

Kapitel 9

Schwingungen und Wellen

9.1 Der gedämpfte, freie Oszillator

Wir haben im Abschnitt 2.2 gesehen, dass ein Massenpunkt eine harmonische Schwingung ausführt, wenn er dem Kraftgesetz $F = -k \cdot x$ unterworfen ist. In Wirklichkeit sind Reibkräfte unvermeidlich. Sie entziehen dem Oszillator laufend mechanische Energie, so dass eine **gedämpfte Schwingung** entsteht, d.h. die Amplitude der Schwingung nimmt als Funktion der Zeit ständig ab.

Häufig ist die Reibkraft R der momentanen Geschwindigkeit \dot{x} proportional (und dieser entgegengesetzt gerichtet), wie etwa im Falle der Stoke'schen Reibung. Wir können also schreiben

$$R = -\alpha \cdot \dot{x}, \quad \text{Reibungskoeffizient } \alpha.$$

Die Newton'sche Bewegungsgleichung lautet dann

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x - \alpha \cdot \dot{x} \quad \text{oder} \quad m \cdot \ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0.$$

mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ des ungedämpften Oszillators und der **Dämpfungskonstanten** $\beta = \alpha/2m$ ergibt sich

$$(100) \quad \ddot{x} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0, \quad \text{die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators.}$$

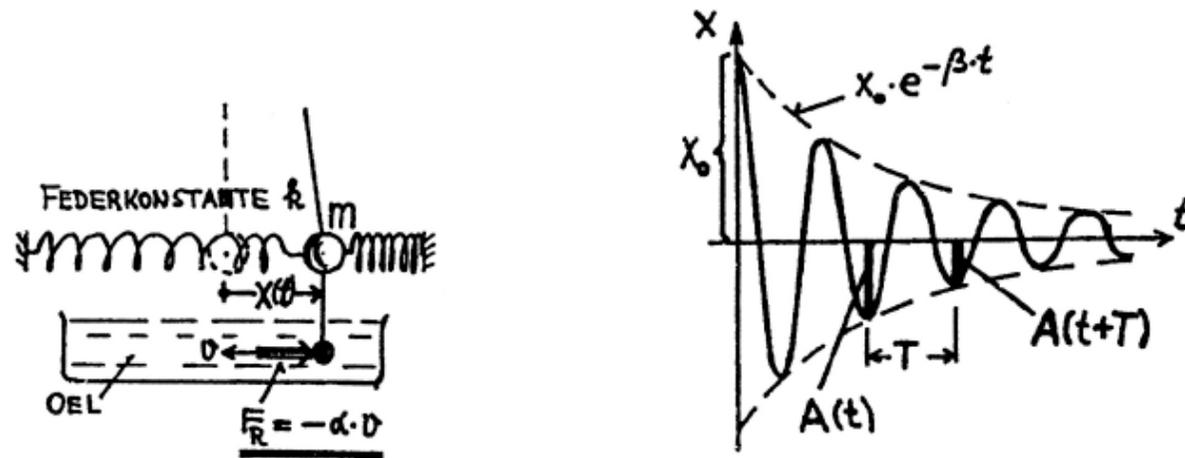
Exp: Federpendel mit Stokes Reibung

$$(100) \quad \ddot{x} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0, \quad \text{die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators.}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass $\beta < \omega_0$, die Dämpfung also nicht zu gross sei. Dann lautet die allgemeine Lösung dieser homogenen, linearen Differentialgleichung:

$$(101) \quad x(t) = x_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t) \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi).$$

Hier sind x_0 und φ Integrationskonstanten. Durch Einsetzen kann die Richtigkeit der Lösung verifiziert werden. (In den Übungen für Physiker werden die mathematischen Aspekte des Problems diskutiert). Beachte, dass die Amplitude $x_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t)$ der Schwingung exponentiell mit der Zeitkonstanten $1/\beta$, zerfällt und dass die Eigenfrequenz gegenüber der ungedämpften Schwingung nach unten verschoben ist. Wir überzeugen uns von der Richtigkeit von (101) durch Beobachtung eines Federpendels, welches mit Stoke'scher Reibung gedämpft ist.



Kennzeichnend für den exponentiellen Zerfall der Schwingung ist das konstante Verhältnis zweier aufeinander folgenden Amplituden:

$$A(t)/A(t + T) = \exp(\beta \cdot T). \quad \text{Der natürliche Logarithmus davon ist}$$

$$\Lambda = \beta \cdot T, \quad \text{das logarithmische Dekrement.}$$

Gedämpfte Schwingungen



Schwingende Lamelle



Stimmgabel auf Russplatte

Der Q-Wert:

Die im Oszillator zur Zeit t gespeicherte Energie ist proportional zu $A^2(t)$. Wir wollen nun annehmen, dass die Dämpfung klein ist, also

$$\beta \cdot T \ll 1 \quad \text{und damit auch} \quad 2 \cdot \pi/T \simeq \omega_0.$$

Jetzt bilden wir das Verhältnis von gespeicherter Energie zum Energieverlust pro Periode T :

$$A^2(t)/(A^2(t) - A^2(t + T)) = 1/(1 - \exp(-2 \cdot \beta \cdot T)).$$

Für $\beta T \ll 1$ ist die gerade $1/(2 \cdot \beta \cdot T)$.

Das 2π -fache davon, $Q = 2\pi/(2 \cdot \beta \cdot T)$ oder

$$(102) \quad Q = \omega_0/2\beta \quad \text{heisst: Q-Wert des Oszillators.}$$

Der Gütefaktor Q ist umso grösser, je kleiner die Dämpfung ist. Beim ungedämpften Oszillator ist der Q-Wert unendlich gross.

Aperiodische Dämpfung:

Voraussetzung für die Lösung (101) ist die Bedingung $\beta < \omega_0$. Ist die Dämpfung grösser, so findet keine Schwingung mehr statt. Startet die Bewegung zur Zeit $t = 0$ mit der Amplitude x_0 , so strebt die Auslenkung monoton der Gleichgewichtslage zu. Im Fall $\beta = \omega_0$ liegt der **aperiodische Grenzfall** vor, wo die Dämpfung so gross ist, dass gerade kein Überschwingen der Gleichgewichtslage mehr möglich ist.

Exp: Galvanometer-Schwingung

9.2 Die erzwungene Schwingung

Wir wenden uns jetzt dem Fall zu, wo ein gedämpfter Oszillator durch eine periodische äussere **Störkraft** $F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ angeregt wird. Die Störfrequenz ω ist beliebig und fällt im Allgemeinen nicht mit der Eigenfrequenz des gestörten Oszillators zusammen. Die Bewegungsgleichung lautet dann:

$$(103) \quad \begin{array}{l} m \cdot \ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{oder mit } f_0 = F_0/m \\ \ddot{x} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = f_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad \text{Bewegungsgleichung für die} \\ \hspace{15em} \text{erzwungene Schwingung.} \end{array}$$

Wir fragen zuerst noch nicht nach der allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichung, welche zwei Integrationskonstanten enthalten muss. Wir nehmen vielmehr an, dass die periodische Störung schon sehr lange wirksam sei, so dass sich das System in einem stationären Schwingungszustand befindet. Die Frequenz dieses Zustandes muss mit der Störfrequenz übereinstimmen, seine Schwingungsphase wird aber gegenüber der Phase der Störung verschoben sein. Diese partikuläre Lösung wird von der Form sein:

$$(104) \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \quad \text{stationäre Lösung.}$$

Die Amplitude A und die Phase ϕ sind hier nicht Integrationskonstanten, sondern durch die Störfrequenz ω , die Dämpfungskonstante β und die Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ bestimmte Parameter. Man gewinnt A und ϕ durch Einsetzen von (104) in die linke Seite von (103). Anwendung des trigonometrischen Additionstheorems auf $\sin(\omega \cdot t + \phi)$ und $\cos(\omega \cdot t + \phi)$ führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} & ((\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos \phi - 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \sin \phi) \cdot \cos(\omega \cdot t) - \\ & ((\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \sin \phi + 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \cos \phi) \cdot \sin(\omega \cdot t) = (f_0/A) \cdot \cos(\omega \cdot t). \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \sin \phi + 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \cos \phi = 0 \quad \text{und} \\ \text{(ii)} \quad & (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos \phi + 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \sin \phi = f_0/A \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

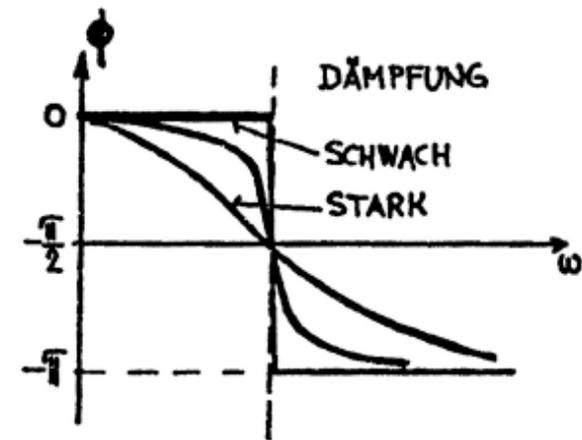
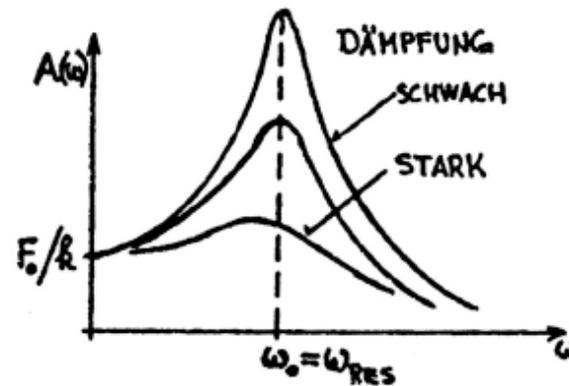
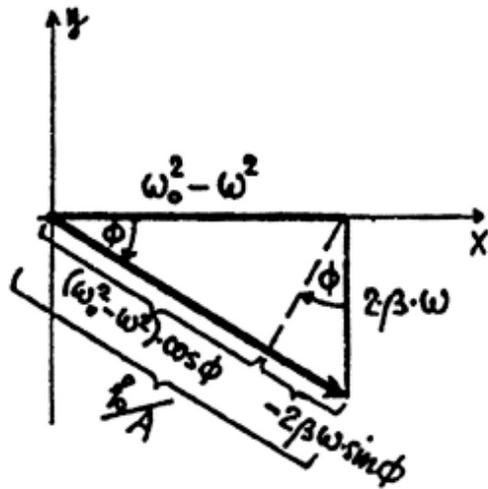
Aus (i) ergibt sich

$$(105) \quad \phi = -\arctg(2 \cdot \beta \cdot \omega / (\omega_0^2 - \omega^2)), \quad \text{Phasenverschiebung der Schwingung gegenüber der Störung.}$$

(i) und (ii) lassen sich durch untenstehendes Zeigerdiagramm darstellen (beachte, dass darin ϕ negativ ist), aus welchem für A folgt:

$$(106) \quad A(\omega) = f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \omega)^2}, \quad \text{Resonanzkurve.}$$

Für $\omega \rightarrow 0$ sind Störung und Schwingung in Phase ($\phi \rightarrow 0$); die Amplitude wird dann $A = f_0 / \omega_0^2$ oder $A = F_0 / k$, d.h. Störkraft und Federkraft stehen im Gleichgewicht (quasi-statisch).



