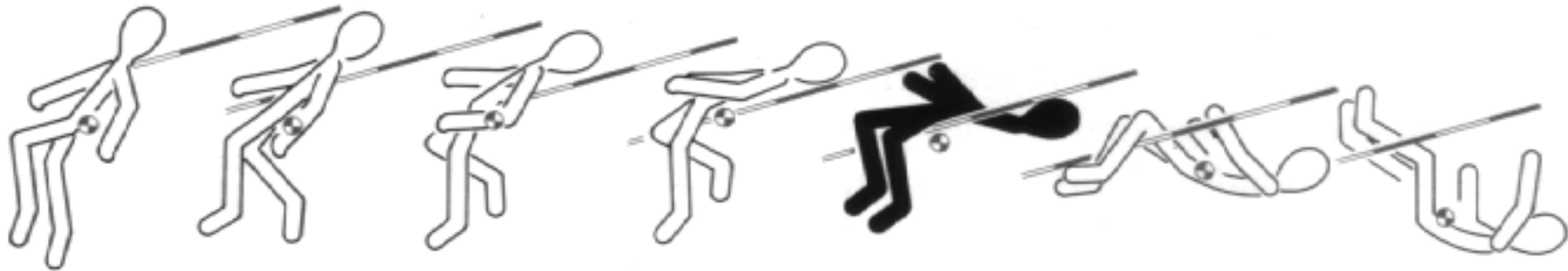
# Zum Schwerpunkt (2)

Der Schwerpunkt eines Körpers muss nicht innerhalb des materiellen Teils des Körpers liegen

Rad



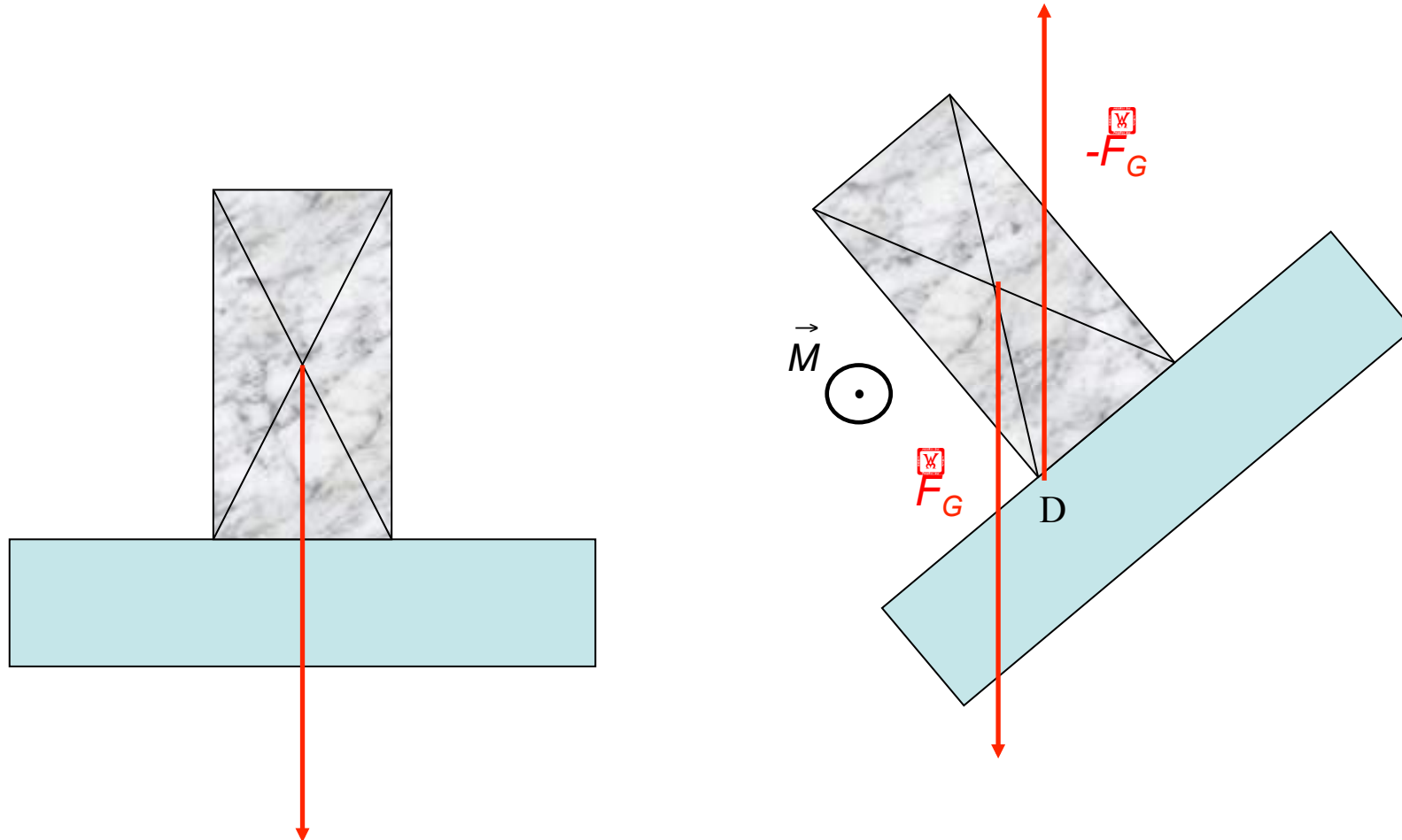
Bumerang  
Banane



Beispiel: Hochsprung. Bei einem optimal ausgeführten Fosbory-Flop rutscht der Schwerpunkt unter der Latte hindurch.

# Standfestigkeit

Es ist entscheidend, dass der Schwerpunkt über der Standfläche liegt. Ist dies nicht der Fall, so entsteht ein Drehmoment bezüglich der Kante, das den Körper umfallen lässt.



# Schwerpunktsatz

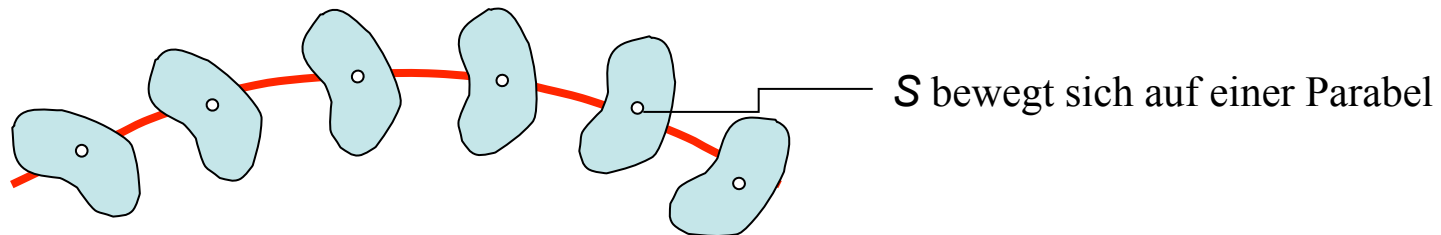
$$m_{tot} \vec{a}_s = \underbrace{\vec{F}_{tot}}$$

Summe der von  
aussen einwirkenden Kräfte

Falls  $\vec{F}_{tot} = 0 \rightarrow \vec{a}_s = 0$  der Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

Die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt (Schwerpunktsatz)  $m_{tot} \vec{a}_s = \vec{F}_{tot}$  besagt, dass der Schwerpunkt sich so bewegt, als ob in ihm die gesamte Masse konzentriert wäre.

Beispiel: schiefer Wurf eines Körpers mit gleichzeitiger Rotation.



Exp: Styroporkörper, Stehaufglas

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Schwerpunktes mit  $\vec{V}$  so führt differenzieren nach  $t$  von (42) und multiplizieren mit der Gesamtmasse auf

$$(43) \quad m_{tot} \cdot \vec{V} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad \text{oder} \quad m_{tot} \cdot \vec{V} = \vec{p}_{tot}.$$

**Gesamtimpuls des Systems = Impuls der Gesamtmasse im Schwerpunkt.**

Nochmaliges differenzieren nach der Zeit und Anwendung Impulssatzes (40) ergibt den **Schwerpunktsatz**:

$$(44) \quad m_{TOT} \cdot d\vec{V}/dt = \sum_i \vec{F}_i(\text{äussere}) \quad \text{oder} \quad m_{TOT} \cdot d^2\vec{R}/dt^2 = \sum_i \vec{F}_i(\text{äussere}).$$

**Äussere Gesamtkraft = Gesamtmasse · Beschleunigung des Schwerpunktes.**

Der Schwerpunktsatz (44) besagt:

**Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten bewegt sich so, wie wenn die Gesamtmasse im Schwerpunkt sitzen würde und die Summe aller äusseren Kräfte dort angreifen würde.**

Wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind, das System also frei ist, gelten die Aussagen

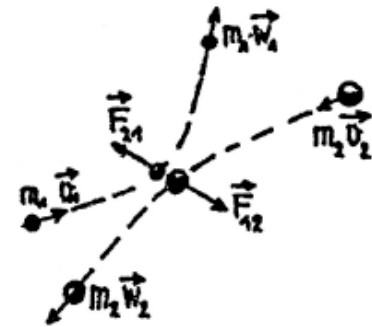
**Der Schwerpunkt eines freien Systems ist entweder in Ruhe oder er bewegt sich gleichförmig geradlinig.**

**In einem freien System kann durch die Wirkung der inneren Kräfte der Schwerpunkt nicht verschoben werden.**

### 3.3 Stossprozesse zwischen zwei Massenpunkten

Stossprozesse oder Streuprozesse zwischen Teilchen spielen auf allen Gebieten der Physik eine wichtige Rolle. Vor allem trifft dies für die Kern- und Elementarteilchenphysik zu, wo seit vielen Jahrzehnten wesentliche Informationen über die Wechselwirkungen dieser Bausteine der Materie aus Streuexperimenten gewonnen worden sind. Ein historisch besonders bedeutsames Experiment ist die Streuung von Alphateilchen an einer Goldfolie (Rutherford, um 1910), aus welchem die Existenz von Atomkernen zwingend abgeleitet wurde.

Das charakteristische Merkmal eines Stossprozesses besteht darin, dass sich zwei Körper, in unserem Fall zwei Massenpunkte  $m_1$  und  $m_2$ , zunächst frei bewegen, dann während einer kurzen Zeit  $\Delta t$  (kurz gegen die gesamte Beobachtungszeit) Kräfte aufeinander ausüben, um sich dann wieder kräftefrei voneinander zu entfernen. Die kurzzeitige Wechselwirkung bezeichnen wir als **Kraftstoss**. Im Zeitelement  $dt$  ändert die Masse  $m_1$  ihren Impuls  $\vec{p}_1$  nach Newton II um



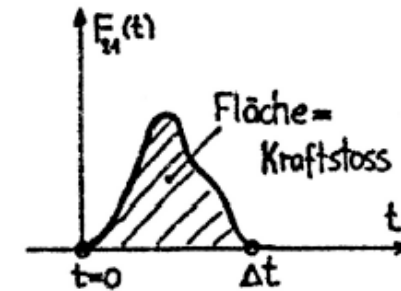
$d\vec{p}_1 = \vec{F}_{21}(t) \cdot dt$  und während des Stosses um

$$\Delta\vec{p}_1 = \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{21}(t) \cdot dt.$$

**Impulsänderung = Kraftstoss.**

**Wichtig:** Die Wirkung des Kraftstosses hängt nur vom Wert des Zeitintegrals und nicht vom detaillierten Verlauf von  $\vec{F}_{21}(t)$  ab.

Analog wird 
$$\Delta\vec{p}_2 = \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{12}(t) \cdot dt.$$



Wegen  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  ist  $\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$  und der Gesamtimpuls bleibt unverändert. Das muss natürlich so sein, damit der Satz von der Erhaltung des Impulses (41) nicht verletzt wird, denn auf unser System von zwei Massenpunkten wirken ja keine äusseren Kräfte.

**Bei einem Stoss gilt der Impuls-Erhaltungssatz.**

Wir unterscheiden zwei Arten von Stossprozessen, nämlich:

- a) **Elastischer Stoss:** Die gesamte kinetische Energie der Stosspartner bleibt erhalten.
- b) **Inelastischer Stoss:** Ein Teil der kinetischen Energie wird in andere Energieformen umgewandelt (z. B. Wärmeenergie, Deformationsenergie).

Exp: Wagen mit harter und weicher Feder

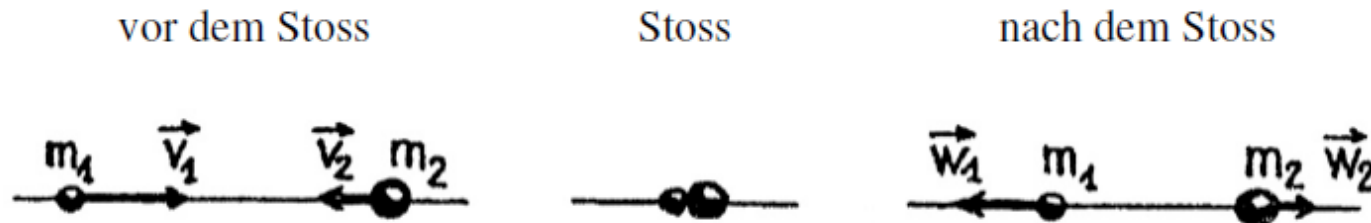
### 3.3.1 Stöße in einer Dimension

Die beiden Massenpunkte sollen sich vor und nach dem Stoss auf ihrer ursprünglichen Verbindungsgeraden bewegen. Konkret entspricht der zentrale Stoss zweier nicht rotierender Kugeln oder der

Stoss zweier Eisenbahnwagen dieser Situation. Vor dem Stoss seien die Geschwindigkeiten der Massenpunkte  $v_1$  und  $v_2$ , nach dem Stoss  $w_1$  und  $w_2$  (algebraische Grössen, positiv nach rechts, negativ nach links).

