

Kapitel 6

Mechanik des starren Körpers

Ein starrer Körper ist dadurch gekennzeichnet, dass er seine Form unter dem Einfluss äusserer Kräfte nicht ändert.

Wir denken uns den Körper aus kleinen Massenelementen Δm_i zusammengesetzt. Für alle Paare Δm_i und Δm_k ist der Abstand

$$|\vec{r}_k - \vec{r}_i| = \text{konstant.}$$

Schwerpunkt: Der starre Körper ist ein Spezialfall eines Systems von Massenpunkten. Nach (42) ist die Schwerpunktskoordinate gegeben durch

$$\vec{R} = \left(\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{r}_i \right) / m, \quad \text{wobei} \quad m = \sum_i \Delta m_i.$$

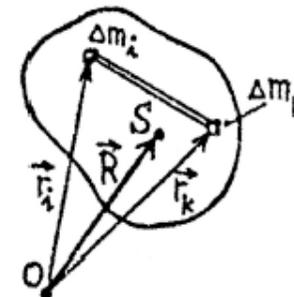
Wenn wir den Übergang zu differentiell kleinen Massenelementen dm machen, geht die obige Summe in ein Volumenintegral über:

$$(59) \quad \vec{R} = (1/m) \iiint_{Vol} \vec{r} \cdot dm, \quad \iiint_{Vol} dm = m.$$

Wenn die Massenverteilung eines Körpers durch die ortsabhängige Dichte $\rho(\vec{r}) \text{ kg/m}^3$ gegeben ist, wird die Lage des Schwerpunktes folgendermassen berechnet:

$$(60) \quad \vec{R} = (1/m) \cdot \iiint_{Vol} \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV, \quad (\rho(\vec{r}) \cdot dV = dm)$$

Das Volumenelement dV ist in kartesischen Koordinaten $dV = dx \cdot dy \cdot dz$.



Um die Lage eines starren Körpers im Raum eindeutig festzulegen, benötigen wir die Angabe von sechs Koordinaten. Wir markieren einen Punkt des Körpers, z.B. den Schwerpunkt S, und fixieren dessen Position durch drei Koordinaten, wir haben

3 Freiheitsgrade der Translation.

Bei festgehaltenem Punkt S kann jeder andere Punkt sich auf einer Kugeloberfläche bewegen („kreiseln“). Mit zwei Koordinaten können wir die Position eines dieser Punkte auf der Kugel festlegen (analog Länge und Breite auf der Erdoberfläche). Diese beiden festen Punkte definieren eine Achse, um die sich der Körper drehen lässt, so dass noch eine Winkelangabe erforderlich ist. Somit besitzt der starre Körper

3 Freiheitsgrade der Rotation.

Betrachten wir eine bestimmte Anfangslage A eines starren Körpers, der in eine beliebige Endlage B gebracht werden soll, so kann dies immer in zwei Schritten erreicht werden.

- a) Durch eine reine Translation, wobei der Schwerpunkt um den Translationsvektor $\vec{T} = \vec{R}(B) - \vec{R}(A)$ verschoben wird. Jeder andere Punkt wird um denselben Vektor \vec{T} verschoben.
- b) Durch eine reine Rotationsbewegung um den Schwerpunkt.

Der starre Körper besitzt 6 Freiheitsgrade.

6.1 Drall und Drallsatz für ein System von Massenpunkten

Im Abschnitt 2.5 haben wir für einen Massenpunkt die Begriffe Drehmoment und Drall bezogen auf einen festen Drehpunkt eingeführt. Besteht ein System aus vielen Massenpunkten Δm_i , so addieren sich deren Drehimpulse $\vec{L}_i = \Delta m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i$ zum Gesamtdrall

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i, \quad \text{und es wird} \quad d\vec{L}/dt = \sum_i d\vec{L}_i/dt.$$

Nach dem Drallsatz (39) für einen Massenpunkt ist aber

$$d\vec{L}_i/dt = \vec{M}_i, \quad \text{mit dem Drehmoment} \quad \vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

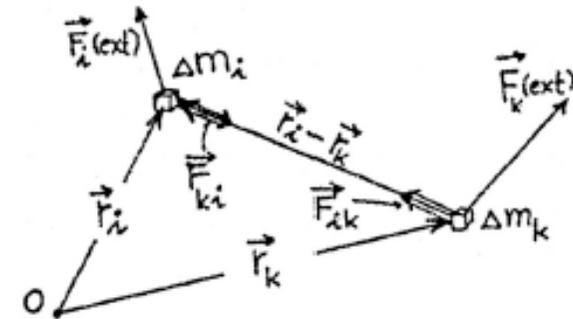
\vec{F}_i bedeutet die Summe aller Kräfte (innere und äussere), welche an Δm_i angreifen. Die zeitliche Änderung des Gesamtdralls ist jetzt

$$d\vec{L}/dt = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Beim Summieren heben sich jedoch die Momente der inneren Kräfte paarweise auf. Um dies einzusehen genügt es, die Momente $\vec{M}(int)$ der inneren Kräfte zweier Elemente Δm_i und Δm_k zu betrachten:

$$\begin{aligned}\vec{M}(int) &= \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{ik}, \quad \text{und wegen } \vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik} \text{ gilt auch} \\ \vec{M}(int) &= (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ki}.\end{aligned}$$

Dieses letzte Vektorprodukt verschwindet aber, weil wir voraussetzen, dass \vec{F}_{ki} auf der Verbindungsgeraden der beiden Massenelemente liegt, also parallel zu $\vec{r}_i - \vec{r}_k$ ist. Wir erhalten damit den Drallsatz.



$$(61) \quad d\vec{L}/dt = \vec{M}(ext), \quad \text{Drallsatz.}$$

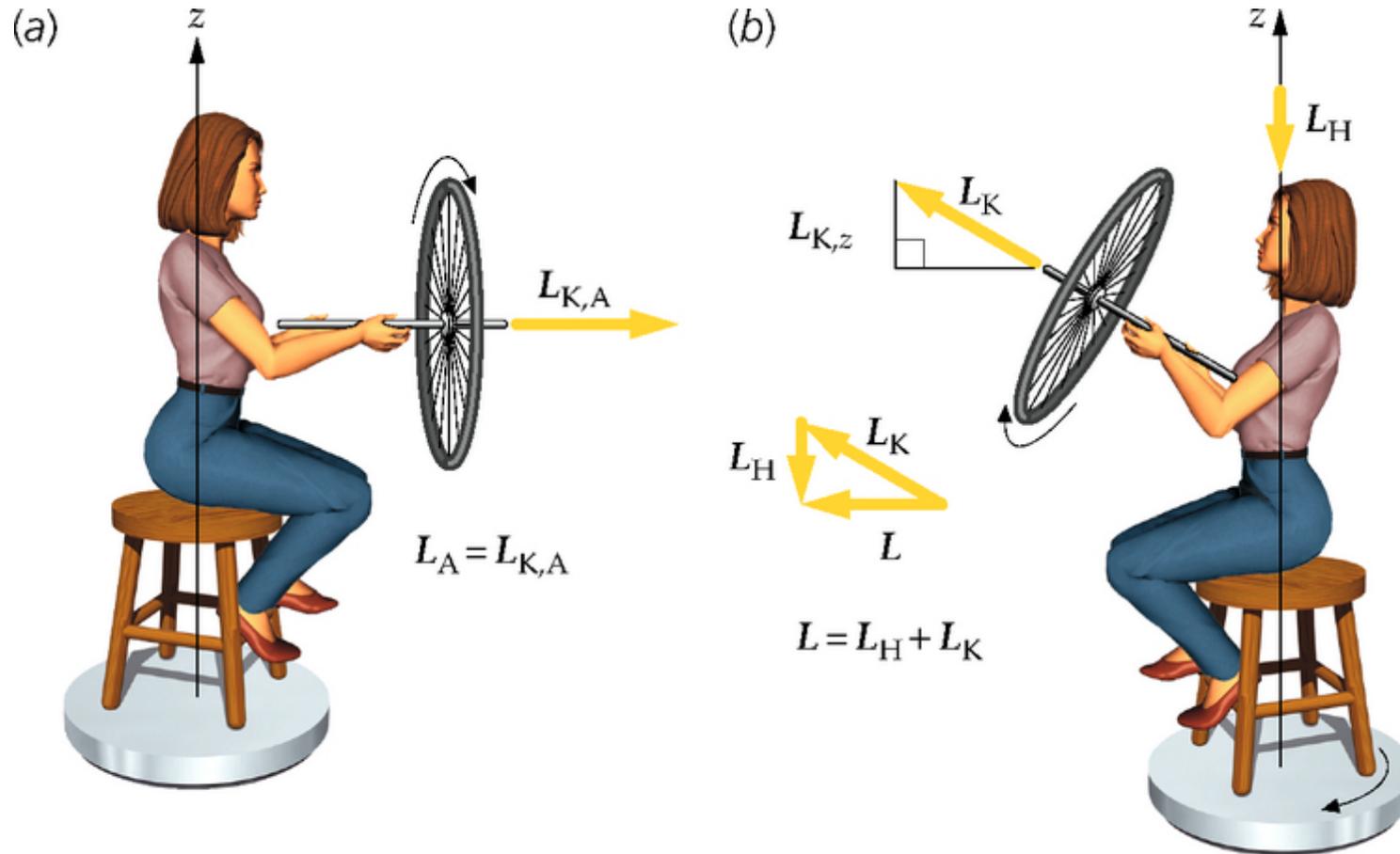
Die zeitliche Änderung des Gesamtdralls ist gleich dem resultierenden Drehmoment, der am System angreifenden äusseren Kräfte, bezogen auf denselben raumfesten Drehpunkt.

Der Drallsatz (61) gilt ganz allgemein für jedes System, nicht nur für starre Körper. Wirken keine Drehmomente äusserer Kräfte auf das System, ist $d\vec{L}/dt = 0$ und der Drall ist eine Konstante der Bewegung. Es gilt dann der **Satz von der Erhaltung des Drehimpulses:**

Der Gesamtdrall eines freien Systems bleibt nach Grösse und Richtung konstant.

Bemerkung: Wie oben gezeigt wurde, ist der Drallsatz im Rahmen der Punktmechanik und unter Voraussetzung von Zentralkräften zwischen Punktpaaren eine Konsequenz der Newtonschen Axiome. Diese Voraussetzungen sind in der Natur nicht unbedingt erfüllt, so dass wir den Drallsatz lieber als zusätzliches und in der Erfahrung begründetes Axiom der Mechanik auffassen wollen.

Drehschemel und Erhaltung des Drehimpulses



6.2 Rotation des starren Körpers um eine raumfeste Drehachse

Wir legen durch einen starren Körper die raumfeste Drehachse A. Es bleibt jetzt nur noch der Drehwinkel φ als Freiheitsgrad. Alle Massenelemente bewegen sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ auf Kreisbahnen. Für das Massenelement Δm_i ist der Betrag der Geschwindigkeit

$$(62) \quad v_i = \omega \cdot \vec{r}_i \cdot \sin \alpha_i \quad \text{oder} \quad v_i = \omega \cdot r_{iA},$$

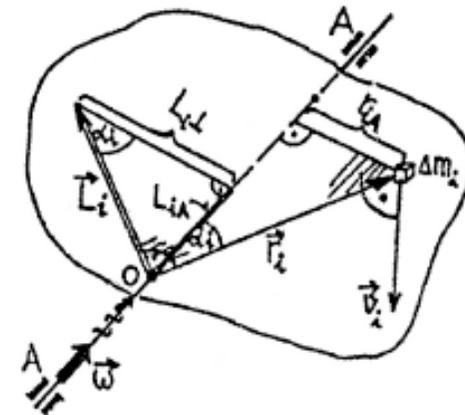
wenn r_{iA} den Abstand von der Drehachse A bedeutet. Für den Vektor \vec{v}_i können wir schreiben

$$(63) \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i.$$

Nun betrachten wir den Drall \vec{L}_i von Δm_i bezüglich des auf der Drehachse liegenden Ursprungs O. Gemäss(37) ist

$$\vec{L}_i = \Delta m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad \text{und} \quad L_i = \Delta m_i \cdot r_i \cdot v_i,$$

weil \vec{r}_i und \vec{v}_i wegen (63) normal zueinander stehen.



Wichtig:

\vec{L}_i ist **nicht parallel** zu $\vec{\omega}$, sondern schliesst den Winkel $\pi/2 - \alpha_i$ mit der Drehachse ein.

Wichtig:

\vec{L}_i ist **nicht parallel** zu $\vec{\omega}$, sondern schliesst den Winkel $\pi/2 - \alpha_i$ mit der Drehachse ein.

Die Komponente L_{iA} von \vec{L}_i auf die Drehachse wird

$$L_{iA} = \Delta m_i \cdot r_i \cdot v_i \cdot \sin \alpha_i \quad \text{oder} \quad L_{iA} = \omega \cdot \Delta m_i \cdot r_{iA}^2.$$

Durch Summation aller Beiträge L_{iA} erhalten wir nun die Komponente L_A des Gesamtdralls \vec{L} auf die Achse A:

$$L_A = \omega \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot r_{iA}^2.$$

Die hier auftretende Summe, deren Wert durch die Massenverteilung relativ zur Drehachse A bestimmt ist, bezeichnen wir als **Trägheitsmoment** bezüglich A.