Resonanz:

Als Resonanzfrequenz ω_{RES} bezeichnen wir jene Frequenz, für welche die **Phasendifferenz** der Schwingung gegenüber der Störung gerade $-\pi/2$ ist. Dies ist der Fall für $\omega = \omega_0$.

$$\begin{aligned}\omega_{RES} &= \omega_0, \\ \phi(\omega_{RES}) &= -\pi/2.\end{aligned}$$

Die Bedeutung der Phasendifferenz $\phi = -\pi/2$ liegt darin, dass $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ übergeht in $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$. Dann ist nämlich $v(t) = \omega_0 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ gerade mit der Störung $F_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ in Phase, d.h. die mittlere **Leistungsaufnahme** des Oszillators $\bar{P} = \overline{F_0 \cdot v}$ (siehe S.32) ist an der Resonanzstelle **maximal**.

Das Amplitudenmaximum liegt bei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, fällt also nur bei kleiner Dämpfung ($\beta \ll \omega_0$) approximativ mit der Leistungsresonanzstelle zusammen.

Bei Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ schwingt das System in Gegenphase zur Störung ($\phi \rightarrow -\pi$), es wird im Zeitmittel keine Leistung aufgenommen.

Für kleine Dämpfung lesen wir aus (106) bei Resonanz die Amplitude

$$\begin{aligned} A(\max) &= f_0 / (2 \cdot \beta \cdot \omega_0) \quad \text{ab, oder mit (102)} \\ A(\max) &= Q \cdot f_0 / \omega_0^2, \quad \text{Resonanzüberhöhung.} \end{aligned}$$

Diese Amplitude ist das Q -fache der Amplitude bei $\omega \rightarrow 0$. Der Gütefaktor Q bestimmt die maximal erzielbare Resonanzüberhöhung.

Mit zunehmender Dämpfung, bzw. abnehmender Güte Q , verbreitert sich die Resonanzkurve und $A(\max)$ nimmt ab.

Resonanz



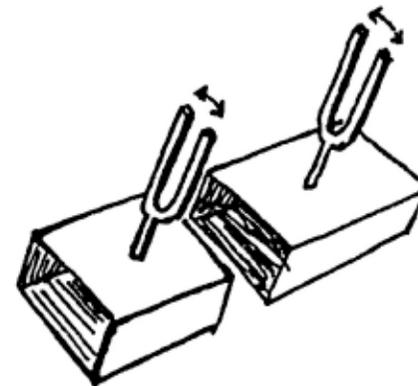
Resonanzmodell mit Pendelreihe
Drahtring

Resonanz mit Federpendel

Film: Tokama Brücke (1940)

Applet zur Resonanz:

<http://www.walter-fendt.de/ph14d/resonanz.htm>



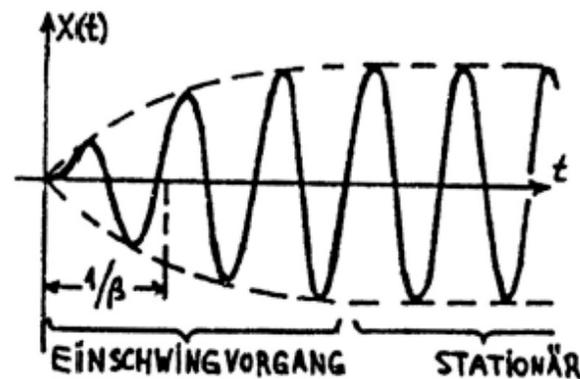
Resonanz mit Stimmgabel

Einschwingvorgang:

Die allgemeine Lösung von (103) erhält man durch Superposition von (101) und (104):

$$(107) \quad x(t) = x_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t) \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi) + A(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi(\omega)).$$

Der erste Summand trägt dem Einschwingvorgang Rechnung und enthält die Integrationskonstanten x_0 und φ , welche durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden; er nimmt exponentiell mit der Zeitkonstanten $1/\beta$ ab, so dass schliesslich für $t \gg 1/\beta$ der stationäre Schwingungszustand (die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (103) erreicht wird.



9.3 Überlagerung von Schwingungen

Häufig erfahren physikalische Grössen zeitliche Änderungen, welche durch Superposition harmonischer Schwingungen zustande kommen. In der Mechanik etwa im Fall gekoppelter Pendel (siehe Abschnitt 9.3.4). Wir betrachten im Folgenden Bewegungen der Form

$$x(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + a_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2).$$

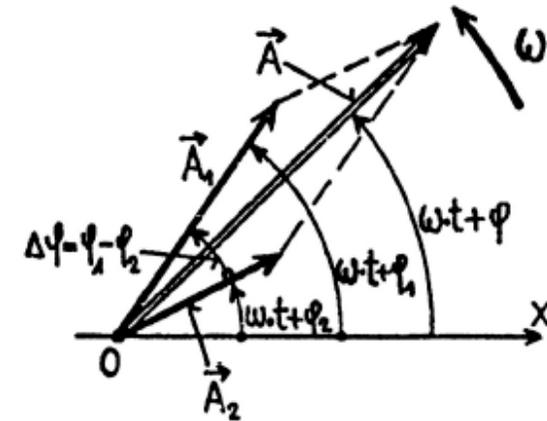
9.3.1 Das Zeigerdiagramm

Es erweist sich als äusserst nützlich, die harmonische Schwingung $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ als die x -Komponente eines Zeigers der Länge A aufzufassen, der im Koordinatenursprung angeheftet ist und mit der x -Achse den Phasenwinkel $\omega \cdot t + \varphi$ einschliesst, also mit der Kreisfrequenz ω rotiert. Die Summe mehrerer harmonischer Schwingungen ist dann gleich der x -Komponente der momentanen Vektorsumme der einzelnen Zeiger.

Eine andere Möglichkeit ist die Beschreibung von harmonischen Schwingungen mittels **komplexer Zahlen**, also durch Vektoren in der Gauss'schen Zahlenebene. Diese Darstellung ist äquivalent zum Zeigerdiagramm (s. Übungen).

9.3.2 Superposition von zwei Schwingungen gleicher Frequenz

Zwei Schwingungen $x_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1)$ und $x_2(t) = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2)$ werden durch die Zeiger \vec{A}_1 und \vec{A}_2 repräsentiert, die beide mit ω rotieren und die konstante Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ haben. Zur resultierenden Schwingung gehört der Zeiger $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ dessen Betrag A und Anfangsphase φ wir im Zeigerdiagramm ablesen. Es entsteht somit eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz ω , deren Amplitude A im Intervall $|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$ liegt. A wird maximal, wenn $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ist, minimal für $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ (Gegenphase). Zwei Schwingungen gleicher Amplitude und Frequenz heben sich auf, wenn sie in Gegenphase schwingen.



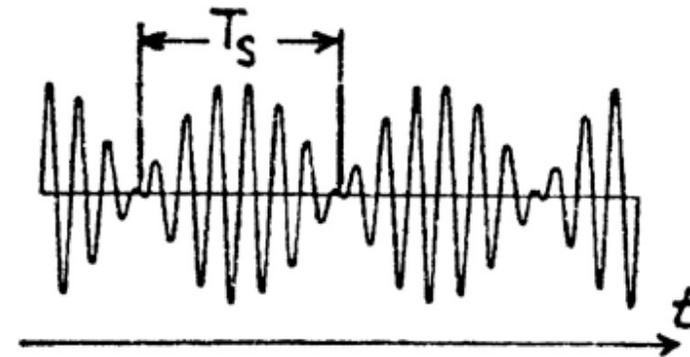
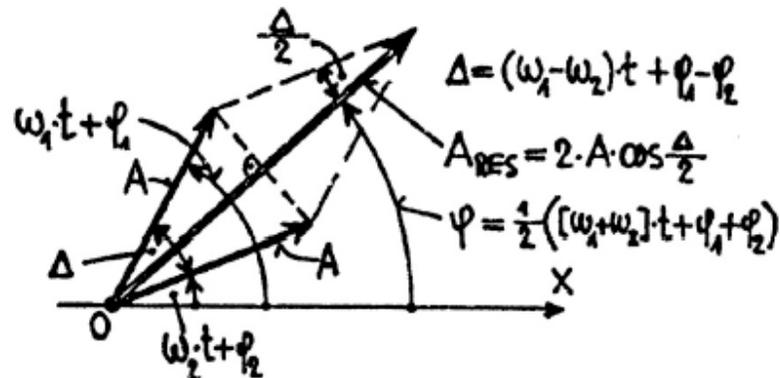
9.3.3 Superposition von zwei Schwingungen gleicher Amplitude und verschiedener Frequenz. Die Schwebung

Nun überlagern wir zwei Schwingungen $x_1(t) = A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)$ und $x_2(t) = A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$, welche gleiche Amplituden A , aber verschiedene Frequenzen und Anfangsphasen haben. Aus dem Zeigerdiagramm lesen wir für die Summe $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ab:

$$\begin{aligned} \varphi &= (\omega_1 + \omega_2) \cdot t/2 + (\varphi_1 + \varphi_2)/2, & \text{resultierende Phase} \\ A_{RES} &= 2 \cdot A \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t/2 + (\varphi_1 - \varphi_2)/2), & \text{resultierende Amplitude.} \end{aligned}$$

Die Bewegung $x(t)$ hat dann die Form

$$(108) \quad x(t) = 2 \cdot A \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2)t/2 + (\varphi_1 - \varphi_2)/2) \cdot \cos((\omega_1 + \omega_2)t/2 + (\varphi_1 + \varphi_2)/2).$$

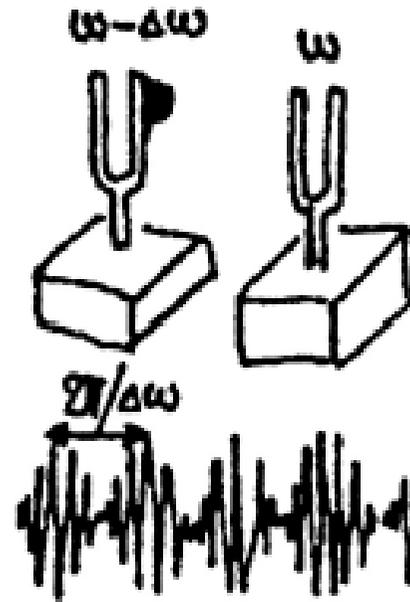


Im Allgemeinen ist diese Bewegung nicht mehr periodisch (ausser wenn ω_1 und ω_2 kommensurabel sind, d.h. ihr Verhältnis durch den Quotient ganzer Zahlen darstellbar ist). Ein interessanter Fall tritt auf, wenn $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ nahe bei ω_1 liegt, also $\Delta\omega \ll \omega_1$ ist. Dann können wir nämlich (108) als harmonische Schwingung der Kreisfrequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$ auffassen, deren Amplitude sich mit der halben Differenzfrequenz periodisch ändert. Es entsteht eine **Schwebung**. Die Frequenz $1/T_S$, mit welcher maximale Amplituden auftreten, ist gerade

$$(110) \quad (\omega_1 - \omega_2)/(2 \cdot \pi), \quad \text{die Schwebungsfrequenz.}$$