### 3.3.1.1 Elastischer Stoß

Impuls und kinetische Energie bleiben erhalten.



(i) Impulserhaltung:

(ii) Energieerhaltung:

oder

(ii)/(i) ergibt:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot w_1 + m_2 \cdot w_2.$$

$$(m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2)/2 = (m_1 \cdot w_1^2 + m_2 \cdot w_2^2)/2.$$

$$(i) \quad m_1 \cdot (v_1 - w_1) = m_2 \cdot (w_2 - v_2),$$

$$(ii) \quad m_1 \cdot (v_1^2 - w_1^2) = m_2 \cdot (w_2^2 - v_2^2).$$

$$(iii) \quad v_1 - v_2 = -(w_1 - w_2).$$

(iii) bedeutet: **Die Relativgeschwindigkeit ändert beim Stoß das Vorzeichen.**

Aus (i) und (iii) errechnet man die Endgeschwindigkeiten:

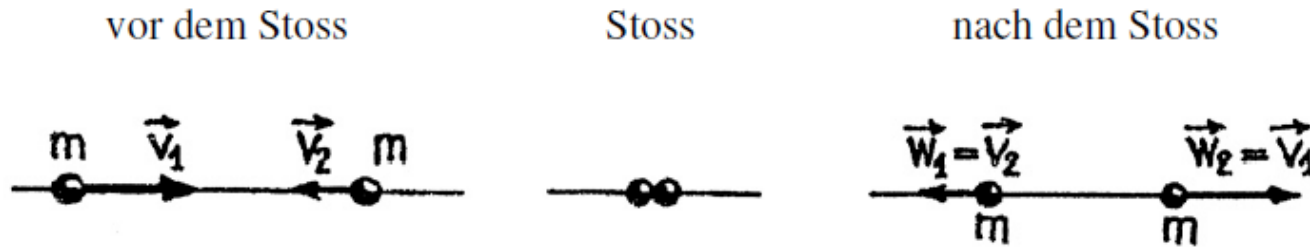
$$(45) \quad \begin{cases} w_1 = v_1 \cdot (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) + v_2 \cdot 2 \cdot m_2/(m_1 + m_2), \\ w_2 = v_1 \cdot 2 \cdot m_1/(m_1 + m_2) + v_2 \cdot (m_2 - m_1)/(m_1 + m_2). \end{cases}$$



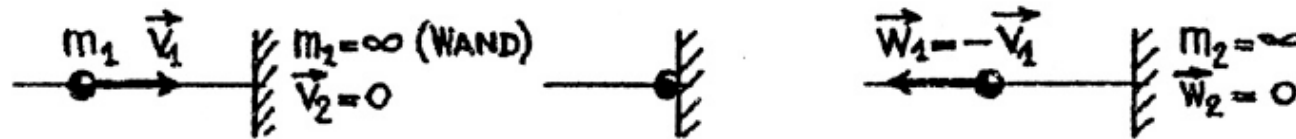
Spezialfälle:

a)  $m_1 = m_2, \rightarrow w_1 = v_2$  und  $w_2 = v_1$ .

Beim zentralen Stoss gleicher Massen werden die Geschwindigkeiten ausgetauscht.



b)  $m_2 \rightarrow \infty, v_2 = 0$  (Stoss mit Wand)  $\rightarrow w_1 = -v_1$ .



$m_1$  wird reflektiert, der Rückstossimpuls wird von der unendlich schweren Wand aufgenommen, ohne dass sie eine merkliche Geschwindigkeit annimmt (Trägheit der Wand).

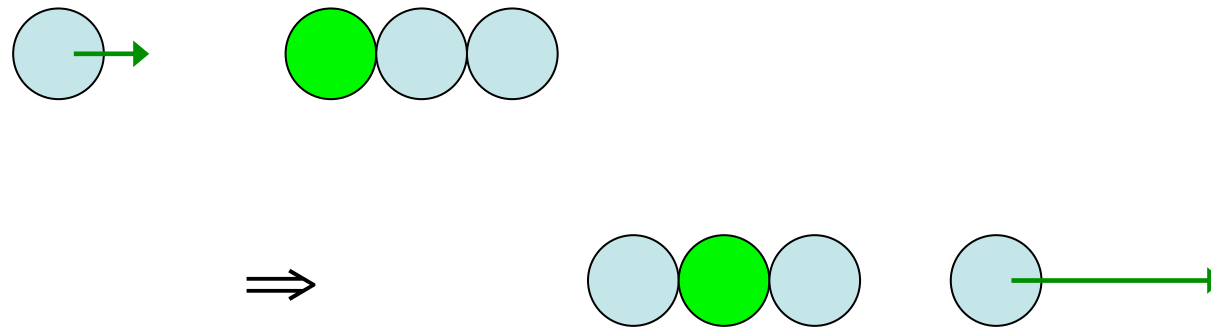
Exp: Zusammenstöße auf Luftkissenbalken


a)  $p=0$  b)  $m_1=m_2, v_2=0$  c)  $m_1 < m_2$  und  $m_1 > m_2$

# Kugelreihe



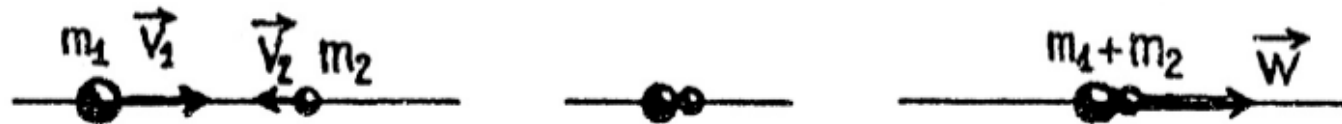
# Gauss-Kanone



 Ferrromagnet

### 3.3.1.2 Vollständig inelastischer Stoss

Beim vollständig inelastischen Stoss tritt der grösstmögliche Verlust an kinetischer Energie auf. Wir bezeichnen die in eine andere Form umgewandelte Energie mit  $Q$ . Dieser Wert erreicht ein Maximum, wenn beide Massen nach dem Stoss zusammenkleben und somit eine gemeinsame Geschwindigkeit  $w$  besitzen.



Aus dem Impulssatz folgt sofort:

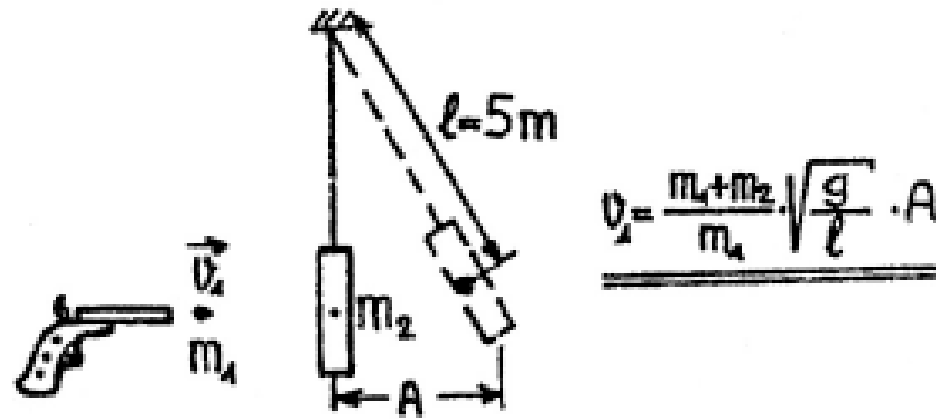
$$(46) \quad w = (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2) / (m_1 + m_2).$$

Die Grösse  $Q = E_{KIN}(\text{vor}) - E_{KIN}(\text{nach})$  ergibt dann

$$(47) \quad Q = m_1 \cdot m_2 \cdot (v_1 - v_2)^2 / 2(m_1 + m_2).$$

Exp: inelastischer Stoss

# Ballistisches Pendel



### 3.3.2 Nicht zentraler, elastischer Stoss

Wir betrachten den Stoss zweier Kugeln (die nicht rotieren), wobei die eine vor dem Stoss ruht.



Die Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte im Moment der Berührung ist die **Stossachse**. Sie schliesst mit  $v_1$  den Winkel  $\varphi$  ( $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ ) ein. Impuls- und Energiesatz liefern

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad m_1 \vec{v}_1 &= m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2, \\ \text{(ii)} \quad m_1 \vec{v}_1^2 / 2 &= m_1 \vec{w}_1^2 / 2 + m_2 \vec{w}_2^2 / 2. \end{aligned}$$

Wir wollen der Einfachheit halber die Diskussion auf den Spezialfall beschränken, wo die stossenden Kugeln dieselbe Masse besitzen (entspricht dem Billardspiel, unter Vernachlässigung der Rotation der Kugeln). Dann gehen (i) und (ii) über in

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \vec{v}_1 &= \vec{w}_1 + \vec{w}_2, \\ \text{(ii)} \quad v_1^2 &= w_1^2 + w_2^2. \end{aligned}$$

(i) und (ii) sagen jetzt aus, dass  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{w}_1$  und  $\vec{w}_2$  ein rechtwinkliges Dreieck bilden und  $\vec{v}_1$  die Hypotenuse ist. Somit gilt unabhängig vom Stosswinkel :

**Beim elastischen Stoss gleich schwerer Massen und einem zunächst ruhenden Stosspartner, bilden die Geschwindigkeiten nach dem Stoss immer einen rechten Winkel.**

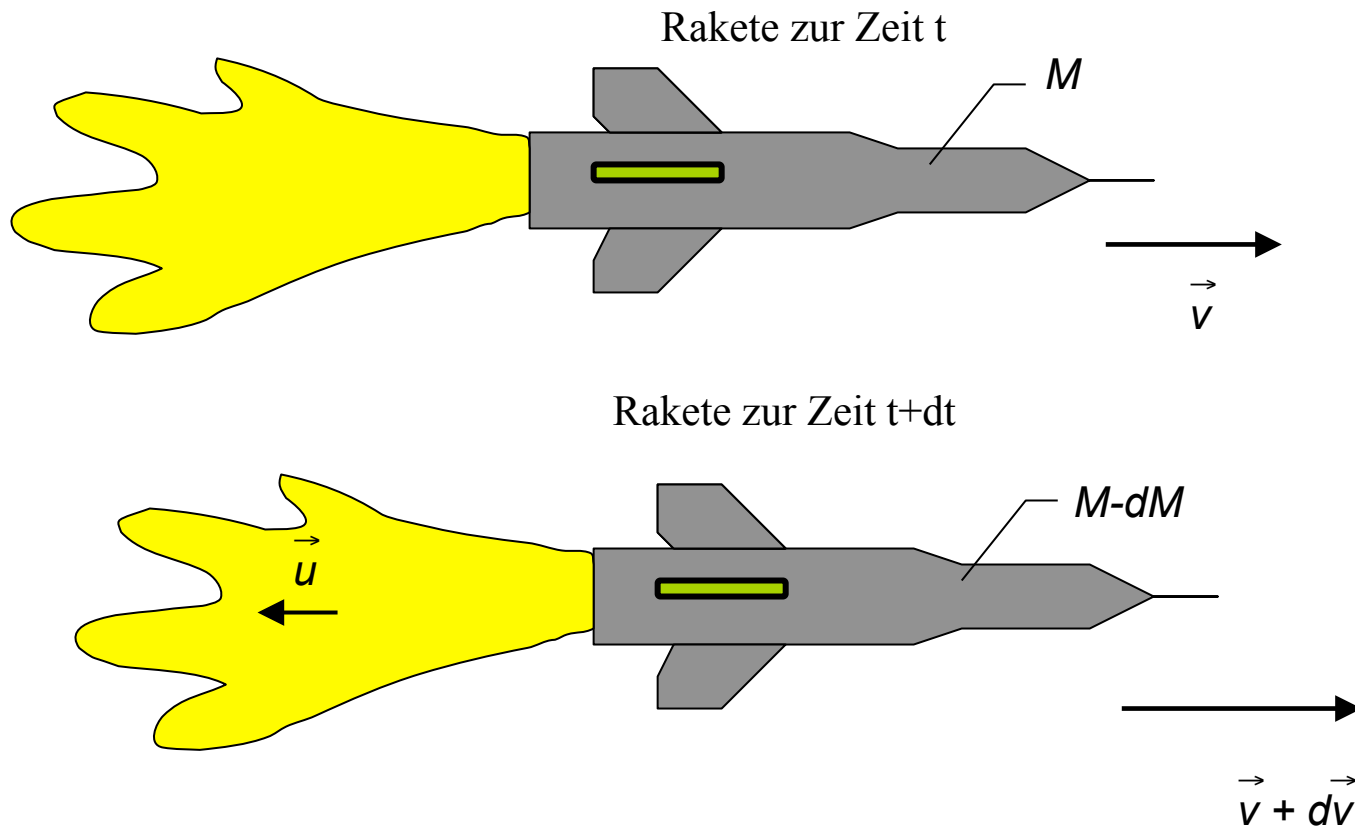
**Bemerkung zur Wahl des Koordinatensystems:**

Die in einem Streuexperiment beobachteten Grössen beziehen sich natürlich auf das Laborsystem. Die rechnerische Behandlung des Streuproblems wird jedoch wesentlich erleichtert, wenn man sich auf das so genannte **Schwerpunktsystem** bezieht, in welchem definitionsgemäss der Systemschwerpunkt ruht. Wegen (44) ist dann der Gesamtimpuls gerade null.

| **Im Schwerpunktsystem ist die Summe aller Impulse gleich null.**

Wenn nur zwei Massen beteiligt sind, bedeutet dies, dass sie sich sowohl vor als auch nach dem Stoss mit entgegengesetzt gleichen Impulsen bewegen. Die kinematischen Resultate der Rechnung im Schwerpunktsystem werden dann mit (5) auf Laborverhältnisse zurücktransformiert.