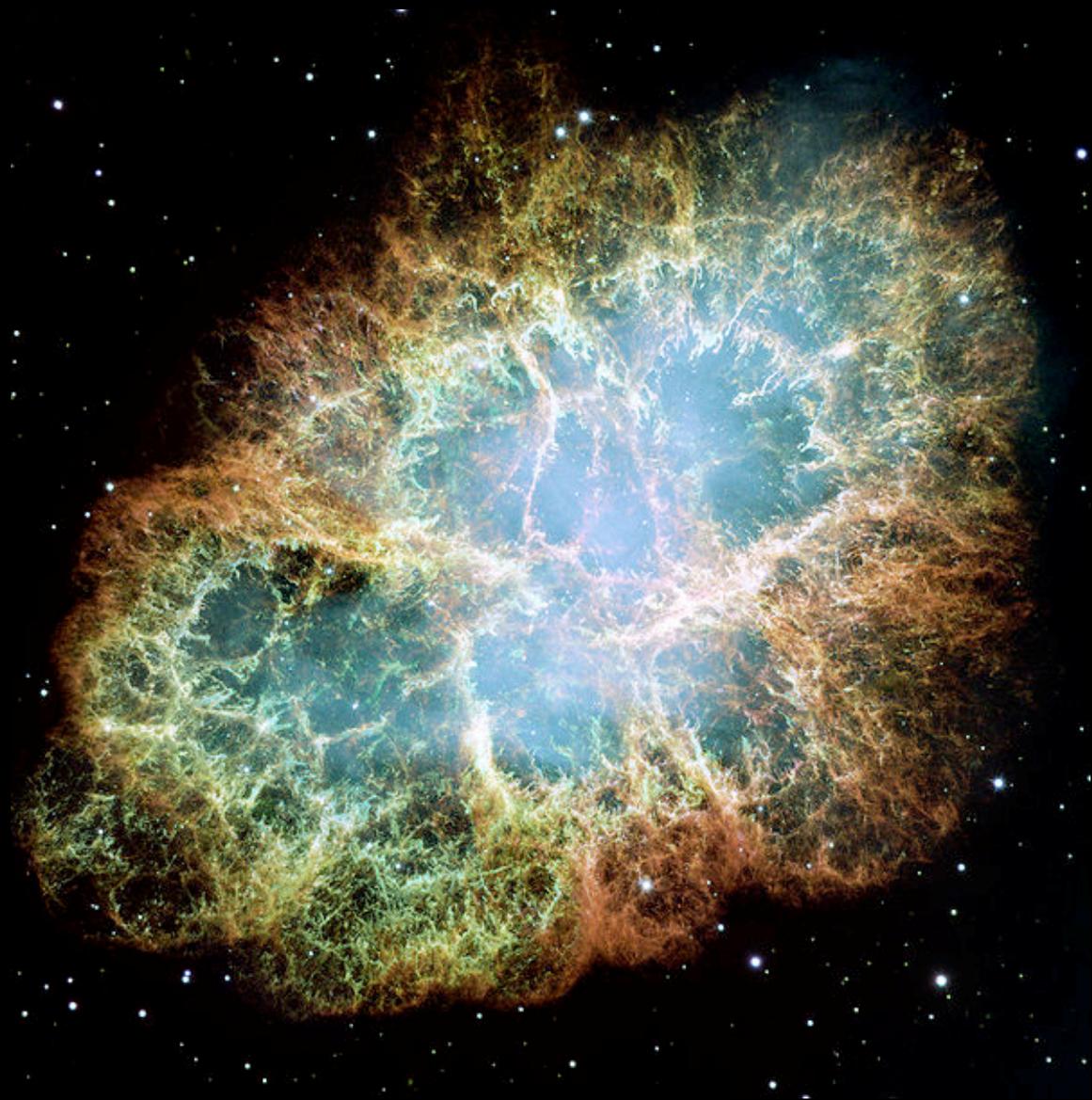
$$(64) \quad I_A = \sum_i r_{iA}^2 \cdot \Delta m_i \quad \text{oder} \quad I_A = \int r_A^2 \cdot dm, \quad \text{Trägheitsmoment.}$$

Damit wird die Drallkomponente auf die Drehachse A

$$(65) \quad L_A = I_A \cdot \omega.$$

Wenn die Komponente L_{\perp} von \vec{L} senkrecht zur Drehachse bei der Summation verschwindet, nennen wir A eine **Hauptträgheitsachse**. Dies ist z.B. der Fall, wenn A eine Symmetrieachse unseres Körpers

Krebsnebel (NGC 1952)



Pulsar im Krebsnebel (NGC 1952)

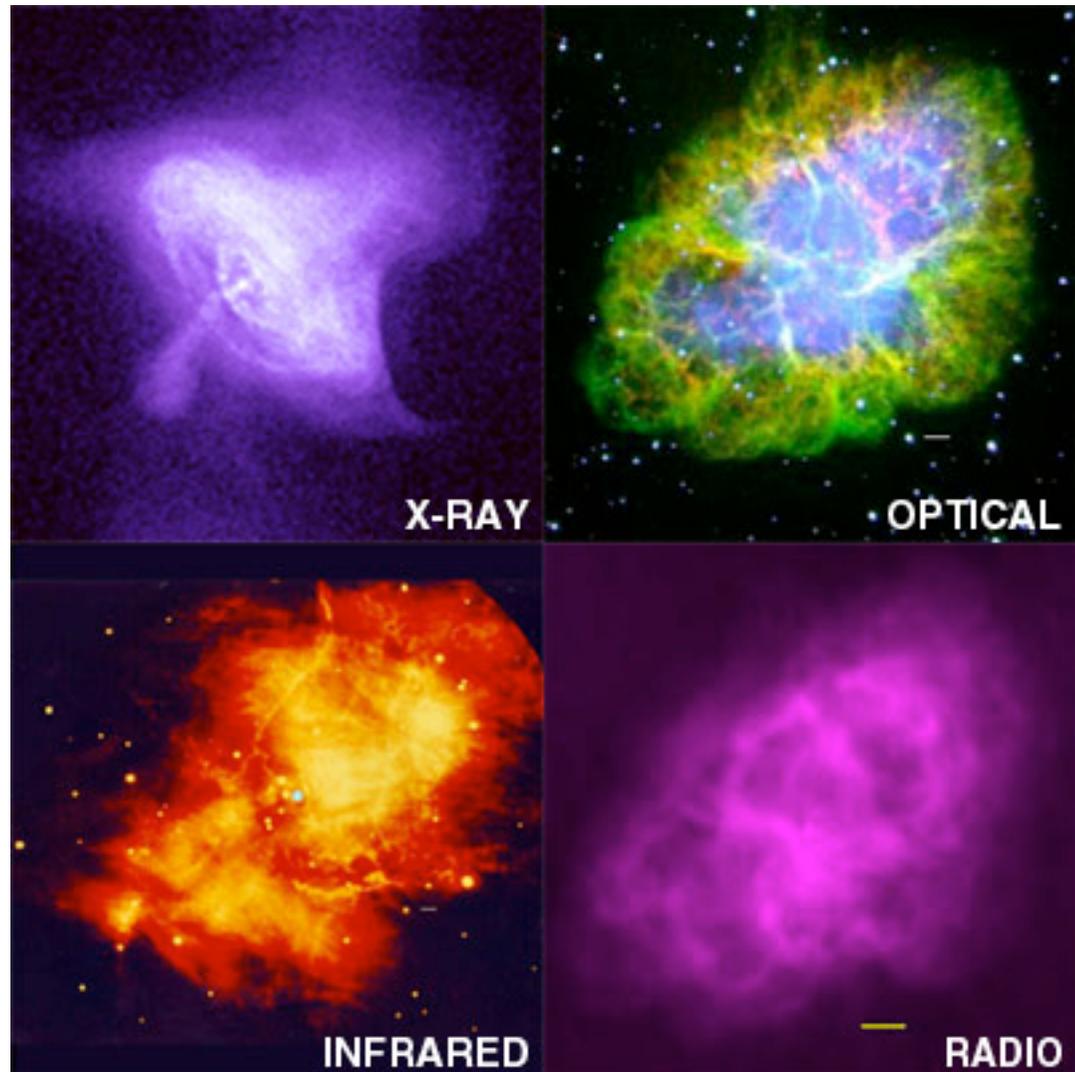
Überreste einer Supernovae-Explosion
im Jahr 1054. 6300 LJ entfernt.

Der Pulsar dreht sich in 30ms um
seine Achse. Pro Tag erniedrigt sich
die Periode um 60ns.

Der Pulsar ist eine intensive
Röntgenquelle und erzeugt auch
Gas-Jets.

$m=10^{30}\text{kg}$; $R=10\text{km}$!
 $P=10^{-3}\text{s}$ vgl. Sonne $P=10^{-8}\text{s}$

$E_{\text{rot}}=10^{42}\text{J}$ $\Delta E_{\text{rot}}/\Delta t=10^{31}\text{W}$!



Erhaltung des Drehimpulses (Drall)



$$\vec{L} = \text{const.}$$

Pirouette im Eiskunstlauf

Exp: Drehschemel mit Hanteln

ist, wo zu jedem Δm_i symmetrisch liegende Elemente Δm_k existieren. Dann sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ parallel. Es gilt:

$$(66) \quad \vec{L} = I_A \cdot \vec{\omega} \quad \text{für Hauptträgheitsachsen.}$$

Man kann allgemein zeigen, dass jeder beliebig geformte Körper **mindestens drei Hauptträgheitsachsen** besitzt, die orthogonal zueinander stehen. Symmetrieachsen sind Hauptachsen, aber nicht jede Hauptachse ist Symmetrieachse.

Exp: L nicht parallel ω

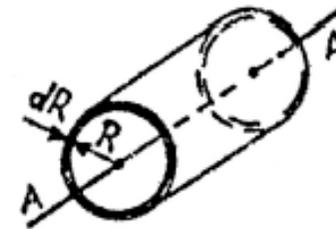
6.2.1 Berechnung von Trägheitsmomenten. Satz von Steiner

Zur Berechnung der Trägheitsmomente, bezogen auf eine Symmetrieachse homogener Körper (konstante Dichte), geben wir drei einfache Beispiele.

1. Dünnwandiger Hohlzylinder

Alle Massenelemente haben von der Zylinderachse denselben Abstand R . Somit ist

$$I_A = \int r_A^2 \cdot dm \quad \text{gerade} \quad \underline{I_A = m \cdot R^2.}$$



2. Vollzylinder

Wir zerlegen den Zylinder in konzentrische Hohlzylinder der Wandstärke dr . Die Masse eines solchen Hohlzylinders ist

$$dm = 2 \cdot \pi \cdot \varrho \cdot r \cdot l \cdot dr \quad (\text{Dichte } \varrho)$$

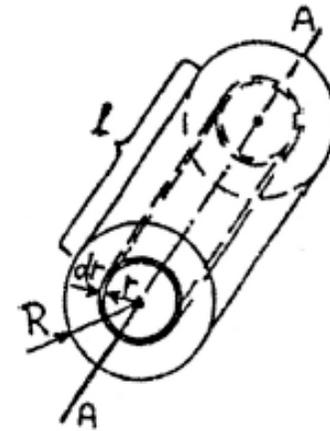
$$\text{und sein Trägheitsmoment } dI_A = 2 \cdot \pi \cdot \varrho \cdot l \cdot r^3 \cdot dr.$$

Integration über alle Hohlzylinder ergibt

$$I_A = 2 \cdot \pi \cdot \varrho \cdot l \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr \quad \text{oder} \quad I_A = 2 \cdot \pi \cdot \varrho \cdot l \cdot R^4/4.$$

Mit der Gesamtmasse $m = \varrho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot l$ führt dies auf

$$\underline{I_A = m \cdot R^2/2.}$$



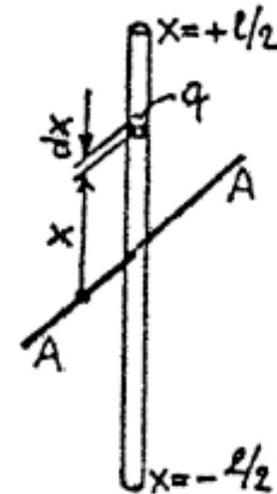
3. Langer, dünner Stab

Das Massenelement $dm = \varrho \cdot q \cdot dx$ (Querschnitt q) an der Stelle x liefert den Beitrag dI_A zum Trägheitsmoment

$$dI_A = \varrho \cdot q \cdot x^2 \cdot dx \quad \text{und Integration ergibt}$$

$$I_A = \varrho \cdot q \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 \cdot dx, \quad I_A = \varrho \cdot q \cdot 2 \cdot (l/2)^3/3.$$

$$\text{Mit } m = \varrho \cdot q \cdot l \quad \text{folgt: } \underline{I_A = m \cdot l^2/12.}$$



Satz von Steiner

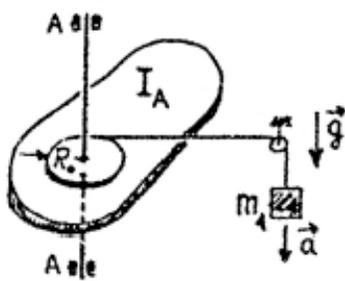
Zur Berechnung von Trägheitsmomenten bezüglich Achsen, die nicht Symmetrieachsen sind, ist der **Satz von Steiner** oft sehr nützlich. Er lautet: Das Trägheitsmoment I_A einer um A aus dem Schwerpunkt parallel verschobenen Achse ist gleich der Summe aus dem Trägheitsmoment I_S für die Schwerpunktsachse und $m \cdot a^2$.

$$I_A = I_S + m \cdot a^2.$$

Exp: Satz von Steiner

6.2.2 Starrer Rotator

Ein starrer Körper, der um eine raumfeste Achse A drehbar gelagert ist, soll unter der Wirkung eines achsenparallelen äusseren Drehmomentes $M_A(ext)$ eine Winkelbeschleunigung $d\omega/dt$ erfahren. Wir interessieren uns für den Drehwinkel $\varphi(t)$, wenn der Rotator am Anfang ruht. Aus dem Drallsatz (61) folgt für die Komponente L_A des Drehimpulses:



$$dL_A/dt = M_A(ext).$$

Mit $L_A = I_A \cdot \omega$ folgt die Bewegungsgleichung

$$(70) \quad d\omega/dt = M_A(ext)/I_A \quad \text{oder} \quad \underline{d^2\varphi/dt^2 = M_A(ext)/I_A.}$$

Wenn das Drehmoment $M_A(ext)$ durch das Gewicht $m_1 \cdot \vec{g}$ erzeugt wird, müssen wir beachten, dass nicht nur der Rotator, sondern auch m_1 selbst beschleunigt wird. Da m_1 dieselbe Beschleunigung erfährt, wie ein Punkt auf dem Radius R_0 kann man sich m_1 auf dem Kreisradius R_0 gleichmässig verteilt denken, so dass das Trägheitsmoment I_A des Rotators scheinbar um $m_1 \cdot R_0^2$ vermehrt wird. Durch Integration von (70) erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} d\varphi/dt &= (m_1 \cdot g \cdot R_0 / (I_A + m_1 R_0^2)) \cdot t \quad \text{und} \\ \varphi(t) &= (m_1 \cdot g \cdot R_0 / 2(I_A + m_1 R_0^2)) \cdot t^2. \end{aligned}$$

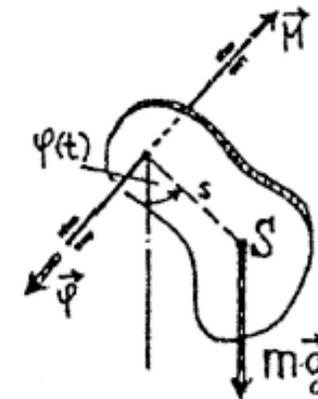
Die Beschleunigung von m_1 nach unten ist dann $a = R_0 \cdot d\omega/dt$, also

$$a = g \cdot m_1 \cdot R_0^2 / (I_A + m_1 R_0^2),$$

was offensichtlich im Grenzfall $I_A = 0$ richtig ist ($a = g$).