Schwebung

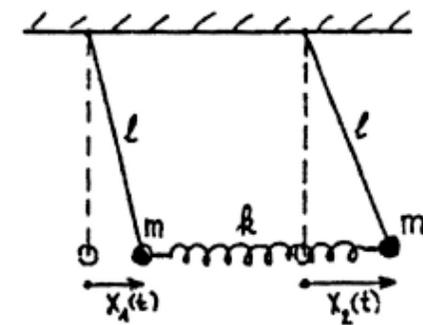
Schwebung mit Orgelpfeifen



Schwebung mit Stimmgabeln

9.3.4 Gekoppelte Pendel

Zwei identische mathematische Pendel sind durch eine Feder gekoppelt („sympathische Pendel“). Die Länge der entspannten Feder ist gerade gleich dem Abstand der Aufhängepunkte der Pendel. Die Auslenkungen der beiden Massen seien $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$; es handelt sich um ein System mit zwei Freiheitsgraden. Die Feder ist durch die Federkonstante k charakterisiert, die Pendel durch $K = m \cdot g/l$. Die Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ lauten dann:



$$m \cdot \ddot{x}_1 = -K \cdot x_1 - k \cdot (x_1 - x_2)$$

$$m \cdot \ddot{x}_2 = -K \cdot x_2 + k \cdot (x_1 - x_2),$$

gekoppelte Differenzgleichungen.

Summe und Differenz der Gleichungen ergeben

Summe und Differenz der Gleichungen ergeben

$$(111) \quad \begin{aligned} m \cdot (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -K \cdot (x_1 + x_2) \\ m \cdot (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -K \cdot (x_1 - x_2) - 2 \cdot k \cdot (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Jetzt führen wir die so genannten **Normalkoordinaten** q_1 und q_2 ein:

$$(112) \quad q_1 = x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad q_2 = x_1 - x_2.$$

Die Gleichungen (111) gehen über in

$$(113) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -(K/m) \cdot q_1 \\ \ddot{q}_2 &= -((K + 2 \cdot k)/m) \cdot q_2. \end{aligned}$$

Durch Einführung der Normalkoordinaten q_1 und q_2 sind aus den gekoppelten Differentialgleichungen zwei ungekoppelte Schwingungsgleichungen entstanden. Deren Lösungen sind die so genannten **Normalschwingungen**:

$$(114) \quad \begin{array}{l} q_1(t) = q_{10} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \\ \text{mit } \omega_1 = \sqrt{K/m} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} q_2(t) = q_{20} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2), \\ \text{und } \omega_2 = \sqrt{(K + 2k)/m}. \end{array}$$

Aus (112) folgt dann für x_1 und x_2 :

$$x_1 = (q_1 + q_2)/2 \quad \text{und} \quad x_2 = (q_1 - q_2)/2, \quad \text{also}$$

$$(115) \quad \begin{array}{l} x_1(t) = (q_{10}/2) \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + (q_{20}/2) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \\ x_2(t) = (q_{10}/2) \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) - (q_{20}/2) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \end{array}$$

Für schwache Kopplung zwischen den Pendeln, $k \ll K$, haben die Normalschwingungen (114) nur wenig verschiedene Frequenz, so dass die Gleichungen (115) Schwebungen darstellen. Anschaulich heisst das, dass die Pendelamplituden in Gegenphase zunehmen und abnehmen, die Energie abwechselnd mehr im einen, dann wieder im andern Pendel steckt.

Bedeutung der Normalschwingungen:

Setzen wir in (115) $q_{20} = 0$, so werden x_1 und x_2 identisch, nämlich

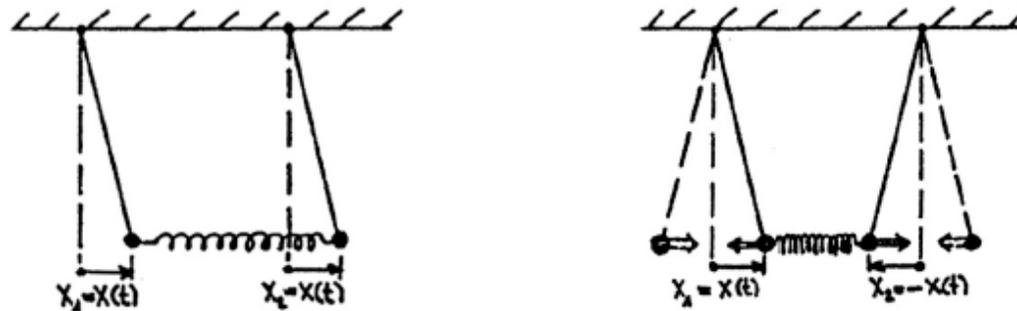
$$x_1 = x_2 = (q_{10}/2) \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1).$$

Setzen wir $q_{10} = 0$, schwingen die Pendel mit gleicher Amplitude in Gegenphase:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (q_{20}/2) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2), \\ x_2(t) &= -(q_{20}/2) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Diese beiden Normalschwingungen sind untenstehend dargestellt. Man kann sagen:

Jeder beliebige Schwingungszustand der gekoppelten Pendel kann als Superposition von Normalschwingungen dargestellt werden.



Exp: Gekoppeltes Pendel

9.3.5 Fourier-Analyse periodischer Vorgänge

Eine Bewegung $x(t)$ sei die Summe von harmonischen Schwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz ω sind:

$$(116) \quad x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)).$$

Dann ist $x(t)$ sicher periodisch, also $x(t) = x(t + T)$, mit der Periode

$$T = 2 \cdot \pi / \omega,$$

denn wenn wir in (116) t durch $t + T$ ersetzen, ändern sich alle Argumente der harmonischen Funktionen um $n \cdot 2 \cdot \pi$, d.h. ihre Werte bleiben unverändert. Nach **Fourier** gilt auch das Umgekehrte (hier

ohne Beweis):

Jeder periodische physikalische Vorgang $x(t) = x(t + T)$ kann als Summe (116) harmonischer Schwingungen dargestellt werden, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache von $\omega = 2 \cdot \pi/T$ sind.

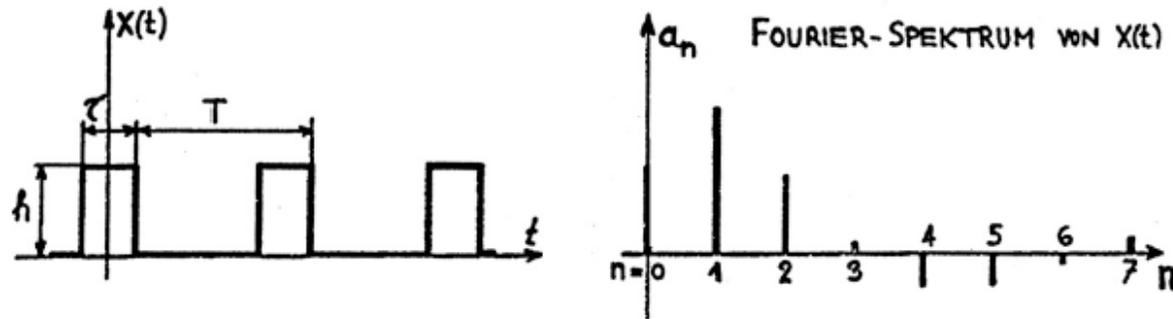
Die in (116) auftretenden Koeffizienten a_0 , a_n und b_n bilden das **Fourier-Spektrum** der periodischen Funktion $x(t)$. Aus der vorgegebenen Funktion $x(t) = x(t+T)$ werden sie folgendermassen gewonnen:

$$(117) \quad \begin{aligned} a_0 &= (1/T) \cdot \int_0^T x(t) \cdot dt \\ a_n &= (2/T) \cdot \int_0^T x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \\ b_n &= (2/T) \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \end{aligned}$$

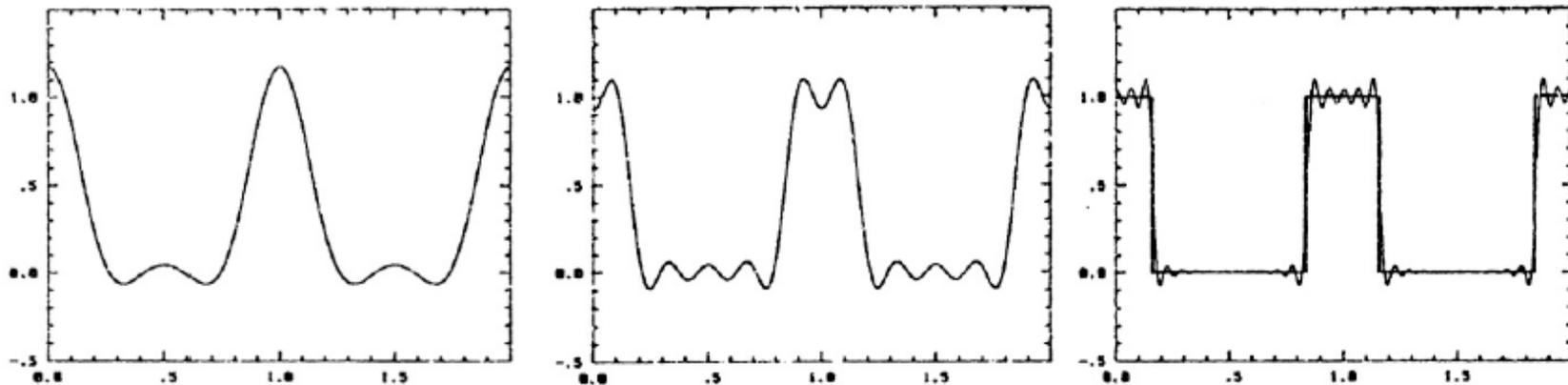
Der Koeffizient a_0 ist gerade der zeitliche Mittelwert von $x(t)$.

Als Beispiel betrachten wir die periodische Rechteckfunktion der Breite τ und der Höhe h . Weil es sich um eine gerade Funktion handelt, $x(t) = x(-t)$, verschwinden alle Fourierkoeffizienten b_n . Die Integrale (117) ergeben

$$a_0 = h \cdot \tau/T \quad \text{und} \quad a_n = 2 \cdot h/\pi \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot \tau/T)/n.$$



Die Grösse der Fourierkoeffizienten a_n nimmt mit zunehmendem n ab. Je mehr Glieder der Fourierreihe berücksichtigt werden, umso besser wird die Funktion $x(t)$ approximiert. Unten sind die Werte der Fourierreihe für $N = 3$, $N = 5$ und $N = 15$ berücksichtigte Glieder aufgetragen.