# Rakete





### 3.4 Bewegungsgleichung der Rakete

Der Raketenmotor funktioniert nach dem Prinzip der Impulserhaltung im von äusseren Kräften freien System, wobei das System aus Rakete inklusive Treibstoff im Zeitpunkt des Startes besteht. Wir nehmen an, dass keine äusseren Kräfte wirken, der Gesamtimpuls für den ruhenden Beobachter ("Laborsystem") daher immer null bleibt. Ferner sei die Ausstossrate  $\alpha = -dm/dt$  des Treibstoffes und die Ausstosseschwindigkeit  $\vec{u}_0$  relativ zur Rakete konstant, dann ist

$$m(t) = m_{Start} - \alpha \cdot t$$

die beschleunigte und **zeitabhängige** Raketenmasse (inklusive Treibstoffrest). Zur Zeit  $t$  sei die Raketengeschwindigkeit  $\vec{v}(t)$ . Im Zeitelement  $dt$  wird eine Treibstoffmasse  $-dm = \alpha \cdot dt$  ausgestossen. Die Geschwindigkeit  $\vec{u}$  dieses Massenelementes beträgt im Laborsystem

$$\vec{u} = \vec{v}(t) + \vec{u}_0$$



Der Gesamtimpuls ändert sich während der Zeit  $dt$  nicht, es ist

$$\begin{aligned} (-dm/dt) \cdot (\vec{v}(t) + \vec{u}_0) + d(m(t) \cdot \vec{v}(t))/dt &= 0, \text{ somit} \\ -dm \cdot \vec{v}(t) - dm \cdot \vec{u}_0 + dm \cdot \vec{v}(t) + m(t) \cdot d\vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

Trennung der Variablen liefert:  $d\vec{v} = \vec{u}_0 \cdot dm/m(t)$  und

$$\int_0^{v_{end}} d\vec{v} = \vec{u}_0 \cdot \int_{m_{Start}}^{m_{leer}} dm/m(t) \quad \text{oder} \quad \boxed{\vec{v}_{end} = -\vec{u}_0 \cdot \ln(m_{Start}/m_{leer})}$$

Das Verhältnis von End- zu Ausstossgeschwindigkeit ist durch das Verhältnis von Startgewicht zu Leergewicht bestimmt.

**Frage:** Was ist der Sinn mehrstufiger Raketenbauweise?

Exp: Knallgaskanone (Rückstoss)

Raketenwagen auf Luftkissenbalken (Dampfdruckstoss)

Rakete 6bar H<sub>2</sub>O

# Kapitel 4

## Gravitation

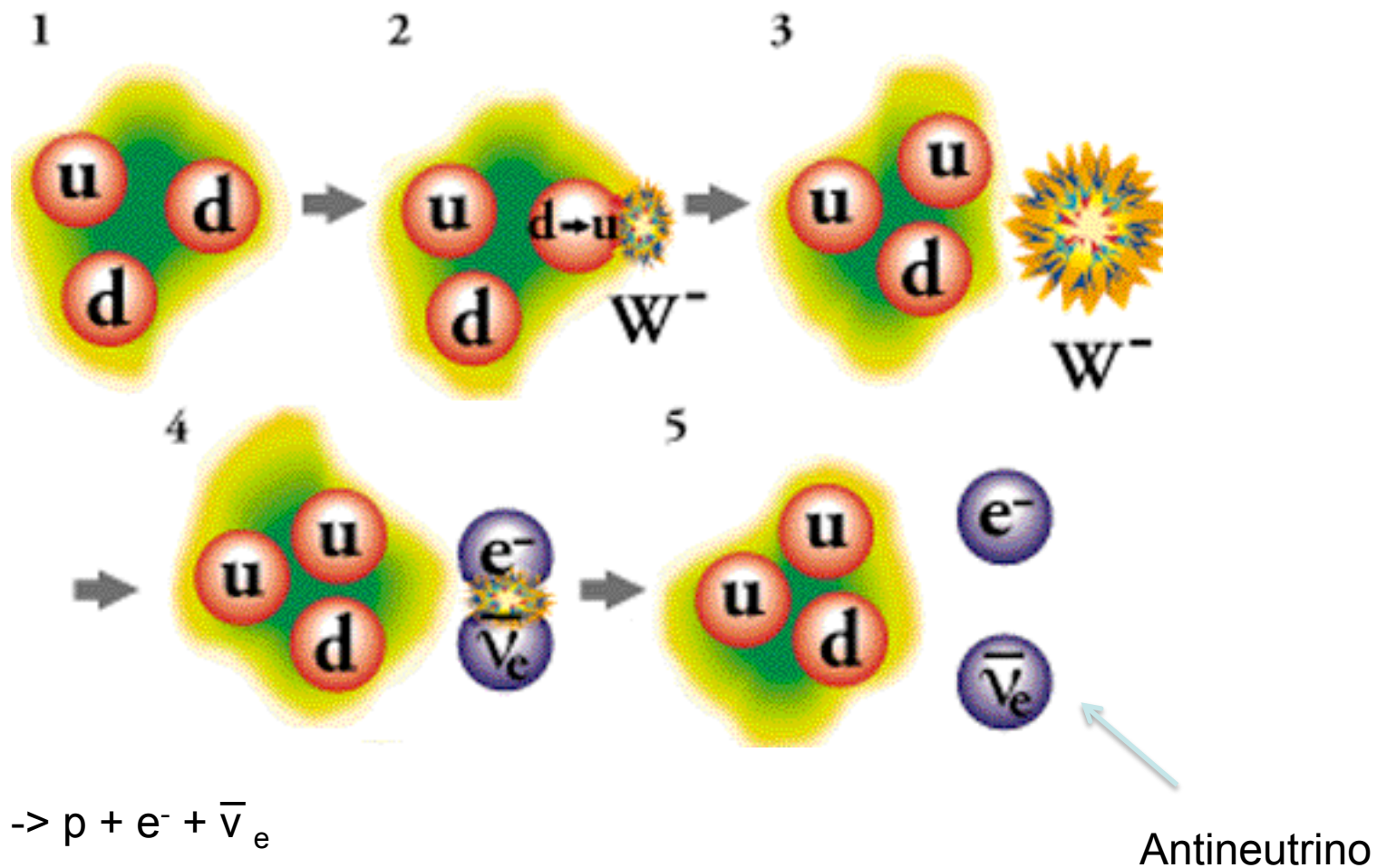
Im Abschnitt 2.2 haben wir festgestellt, dass Kräfte ein Ausdruck der „Wechselwirkung“ zwischen Körpern sind. Was wissen wir nun über die Natur dieser Wechselwirkungen? Die Beobachtung hat ergeben, dass vier fundamentale Arten von Wechselwirkungen (oder Kräften) existieren:

	Relative Stärke
a) Gravitationswechselwirkung	$10^{-40}$
b) Elektromagnetische Wechselwirkung	$10^{-2}$
c) Starke Wechselwirkung	1
d) Schwache Wechselwirkung	$10^{-12}$

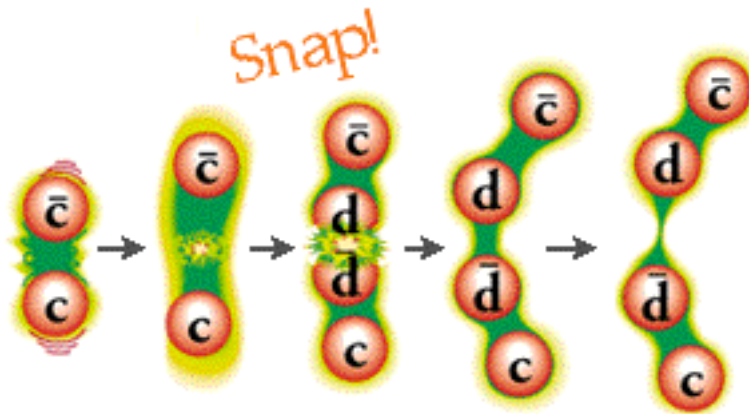


	Gravity	Weak (Electroweak)	Electromagnetic	Strong
Carried By	Graviton (not yet observed)	$W^+$ $W^-$ $Z^0$	Photon	Gluon
Acts on	All	Quarks and Leptons	Quarks and Charged Leptons and $W^+$ $W^-$	Quarks and Gluons

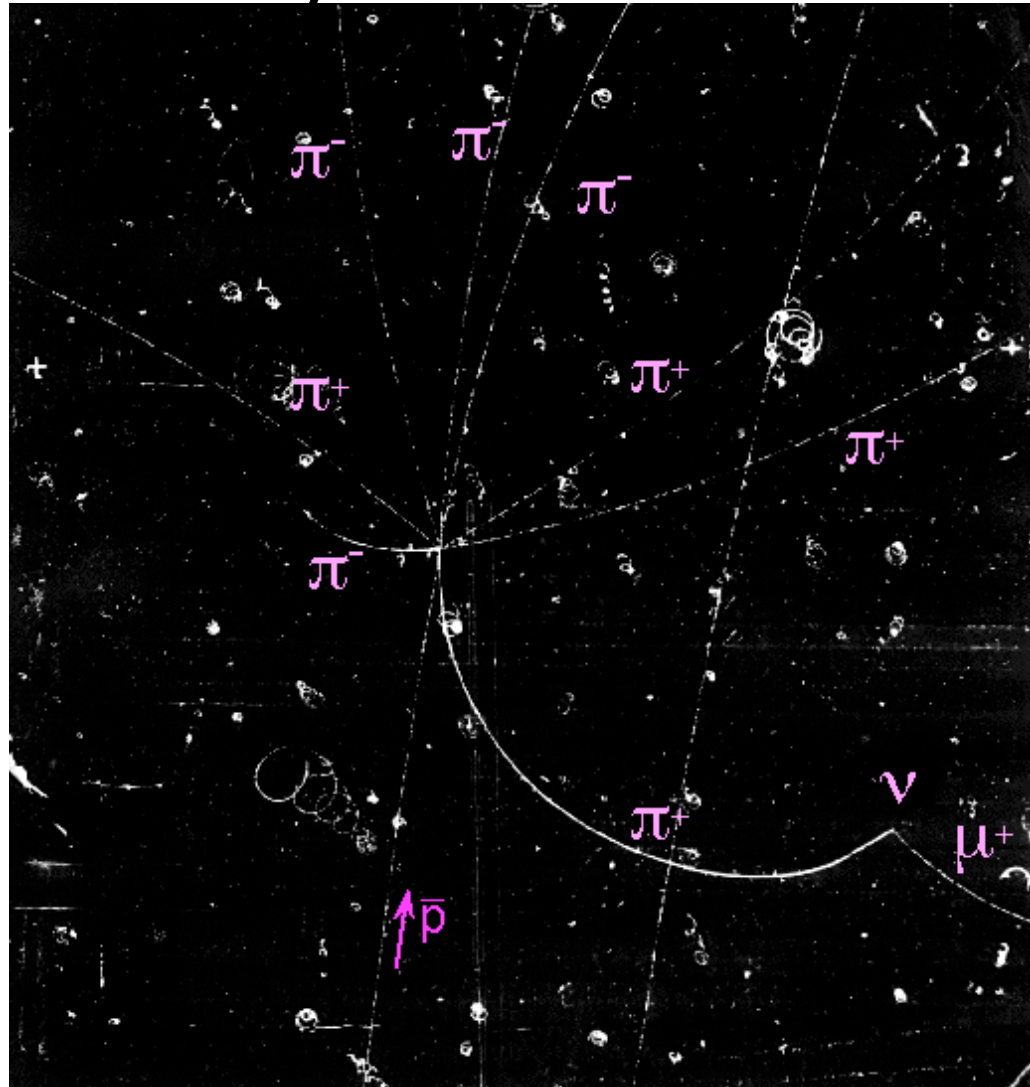
# Beta-Zerfall: schwache Wechselwirkung



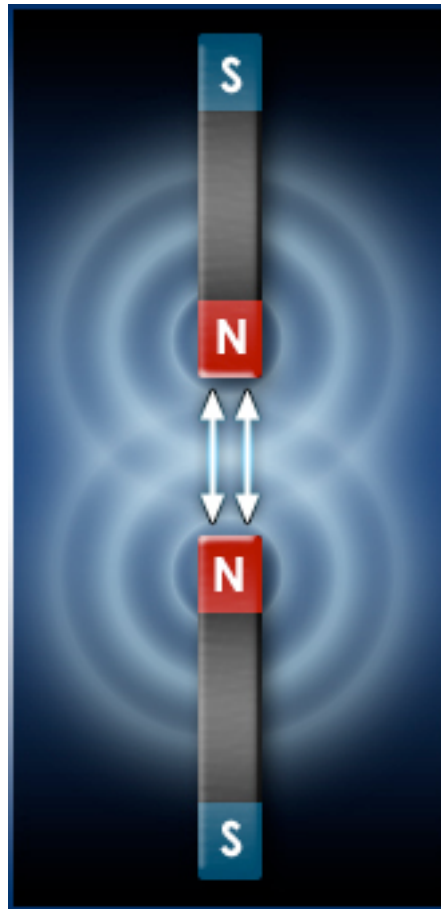
# Starke Wechselwirkung



# Nebelkammeraufnahme: Aus Mesonen werden Myonen und Neutrinos



# Elektromagnetische Wechselwirkung

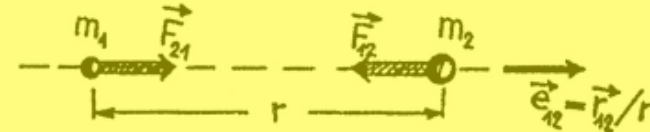




# Gravitation

Die Kräfte der starken und schwachen Wechselwirkungen wirken nur auf Distanzen von  $10^{-15}$  m, bzw.  $10^{-18}$  m. Sie treten in Atomkernen und zwischen Elementarteilchen auf. Die elektromagnetischen Kräfte haben eine unbegrenzte Reichweite, sie sind für atomare, chemische und biologische Vorgänge verantwortlich. Gravitationskräfte haben ebenfalls unbegrenzte Reichweite, wirken zwar zwischen allen Körpern, sind aber relativ schwach, haben grosse Bedeutung in der Astronomie und natürlich als Gewichtskraft im täglichen Leben. Der geniale Newton hat als erster erkannt (etwa 1683), dass die Gewichtskraft und die Kräfte zwischen Himmelskörpern denselben Ursprung haben. Auf Grund der etwa 70 Jahre früher empirisch gefundenen Gesetze der Planetenbewegung (Kepler, 1609 und 1615) ist es ihm gelungen, das fundamentale **Gravitationsgesetz** zu formulieren. Wir fassen es hier zunächst als Kraftgesetz auf, das für zwei **Massenpunkte** gilt. Es lautet:

$$(48) \quad \vec{F}_{12} = -\vec{e}_{12} \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2.$$



Zwischen zwei Massenpunkten wirkt eine anziehende Kraft, die dem Produkt der Massen proportional und dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional ist. Die Wirkungslinie der Kräfte liegt auf der Verbindungsgeraden der Massenpunkte.

Die fundamentale Naturkonstante  $G$  heisst **Gravitationskonstante**. Sie wurde zum ersten mal von Henry Cavendish (1798) im Laborversuch ermittelt (Cavendish-Drehwaage). Moderne Messungen ergeben den Wert

$$G = (6.6726 + 0.0005) \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}.$$

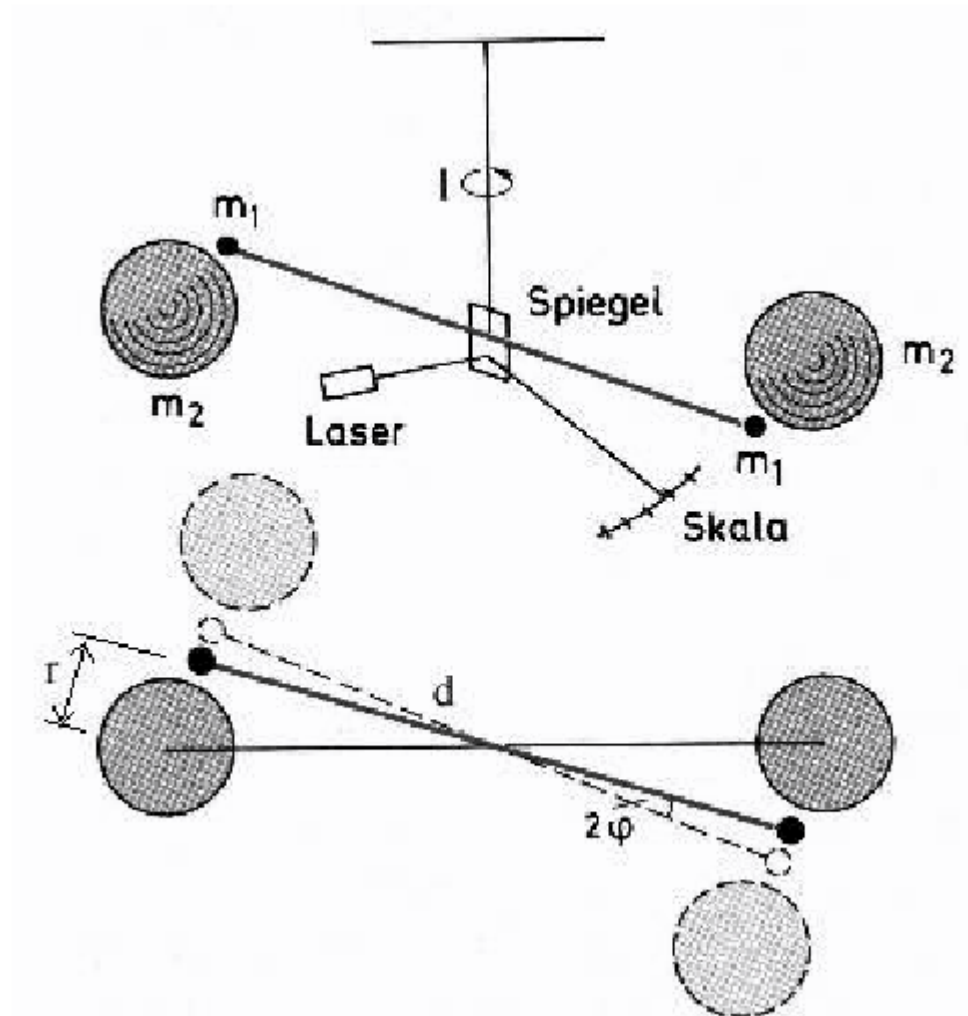
Isaac Newton kannte den Wert von  $G$  noch nicht. Beachte, dass (48) nur auf Paare von Massenpunkten anwendbar ist. Die Erfahrung hat uns aber gelehrt, dass das **Superpositionsprinzip** gilt. Dies bedeutet, dass bei Systemen von vielen Massenpunkten auf eine herausgegriffene Masse alle andern einzeln nach Massgabe von (48) additiv wirken. Um die Anziehungskraft beliebiger Körper zu berechnen,

muss man diese in infinitesimale Massenelemente aufteilen und die Einzelkräfte aufintegrieren. (Im Allgemeinen ist es falsch, für die Rechnung die Gesamtmasse von jedem Körper in seinen Schwerpunkt zu setzen). Hingegen ist es richtig, bei zwei kugelsymmetrischen Massenverteilungen für den Abstand  $r$  in (48) die Distanz der Kugelzentren und für  $m_1$  und  $m_2$  die Kugelmassen zu nehmen.

Setzt man für die Erde Kugelsymmetrie voraus, so lässt sich durch Gleichsetzen des Gewichtes  $m \cdot g$  einer Masse  $m$  und der Gravitationsanziehung bei Kenntnis der Gravitationskonstanten  $G$  und des Erdradius  $R$  die Masse  $m_E$  der Erde ermitteln. Aus

$$m \cdot g = G \cdot m_E \cdot m / R^2 \quad \text{folgt} \quad m_E = g \cdot R^2 / G.$$

# Gravitations-Drehwaage Henry Cavendish (1798)



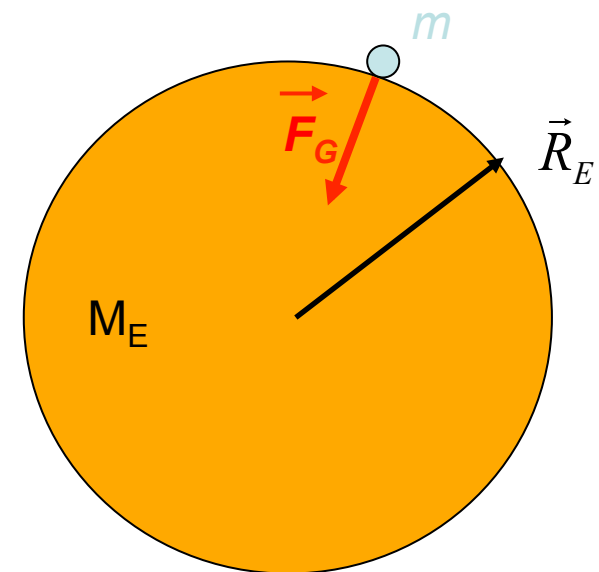
# Die Masse der Erde

Gravitationskraft auf  $m$ :  $F_G = G \frac{m \cdot M_E}{R_E^2}$

Entspricht der Gewichtskraft  $mg$

$$mg = G \frac{m M_E}{R_E^2}$$

$$\Rightarrow M_E = \frac{g R_E^2}{G} = \frac{9.81 (6370 \cdot 10^3)^2}{6.673 \cdot 10^{-11}} \text{ kg} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

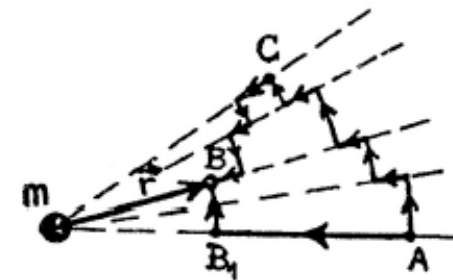


## 4.1 Gravitationsfeld und Gravitationspotential eines Massen-Punktes

Nach dem Gravitationsgesetz erfährt die Einheitsmasse 1 kg im Abstand  $r$  von einem Massenpunkt  $m$  die Kraft  $-G \cdot m/r^2 \cdot \vec{e}_r$  N/kg. Wir bezeichnen diese Kraft pro Masseneinheit als

$$\text{Gravitations-Feldstärke } \vec{f}: \quad (49) \quad \vec{f} = -G \cdot m/r^2 \cdot \vec{e}_r.$$

Wir sagen: Der Massenpunkt  $m$  ist vom Gravitationsfeld  $\vec{f}(\vec{r})$  umgeben. Vektorfelder können durch ihre **Feldlinien** dargestellt werden. Definitionsgemäss haben Feldlinien die Eigenschaft, dass der Feldvektor in jedem ihrer Punkte tangentiell gerichtet ist. Diese tangentiellen Feldvektoren geben die Richtung der Feldlinie an. Das Gravitationsfeld von  $m$  ist durch radial nach innen gerichtete Feldlinien, die aus dem Unendlichem kommen, gekennzeichnet. Bilden wir jetzt das Linienintegral von  $\vec{f}$  zwischen den Punkten A und B, so sehen wir sofort, dass dieses nicht vom Integrationsweg abhängt, denn wir können jede Linie in beliebig feine Elemente zerlegen, die entweder radial gerichtet sind oder in einer zu  $m$  konzentrischen Kugelfläche liegen. Nur die radialen Wegstücke tragen zum Integral bei, so dass



$$\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_A^{B_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} \text{ ist.}$$

Das Gravitationsfeld ist konservativ.

Die potentielle Energie der Einheitsmasse an der Stelle  $\vec{r}$  nennen wir das **Potential**  $V(\vec{r})$ .

| Kugelflächen  $r = \text{const.}$  sind Äquipotentialflächen.

Zur Berechnung von  $V(r)$  ist es sinnvoll, den Nullpunkt am Rand des Kraftfeldes zu wählen, d.h. in diesem Fall im Unendlichen. Nach (32) wird dann

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{dr} \quad \text{oder} \quad V(\vec{r}) = G \cdot m \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{e}_r \cdot \vec{dr} / r^2.$$

Integration längs einer radialen Feldlinie ( $\vec{e}_r \cdot \vec{dr} = dr$ ) ergibt:

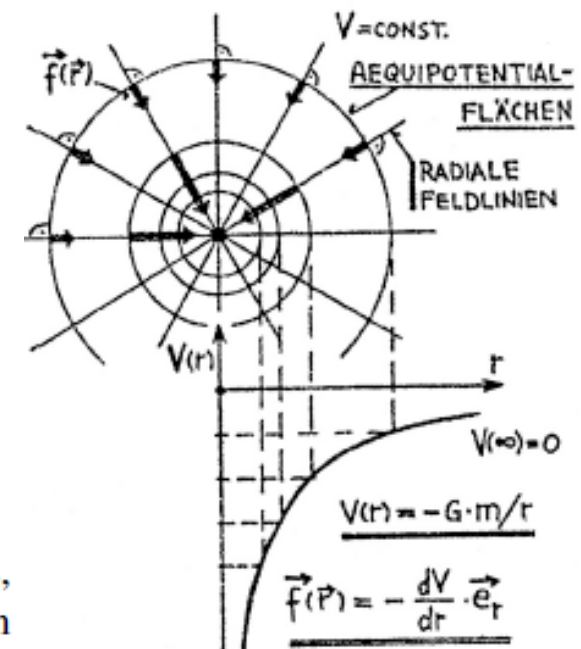
$$V(r) = G \cdot m \cdot \int_{\infty}^r dr / r^2, \quad \text{also}$$

$$(49) \quad V(r) = -G \cdot m / r,$$

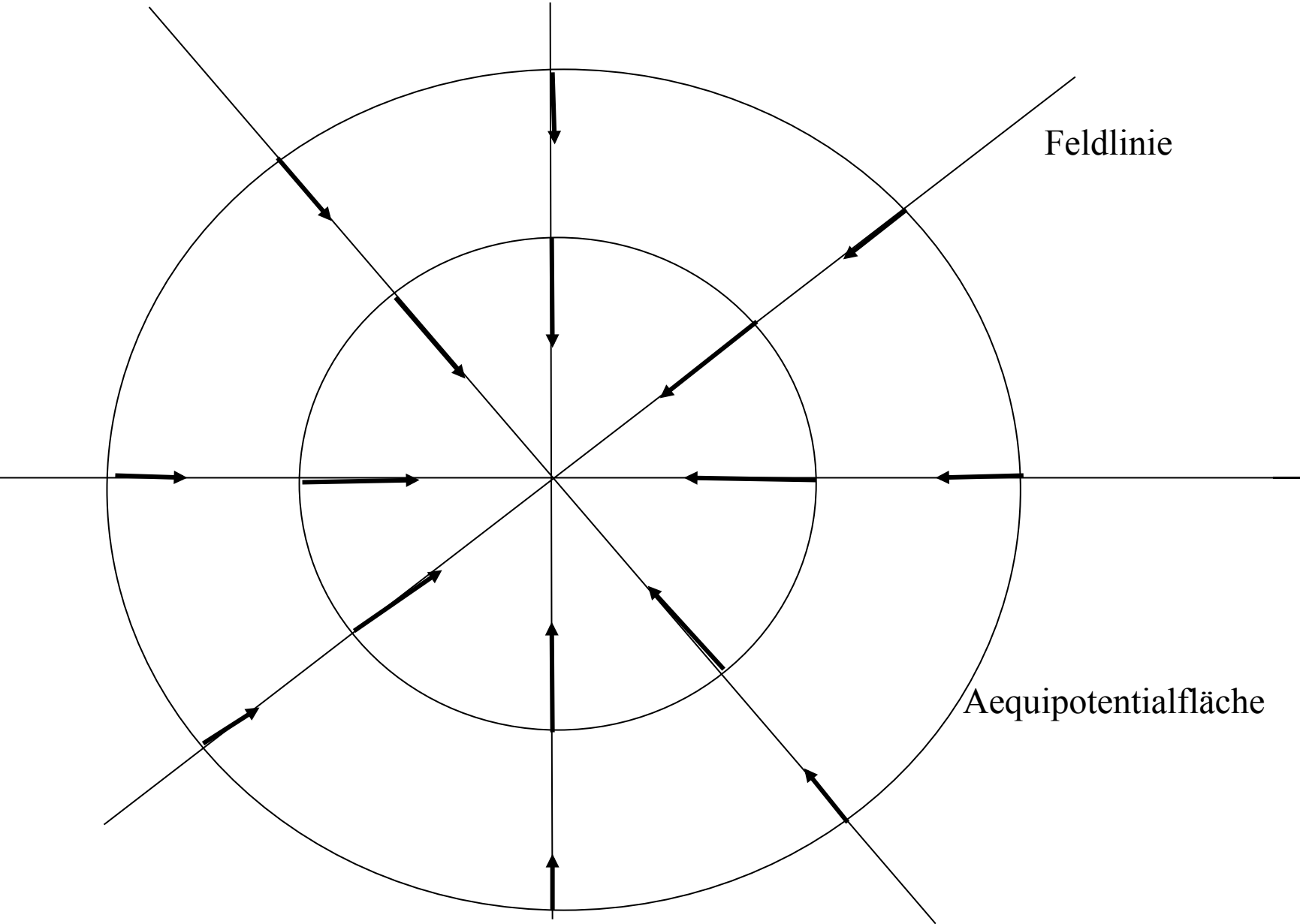
| Gravitationspotential des Massenpunktes.

Dimension: Arbeit/Masse, Einheit: J/kg

Das Potential  $V(r)$  ist gleich der Arbeit, die man aufwenden muss, um die Masse 1 kg vom Unendlichen in den Abstand  $r$  zu bringen (hier negativ, weil die Gravitationskraft anziehend ist).

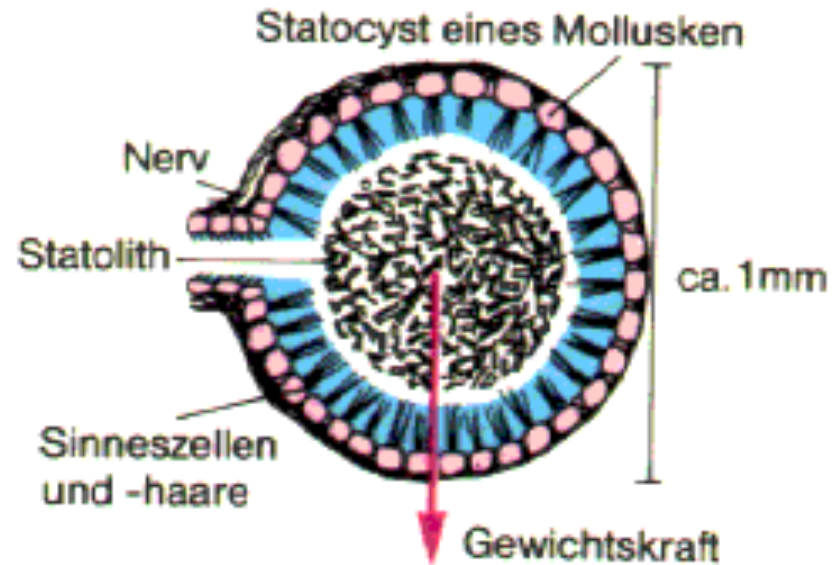


# Gravitationsfeld





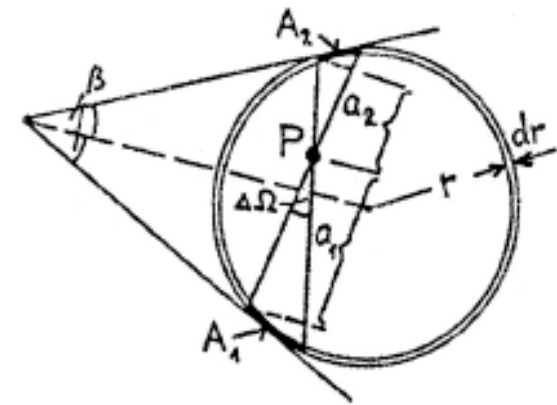
# Gleichgewichtssensoren



Die Natur hat eine Anzahl von Gewichtssensoren entwickelt: Statolithenapparat im Innenohr, Statocysten der wirbellosen Tiere, Stärkekörner in Pflanzenzellen

## 4.2 Gravitationsfeld und Gravitationspotential der homogenen Kugel

Ausserhalb einer homogenen Kugel herrscht das gleiche Feld  $\vec{f}$  wie wenn die gesamte Masse im Kugelmittelpunkt sitzen würde. (Den Beweis dafür werden wir in der Elektrizitätslehre an Hand des Coulombfeldes führen). Hier stellen wir die Frage nach dem Feld im Innern der Kugel. Nehmen wir vorerst eine dünnwandige Kugelschale mit Radius  $r$  und Wandstärke  $dr$ . In einen beliebigen inneren Punkt  $P$  legen wir die Spitze eines Doppelkegels mit dem Öffnungswinkel  $\Delta\Omega$ (sr), der die Flächenstücke  $A_1$  und  $A_2$  aus der Kugelschale ausschneidet. Aus nebenstehender Figur kann man ablesen:  $A_1 = \Delta\Omega \cdot a_1^2 / \cos\beta$  und  $A_2 = \Delta\Omega \cdot a_2^2 / \cos\beta$ . Die zu den Flächenelementen gehörenden Massen sind somit proportional den Quadraten ihrer Abstände von  $P$ , so dass ihre Feldbeiträge in  $P$  sich nach dem Gravitationsgesetz gerade kompensieren. Auf diese Weise lässt sich die ganze Kugelschale aus Massenelementen zusammensetzen, deren Feldstärken im beliebigen inneren Punkt  $P$  sich paarweise aufheben. Wir haben damit bewiesen:



**Eine Kugelschale erzeugt kein Gravitationsfeld im Innern.**

Nun betrachten wir den inneren Punkt P an der Stelle  $\vec{r}$  einer homogenen Kugel mit dem Radius  $R$  und der Masse  $m$ . Dort trägt nur die innere Teilkugel der Masse  $m' = m \cdot (r/R)^3$  zum Feld bei. Die Hohlkugel mit Innenradius  $r$  und Aussenradius  $R$  gibt keinen Beitrag, denn wir können sie auffassen als Summe von Kugelschalen. Im Bereich  $0 \leq r < R$  erhalten wir für das Gravitationsfeld:

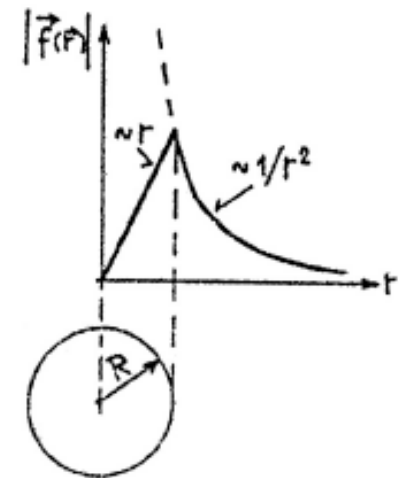
$$\vec{f}(\vec{r}) = -G \cdot m \cdot (1/R)^3 \cdot r \cdot \vec{e}_r, \quad \text{und für } r \geq R :$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = -G \cdot m/r^2 \cdot \vec{e}_r.$$

Das Potential  $V(r)$  ausserhalb der Kugel entspricht natürlich jenem der punktförmigen Masse  $m$ , d.h. für  $r \geq R$  ist

$$V(r) = -G \cdot m/r.$$

Gemäss (32) erhalten wir  $V(r)$  im Innern aus dem Feld  $f(r)$ :

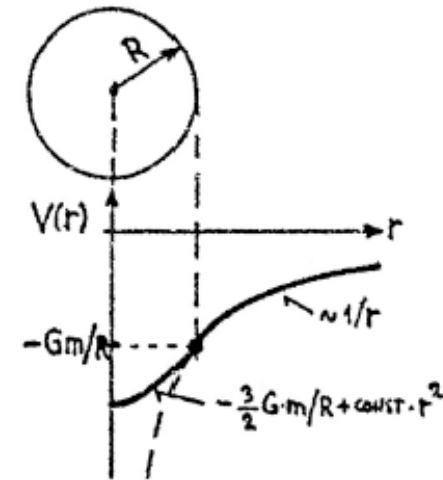


$$V(r) = V(R) - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{dr} \text{ oder}$$

$$V(r) = -G \cdot m/R + G \cdot m \cdot (1/R)^3 \int_R^r r \cdot dr,$$

und somit

$$V(r) = -(3/2) \cdot G \cdot m/R + G \cdot m/(2R^3) \cdot r^2.$$



Das Potential der homogenen Kugel steigt parabolisch an bis zum Kugelradius  $R$ ;  $V(r)$  und  $-dV/dr$  (d.h. die Feldstärke) sind an der Kugeloberfläche stetig.

### 4.3 Planetenbewegung (Keplerproblem)

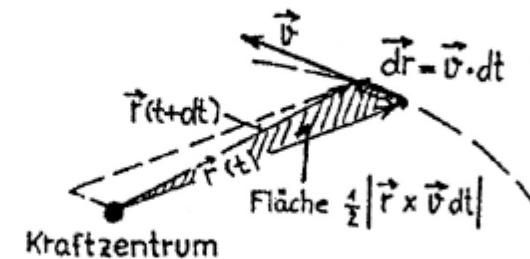
Für die Bewegung der Planeten um die Sonne hat Johannes Kepler (1571-1630) auf Grund des Beobachtungsmaterials von Tycho Brahe (1546-1601) seine drei Gesetze formuliert:

- I. Der Planet beschreibt eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- II. Der Radiusvektor von der Sonne nach dem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- III. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Ellipsenachsen.

Isaac Newton ist es gelungen, diese drei Gesetze auf ein einziges, nämlich das Gravitationsgesetz (48), zurückzuführen. Eine vollständige Herleitung der Keplergesetze durch Lösen der Bewegungsgleichung (9) mit dem Kraftgesetz (48) würde zu weit führen. Wir beschränken uns darauf, einige Folgerungen aus Energie- und Drehimpulssatz zu ziehen. Die Sonnenmasse  $m_s$  soll im Vergleich zur Planetenmasse  $m$  beliebig gross sein, so dass der ruhende Schwerpunkt mit dem Sonnenmittelpunkt zusammenfällt. Somit zeigt die auf den Planeten wirkende Kraft immer auf den raumfesten Sonnenmittelpunkt. Ein Kraftfeld, dessen Feldvektoren alle auf einen festen Punkt zeigen, nennt man ein **zentrales Kraftfeld** und die daraus resultierende Bewegung eine **Zentralbewegung**. Die Planetenbewegung gehört zur Klasse der Zentralbewegungen. Das Drehmoment der Zentralkraft bezogen auf das Kraftzentrum (hier der Sonnenschwerpunkt) ist nach (36) gleich null und nach dem Drallsatz (39) ist dann der Drall konstant.

Bei Zentralbewegungen ist der Drall bezogen auf das Kraftzentrum konstant.