6.2.3 Physikalisches Pendel

Das physikalische Pendel ist ein starrer Körper, der unter dem Einfluss der Schwerkraft um eine feste, horizontale Achse schwingt. Es sei s der Abstand des Schwerpunktes S von der Drehachse A . Die Lage ist durch den Winkel $\varphi(t)$ zwischen s und dem Lot durch die Drehachse festgelegt. Die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$ lautet nach (70) für kleine Auslenkwinkel φ ($\sin \varphi = \varphi$):



$$d^2\varphi/dt^2 = -m \cdot g \cdot s \cdot \varphi / I_A \quad \text{oder}$$

$$(71) \quad d^2\varphi/dt^2 + (m \cdot g \cdot s / I_A) \cdot \varphi(t) = 0.$$

Dies ist nach (19) gerade die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung mit der Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \phi), \quad \text{wobei } \omega^2 = m \cdot g \cdot s / I_A \text{ ist.}$$

Für die Schwingungsdauer T des physikalischen Pendels erhalten wir damit

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{I_A / (m \cdot g \cdot s)}.$$

Die Länge

$$l_{RED} = I_A / (m \cdot s), \quad \text{reduzierte Pendellänge}$$

entspricht der Länge eines mathematischen Pendels, welches dieselbe Frequenz besitzt wie das vorliegende physikalische Pendel.

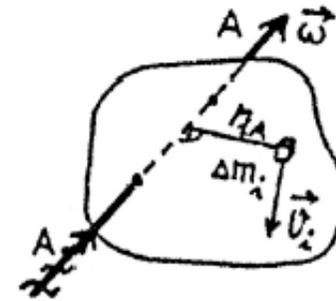
6.3 Energie des starren Körpers

Rotiert der starre Körper mit $\vec{\omega}$ um die Achse A, so beträgt die kinetische Energie eines einzelnen Massenelementes

$$\Delta m_i \cdot v_i^2 / 2 = \Delta m_i \cdot \omega^2 \cdot r_{iA}^2 / 2$$

Die gesamte kinetische Energie der Rotationsbewegung ist dann

$$(72) \quad \begin{array}{l} E(\text{rot}) = \omega^2 / 2 \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot r_{iA}^2 \quad \text{oder} \\ E(\text{rot}) = I_A \cdot \omega^2 / 2, \quad \text{Rotationsenergie.} \end{array}$$



Um dem Körper diese Rotationsenergie zu erteilen, muss eine entsprechende Arbeit durch das bei der Winkelbeschleunigung wirkende Drehmoment \vec{M} aufgewendet werden. Wir wollen annehmen, dass eine in der Normalebene zur Drehachse liegende Kraft \vec{F} im Punkt \vec{r} angreift, so dass sie das Drehmoment

$$M_A = F \cdot r \cdot \cos\beta \quad \text{erzeugt.}$$

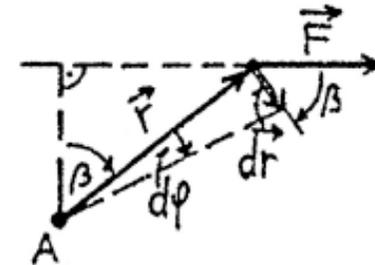
Bei der infinitesimalen Drehung um den Winkel $d\varphi$ wird \vec{F} längs des Weges $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ verschoben und leistet die Arbeit

$$dW = F \cdot r \cdot \cos\beta \cdot d\varphi \quad \text{oder} \quad dW = M_A \cdot d\varphi.$$

In vektorieller Schreibweise gilt somit

$$(72) \quad dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}, \quad \text{Drehtarbeit.}$$

Führt der starre Körper eine allgemeine Bewegung aus, so können wir diese immer als Überlagerung einer Translationsbewegung des Schwerpunktes mit einer Rotationsbewegung um eine Drehachse

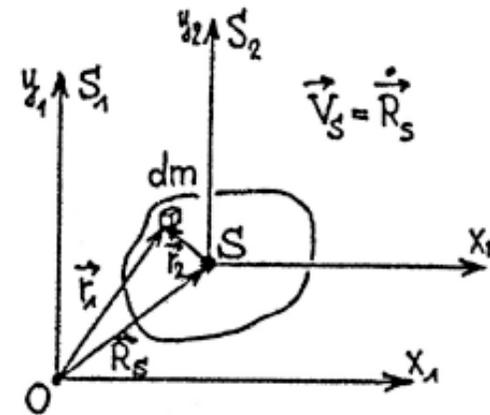


durch den Schwerpunkt auffassen. Wir heften ein Koordinatensystem S_2 an den bewegten Schwerpunkt S , wobei die Achsen von S_2 immer parallel zu den Achsen eines Inertialsystems S_1 stehen sollen. Die kinetische Energie $E(kin)$ im Inertialsystem ist

$$E(kin) = (1/2) \int dm \cdot \dot{\vec{r}}_1^2, \quad \text{oder mit } \dot{\vec{r}}_1 = (\dot{\vec{R}}_S + \dot{\vec{r}}_2):$$

$$E(kin) = (1/2) \int dm \cdot \dot{\vec{R}}_S^2 + (1/2) \cdot \int dm \cdot \dot{\vec{r}}_2^2 + (1/2) \cdot 2 \cdot \dot{\vec{R}}_S \cdot \int dm \cdot \dot{\vec{r}}_2.$$

Nun verschwindet aber das letzte Integral, weil im Schwerpunktsystem $d/dt \cdot \int dm \cdot \dot{\vec{r}}_2$ gerade null ist. Das zweite Integral stellt die kinetische Energie im Schwerpunktsystem dar, welche aber beim starren Körper eine reine Rotationsenergie um eine Schwerpunktsachse ist. Das erste Integral bedeutet die Translationsenergie $m \cdot V_S^2/2$ der im Schwerpunkt S konzentriert gedachten Gesamtmasse m . Ist ein äusseres, konservatives Kraftfeld vorhanden, können wir dem Körper noch eine potentielle Energie zuordnen. Wir wollen nur den Spezialfall des homogenen Gravitationsfeldes \vec{g} betrachten. Hier gilt:



$$E(pot) = -\vec{g} \cdot \int dm \cdot \vec{r}_1 \quad \text{oder} \quad E(pot) = -\vec{g} \cdot \int dm (\vec{R}_S + \vec{r}_2).$$

$-\vec{g} \cdot \int dm \cdot \vec{R}_S = m \cdot g \cdot h_S$ ist die potentielle Energie der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse. Das Integral $-\vec{g} \cdot \int dm \cdot \vec{r}_2$ verschwindet wiederum, d.h. im homogenen äusseren Kraftfeld ändert eine Drehung des Körpers um den Schwerpunkt die potentielle Energie nicht oder anders ausgedrückt: das Drehmoment des homogenen äusseren Feldes bezogen auf den Schwerpunkt ist null. Mit h_S als Höhe des Schwerpunktes und I_S als Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt erhalten wir schliesslich für die Gesamtenergie E im homogenen äusseren Kraftfeld

$$(73) \quad E = m \cdot g \cdot h_S + m \cdot V_S^2/2 + I_S \cdot \omega^2/2.$$

Die Gesamtenergie ist gleich der Summe von potentieller und kinetischer Energie der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse und der Rotationsenergie um die Drehachse durch den Schwerpunkt. Zwischen den physikalischen Grössen für Drehbewegungen und jenen für Translationsbewegungen besteht offensichtlich eine Analogie, die eine nützliche Gedächtnisstütze darstellt:

Analogien

Translation:		Rotation:	
Ort	\vec{r}	Drehwinkel	φ
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \ddot{\vec{\varphi}}$
Masse	m	Trägheitsmoment	I_A
Kraft	\vec{F}	Drehmoment	\vec{M}
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls (Drall)	$\vec{L} = I_A \cdot \vec{\omega}$
E(kin)	$m \cdot v^2 / 2$	E(rot)	$I_A \cdot \omega^2 / 2$
Arbeit	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Dreharbeit	$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$
Impulssatz	$d\vec{p}/dt = \vec{F}$	Drallsatz	$d(I_A \cdot \vec{\omega})/dt = \vec{M}$

6.4 Gleichgewicht starrer Körper

Wir verzichten hier auf eine ausführliche Behandlung der Statik, wollen aber einige grundsätzliche Dinge festhalten. Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn er weder eine Translations- noch eine Winkelbeschleunigung durch äussere Kräfte erfährt. Aus dem Schwerpunktsatz (44) und dem Drallsatz (61) ergeben sich dann die **Gleichgewichtsbedingungen**

$$(74) \quad \sum \vec{F}(ext) = 0 \quad \text{und} \quad \sum \vec{M}(ext) = 0.$$

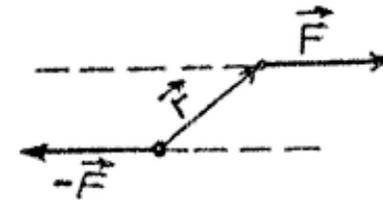
Die Resultierende der äusseren Kräfte und die Summe der Drehmomente dieser Kräfte bezogen auf einen beliebigen Punkt müssen verschwinden.

Begriff des Kräftepaars:

Zwei gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit verschiedenen Wirkungslinien bilden ein **Kräftepaar**, dessen Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ nicht vom Bezugspunkt abhängt.

Übungsaufgabe:

Zeige, dass das Drehmoment eines Kräftepaars unabhängig vom gewählten Drehpunkt immer gleich gross ist.



Reduktion von Kräftegruppen:

Greifen Einzelkräfte \vec{F}_i an den Punkten \vec{r}_i an, so können sie immer ersetzt werden durch eine im Ursprung angreifende resultierende Kraft $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ und ein Kräftepaar, dessen Drehmoment $\vec{M} = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$ ist.

Statisch bestimmtes System:

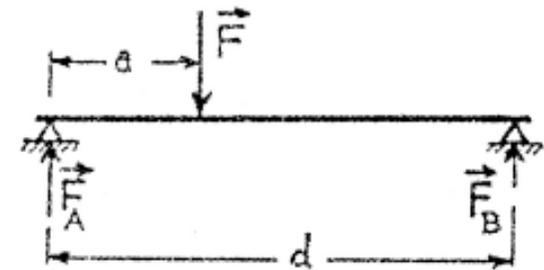
Ein System heisst statisch bestimmt, wenn sich aus den eingprägten äusseren Kräften die zum Gleichgewicht führenden Reaktionskräfte (Auflagekräfte) eindeutig bestimmen lassen,

Beispiel: Auflagekräfte des gewichtslosen, mit \vec{F} belasteten Balkens.

a) $\vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$

b) $F_B \cdot d - F \cdot a = 0$

Lösung: $F_A = F \cdot (d - a)/d$; $F_B = F \cdot a/d$.



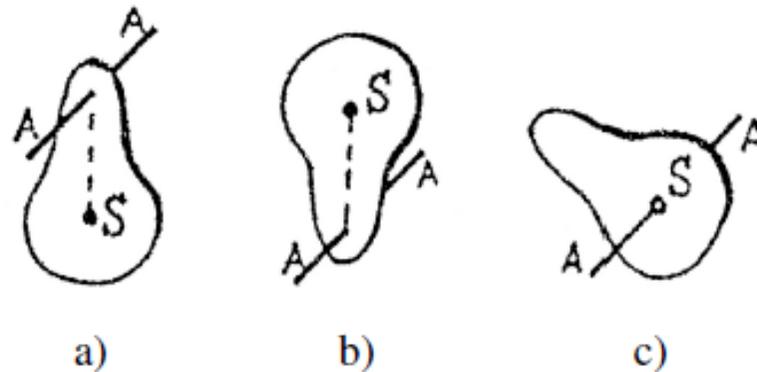
Gleichgewichtsarten:

Wir betrachten als Beispiel ein physikalisches Pendel in drei verschiedenen Situationen:

a) Der Schwerpunkt liegt senkrecht unter der Drehachse. Das Gleichgewicht ist **stabil**. Eine kleine Verrückung führt zu Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Die potentielle Energie ist minimal.

b) Der Schwerpunkt liegt senkrecht über der Drehachse. Das Gleichgewicht ist **labil**. Eine kleine Verrückung führt zum Umkippen. Die potentielle Energie ist maximal.

c) Der Schwerpunkt liegt auf der Drehachse. Jede Drehung führt in eine neue, benachbarte Gleichgewichtslage. Das Gleichgewicht ist **indifferent**. Die potentielle Energie ändert sich nicht beim Drehen.



6.5 Reibungskräfte

Die bisher formulierten Gesetze der Mechanik, insbesondere die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls sind im realen Fall nur richtig, wenn man von energieverzehrenden Kräften abstrahiert, welche in Wirklichkeit fast immer vorhanden sind. Man fasst diese Begleiterscheinungen unter dem Begriff **Reibung** zusammen. Die Reibung kann durch eine die Bewegung hemmende Kraft charakterisiert werden, wobei wir „innere“ und „äussere“ Reibung unterscheiden.

Innere Reibung: Verlust an mechanischer Energie durch Bewegung der Atome oder Moleküle eines Stoffes gegeneinander (s. Kapitel Hydromechanik).

Äussere Reibung: Energieverlust an den Grenzflächen verschiedener Körper, die sich relativ zueinander bewegen.

Wir betrachten hier die äussere Reibung zwischen zwei festen Körpern.

6.5.1 Haftreibung

Wenn zwei Körper eine gemeinsame Berührungsfläche haben und mit der Normalkraft F_N zusammengepresst werden, so verstehen wir unter der **Haftreibungskraft** F_H jene maximale Kraft parallel zur Berührungsfläche, die gerade **noch nicht ausreicht**, um den einen Körper gegen den andern zu verschieben. Zwischen F_H und F_N gilt die Beziehung

$$(75) \quad F_H = \mu_H \cdot F_N, \quad \mu_H = \text{Haftreibungszahl.}$$

Die Haftreibungszahl ist durch die Rauigkeit und die Stoffarten der reibenden Oberflächen bestimmt. Die Haftreibungskraft F_H hängt nicht von der Grösse der Berührungsfläche ab. Beachte, dass die Haftreibung oft eine willkommene Erscheinung ist (z.B. zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen).