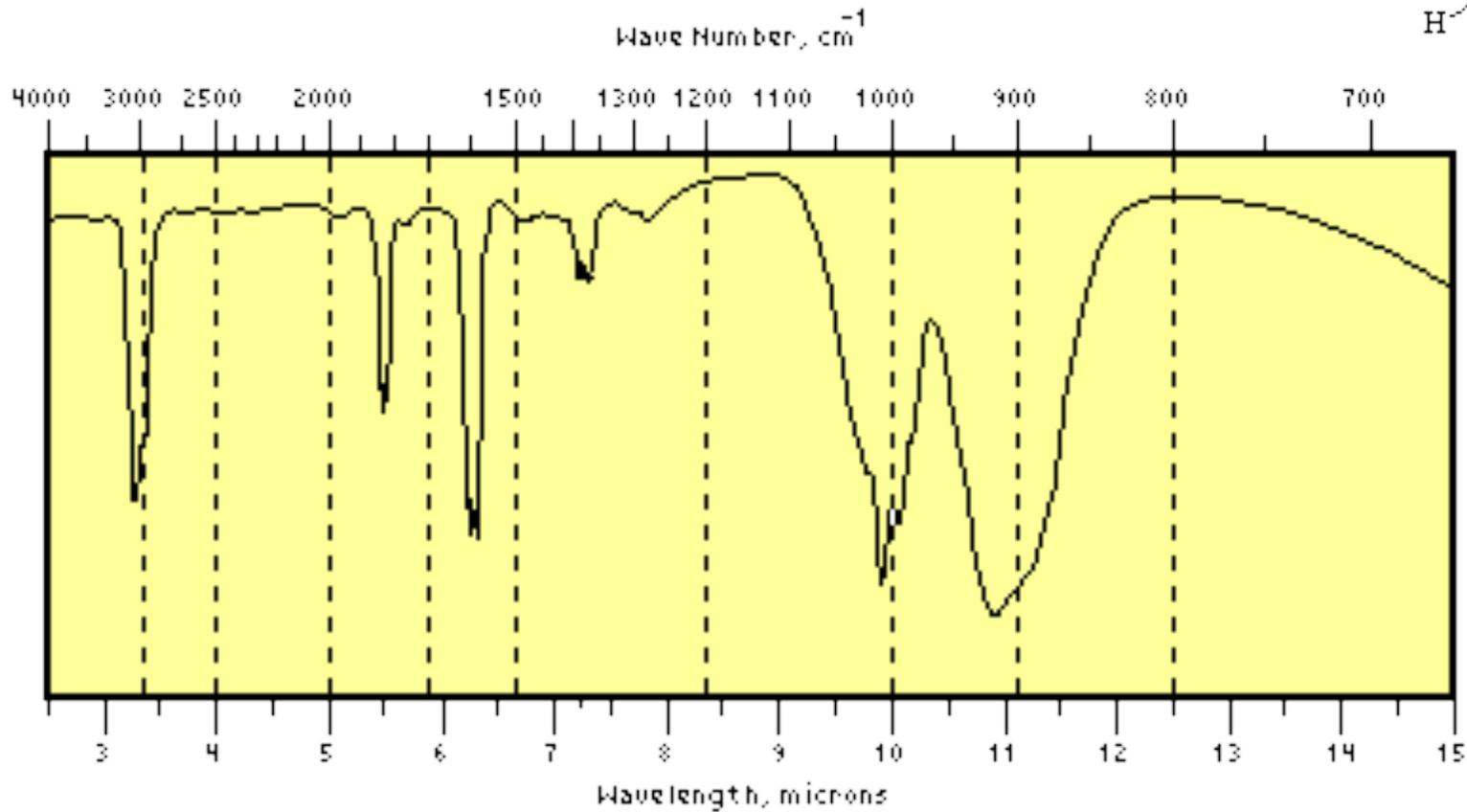
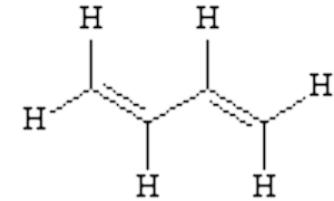


Exp: Fourier-Synthese

Fourier-Spektrum des Knalles und Resonanz Stimmgabel

Fourier-Analyse (Blockflöte...)

Infrarot-Absorptionsspektroskopie



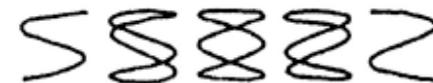
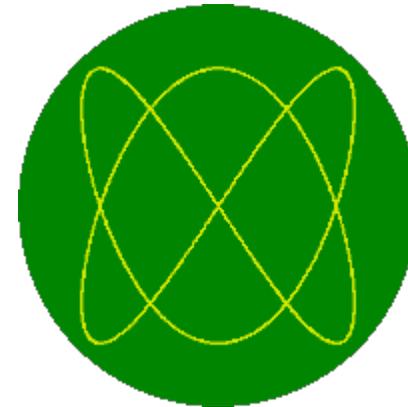
$$c = \lambda \cdot \nu \Rightarrow \nu = c / \lambda \quad 10 \mu\text{m} \Rightarrow 3 \cdot 10^{13} \text{Hz}$$

Lissajous-Figuren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \Phi_1) \\ A_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \Phi_2) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Gleiche oder Vielfache der Grundfrequenz
plus Phasenverschiebung



9.4 Wellen

Wellen treten in allen Gebieten der Physik auf. Wir beschäftigen uns an dieser Stelle mit mechanischen Wellen, inklusive Schallwellen. Allgemein entstehen Wellen dadurch, dass ein Teil eines elastischen Mediums durch eine Störung aus seiner Gleichgewichtslage gebracht wird. Wegen der elastischen Kopplung an die benachbarten Teile breitet sich die Störung räumlich aus. Mit diesem Vorgang ist ein **Energietransport** durch das Medium über grosse Distanzen verbunden, wobei sich die beteiligten Teilchen nur sehr wenig von ihrer Gleichgewichtslage entfernen, d.h. um dieselbe schwingen. Fällt die Auslenkung der Teilchen von ihrer Gleichgewichtslage mit der Ausbreitungsrichtung der Welle zusammen, spricht man von **Longitudinalwellen**, (z.B. Schallwellen in Luft), steht sie senkrecht dazu, von **Transversalwellen** (z.B. eine Seilwelle).

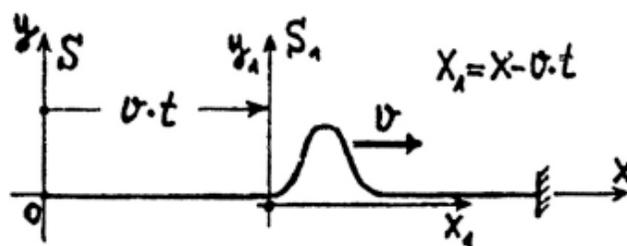
Exp: Spiralfeder

Gekoppelte Pendel

9.4.1 Die Seilwelle

Ein horizontales Seil ist rechtsseitig eingespannt und steht unter der Zugspannung σ . Jede links erzeugte vertikale Störung pflanzt sich mit einer Geschwindigkeit v nach rechts fort. Im mit v mitbewegten Koordinatensystem S_1 habe die Störung die Form $y = f(x_1)$. Im Laborsystem S beobachten wir wegen $x_1 = x - v \cdot t$ die von Ort und Zeit abhängige Störung

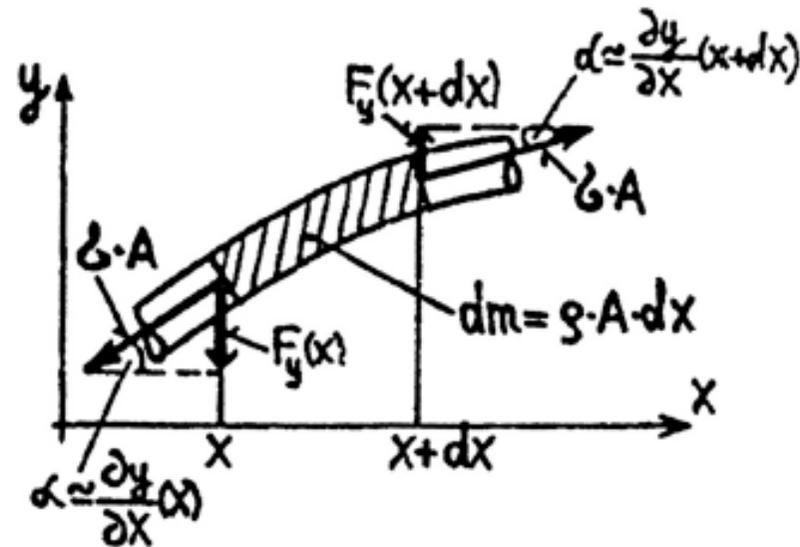
$$(118) \quad y(x, t) = f(x - v \cdot t). \quad \text{Die Störung läuft mit der Phasengeschwindigkeit } v \text{ nach rechts.}$$



Eine nach links laufende Störung würde durch $y(x, t) = f(x + v \cdot t)$ ausgedrückt.

Die Bewegungsgleichung:

Anhand nebenstehender Figur leiten wir die Newton'sche Bewegungsgleichung für ein Seil mit Querschnitt A und Dichte ρ her, wenn es unter der Zugspannung σ steht. Die Auslenkungen $y(x, t)$ sollen klein sein, ebenso die Steigungen $\partial y / \partial x$ (partielle Ableitung nach x , d.h. Differentiation nach x , mit $t = \text{const.}$). Auf das herausgegriffene Massenelement $dm = \rho \cdot A \cdot dx$ wirkt in y -Richtung die resultierende Kraft



$$F_y = F_y(x + dx) + F_y(x), \quad \text{also} \quad F_y = \sigma \cdot A \cdot (\partial y(x + dx) / \partial x - \partial y(x) / \partial x).$$

Mit Newton II ist $F_y = dm \cdot \partial^2 y / \partial t^2$, d.h.

$$\begin{aligned} \sigma \cdot A \cdot (\partial y(x + dx) / \partial x - \partial y(x) / \partial x) &= \varrho \cdot A \cdot dx \cdot \partial^2 y / \partial t^2 \quad \text{oder} \\ (\partial y(x + dx) / \partial x - \partial y(x) / \partial x) / dx &= (\varrho / \sigma) \cdot \partial^2 y / \partial t^2. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist gerade $\partial^2 y / \partial x^2$. Wir erhalten

$$(119) \quad \partial^2 y / \partial t^2 = (\sigma / \varrho) \cdot \partial^2 y / \partial x^2, \quad \text{Differentialgleichung der Seilwelle.}$$

Wir können uns leicht überzeugen, dass (118), $y(x, t) = f(x - v \cdot t)$, die Wellengleichung (119) erfüllt, wobei die Phasengeschwindigkeit v durch die Seilspannung σ und die Seildichte ϱ bestimmt wird.

$$(120) \quad v = \sqrt{\sigma / \varrho}, \quad \text{Phasengeschwindigkeit der Seilwelle.}$$

Allgemein können wir sagen:

In einem Medium können sich Wellen ausbreiten, wenn eine Differentialgleichung gültig ist von der Form

$$(121) \quad \partial^2 y / \partial t^2 = v^2 \cdot \partial^2 y / \partial x^2, \quad \text{Wellengleichung.}$$

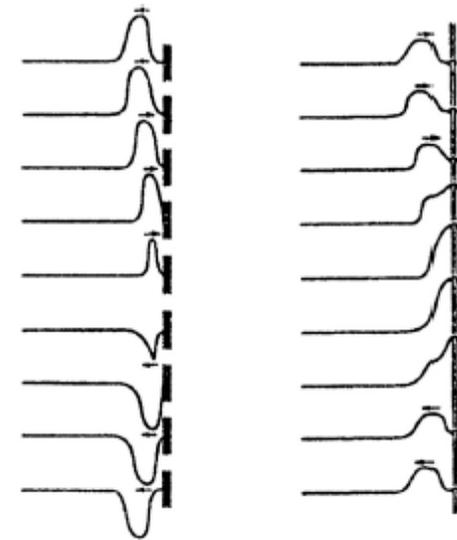
Exp: Seilwelle

Reflexion und Randbedingung:

Wenn das Seil rechtsseitig eingespannt ist, übt die Halterung beim Eintreffen des Störimpulses $f(x - v \cdot t)$ eine solche Kraft auf das Seil aus, dass dort ein gleich grosser, aber negativer Puls $-f(x + v \cdot t)$ erzeugt wird, der nach links läuft.