Konstante Richtung des Drallvektors  $\vec{L}$  bedeutet, dass die Planetenbahn in einer **Ebene** verläuft (in der Normalebene zu  $\vec{L}$ ). Nun durchläuft der Planet im Zeitelement  $dt$  das Wegelement  $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$  und der Betrag des Vektorproduktes  $\vec{r} \times \vec{v} \cdot dt$  ist die von  $\vec{r}$  und  $d\vec{r}$  aufgespannte Fläche oder das doppelte der vom Fahrstrahl  $\vec{r}$  in der Zeit  $dt$  überstrichenen Fläche. Weil aber  $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$  konstant ist, wird in gleichen Zeitelementen  $dt$  von  $\vec{r}$  immer die gleiche Fläche bestrichen. Das II. Keplergesetz ist eine Konsequenz des Drallsatzes.



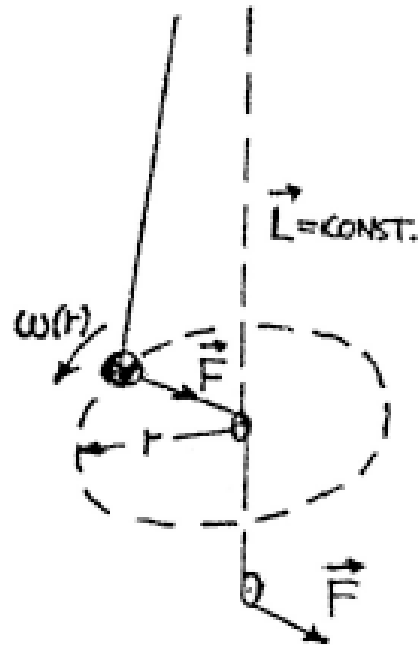
Bei Zentralbewegungen gilt der Flächensatz.

Die Planetenbahn hängt von zwei **Konstanten der Bewegung**, nämlich der **Gesamtenergie E** und dem **Drehimpuls  $\vec{L}$**  ab:

$$(50) \quad E = m \cdot v^2/2 - G \cdot m_S \cdot m/r \quad \text{und} \quad \vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}.$$

Bezeichnen wir die Komponente von  $\vec{v}$  in Richtung des Fahrstrahls  $\vec{r}$  mit  $v_r$  und jene senkrecht dazu

# Zentralbewegung



Der Drehimpuls  $L = m \cdot \omega \cdot r^2$  bleibt erhalten.

$$\omega(r) = L / (m \cdot r^2).$$

(in Richtung von  $\varphi$ ) mit  $v_\varphi$  so ist

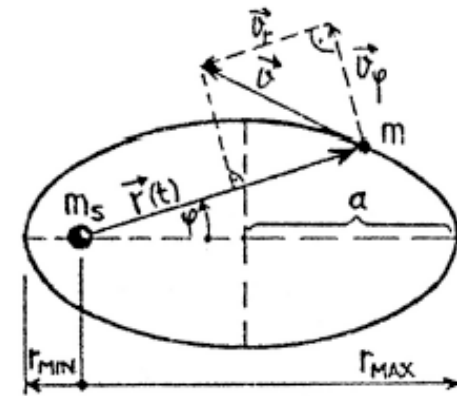
$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 \quad \text{und} \quad L = m \cdot r \cdot v_\varphi$$

Die kinetische Energie lässt sich jetzt schreiben als

$$m \cdot v^2/2 = m \cdot (v_r^2 + (L/mr)^2)/2,$$

dies eingesetzt in (50) ergibt für die Gesamtenergie E:

$$(51) \quad m \cdot v_r^2/2 + L^2/(2mr^2) - G \cdot m_s \cdot m/r = E.$$

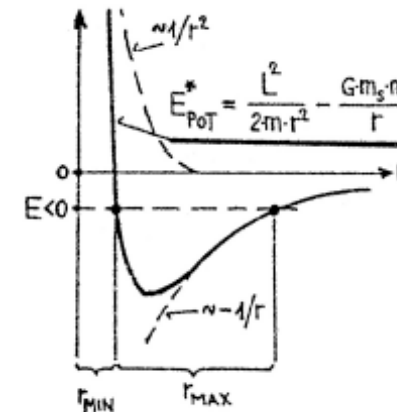




Gleichung (51) würde man auch erhalten für eine Masse  $m$ , die sich in einem eindimensionalen Kraftfeld mit der potentiellen Energie

$$E_{POT}^* = L^2/(2mr^2) - G \cdot m_s \cdot m/r$$

(auf der  $r$ -Achse) bewegt. Die Lösung  $r(t)$  stellt genau das zeitliche Verhalten der Länge des Radiusvektors  $\vec{r}$  bei der wirklichen Planetenbewegung dar. Wir können aus nebenstehender Darstellung von  $E_{POT}^*(r)$  ablesen, dass ein **gebundener Zustand** eine **negative Gesamtenergie  $E$**  hat; der Abstand  $r$  von der Sonne liegt dann zwischen  $r_{MIN}$  und  $r_{MAX}$ . Die Summe dieser extremen Abstände ist gerade die grosse Achse der Bahnellipse. Eine vollständige Behandlung des Keplerproblems führt zum Resultat, dass die Bahnen immer **Ke-gelschnitte** sind:



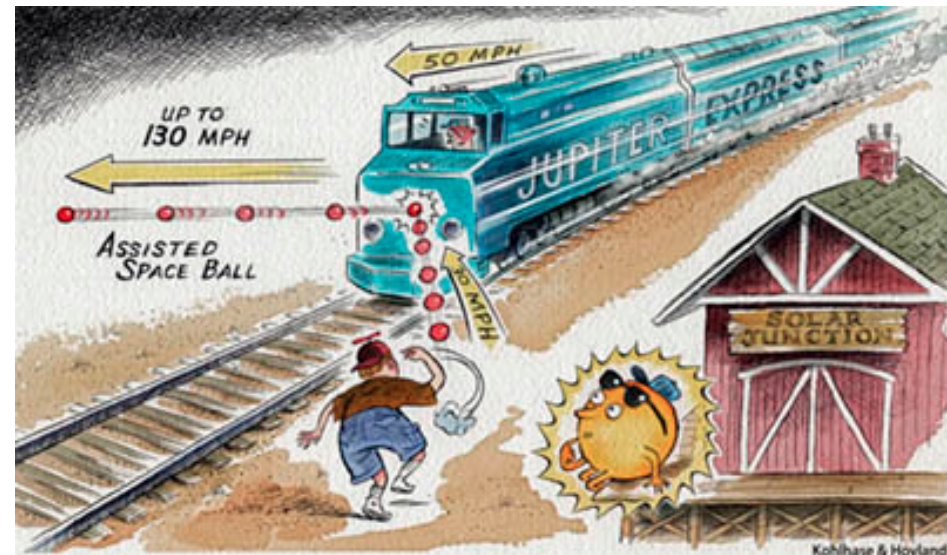
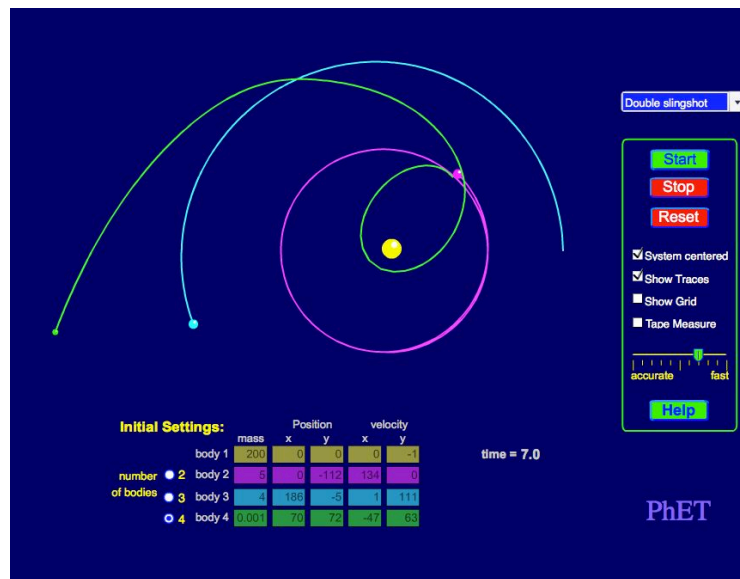
$E < 0$ ,	Ellipse
$E = 0$ ,	Parabel ( $v = 0$ im Unendlichen)
$E > 0$ ,	Hyperbel ( $v > 0$ im Unendlichen)

Jene Geschwindigkeit, welche an einem Ort  $\vec{r}$  die Gesamtenergie  $E$  zu null macht, heisst die **Fluchtgeschwindigkeit**. Sie ist die Geschwindigkeit, die man an der betreffenden Stelle einer Masse erteilen muss, damit sie das Gravitationsfeld der Sonne verlassen kann. Anstatt der analytischen Lösung der Bewegungsgleichung zeigen wir als Schauversuch, wie mit der Methode „kleiner Schritte“ die Planetenbahn mit dem Computer numerisch leicht berechnet werden kann.

Exp: Simulationen

# Bahnberechnungen im Gravitationspotential

[http://phet.colorado.edu/sims/my-solar-system/my-solar-system\\_en.html](http://phet.colorado.edu/sims/my-solar-system/my-solar-system_en.html)



Analogie zum Gravitations-Slingshot

## 4.4 Zweikörperproblem und reduzierte Masse

Die Bewegungen von Sonne und Planet, von Proton und Elektron im Wasserstoffatom oder von einem zweiatomigen Molekül, sind wichtige Beispiele von Zweikörperproblemen. Die Systeme aus zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  deren Bewegung durch  $\vec{r}_1(t)$  und  $\vec{r}_2(t)$  beschrieben wird. Wir wollen voraussetzen, dass nur innere Kräfte wirken und dass der Schwerpunkt in unserem Koordinatensystem ruht. Auf  $m_1$

wirke die Kraft  $\vec{F}_1$  und auf  $m_2$  die Kraft  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$  (Reaktionsprinzip). Diese inneren Kräfte werden nur von der relativen Lage  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$  abhängen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$(52) \quad m_1 \cdot d^2\vec{r}_1/dt^2 = \vec{F}_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{und} \quad m_2 \cdot d^2\vec{r}_2/dt^2 = -\vec{F}_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Die beiden Gleichungen sind **gekoppelt** weil  $\vec{F}_1$  von der Position beider Teilchen abhängt. Wir führen nun die **Relativkoordinate**  $\vec{r}$  ein und leiten zweimal nach der Zeit ab:

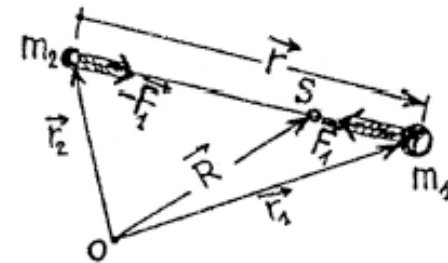
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t), \quad d^2\vec{r}/dt^2 = d^2\vec{r}_1/dt^2 - d^2\vec{r}_2/dt^2.$$

Eliminieren wir mit Hilfe von (52)  $d^2\vec{r}_1/dt^2$  und  $d^2\vec{r}_2/dt^2$ , folgt

$$(53) \quad d^2\vec{r}/dt^2 = (1/m_1 + 1/m_2)\vec{F}_1(\vec{r})$$

Definition der **reduzierte Masse**  $\mu$ , durch  $1/m_1 + 1/m_2 = 1/\mu$  führt zu

$$(54) \quad \mu \cdot d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}_1(\vec{r}).$$



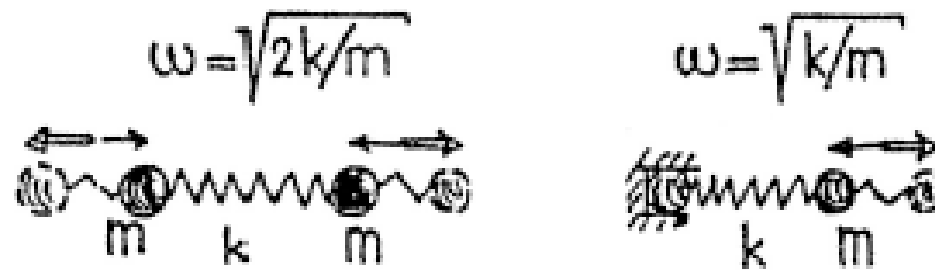
Damit ist das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem zurückgeführt, nämlich auf die Bewegung der reduzierten Masse  $\mu$  im Kraftfeld  $\vec{F}_1(\vec{r})$ . Die Lösung  $\vec{r}(t)$  ergibt die Relativbewegung der Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Aus  $\vec{r}(t)$  bekommt man durch Rücktransformation  $\vec{r}_1(t)$  und  $\vec{r}_2(t)$ :

$$\vec{r}_1(t) = \vec{R} + \vec{r}(t) \cdot m_2 / (m_1 + m_2) \quad \text{und} \quad \vec{r}_2(t) = \vec{R} - \vec{r}(t) \cdot m_1 / (m_1 + m_2).$$

Die beiden Teilchen beschreiben eine Zentralbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt.

Für den Fall  $m_2 \gg m_1$ , wie wir dies beim Keplerproblem angenommen haben, wird  $\vec{r}_2 = \vec{R}$ , so dass  $m_2$  im Schwerpunkt liegt. Die Bewegung der Sonne um den Schwerpunkt ist vernachlässigbar, die reduzierte Masse ist dann gleich  $m_1$  (Planetenmasse).

# Reduzierte Masse und gekoppeltes Pendel



# Kapitel 5

## Beschleunigte Bezugssysteme; Trägheitskräfte

In einem Inertialsystem  $S$  bewegt sich ein Massenpunkt  $m$  (zeitunabhängige Masse) definitionsgemäss derart, dass die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m \cdot d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}$$

erfüllt ist. Wenn sich ein anderes Bezugssystem  $S'$  relativ zum Inertialsystem  $S$  **beschleunigt** bewegt, so gelten die Newton'schen Axiome in  $S'$  nicht.