6.5.2 Gleitreibung

Unter der **Gleitreibungskraft** F_{GL} verstehen wir die Kraft parallel zur Berührungsfläche, welche erforderlich ist, um eine konstante relative Gleitgeschwindigkeit der beiden Körper aufrechtzuerhalten. Analog zur Haftreibung gilt hier

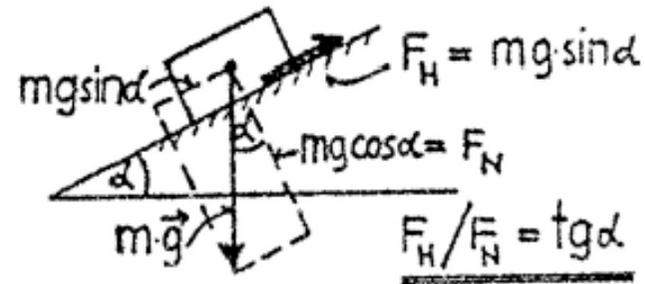
$$(76) \quad F_{GL} = \mu_{GL} \cdot F_N, \quad \mu_{GL} = \text{Gleitreibungszahl.}$$

Die Gleitreibungszahl ist in guter Näherung unabhängig von der Gleitgeschwindigkeit und hängt nicht von der Grösse der Berührungsfläche ab. Bei gleichen Stoffpaaren ist μ_{GL} stets kleiner als μ_H ,

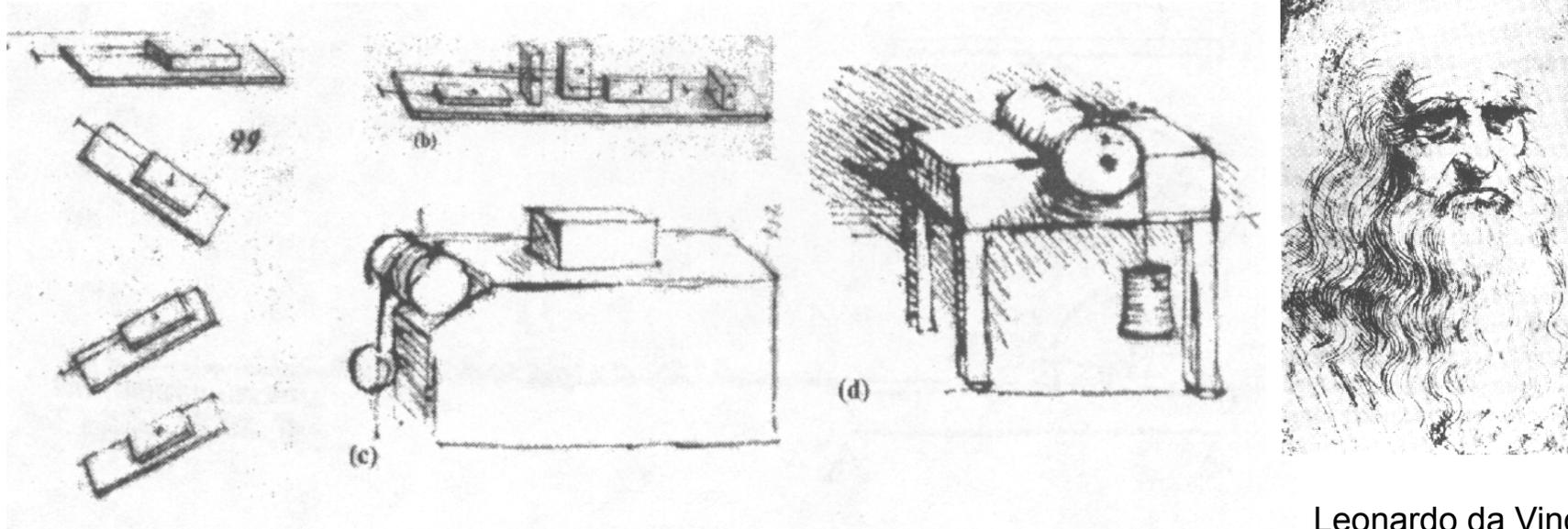
Die Reibungszahlen μ_H und μ_{GL} können bequem an der schiefen Ebene bestimmt werden. Beginnt der Körper beim Neigungswinkel α gerade zu gleiten und bleibt die Geschwindigkeit für α' gerade konstant, so ist

$$\mu_H = \tan \alpha \quad \text{und} \quad \mu_{GL} = \tan \alpha',$$

mit $\alpha' < \alpha$



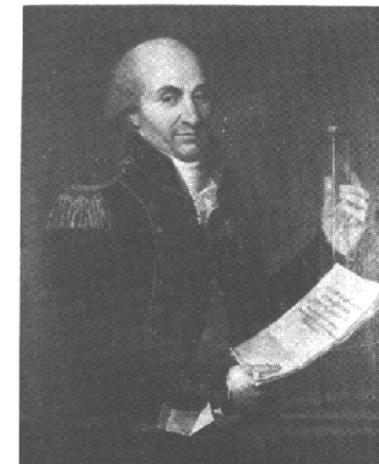
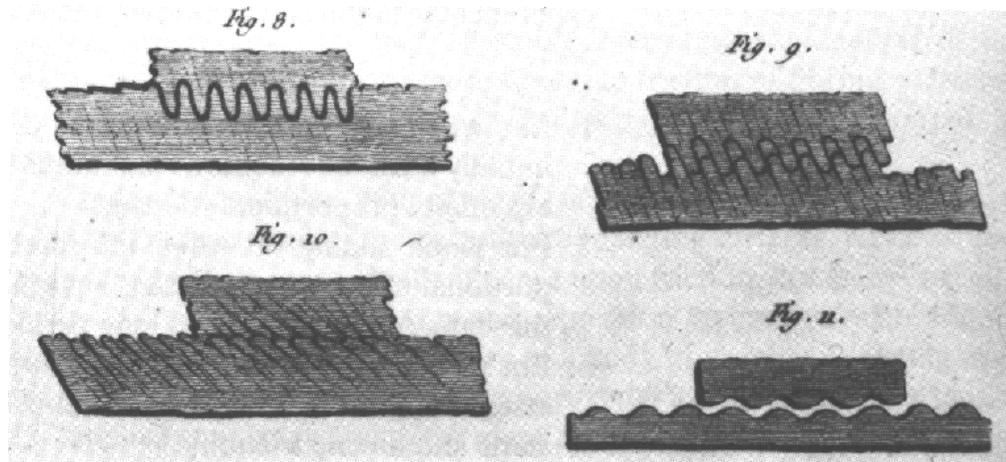
Experimente von Leonardo da Vinci



Leonardo da Vinci
(1452-1519)

1. Reibung ist unabhängig von der geometrischen Kontaktfläche
2. Reibung ist proportional zur Normalkraft

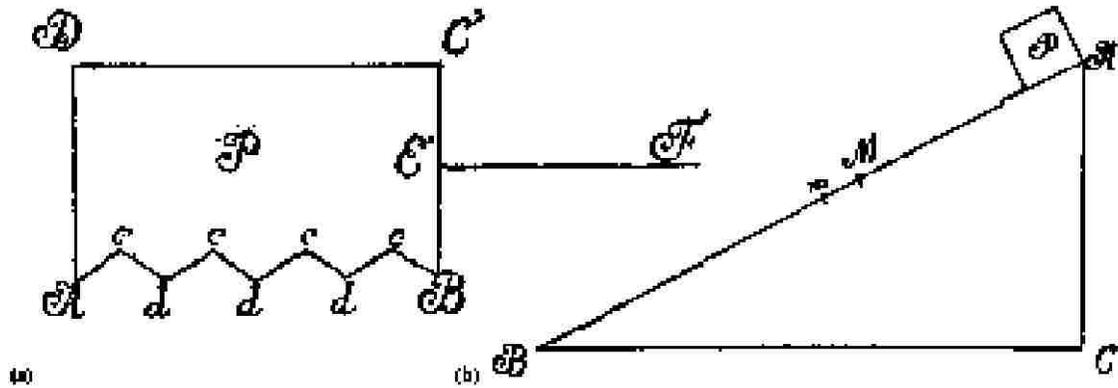
Coulomb: Reibung und Geschwindigkeit



Charles Augustin Coulomb
(1736-1806)

3. Trockene Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit

Haft- und Gleitreibung

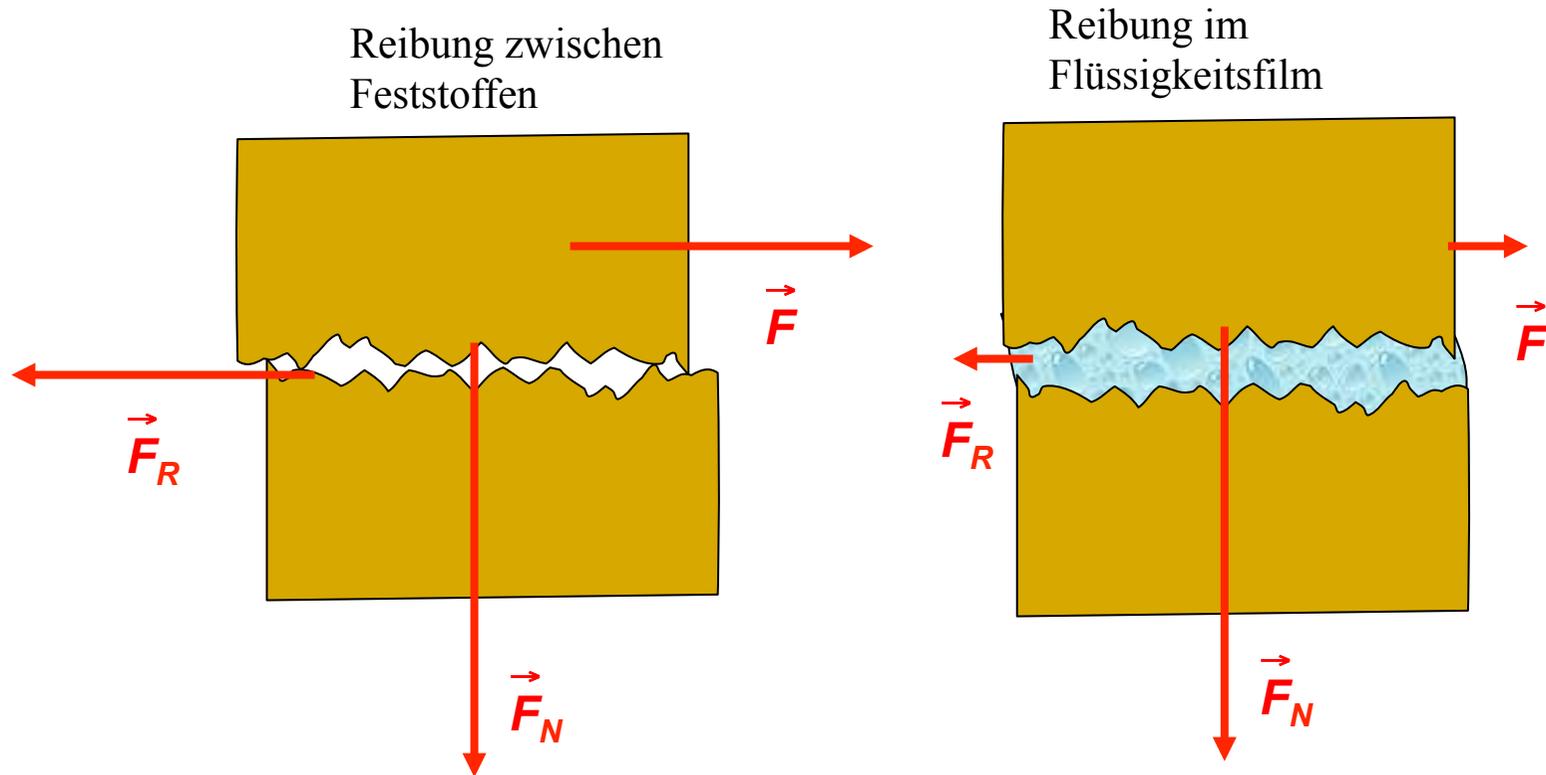


Leonhard Euler
(1707-1783)

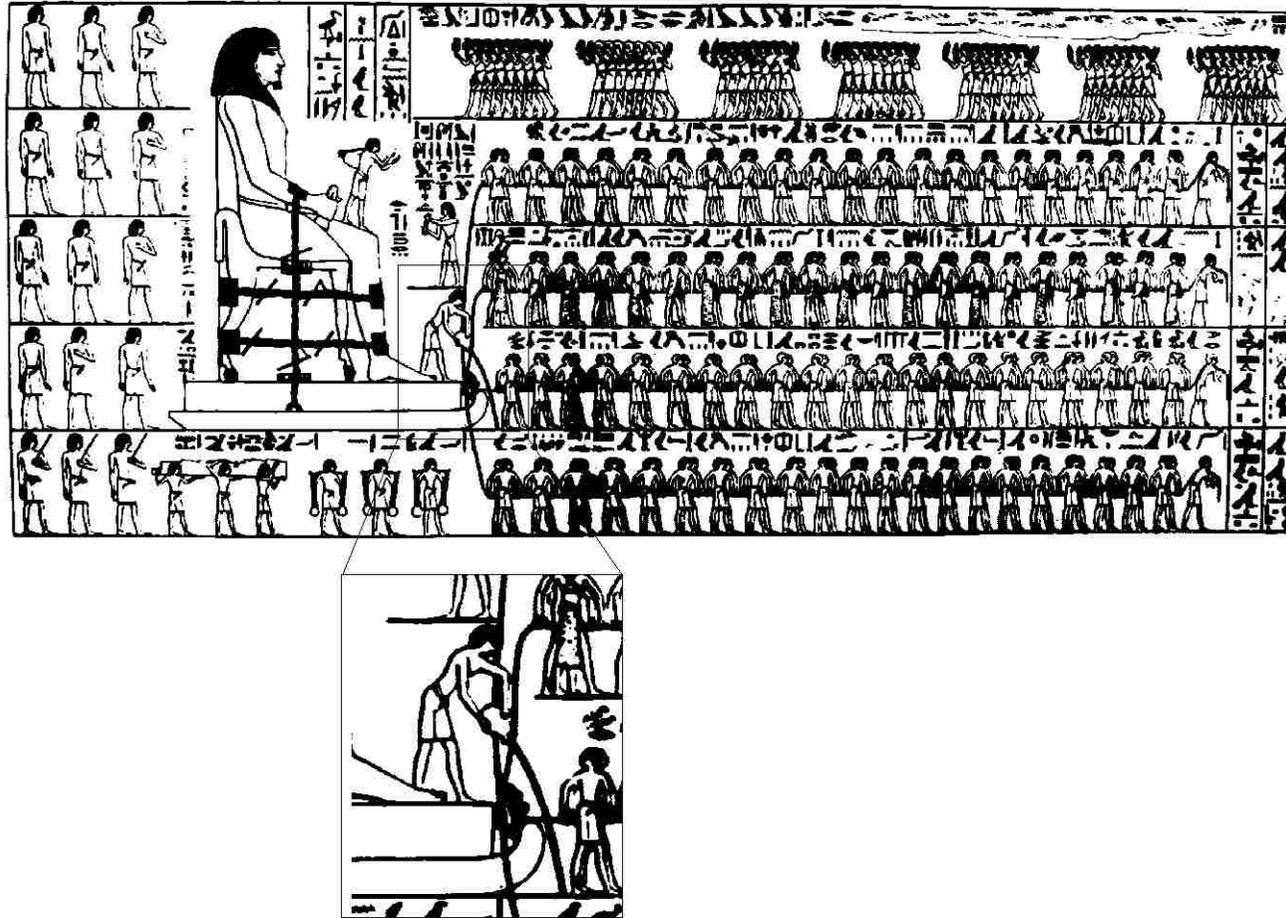
Leonhard Euler war der erste, der zwischen Gleit- und Haftreibung unterschieden hat.