Die Randbedingung $y = 0$ am festen Ende führt zur Reflexion des Pulses mit negativem Vorzeichen (Phasensprung π).

Ist das rechte Ende frei, erfolgt die Reflexion ohne Phasensprung, d.h. $f(x - v \cdot t)$ wird als $f(x + v \cdot t)$ reflektiert.

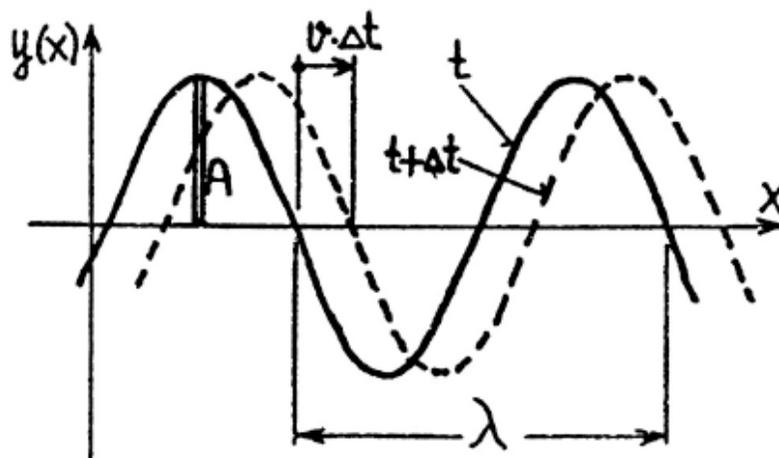


9.4.2 Harmonische Wellen

Eine harmonische Welle ist eine räumlich periodische Störung der Form

$$(122) \quad y(x, t) = A \cdot \cos\left(\left(2 \cdot \pi / \lambda\right) \cdot (x \mp v \cdot t)\right), \quad \text{harmonische Welle.}$$

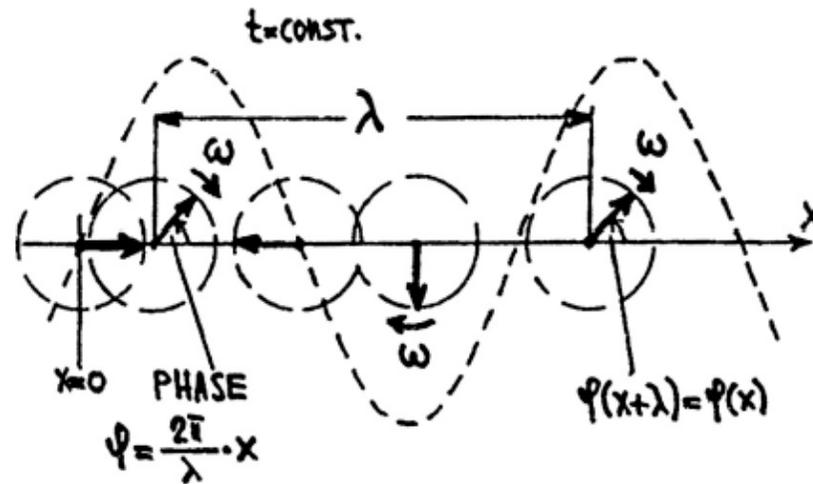
Aus (122) lesen wir ab, dass zu einer festen Zeit t (Momentanbild) Auslenkungen $y(x)$ von den Ruhelagen eine harmonische Funktion der räumlichen Periode oder Wellenlänge λ bilden.



Als Funktion der Zeit verschiebt sich das Momentanbild mit der Phasengeschwindigkeit v nach links oder nach rechts. Halten wir die Ortskoordinate x fest, so stellt (122) eine harmonische Schwingung der Kreisfrequenz $\omega = (2 \cdot \pi / \lambda) \cdot v$ dar. Mit $\omega = 2 \cdot \pi \cdot v$ folgt

$$(123) \quad v = v \cdot \lambda.$$

Wenn wir im Sinne von 9.3.1 die Schwingungen der Teilchen um ihre Ruhelage x durch einen Zeiger darstellen, welcher Amplitude und Phase der Schwingung an der betreffenden Stelle ausdrückt, so ergibt sich das folgende Momentanbild:



Die Zeiger geben die relative Phasenverschiebung wieder, welche durch Änderung des Ortes zustande kommen. Mit fortschreitender Zeit drehen sich alle Zeiger wie Uhrzeiger mit der Kreisfrequenz ω , behalten also ihre relativen Phasenunterschiede bei. Die Wellenlänge λ ist der kürzeste Abstand zwischen zwei Teilchen in gleicher Phasenlage. Es ist üblich, die **Wellenzahl** $k = 2 \cdot \pi / \lambda$ einzuführen und (122) in der Form zu schreiben

$$(124) \quad y(x, t) = A \cdot \cos(k \cdot x \mp \omega \cdot t).$$

Am Ort x ist zur Zeit t die Phase $\phi = k \cdot x - \omega \cdot t$. Betrachten wir zur Zeit $t + dt$ den benachbarten Ort $x + dx$, so hat sich die Phase um $d\phi = k \cdot dx - \omega \cdot dt$ geändert. Diese Änderung ist null für $dx = (\omega/k) \cdot dt$, d.h. die Orte konstanter Phase ϕ verschieben sich mit der „Phasengeschwindigkeit“

$$(125) \quad v = \omega/k, \quad \text{Phasengeschwindigkeit,}$$

was wiederum mit (123), $v = \nu \cdot \lambda$, übereinstimmt.

9.4.3 Stehende harmonische Wellen

Läuft eine harmonische Seilwelle $y(x, t) = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$ von links her auf das bei $x = 0$ eingespannte rechte Seilende zu, so wird die in Gegenphase reflektierte Welle $y_R(x, t) = -A \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t)$ der einfallenden Welle überlagert. Die resultierende Welle ist dann

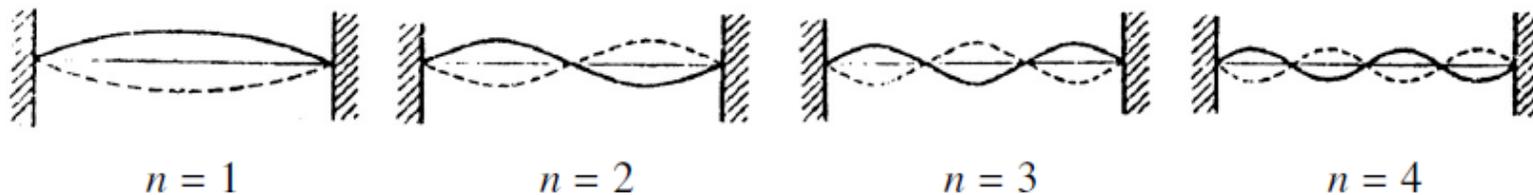
$$y(x, t) = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) - A \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t).$$

Mit dem Additionstheorem folgt

$$y(x, t) = A \cdot (\cos(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \sin(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t) - \cos(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \sin(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t)) \quad \text{oder}$$

$$(126) \quad y(x, t) = 2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad \text{stehende Welle.}$$

Die stehende Welle ist durch raumfeste Knoten im Abstand $\lambda/2$ gekennzeichnet. Zwischen den Knoten schwingen die Teilchen in Phase, mit maximaler Amplitude in der Mitte (Schwingungsbäuche). Es findet kein Energietransport entlang der x-Achse statt. Es handelt sich genau um den Schwingungsmodus einer **eingespannte Saite**. Ist die Saitenlänge L , so muss die Wellenlänge die Bedingung $L = n \cdot (\lambda/2)$ erfüllen, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ ist.

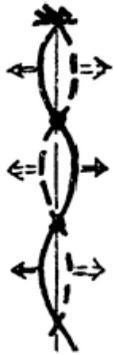


Die möglichen Frequenzen ergeben sich dann aus (120) und (123):

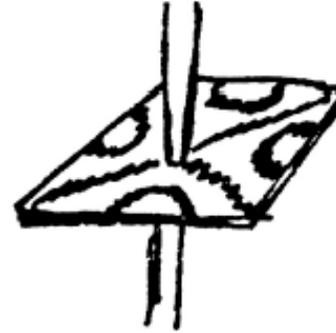
$$(127) \quad \nu = (n/(2 \cdot L)) \cdot \sqrt{\sigma/\rho}, \quad \text{Eigenfrequenz der Saite.}$$

Die kleinstmögliche Eigenfrequenz ist die **Grundfrequenz** ($n = 1$). Je nach Anregungsart sind an einer Saitenschwingung auch **Oberschwingungen** ($n = 2, 3, \dots$) beteiligt.