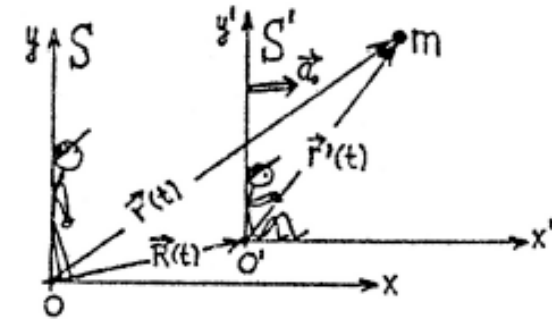
**Beschleunigte Systeme sind keine Inertialsysteme.**

Nachfolgend wollen wir nun untersuchen, welche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt in einem beschleunigten System korrekt ist.

## 5.1 Gleichförmig geradlinig beschleunigtes System

Der Massenpunkt  $m$  beschreibe im Inertialsystem  $S$  unter dem Einfluss eines Kraftfeldes  $\vec{F}$  (z.B. eines Gravitationsfeldes) die Bewegung  $\vec{r}(t)$ . Ein zweites System  $S'$  bewege sich relativ zu  $S$  translatorisch mit der konstanten Beschleunigung  $\vec{a}_0$ . Es sei  $\vec{R}(t)$  der Ortsvektor des beschleunigten Koordinatenursprungs  $O'$ , also

$$d^2\vec{R}/dt^2 = \vec{a}_0.$$



Der in  $S'$  ruhende, relativ zum Inertialsystem mit  $\vec{a}_0$  beschleunigte Beobachter, misst zur Zeit  $t$  die Position  $\vec{r}'(t)$ . Offenbar gilt jederzeit die Beziehung

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t) \quad \text{und somit auch} \quad d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{a}_0 + d^2\vec{r}'/dt^2.$$

In  $S'$  wird dann

$$(55) \quad m \cdot d^2\vec{r}'/dt^2 = m \cdot d^2\vec{r}/dt^2 - m \cdot \vec{a}_0 \quad \text{oder} \quad m \cdot d^2\vec{r}'/dt^2 = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_0.$$

Im beschleunigten System tritt in der Bewegungsgleichung neben der „echten“, durch physikalische Wechselwirkung erzeugten Kraft  $\vec{F}$ , noch eine so genannte „Scheinkraft“ auf, nämlich

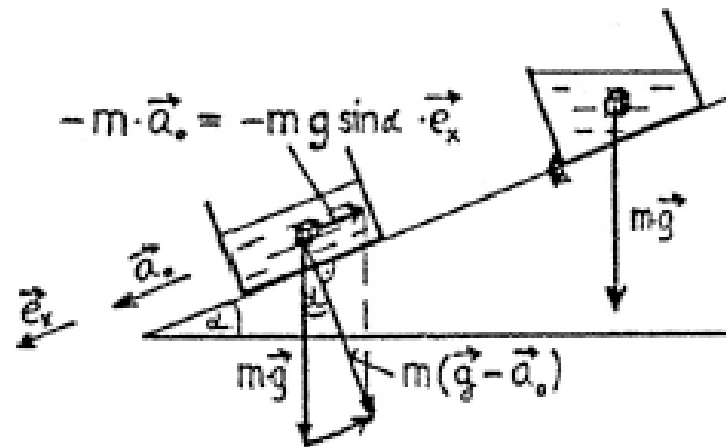
$$(56) \quad \vec{F}_{\text{Trägheit}} = -m \cdot \vec{a}_0, \quad \text{Trägheitskraft.}$$

Dass die Trägheitskraft (56) nicht eine Kraft im Sinne der Newton'schen Axiome sein kann, erkennt man unter anderem daran, dass es dazu keine Gegenkraft gibt.

**Wichtig:** Trägheitskräfte treten nur in beschleunigten Bezugssystemen auf.

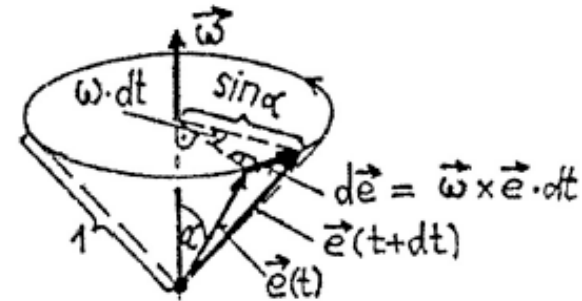


# Beschleunigte Küvette



## 5.2 Rotierendes Bezugssystem; Zentrifugalkraft und Corioliskraft

Wir betrachten den Einheitsvektor  $\vec{e}$ , der um eine raumfeste Drehachse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotiert, so dass er die Mantelfläche eines Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel  $2\alpha$  überstreicht. Zur Beschreibung dieser Drehbewegung führen wir den **axialen Vektor**  $\vec{\omega}$  ein, der in der Drehachse liegt, dessen Betrag gleich der Kreisfrequenz ist und dessen Richtung gleich der Bewegungsrichtung einer mitdrehenden Rechtsschraube ist. Anhand nebenstehender Figur lesen wir ab, dass die zeitlichen Ableitungen  $d\vec{e}/dt \equiv \dot{\vec{e}}$  und  $d^2\vec{e}/dt^2 \equiv \ddot{\vec{e}}$  des Einheitsvektors gerade



$$(57) \quad \dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e} \quad \text{und} \quad \ddot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}) \quad \text{sind.}$$

Nun soll ein Koordinatensystem  $S'$ , dessen Ursprung mit jenem eines Inertialsystems  $S$  zusammenfällt, durch das orthogonale Dreibein der Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{e}_3$  aufgespannt sein und mit konstantem  $\vec{\omega}$  um eine im Inertialsystem ruhende, durch den Ursprung gehende Achse rotieren. Jetzt stellen wir den Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  eines Massenpunktes  $m$  durch die Komponenten  $x'_1, x'_2$  und  $x'_3$  des rotierenden Systems  $S'$  dar:

$$\vec{r}(t) = x'_1(t) \cdot \vec{e}_1(t) + x'_2(t) \cdot \vec{e}_2(t) + x'_3(t) \cdot \vec{e}_3(t).$$

Differenzieren nach  $t$  ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \sum_{i=1}^3 (\dot{x}'_i \cdot \vec{e}_i + x'_i \cdot \dot{\vec{e}}_i) \quad \text{und} \\ \ddot{\vec{r}} &= \sum_{i=1}^3 (\ddot{x}'_i \cdot \vec{e}_i + 2 \cdot \dot{x}'_i \cdot \dot{\vec{e}}_i + x'_i \cdot \ddot{\vec{e}}_i). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (57) schreiben wir

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 (\ddot{x}'_i \cdot \vec{e}_i + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{e}_i \cdot \dot{x}'_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}_i \cdot x'_i)),$$

was dasselbe ist, wie

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}').$$

$\ddot{\vec{r}}'$ ,  $\vec{v}'$  und  $\vec{r}'$  bedeuten Beschleunigung, Geschwindigkeit und Ortsvektor, wie sie ein im rotierenden Bezugssystem sitzender Beobachter misst. Die Beschleunigung im Inertialsystem ist  $\ddot{\vec{r}}$  und  $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$  somit die „echte“ wirkende Kraft. Wir bringen das obige Resultat in die Form

$$(58) \quad m \cdot \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) + 2 \cdot m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}.$$

$$(58) \quad m \cdot \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) + 2 \cdot m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}.$$

Die Gleichung (58) besagt, dass in einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem neben der echten Kraft  $\vec{F}$  im Allgemeinen noch zwei Trägheitskräfte auftreten, nämlich

$$\begin{aligned} \vec{F}_Z &= m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}), & \text{die Zentrifugalkraft und} \\ \vec{F}_C &= 2 \cdot m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}, & \text{die Corioliskraft.} \end{aligned}$$

### Zentrifugalkraft:

Die Bedeutung des zweiten Summanden in (58), also der Zentrifugalkraft, machen wir uns am speziellen Beispiel der gleichförmigen Kreisbewegung (siehe S.19) klar.

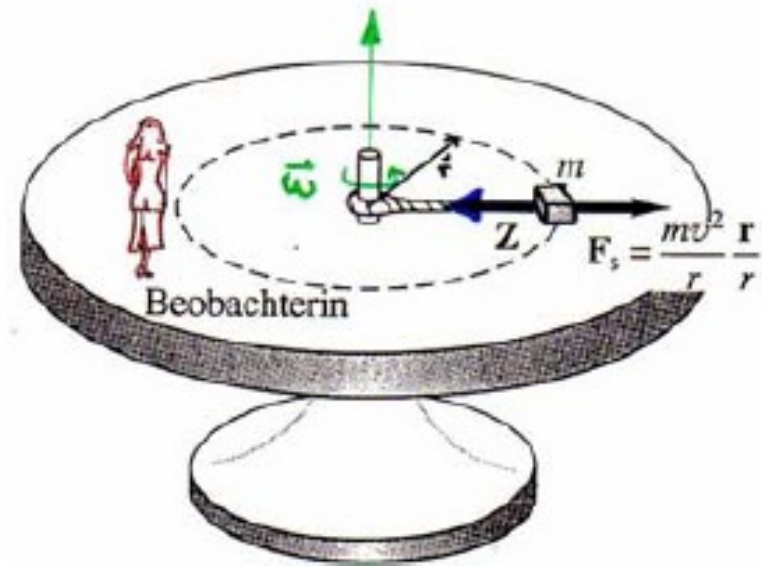
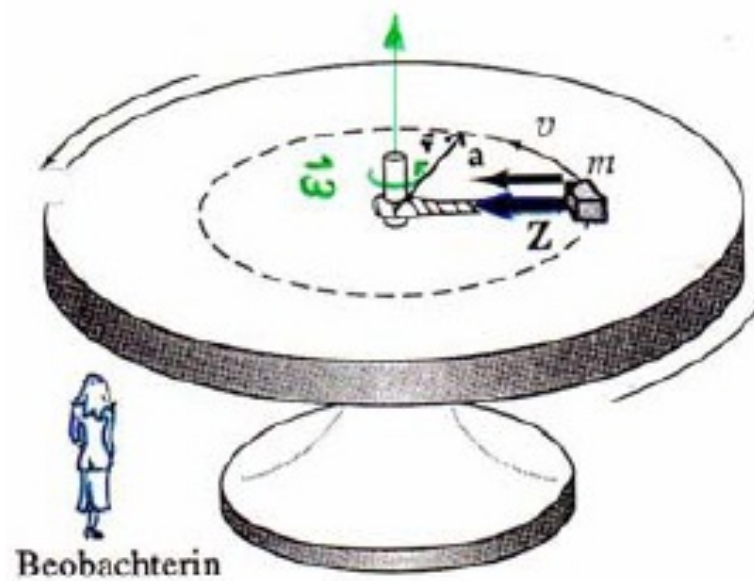
Ein **Beobachter im Inertialsystem S** stellt fest: Die Masse  $m$  bewegt sich mit konstanter Kreisfrequenz  $\omega$  auf einer Kreisbahn. Für die Bahnkrümmung ist eine Zentripetalkraft (z.B. eine Fadenkraft)  $\vec{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$  verantwortlich.

Ein **Beobachter im mitrotierenden System S'** sagt: Die Masse  $m$  ist in Ruhe ( $\vec{v}' = 0, \ddot{\vec{r}}' = 0$ ). Nach (58) ist also  $\vec{F} + m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) = 0$ .

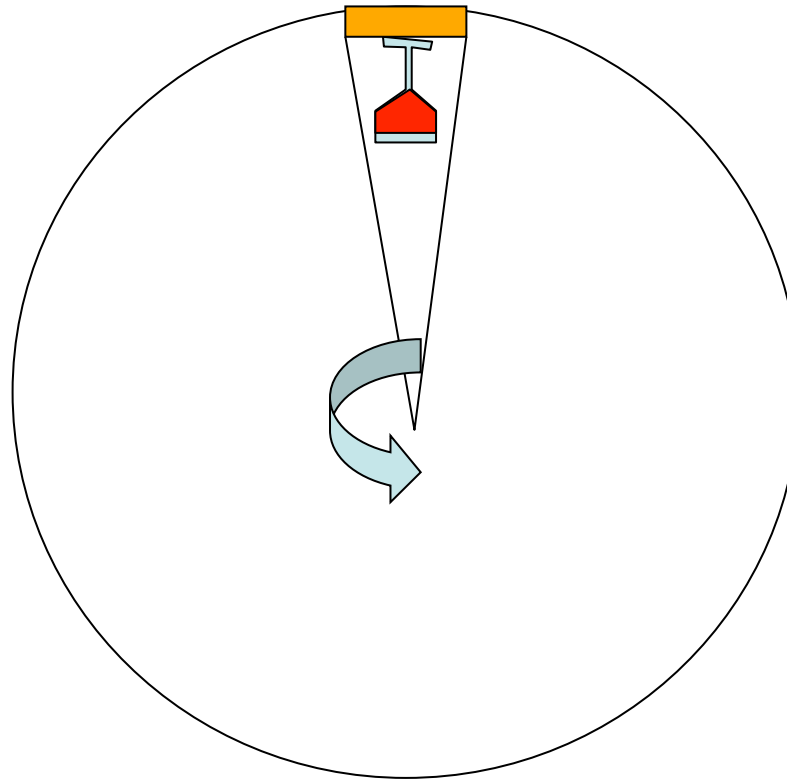
Die zu  $\vec{F}$  addierte Zentrifugalkraft ist radial nach aussen gerichtet und hat den Betrag  $m \cdot \omega^2 \cdot r'$ . Folglich muss die Fadenkraft  $\vec{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}'$  sein.