Schmierung

Durch eine Schmierung wird die Reibung in ein anderes Medium verlagert (z.B. in Öl oder einen Feststoff)



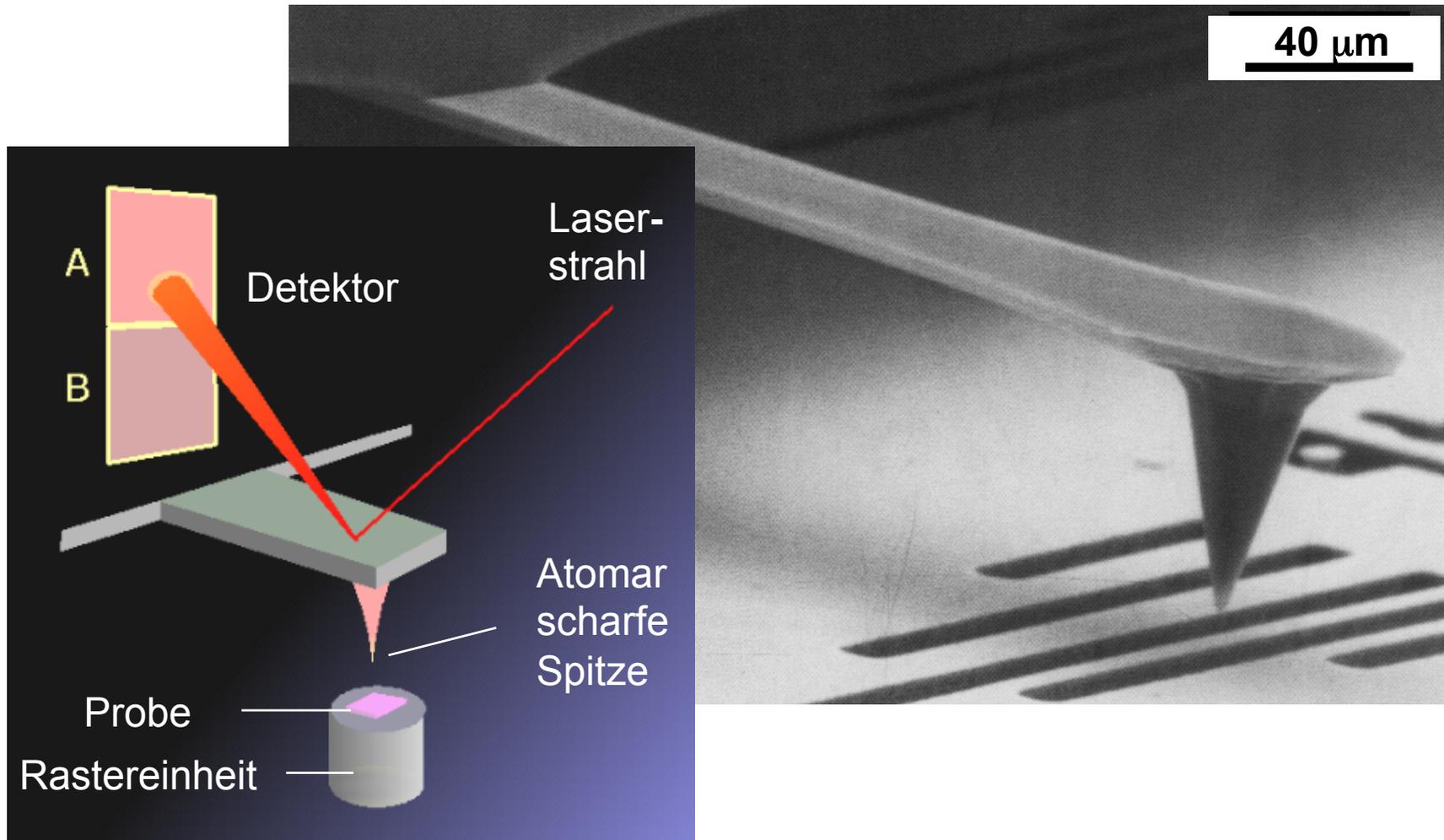
Reibung im alten Ägypten



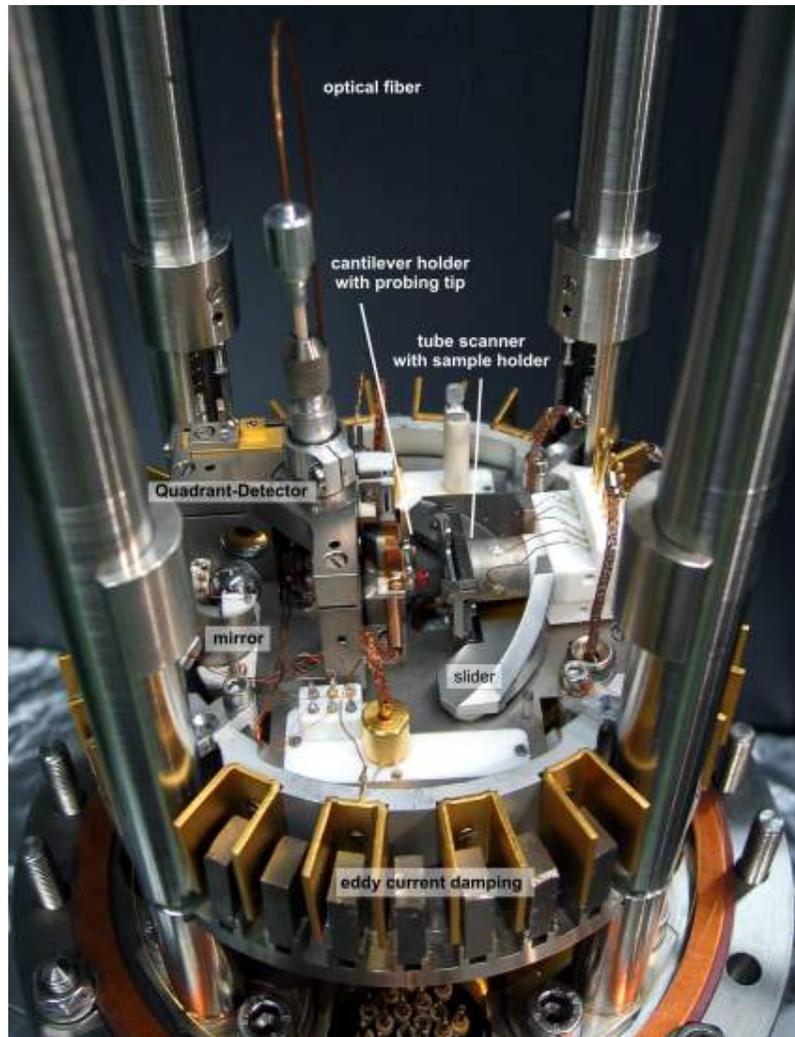
172 Ägypter ziehen einen Koloss. Ein Mann giesst Flüssigkeit auf den Sand, um die Reibung zu reduzieren.

Rasterkraftmikroskopie

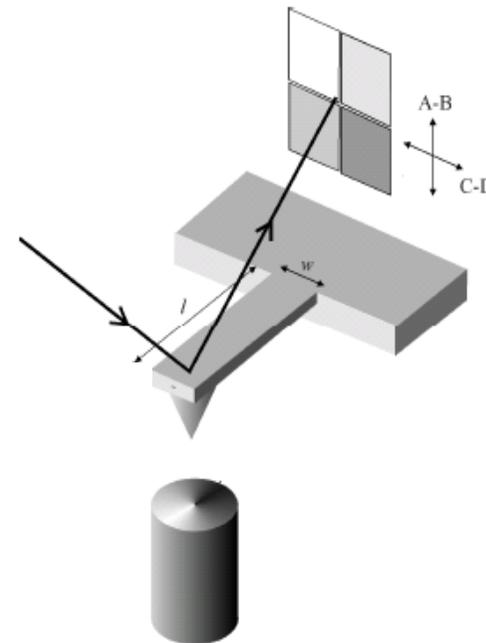
Atomic force microscopy (AFM)



Ultrahochvakuum-Kraftmikroskopie



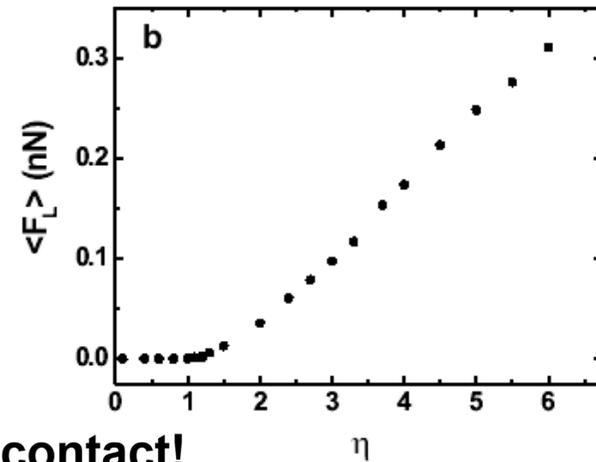
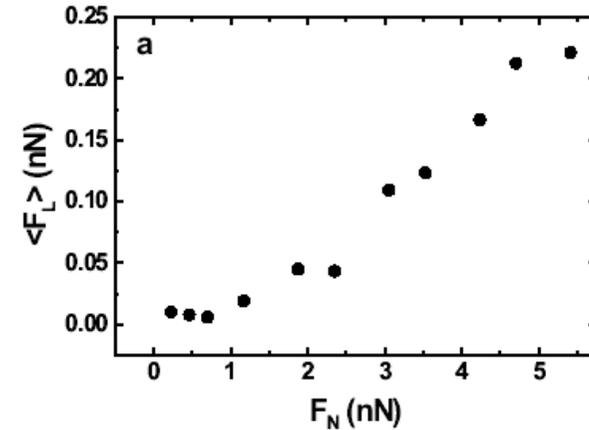
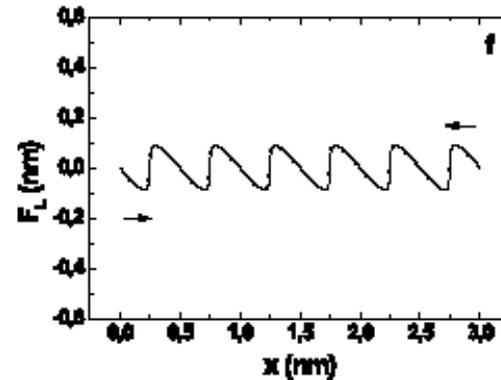
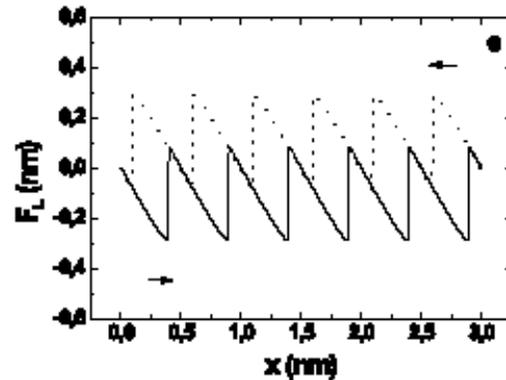
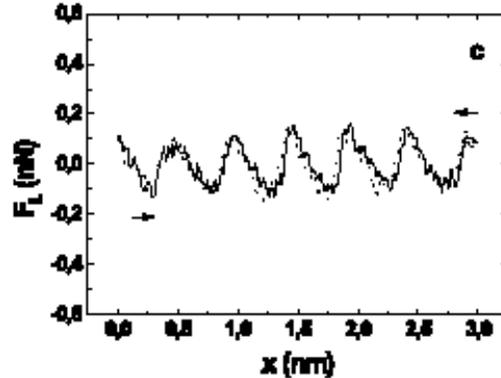
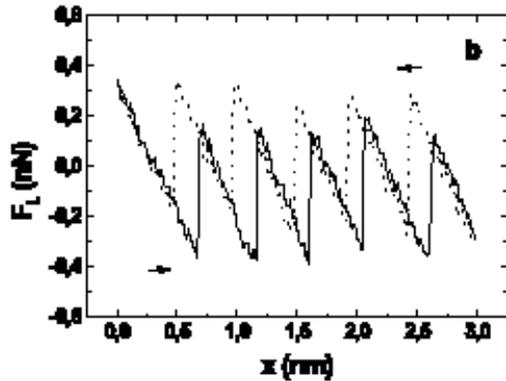
- Ultrahochvakuum
Druck $< 10^{-10}$ mbar
- Schneller Vorverstärker
(< 3 MHz)