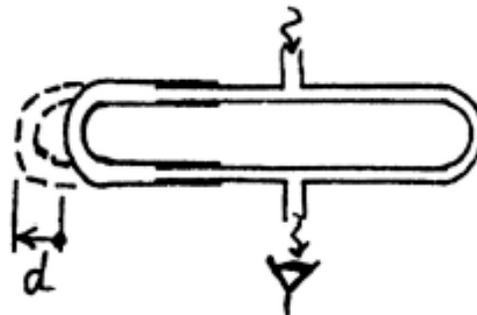
Stehende Wellen



Stehende Welle auf
gespanntem Gummiseil



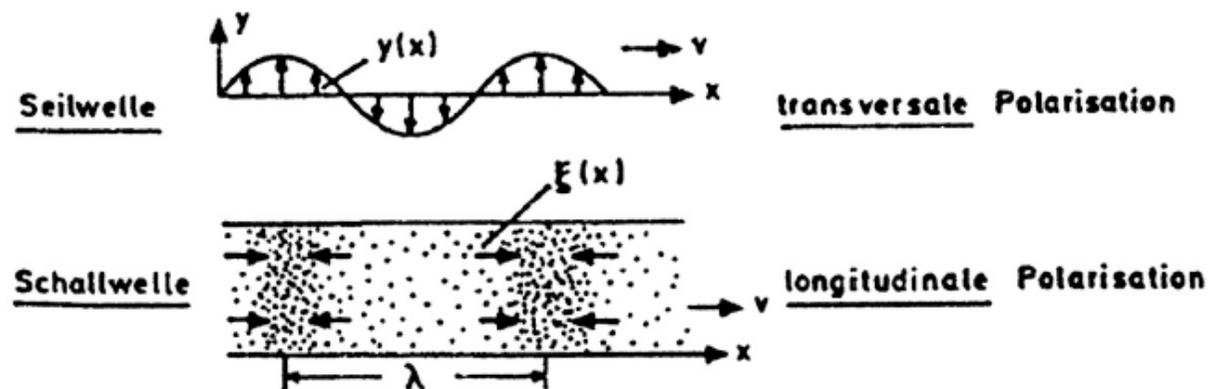
Resonanzfiguren nach
Chladni



Quincke-Resonanzrohr

9.4.4 Schallwellen

Bei der Schallwelle schwingen die Teilchen des Mediums in Ausbreitungsrichtung, es handelt sich um **Longitudinalwellen**. Sie können in allen elastischen Medien auftreten (z.B. in Wasser oder festen Körpern). Wir betrachten hier Schallwellen in Gasen. In einer Gassäule soll ein Gleichgewichtsdruck p_0 und die zugehörige Dichte ρ_0 herrschen, wenn sich alle Gasatome an ihrer Gleichgewichtslage befinden. Entfernen sich an einer Stelle x die Teilchen um $\xi(x, t)$ infolge einer äusseren Störung von ihrer Gleichgewichtslage, so werden sich Dichteschwankungen $\Delta\rho(x, t)$ und Druckschwankungen $\Delta p(x, t)$ ausbreiten. Periodische Druckschwankungen in der Luft nehmen wir als Töne wahr.



Wir fragen nun nach der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen in Gasen, d.h. wir versuchen die Wellengleichung in ähnlicher Weise herzuleiten, wie wir dies im Falle der Seilwellen getan haben.

Auf ein herausgegriffenes Gasvolumen vom Querschnitt A und der Länge dx wirkt von links der Druck $p_0 + \Delta p(x, t)$ und von rechts $p_0 + \Delta p(x + dx, t)$. Mit den Auslenkungen $\xi(x, t)$ aus der Gleichgewichtslage ist nach (82) die relative Volumenänderung

$$(i) \quad (\xi(x + dx, t) - \xi(x, t))/dx = -\chi \cdot \Delta p(x, t).$$

χ ist die Kompressibilität des Gases. Andererseits gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung

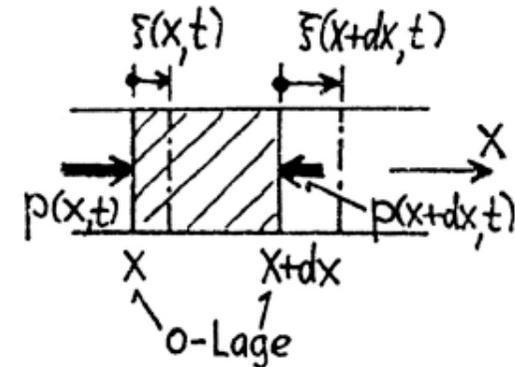
$$(ii) \quad A \cdot (\Delta p(x, t) - \Delta p(x + dx, t)) = \rho_0 \cdot A \cdot dx \cdot \partial^2 \xi(x, t) / \partial t^2, \quad \text{oder} \\ \partial / \partial x \cdot (\Delta p(x, t)) = -\rho_0 \cdot \partial^2 \cdot \xi(x, t) / \partial t^2.$$

Mit $\Delta p(x, t)$ aus (i) folgt

$$(128) \quad \partial^2 \xi / \partial t^2 = (1/\chi \cdot \rho_0) \cdot \partial^2 \xi / \partial x^2, \quad \text{Wellengleichung der Schallwelle.}$$

Der Klammerausdruck rechts ist gerade das Quadrat Schallgeschwindigkeit v .

$$(129) \quad v_s = \sqrt{1/(\chi \cdot \rho_0)}, \quad \text{Schallgeschwindigkeit im Gas.}$$



Kompressibilität:

Wir haben im Abschnitt 8.2 (siehe S.82) gezeigt, dass die Kompressibilität des idealen Gases bei konstant gehaltener Temperatur $\chi = 1/p$ ist. Die Druckänderungen bei Schallwellen erfolgen jedoch so schnell, dass die lokale Kompressionswärme nicht abgeführt werden kann. Wir werden in der Wärmelehre zeigen, dass unter diesen Umständen die Kompressibilität den Wert annimmt

$$\chi = 1/((C_p/C_V) \cdot p_0), \quad \text{Adiabatische Kompressibilität.}$$

C_p/C_V ist das Verhältnis der molaren spezifischen Wärmen bei konstantem Druck, bzw. konstantem Volumen. Für Luft ist dieser Quotient 1.40. Ferner wird sich zeigen, dass zwischen der Dichte ρ_0 und dem Druck p_0 die Beziehung gilt

$$p_0/\rho_0 = R \cdot T/M, \quad \text{R = molare Gaskonstante, T = absolute Temperatur und M = relative Molekülmasse.}$$

Setzen wir diese Beziehung in (129) ein so erhalten wir

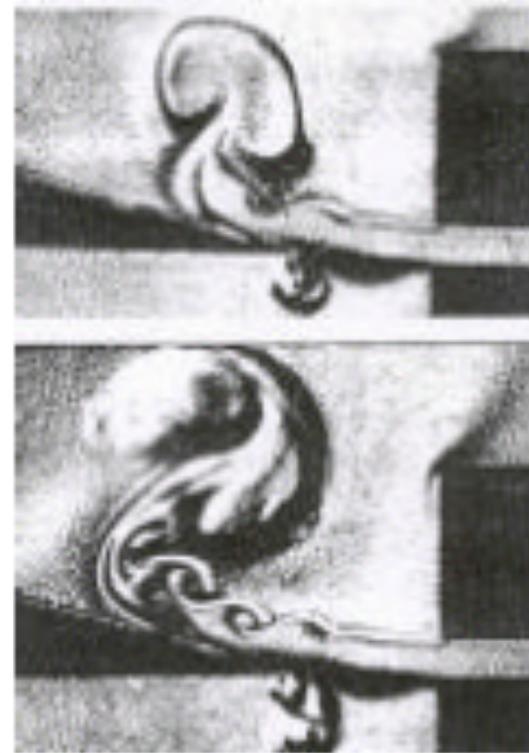
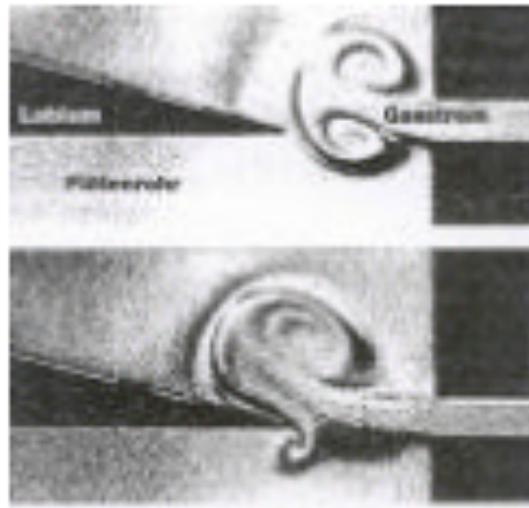
$$(130) \quad v_S = \sqrt{(C_p/C_V) \cdot R \cdot T/M}, \quad \text{Schallgeschwindigkeit.}$$

Beachte, dass die Schallgeschwindigkeit im Gas nur von der Temperatur und nicht vom Druck abhängt, weil Druck und Dichte einander proportional sind.

Exp: Orgelpfeife mit Luft, CO₂ und He
Stehende Welle im Hörsaal

Blockflöte und Anregung der stehenden Welle

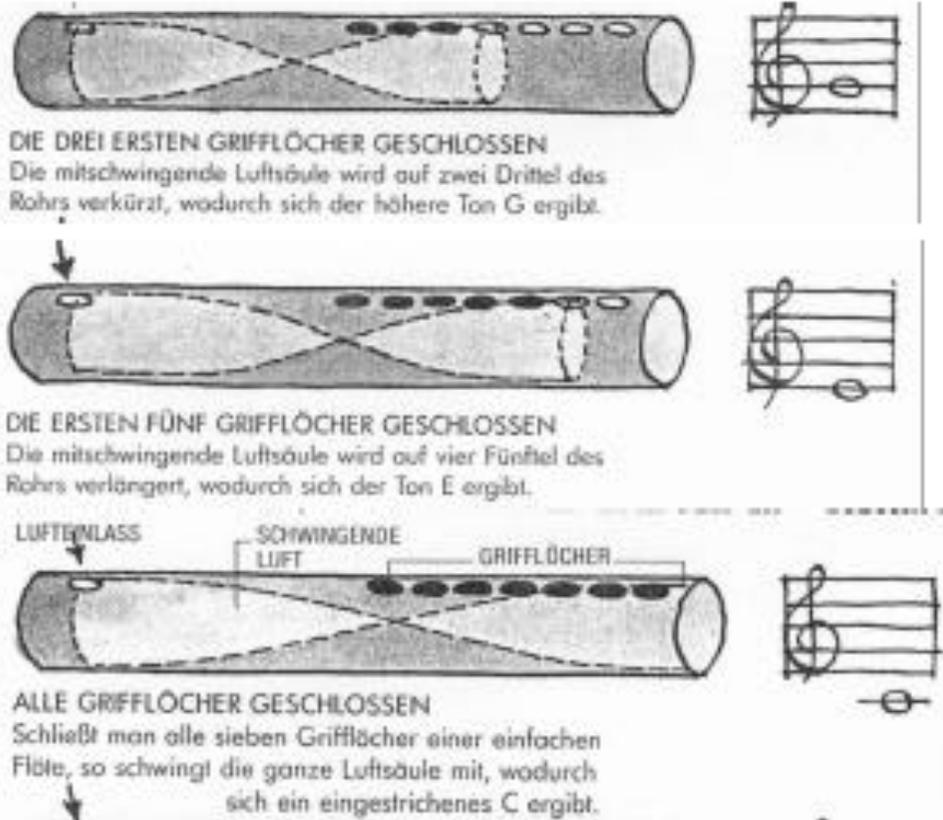
Periodische Strömung in einer Flöte



Quelle: Science Times, 1298

Stehende Welle in Flöten

Stehende Wellen in Musikinstrumenten



Quelle: Macaulay, Ardley: Macaulay's Mammut Buch der Technik, Nürnberg 1989.