Beide Beobachter stellen die gleiche „echte“ Kraft fest. (Es gilt immer  $\vec{r} = \vec{r}'$ , wenn S und S' gemeinsamen Ursprung haben).

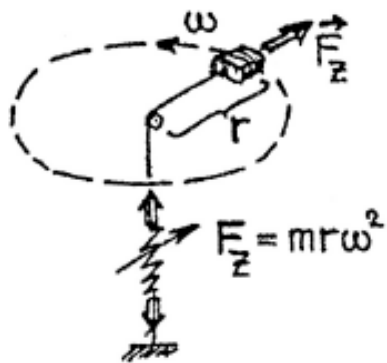
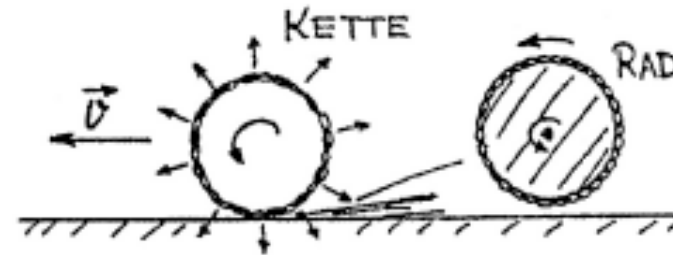
# Zwei Beobachtungsstandpunkte



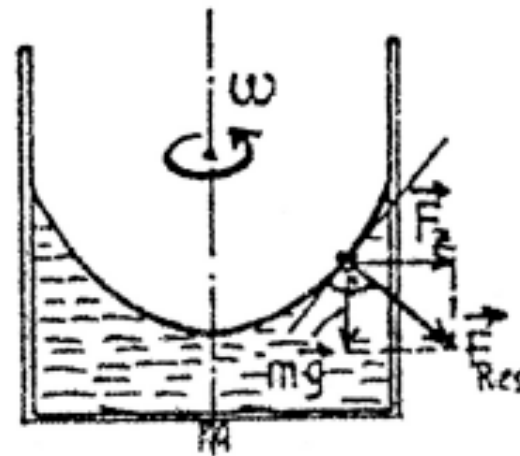
# Rotierendes Glas



## Rotierende Kette



Messung der Zentrifugalkraft



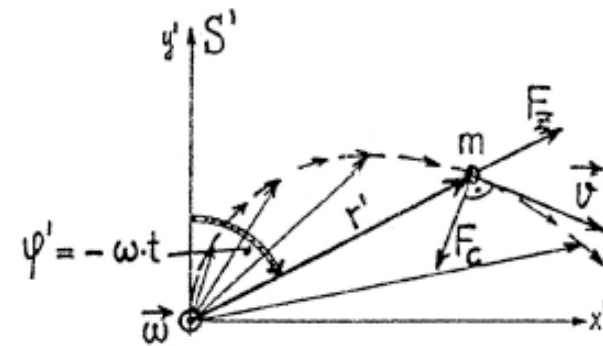
Rotierende Flüssigkeit

### Corioliskraft:

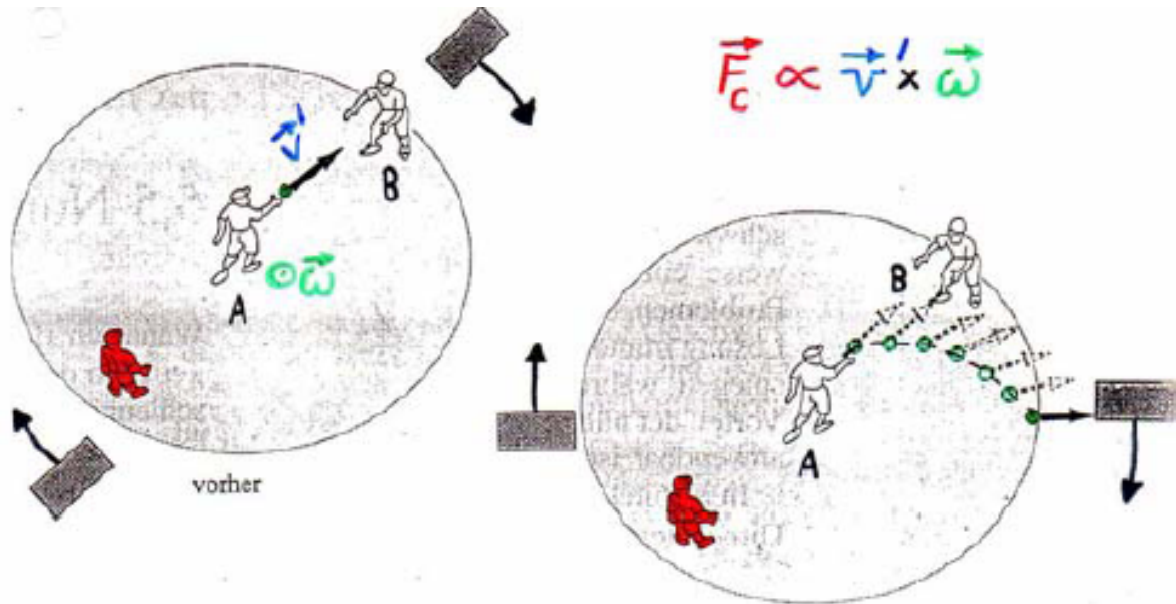
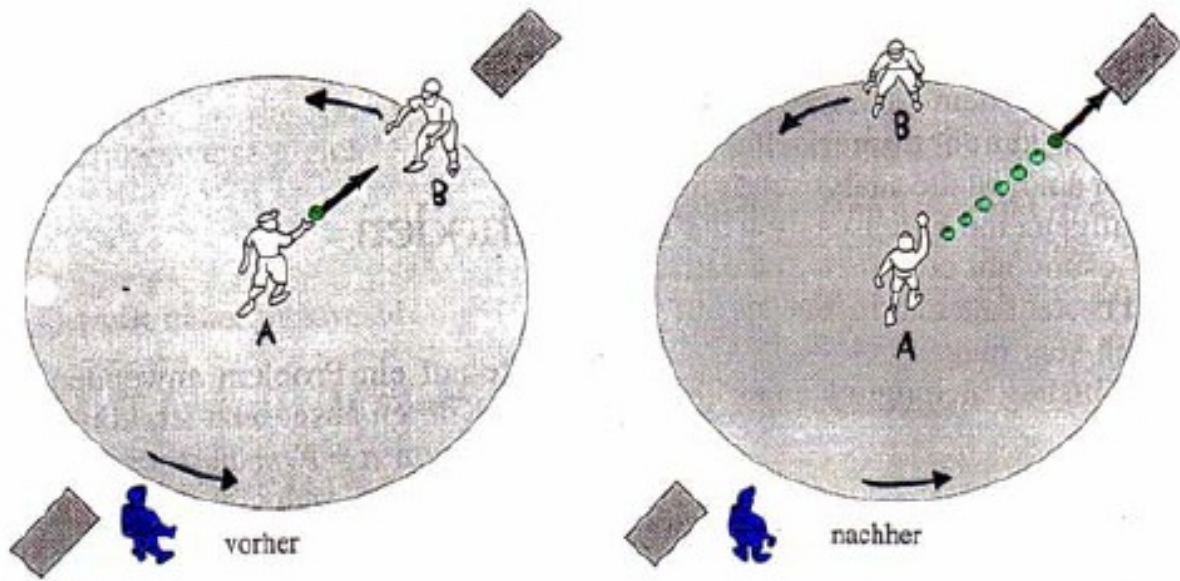
Zur Illustration der Corioliskraft nehmen wir an, eine Masse  $m$  bewege sich im Inertialsystem  $S$  gleichförmig, d.h. kräftefrei, mit  $\vec{r}(t) = (0, v_0 \cdot t, 0)$  in  $y$ -Richtung. Rotiert nun  $S'$  mit konstantem  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$  um die  $z$ -Achse, so bildet die  $y'$ -Achse zur Zeit  $t$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  den Winkel  $\varphi = \omega \cdot t$ . Vom rotierenden Beobachter in  $S'$  aus gesehen bedeutet dies, dass  $\vec{r}'(t)$  durch die Polarkoordinaten

$$r' = v_0 \cdot t \quad \text{und} \quad \varphi' = -\omega \cdot t$$

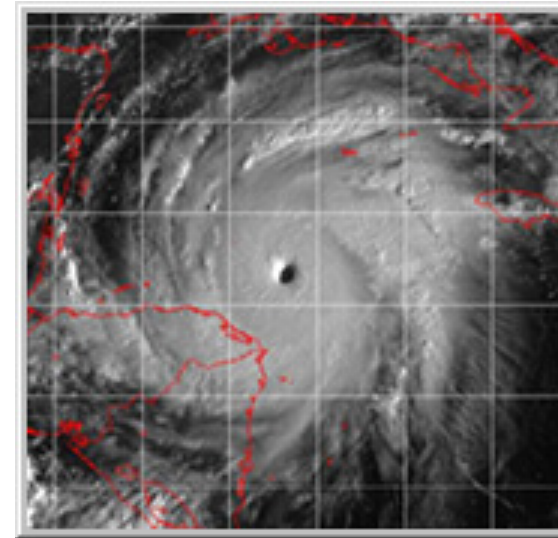
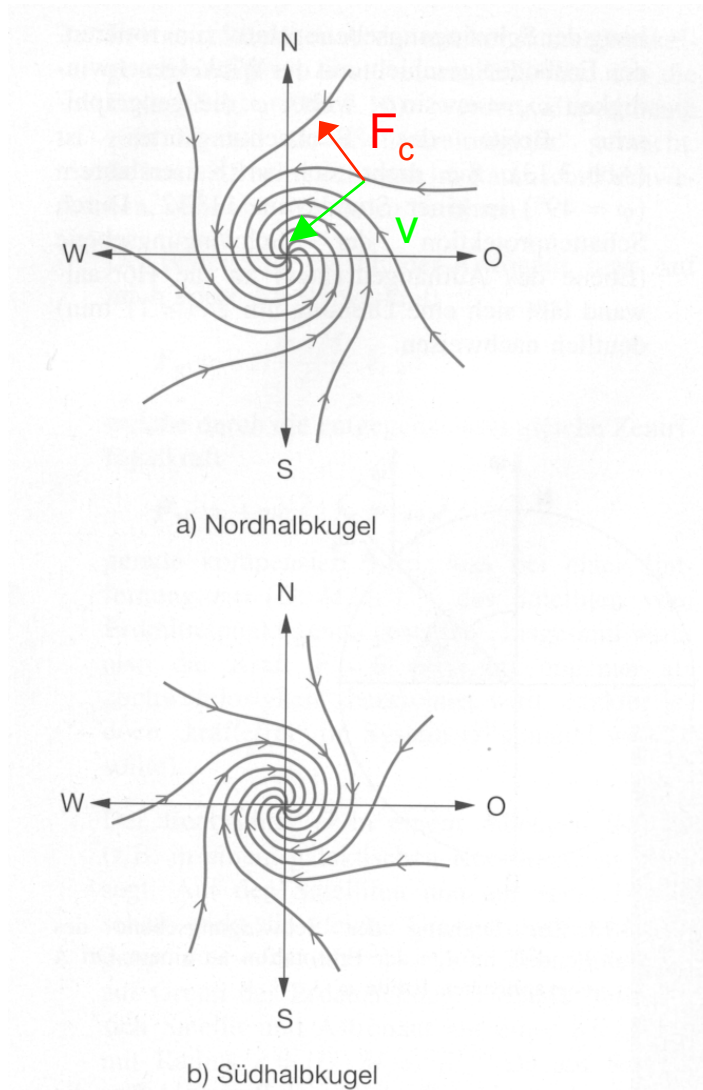
gegeben ist was einer spiralenartigen Bahn entspricht. Die Ursache der Bahnkrümmung im rotierenden System ist die Corioliskraft. Sie tritt nur auf, wenn sich ein Körper relativ zu  $S'$  bewegt und steht immer senkrecht auf  $\vec{v}'$ . Dagegen ist die Zentrifugalkraft in  $S$  immer vorhanden (auch in diesem Beispiel, zusätzlich zur Corioliskraft). Analog zum soeben behandelten Fall treten auf der nördlichen Halbkugel der Erde bei allen Horizontalbewegungen nach rechts gerichtete Corioliskräfte auf, auf der südlichen Hemisphäre nach links gerichtete.







# Corioliskraft



**Abb. 3.14a–c.** Strömungslinien der Luft um ein Tief: (a) auf der Nordhalbkugel (Coriolis-Ablenkung in Windrichtung nach rechts, so daß die Resultierende aus Coriolis-Kraft und Druckgradient zu einer Spiralbewegung im Gegenuhrzeigersinn führt), (b) der Südhalbkugel der rotierenden Erde (Coriolis-Ablenkung nach links), (c) Satellitenaufnahme „Todessturm“ nördlich von Hawaii. Mit freundlicher Genehmigung der NASA (Foto HP 133)

# Corioliskraft: Tropfen auf rotierender Scheibe