Reibung bei kleinen Kräften

Superlubrizität

$k_x = 29 \text{ N/m}$, $k_z = 0.05 \text{ N/m}$, $v_x = 3 \text{ nm/s}$, const. z
 Scans along $[100]$ showing maximum variation



Stick-slip

$$\eta > 1$$

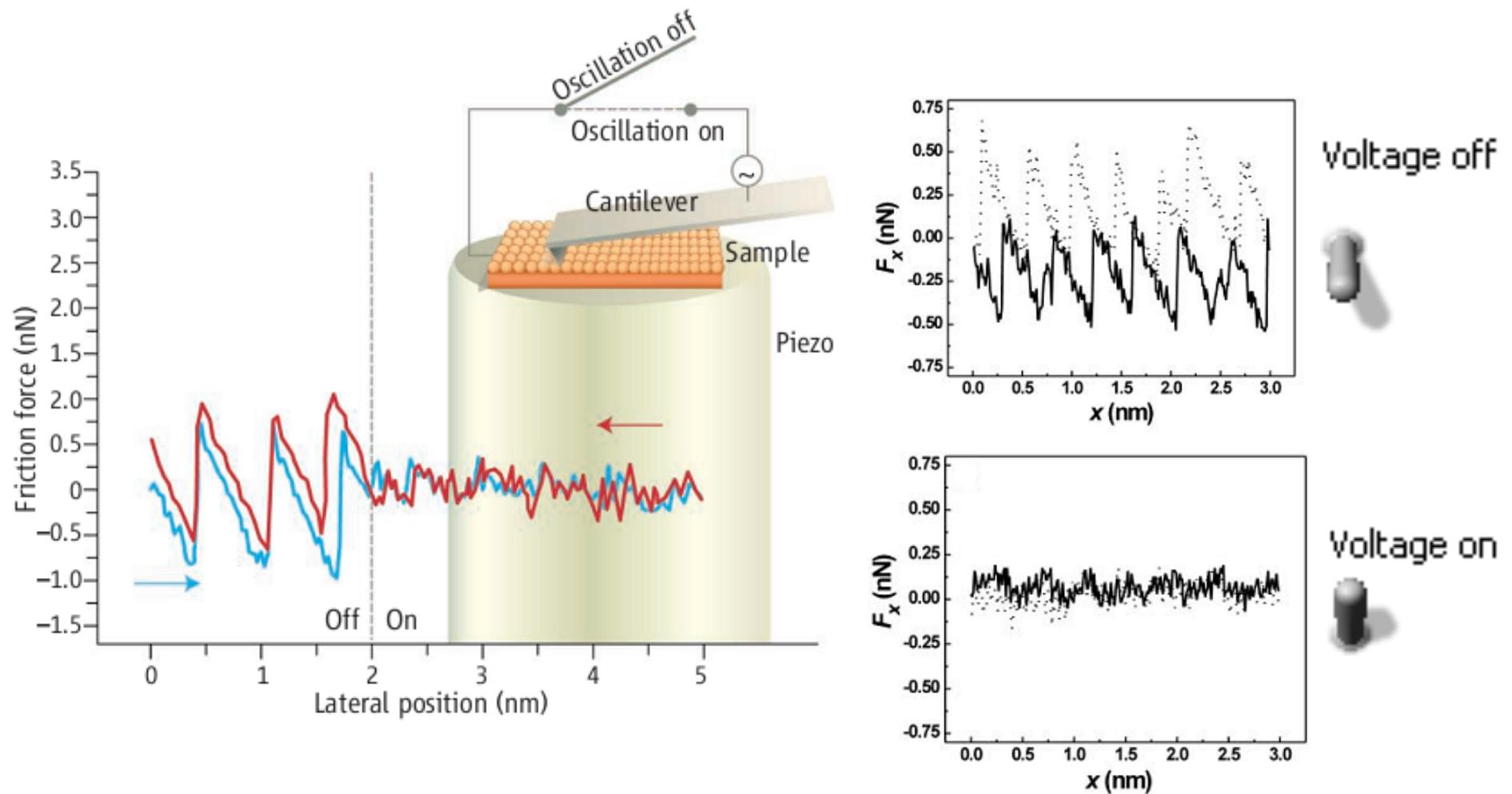
Continuous sliding in contact!

$$\eta < 1$$

$$\text{mean load } F_N = F_z + 0.7 \text{ nN}$$

A. Socoliuc et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 134301 (2004)

Kontrolle von Reibung

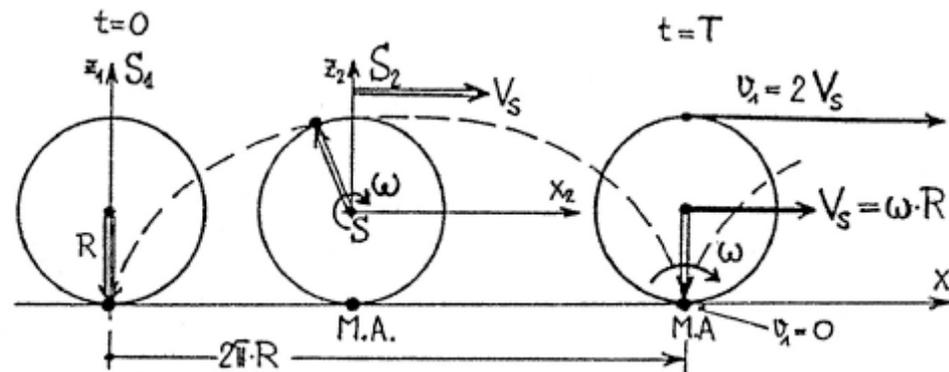


A. Socoliuc, E. Gnecco, S. Maier, O. Pfeiffer, A. Baratoff, R. Bennewitz, E. Meyer,
Science **313**, 207 (2006)

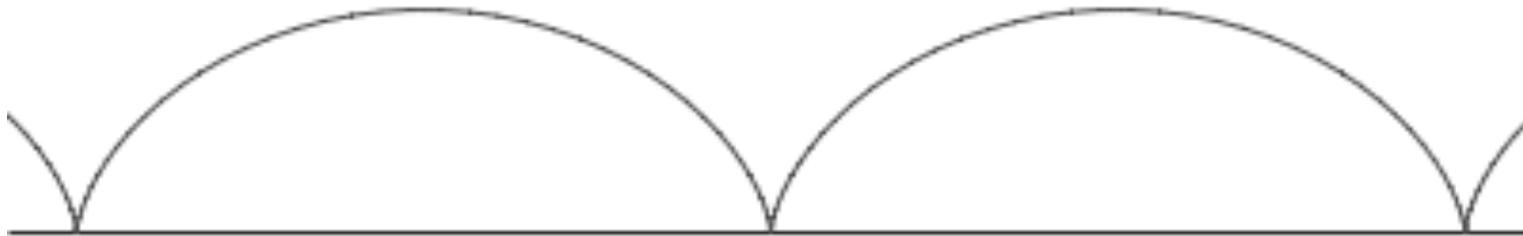
6.6 Rollendes Rad; momentane Drehachse

Auf der x_1y_1 -Ebene eines Koordinatensystems S_1 soll ein Rad entlang der x_1 -Achse abrollen. Die y_2 -Achse eines Systems S_2 fällt mit der Radachse zusammen und bewegt sich mit der Geschwindigkeit des Radschwerpunktes $V_S = \omega \cdot R$ relativ zu S_1 . In S_2 führen alle Punkte des Radumfangs eine gleichförmige Kreisbewegung mit $v_2 = \omega \cdot R$ aus. Im Laborsystem S_1 , gilt für diese Punkte nach (5): $\vec{v}_1 = \vec{V}_S + \vec{v}_2$, so dass auf der Berührungslinie $\vec{v}_1 = 0$ wird (kein Gleiten), während die diametral gegenüberliegenden Punkte sich mit $\vec{v}_1 = 2\vec{V}_S$ in x -Richtung bewegen. Die Bahn jedes Radpunktes ist in S_1 eine **Zykloide**, welche durch Superposition von gleichförmiger Translation mit \vec{V}_S und gleichförmiger Rotation mit $\vec{\omega}$ um die Schwerpunktsachse entsteht. Nach (73) ist dann die kinetische Energie des Rades

$$E(\text{kin}) = m \cdot V_S^2/2 + I_S \cdot \omega^2/2 \quad \text{oder mit } V_S = \omega \cdot R : \\ (77) \quad E(\text{kin}) = (m \cdot R^2 + I_S) \cdot \omega^2/2.$$



Zykloide



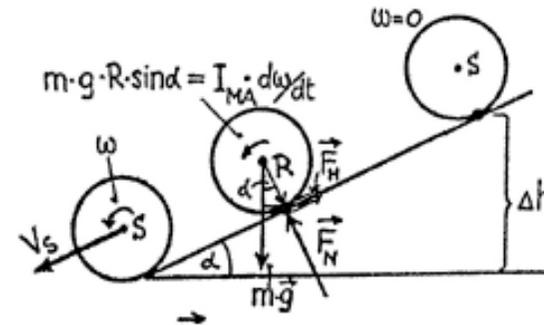
Die Berührungslinie des Rades mit der Unterlage ist eine **momentane Drehachse**. Allgemein wird die momentane Drehachse durch jene Punkte eines rotierenden Körpers gebildet, welche im betreffenden Augenblick gerade ruhen. Sie wird immer von neuem durch andere Massenpunkte gebildet und ist **nicht raumfest**. Wir können die Rollbewegung in jedem Zeitpunkt als reine Rotationsbewegung um die momentane Drehachse M.A. auffassen. Die zugehörige Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = V_S/R$, also gleich gross wie jene in S_2 um die Achse durch den Schwerpunkt. Mit Hilfe des Satzes von Steiner ist das Trägheitsmoment bezogen auf die momentane Drehachse

$$I_{M.A.} = m \cdot R^2 + I_S,$$

so dass die Rotationsenergie $I_{M.A.} \cdot \omega^2/2$ mit (77) übereinstimmt (was natürlich so sein muss). Wir fragen nun nach der Beschleunigung dV_S/dt des Schwerpunktes eines Rades, welches eine schiefe Ebene hinunterrollt. Es sei genügend Haftreibung vorhanden, damit das Rad nicht gleitet und die

Rollreibung sei vernachlässigbar klein. Auf das Rad wirken dann drei äussere Kräfte:

- Die am Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft $m \cdot \vec{g}$.
- Die normal zur schiefen Ebene nach oben gerichtete, an der momentanen Drehachse angreifende Kraft
 $F_N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$.
- Die parallel zur schiefen Ebene nach oben zeigende Haftreibungskraft \vec{F}_H . Ihre Wirkungslinie geht ebenfalls durch die momentane Drehachse.



Nur die Gewichtskraft trägt zum Drehmoment M_{MA} bezogen auf die momentane Drehachse bei. Mit $M_{MA} = m \cdot g \cdot R \cdot \sin \alpha$ und dem Drallsatz (61) erhalten wir

$$(78) \quad \begin{array}{l} d\omega/dt = m \cdot g \cdot R \cdot \sin \alpha / I_{MA.} \quad \text{und mit} \quad dV_S/dt = R \cdot d\omega/dt \quad \text{folgt:} \\ dV_S/dt = m \cdot R^2 \cdot g \cdot \sin \alpha / I_{MA.} \quad \text{oder} \quad dV_S/dt = g \cdot \sin \alpha / (1 + I_S / mR^2). \end{array}$$

Beachte, dass der rollende Körper eine geringere translatorische Beschleunigung erfährt, als ein reibungsfrei gleitender Körper, weil ein Teil der kinetischen Energie in der Rotationsbewegung steckt.

Exp: Velo

Zylinder Rollen

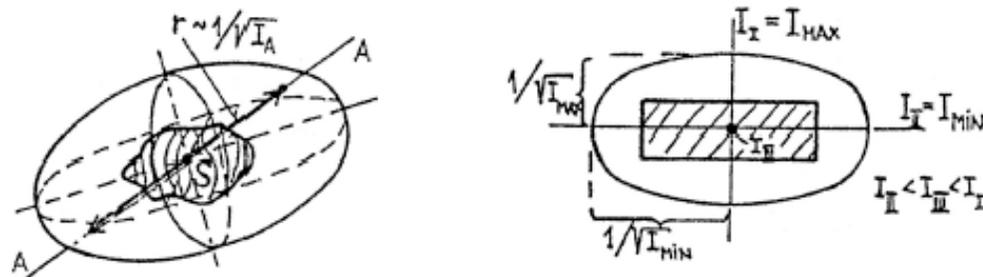
Folgsame und unfolgsame Fadenspule

Jo-Jo

6.7 Trägheitsellipsoid. Freie Achsen

Für das Verständnis allgemeiner Drehbewegungen erweist sich die Darstellung der Trägheitsmomente für verschiedene Drehachsen durch das „Trägheitsellipsoid“ (geometrische Darstellung des Trägheitstensors) als äusserst hilfreich.

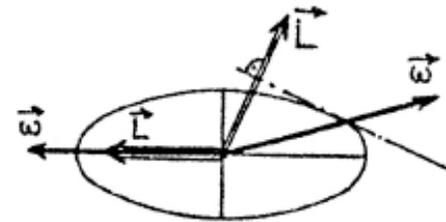
Wir denken uns einen beliebigen Körper, dessen Schwerpunkt S im Koordinatenursprung liegt. Für jede Achse A durch S berechnen wir das Trägheitsmoment I_A und tragen in Achsenrichtung den Ortsvektor \vec{r} auf, dessen Betrag gerade $1/\sqrt{I_A}$ ist. Es stellt sich heraus, dass die Endpunkte aller Vektoren \vec{r} die Fläche eines Ellipsoides bilden. Dies gilt auch, wenn S ein beliebiger Punkt ist. Die drei Hauptachsen des Ellipsoids sind gerade die **drei orthogonalen Hauptträgheitsachsen** des Körpers. Betrachten wir als Beispiel einen homogenen Quader, so fallen die drei Symmetrieachsen mit den Ellipsoid- Hauptachsen zusammen. Allgemein sind Symmetrieachsen homogener Körper Hauptträgheitsachsen. Sind zwei Symmetrieachsen gleichwertig, ergibt sich ein Rotationsellipsoid. Sind drei Symmetrieachsen gleichwertig, wie z.B. beim homogenen Würfel, so entartet das Ellipsoid zu einer Kugel. Daraus folgt, dass jede Schwerpunktsachse eines Würfels das gleiche Trägheitsmoment besitzt.