Ton, Klang und Geräusch:

Man unterscheidet im Sprachgebrauch zwischen verschiedenen Arten von Schall:

Ein **Ton** ist eine reine harmonische Störung einer bestimmten Frequenz.

Ein **Klang** ist eine periodische Störung, die durch Superposition verschiedener Töne zustande kommt.

Ein **Geräusch** ist eine Störung, die vollkommen unperiodisch ist, d.h. die darin enthaltenen Frequenzen und Amplituden ändern statistisch.

Exp: Ton und Klang

Schalldruck-Pegel:

Unter Schallintensität I versteht man den Energiefluss (W/m^2) einer Schallwelle, welcher dem Quadrat der Amplitude der Druckschwankungen proportional ist. Bei einer Schallfrequenz von 1'000 Hz liegt die menschliche Hörschwelle bei $I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$, was einem Effektivwert der Druckschwankungen von $\Delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ entspricht. Die Schmerzgrenze liegt bei $10 \text{ W}/\text{m}^2$. Als **Schalldruck-Pegel** L , gemessen in dB (dezibel), bezeichnet man

$$(131) \quad \begin{array}{l} L = 10 \cdot \log_{10}(I/I_0) \quad \text{oder} \\ L = 20 \cdot \log_{10}(\Delta p/\Delta p_0) \text{ dB,} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Schalldruck-Pegel.} \\ \text{(mit } \Delta p_0 = 20\mu \text{ Pa).} \end{array}$$

Bei einer Frequenz von 1'000 Hz liegt also die Hörschwelle bei 0 dB und die Schmerzgrenze bei etwa 130 dB.

Exp: dB-Meter

Kenngrößen des Schalls

$$L = 10_{10} \log \frac{I}{I_0} \quad \text{mit } I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

I_0 : Bezugsintensität (=Hörschwelle bei 1000Hz)

oder, da I proportional zu p^2 ist.

$$L = 20_{10} \log \frac{p}{p_0} \quad \text{mit } p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

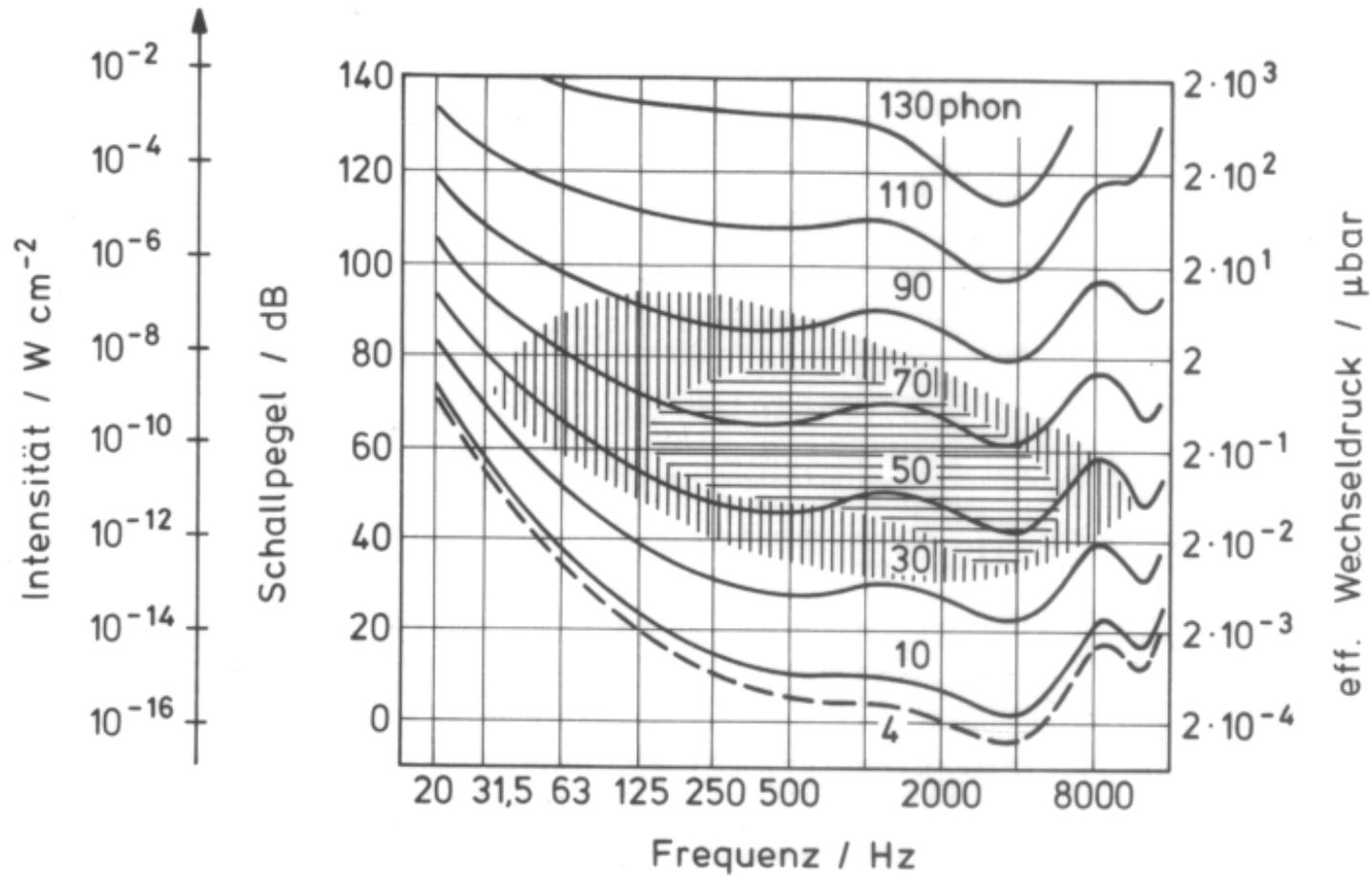
Die Hörschwelle bei $\nu=1000\text{Hz}$ von $I_0=10^{-12} \text{ W/m}^2$ ist nahe bei der

Rauschgrenze der Wärmebewegung der Luftmoleküle, die etwa

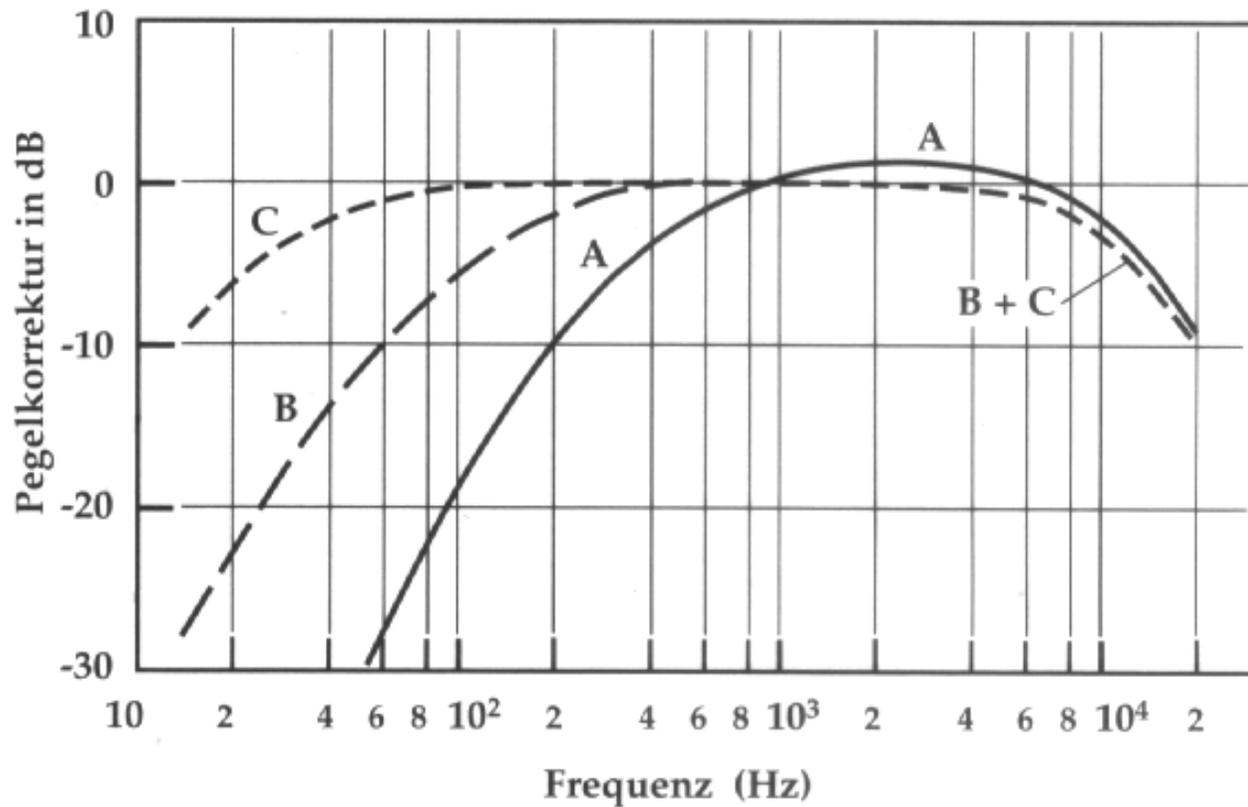
$5 \cdot 10^{-13} \text{ W/m}^2$ beträgt. Das bedeutet, dass die Hörschwelle aus prinzipiellen Gründen

nicht wesentlich besser sein kann.

Phonkurven



Pegelkorrekturen dB(A), dB(B) und dB(C)



Lautstärken

Die logarithmischen Skalen der Schallpegel tragen auch dem logarithmischen Empfinden des menschlichen Ohrs Rechnung.

Nach dem **Weber-Fechnerschen Gesetz** ist subjektiv empfundene **Lautstärke proportional zum Logarithmus der Schallintensität, $L \propto \log I$**

Auch für die Tonfrequenz (Tonhöhe) hat das Ohr eine logarithmische Empfindung.