Im Abschnitt 6.2 haben wir festgestellt, dass der Drall \vec{L} und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ im Allgemeinen nicht parallel gerichtet sind, so dass in der Gleichung

$$\vec{L} = I_A \cdot \vec{\omega} \text{ die Grösse } I_A \text{ ein Tensor ist.}$$

Mit Hilfe des Trägheitsellipsoids können wir bei gegebenem $\vec{\omega}$ die Richtung von \vec{L} geometrisch finden: Wir errichten im Durchstoßpunkt von $\vec{\omega}$ durch die Ellipsoidfläche die Flächennormale. Die Richtung von \vec{L} ist dazu parallel. Fällt die Drehachse mit einer Hauptachse zusammen, haben \vec{L} und $\vec{\omega}$ gleiche Richtung;



Ellipsoid-Hauptachse = Hauptträgheitsachse.

Um eine Hauptträgheitsachse kann sich der Körper drehen, ohne dass Achsenlager notwendig sind (vom Gewicht abgesehen wirken keine Lagerkräfte).

Hauptträgheitsachsen sind freie Achsen.

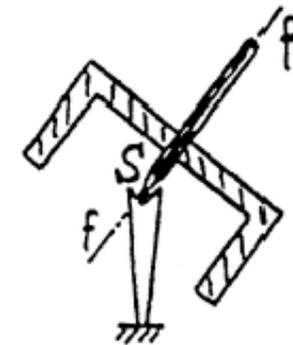
Die beiden Hauptträgheitsachsen I und II mit maximalem und minimalem Trägheitsmoment sind **stabil**, eine freie Drehung um die **Hauptträgheitsachse III**, mit $I_{II} < I_{III} < I_I$ ist **labil**; die geringste Störung führt zum Umschlagen in eine Drehung um Achse I oder II.

Exp: Quader
(L nicht parallel ω)

6.8 Kreisel

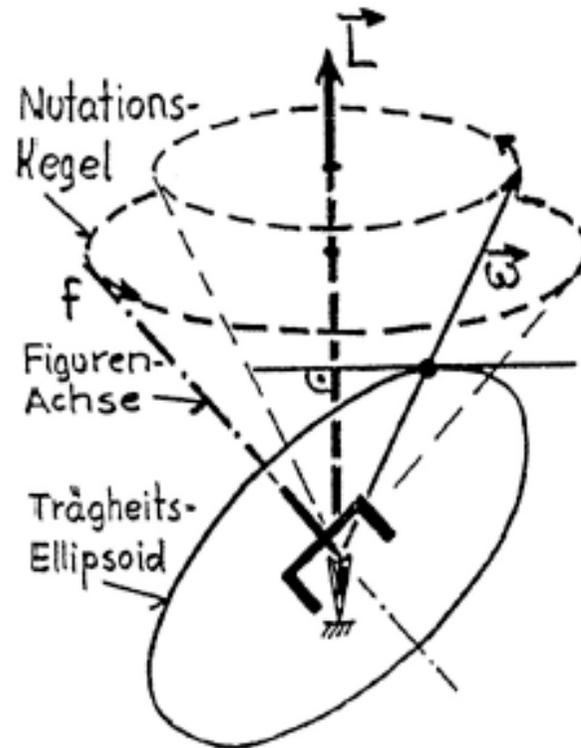
6.8.1 Kräftefreier, symmetrischer Kreisel

Definitionsgemäss besitzt ein symmetrischer Kreisel eine Symmetrieachse, wir nennen sie die **Figurenachse**. Das Trägheitsellipsoid eines symmetrischen Kreisels ist daher ein Rotationsellipsoid bezüglich der **Figurenachse f** . Ist der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt, so wirken keine äusseren Drehmomente und sein Drall \vec{L} ist nach (61) raumfest. Die Figurenachse f ist eine Hauptträgheitsachse. Wenn die Anfangsbedingungen so sind, dass gerade $\vec{\omega}$ mit f zusammenfällt, dann liegt auch \vec{L} in f und wegen $\vec{L} = \text{konstant}$ ist auch die Figurenachse raumfest.



Wird nun durch einen seitlichen Kraftstoss der Drall \vec{L} aus der Figurenachse f herausgestossen, ergibt sich eine neue Situation: die Figurenachse f und die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ bewegen sich je auf einem Kreiskegel um die raumfeste Drallachse. \vec{L} , f und $\vec{\omega}$ liegen immer in einer Ebene. Man bezeichnet die Bewegung der Figurenachse um die raumfeste Drallachse als **Nutation**. Nutation tritt immer auf, wenn der Drall nicht in der Figurenachse liegt.

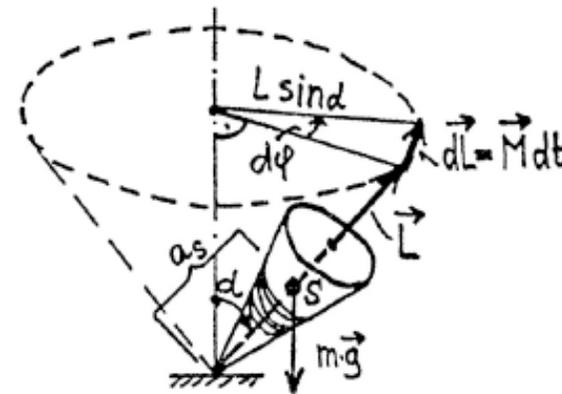
Kräftefreier Kreisel



Exp: Nutation bzw. momentane Drehachse

6.8.2 Kreisel unter Einwirkung eines Drehmoments

Als Beispiel betrachten wir einen Kinderkreisel, der unter dem Einfluss seines Gewichtes ein Drehmoment bezogen auf die Kreiselspitze von $M = m \cdot g \cdot a_S \cdot \sin \alpha$ erfährt. a_S ist der Abstand des Schwerpunktes von der Spitze und der Neigungswinkel gegen die Vertikale. Die Dralländerung $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$ steht jederzeit senkrecht auf Figurenachse und Drallachse, so dass die Vertikalkomponente von \vec{L} und der Betrag L konstant bleiben (und damit auch α). Der Vektor \vec{L} führt somit eine Drehbewegung um die Vertikale aus, die man als **Präzession** bezeichnet. Aus $d\varphi = M \cdot dt / (L \cdot \sin \alpha)$ folgt mit $M = m \cdot g \cdot a_S \cdot \sin \alpha$



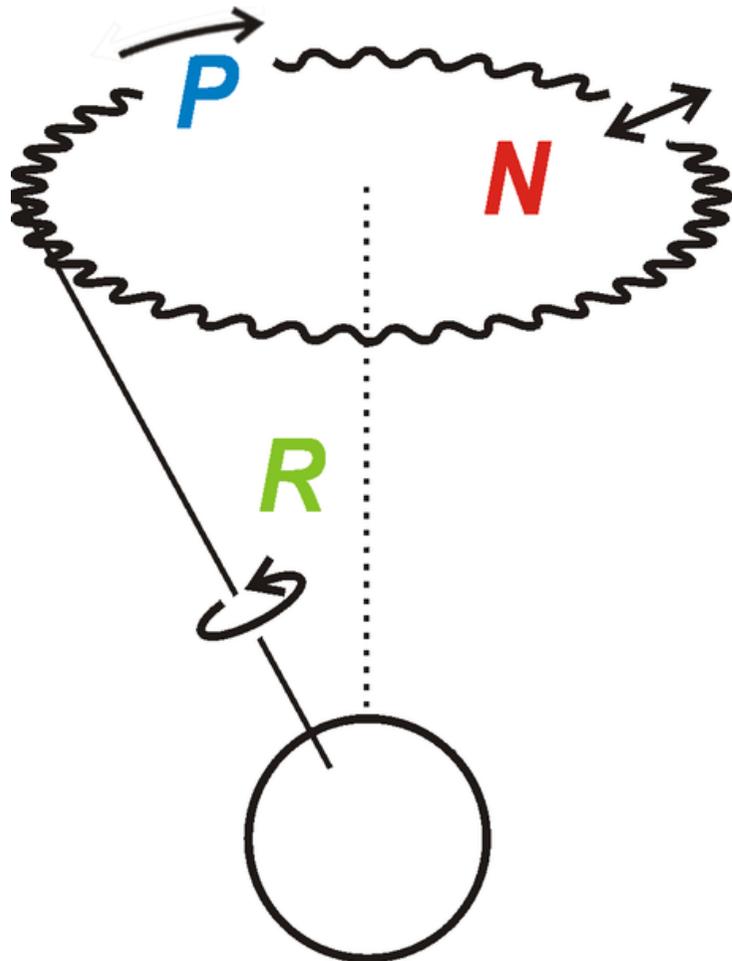
$$(79) \quad d\varphi/dt = m \cdot g \cdot a_S / L, \quad \text{Präzession.}$$

Die Präzessionsfrequenz des Kinderkreisels hängt nicht ab vom Neigungswinkel α . Allgemein kann man sagen, dass ein Kreisel infolge eines wirkenden Drehmomentes nicht kippt, sondern senkrecht zur vorhandenen Kraft ausweicht. Eine wichtige technische Anwendung des Kreisels ist der Kreiselkompass.

Exp: Präzession (mit Gewicht)

Exp: Kreiselkompass

Präzession der Erde



Präzession der Erde wegen
Anziehung von Mond und Sonne

$$T_P = 25'800y$$

$$\omega = 2\pi/T_P = 360 \times 3600'' / 25'800y = 50''/y$$

Amplitude: 23.5°

Nutation:

$$T_N = 18.6y$$

Amplitude: $8''$

Künstlicher Horizont und Kurskreisel

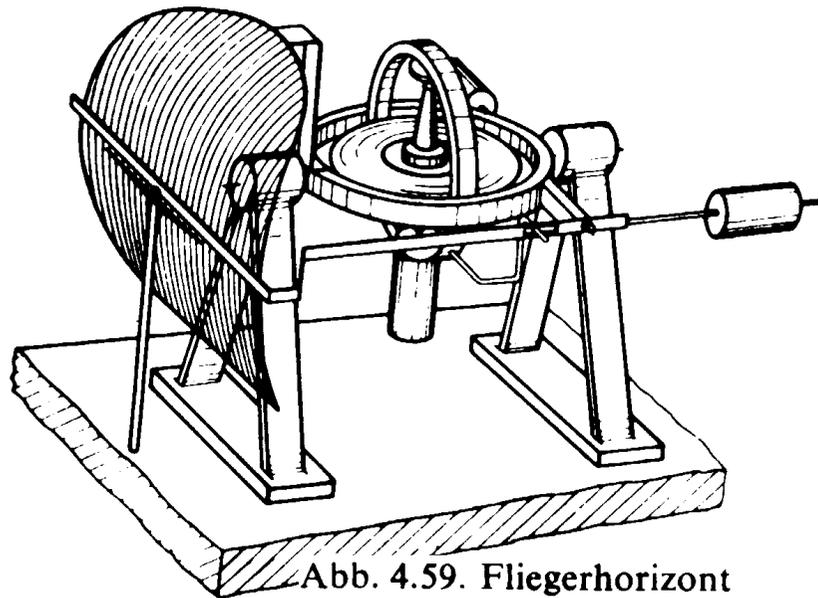
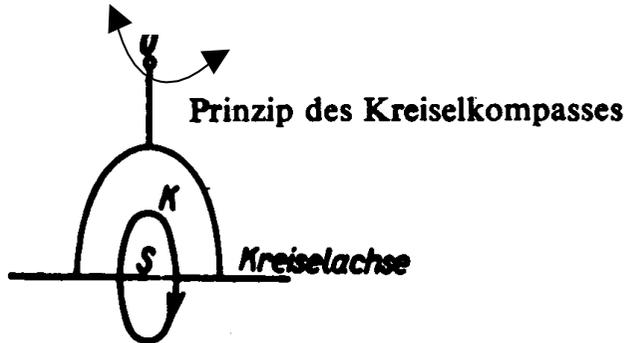


Abb. 4.59. Fliegerhorizont

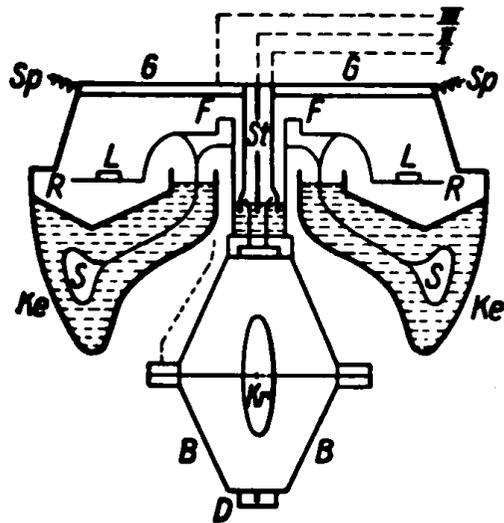


Kreiselkompass



Kreisel richtet sich parallel
zu $\vec{\omega}_E$ aus

Funktioniert nicht am Nordpol



Anschützscher Einzelkreiselkompaß



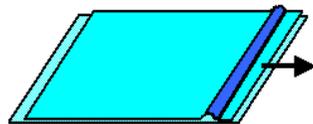
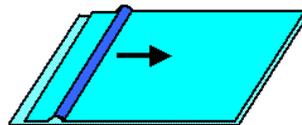
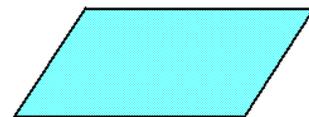
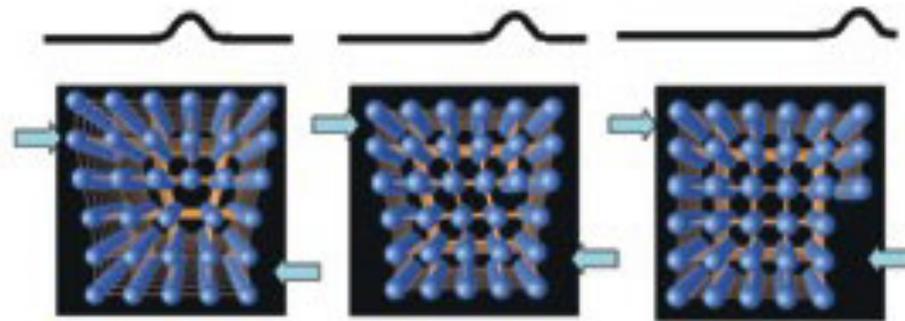
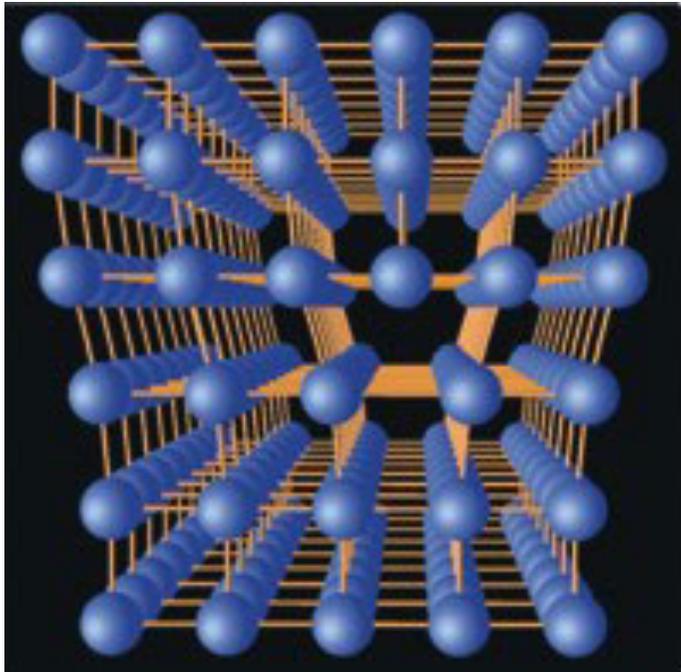
Kapitel 7