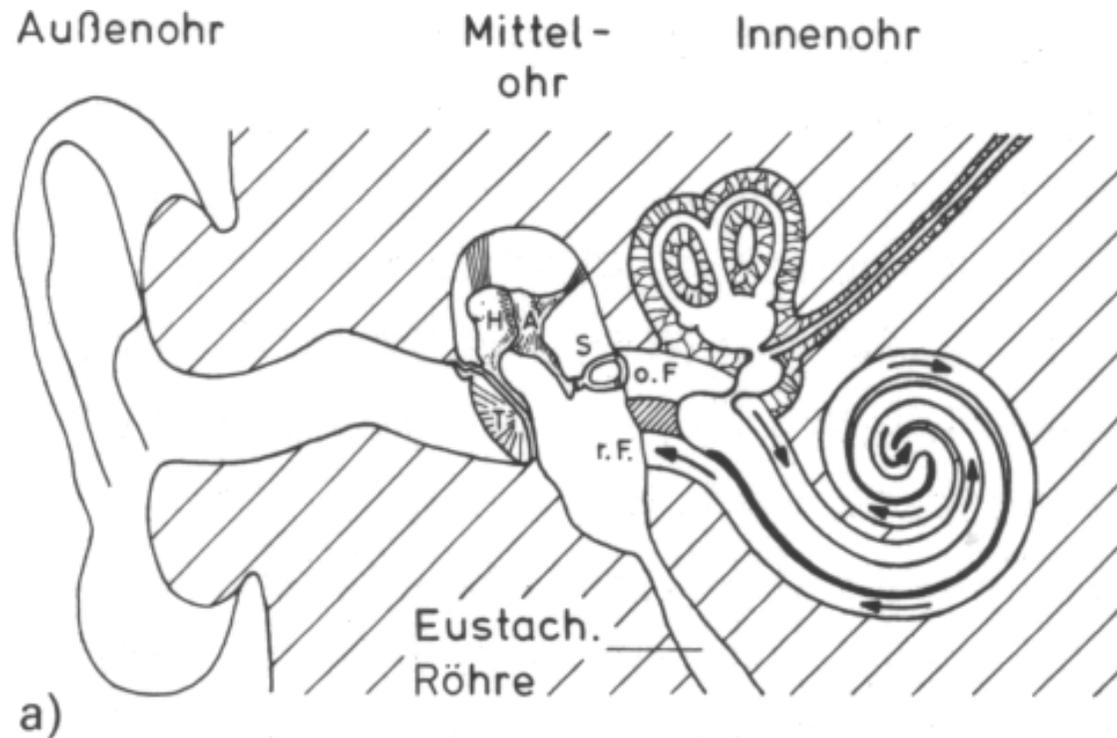
Lautstärken einiger Geräusche in dB(A)

Geräusch	dB(A)	Geräusch	dB(A)
Pressluft-Sirene (7m)	131	Büro mit Buchungsmaschinen	75
Kesselschmiede	125	Mittlerer Strassenverkehr	70
Presslufthammer (1m)	120	Unterhaltungssprache (1m)	65
Sandstrahlgebläse (1m)	115	Schwacher Strassenverkehr	50
Düsen-Flugzeug (200m)	115	Niedrigster Geräuschpegel	
Hupe (1m)	110	in Wohnvierteln bei Nacht	40
Weberei	100	Blätterrauschen	30
LKW (7m)	90	Rundfunksprecherstudio	20
Motorrad	85	Schalltoter Raum (gut isoliert)	10
PKW (7m)	80	Hörschwelle (jugendliches Ohr)	0

Hörschäden abhängig von Expositionsdauer

Schalldruckpegel	Beispiel	Dauer/Woche
85 dB		40 Stunden
88 dB		20 Stunden
91 dB		10 Stunden
94 dB		5 Stunden
96 dB		3 Stunden
98 dB		2 Stunden
101 dB	disco	1 Stunde
104 dB		30 Minuten
107 dB		15 Minuten
109 dB	Kettensäge	10 Minuten
112 dB		5 Minuten
114 dB		3 Minuten
116 dB		2 Minuten
119 dB		1 Minute
130 dB	Schmerzschwelle	6 Sekunden
140 dB	30 m vor einem Jet	weniger als 1 Sekunde

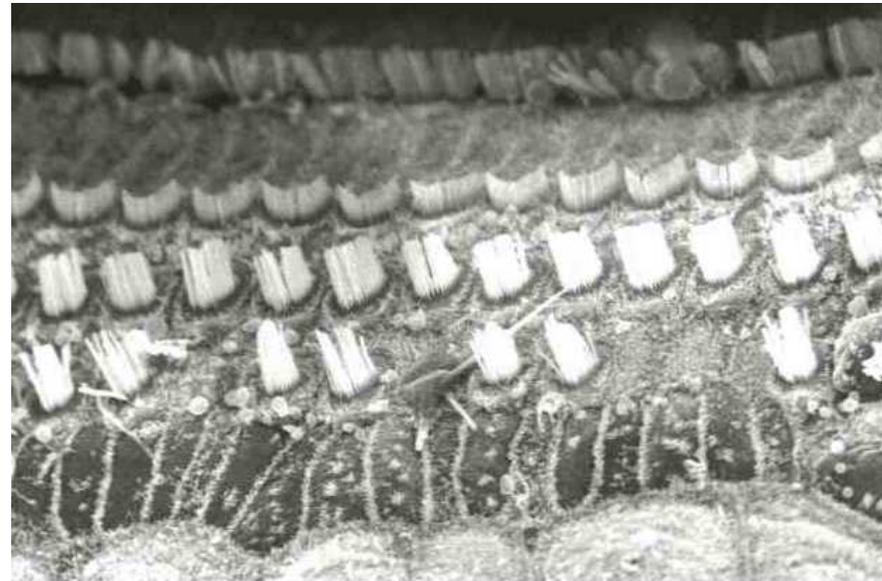
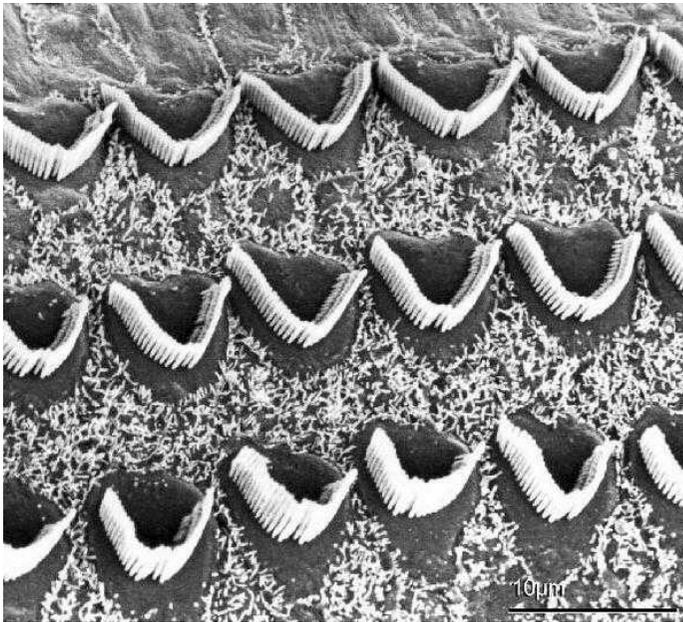
Das Ohr



T Trommelfell
H Hammer
A Amboß
S Steigbügel

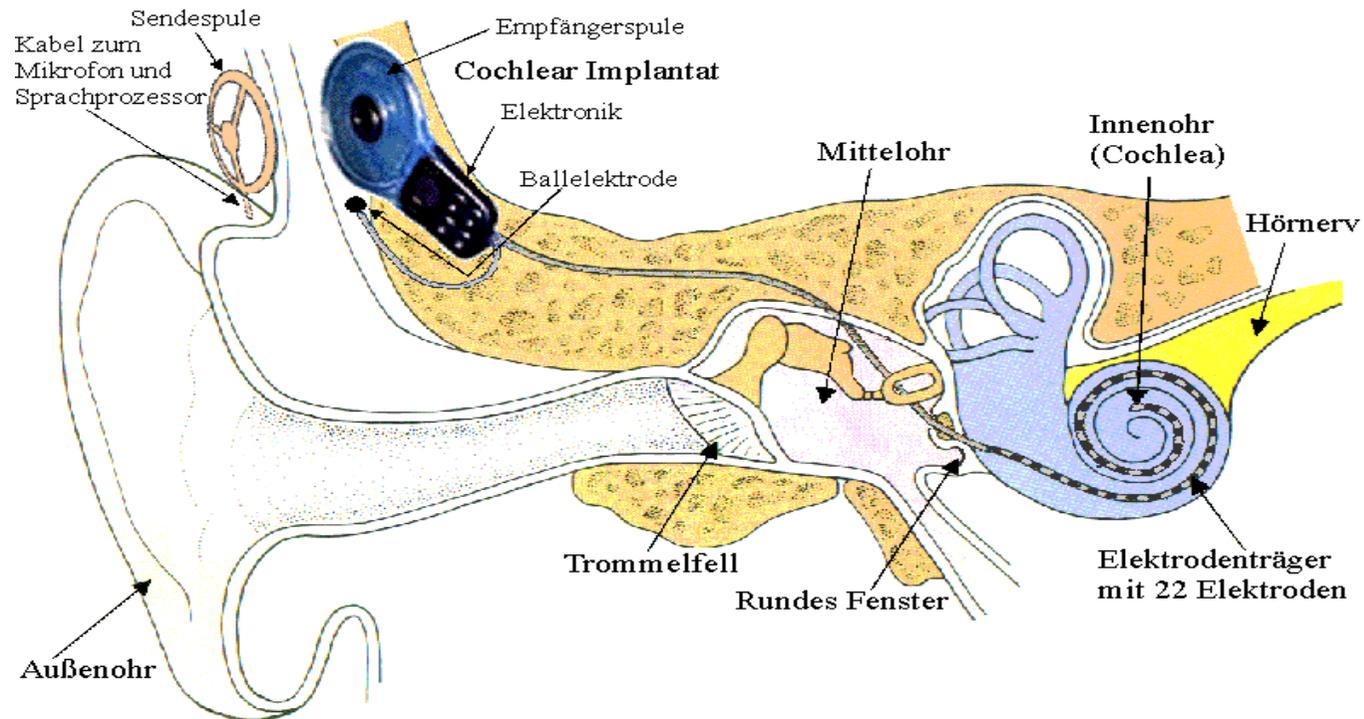
o. F. ovales Fenster
r. F. rundes Fenster

Das innere Ohr



Zerstörung von Oszillatoren
durch Schallexposition

Ohrimplantate



Elektronische Verarbeitung des Schalles und direkte Stimulierung der Nervenzellen im Innenohr

Dopplereffekt:

Unter dem Dopplereffekt in der Akustik versteht man die Tatsache, dass die von einem Beobachter festgestellte Schallfrequenz davon abhängt, mit welcher Geschwindigkeit sich Schallquelle und Beobachter relativ zum elastischen Medium bewegen. Eine relativ zur Luft ruhende Schallquelle Q sende Schallwellen der Frequenz ν_0 und somit der Wellenlänge $\lambda_0 = c/\nu_0$ in der x-Richtung aus. Wenn sich Q nun mit der Geschwindigkeit v_Q in x-Richtung bewegt, so verkleinert sich die Wellenlänge auf

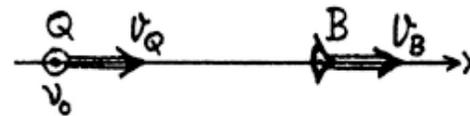
$$\lambda = (c - v_Q)/\nu_0,$$

wobei sich die Wellenzüge nach wie vor mit c ausbreiten. Ein auf der x-Achse ruhender Beobachter wird dann die Frequenz

$$\nu = c/\lambda \quad \text{oder} \quad \nu = \nu_0 \cdot c/(c - v_Q) \quad \text{messen.}$$

Bewegt sich auch der Beobachter mit v_B in x-Richtung so hört er die Frequenz

$$(132) \quad \nu = \nu_0 \cdot (c - v_B)/(c - v_Q).$$



Exp: Dopplereffekt