Elastizität fester Körper

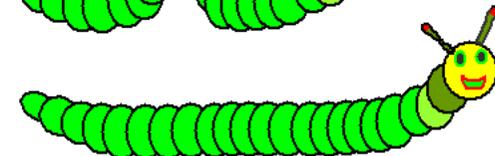
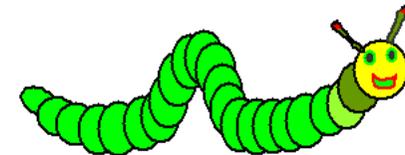
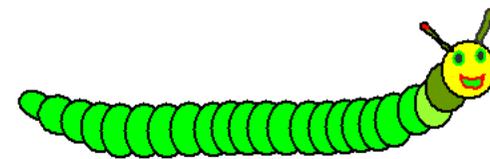
Im festen Aggregatzustand hat jeder Körper ein bestimmtes Volumen und eine bestimmte Gestalt, die beide einer Veränderung grosse Kräfte entgegensetzen. Die im letzten Kapitel vorausgesetzte Starrheit ist nicht streng erfüllt, so dass wir nun die Deformation eines festen Körpers unter dem Einfluss äusserer Kräfte untersuchen wollen. Falls die Deformation nach Entfernen der Kräfte wieder verschwindet, spricht man von vollständiger **elastischer Deformation**, bleiben die Formänderungen zurück, handelt es sich um vollständig **plastische Verformung**. Im Folgenden fragen wir nach dem Zusammenhang zwischen Kräften und erzeugter Deformation im **elastischen Bereich**.

Exp: Blei- und Stahlfeder

Plastische Deformation und Versetzungen



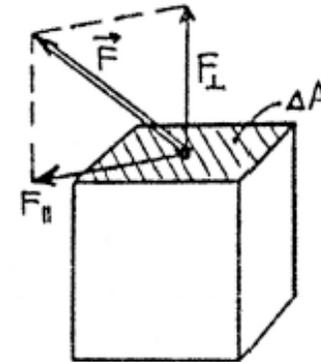
Teppich schieben



Raupe

Normalspannung und Schubspannung:

Wir denken uns aus einem festen Körper ein würfelförmiges Volumenelement herausgeschnitten. Auf die Grenzflächen dieses Elementes üben die benachbarten Atome oder Moleküle des Körpers Kräfte aus. Es handelt sich um so genannte **Flächenkräfte**, im Gegensatz zu **Volumenkräften**, wie z.B. der Schwerkraft. Die Flächenkraft auf ein Oberflächenelement ΔA wird im Allgemeinen eine zur Fläche normal stehende Komponente F_{\perp} und eine in der Fläche liegende Komponente F_{\parallel} aufweisen. Wir bezeichnen die Quotienten



$F_{\perp}/\Delta A = \sigma$	und	$F_{\parallel}/\Delta A = \tau$	als
Normalspannung	bzw.	Schubspannung.	
($\sigma > 0$ für Zug, $\sigma < 0$ für Druck)		(Tangentialspannung)	

Dimension: Kraft/Fläche

Einheit: N/m^2 ; $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$ (Pascal)

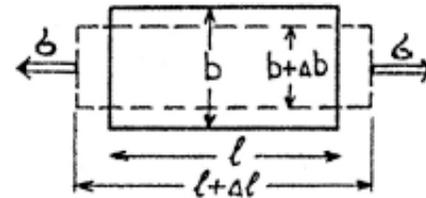
Für nicht zu grosse Kräfte gilt das **Gesetz von Hooke**: Die Verzerrungen sind proportional den Spannungen.

Normalspannungen und Elastizitätsmodul E :

Unter dem Einfluss einer Zugspannung σ wird sich ein Körper der ursprünglichen Länge l um Δl verlängern. Das Verhältnis $\Delta l/l$ heisst die **Dehnung**. Das Hooke'sche Gesetz sagt, dass

$$(80) \quad \Delta l/l = \sigma/E \quad \text{ist.}$$

Die Dehnung ist proportional zur Spannung.



E ist eine **Materialkonstante** der **Elastizitätsmodul** (Einheit: Pa). Mit der Längenänderung Δl geht eine Verminderung der Querdimension b auf $b + \Delta b$ einher ($\Delta b < 0$ bei Zug). Für die so genannte **Querkontraktion** $\Delta b/b$ gilt:

$$(81) \quad \Delta b/b = -\mu \cdot \Delta l/l, \quad \mu = \text{Poisson'sche Zahl.}$$

Durch die Materialkonstanten E und μ ist das elastische Verhalten isotroper Körper im Proportionalitätsbereich eindeutig festgelegt.

Exp: E von Stahl
 Querkontraktion
 Dehnungsmessstreifen

Volumenelastizität und Kompressionsmodul K :

Wirkt auf eine Körperoberfläche allseitig der Druck $p = -\sigma$, so stellt sich eine relative Volumenänderung $\Delta V/V$ ein, welche dem Druck p proportional ist. Das Gesetz von Hooke nimmt die Form

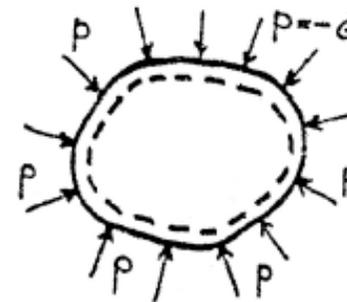
$$(82) \quad \Delta V/V = \sigma/K \quad \text{oder} \quad -\Delta V/V = \chi \cdot p.$$

$$K = \text{Kompressionsmodul} \quad \chi = \text{Kompressibilität} (\chi = 1/K)$$

an.

E , μ und K sind nicht unabhängig, sondern durch die Beziehung

$$(83) \quad K = E/(3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu))$$

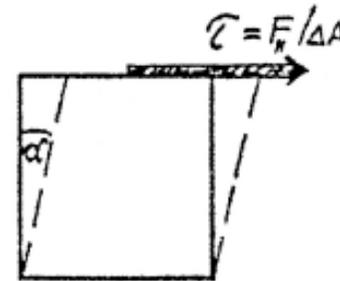


verknüpft. (Beweis in den Übungen). Ein völlig inkompressibler Körper besitzt die Kompressibilität $\chi = 0$, also ein unendlich grosses K . Nach (83) muss folglich die Poissonzahl im Intervall $0 < \mu < 0.5$ liegen.

Schubspannung und Schubmodul G :

Wird die Unterseite eines Würfels festgehalten, während die Oberseite einer reinen Schubspannung τ entsprechend nebenstehender Figur unterworfen ist, so deformieren sich zwei Seitenflächen zu Parallelogrammen. Wiederum gilt das Hooke'sche Gesetz, nach welchem der Winkel α proportional zur Schubspannung ist.

$$(84) \quad \alpha = \tau/G, \quad G = \text{Schubmodul.}$$



Auch der Schubmodul G kann durch E und μ ausgedrückt werden.

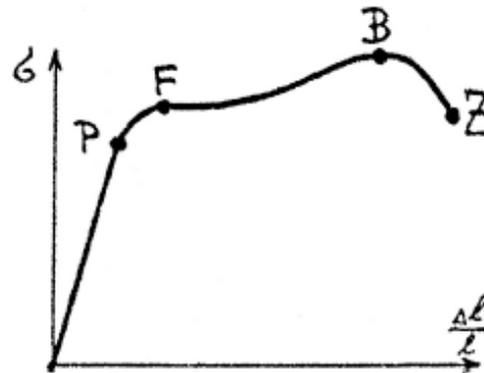
$$(85) \quad G = E/(2 \cdot (1 + \mu)).$$

Die Größen E und G lassen sich experimentell leicht bestimmen. Mit Hilfe der Beziehungen (83) und (85) können dann die elastischen Konstanten μ berechnet werden.

Exp: Würfel und Laser

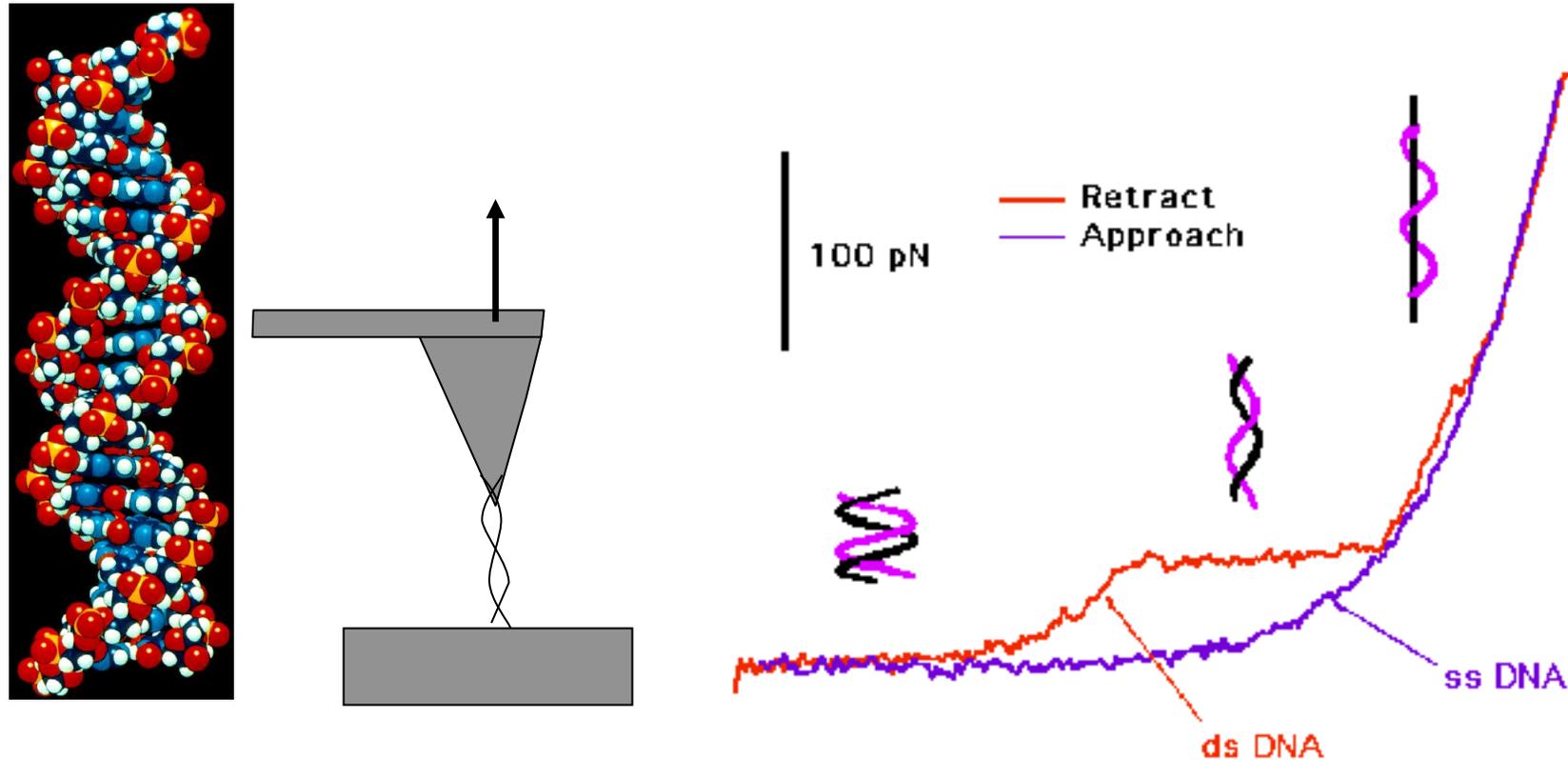
Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Festkörpers:

Die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung ist nur in einem kleinen Bereich linear (Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes bis zur Proportionalitätsgrenze P im Diagramm). Nach P wächst die Dehnung stärker. F ist die Streck- oder Fließgrenze, von der weg das Material wie eine zähe Flüssigkeit zu fließen beginnt (es treten irreversible Veränderungen der kristallinen Struktur auf). Wird die Maximalspannung im Punkt B (Zerreiss- oder Bruchspannung) überschritten, tritt eine starke Verminderung des Querschnittes auf, die schliesslich zum Bruch bei Z führt.



Exp: Stahl und Kupfer

Strecken von DNA



This graph shows a force measurement of a single tethered molecule of Lambda Digest DNA showing the B-S and the melting transition. During the extension of the molecule (red trace), the DNA first goes through the B-S transition (the plateau), and then melts to single-stranded DNA (ssDNA) at a higher force. During relaxation of the molecule (blue trace), the DNA doesn't reanneal so the curve is a simple freely-jointed-chain curve indicative of ssDNA. The traces were made at a pulling speed of $1\mu\text{m}/\text{second}$. Data courtesy of H. Clausen-Schaumann and R. Krautbauer, Gaub Lab, LMU-München.