

Physik II

nach H. Rudin

Revidierte Version von L. Mohler und E. Meyer

2005

Inhaltsverzeichnis

III	Elektrizitätslehre	4
1	Elektrostatik	6
1.1	Eigenschaften der elektrischen Ladung	6
1.2	Coulomb'sches Gesetz (1785)	6
1.3	Elektrische Feldstärke \vec{E} und Potential U einer Punktladung	7
1.4	Superposition der Felder vieler Punktladungen	9
1.5	Das Durchflutungsgesetz von Gauss	9
1.6	Feld \vec{E} und Potential U der homogen geladenen Kugel	10
1.7	Divergenz eines Vektorfeldes \vec{E} ; $\text{div } \vec{E}$	11
1.8	Ladung auf leitenden Materialien; Influenz	14
1.9	Elektrischer Dipol	16
1.10	Elektrischer Kondensator und Kapazität C	17
1.10.1	Serie- und Parallelschaltung von Kondensatoren	18
1.10.2	Potentielle Energie des geladenen Kondensators	19
1.10.3	Energiedichte w des elektrischen Feldes	19
1.10.4	Anziehungskraft der ebenen Kondensatorplatten	20
1.11	Ladung Q im elektrischen Feld	21
1.12	Elektrischer Dipol \vec{p} im \vec{E} -Feld	23
1.12.1	Homogenes \vec{E} -Feld	23
1.12.2	Inhomogenes \vec{E} -Feld	23
1.13	Isolatoren (Dielektrika) im \vec{E} -Feld	24
1.13.1	Relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r	24
1.13.2	Elektrische Polarisierung \vec{P} und Suszeptibilität χ_e	25
1.13.3	Die Verschiebungsdichte \vec{D}	27
1.13.4	Zum Begriff der Rotation eines Vektorfeldes \vec{v} ; $\text{rot } \vec{v}$	28
1.13.5	Die Gesetze der Elektrostatik	29
2	Stationäre elektrische Ströme	31
2.1	Der elektrische Widerstand R	32
2.2	Strom-Spannungs-Charakteristik. Ohm'sches Gesetz	32
2.3	Quellen elektrischer Energie; Spannungs- und Stromquellen	34
2.4	Leitungsmechanismen	35
2.4.1	Metallische Leitung	35
2.4.2	Elektrolytische Leitung; Faraday'sche Gesetze	36
2.5	Die Kirchhoff'schen Gesetze	37
2.6	Das magnetische Feld \vec{B} stationärer Ströme (Magnetostatik)	39
2.6.1	Das magnetische Dipolfeld; magnetisches Dipolmoment \vec{m}	41
2.6.2	Definition der Stromstärke-Einheit	43
2.7	Bewegte Ladung im \vec{B} -Feld; technische Anwendungen	43

2.7.1	Ladung im homogenen \vec{B} -Feld	43
2.7.2	Ladung im inhomogenen Feld	45
2.7.3	Hall-Effekt (E. Hall, 1879)	45
3	Zeitlich veränderliche Ströme (Quasistationäre Ströme)	47
3.1	Ein- und Ausschalten im R-C-Kreis	47
3.2	Die Maxwell'sche Ergänzung	48
3.3	Induktion (Michael Faraday, 1831)	49
3.4	Relativitäts-Prinzip und Induktionsgesetz	50
3.5	Das Betatron	52
3.6	Selbstinduktion	53
3.7	Ein- und Ausschaltvorgang im R-L-Kreis; Energiedichte im B-Feld	53
3.8	Gekoppelte Stromkreise; Gegeninduktivität M	54
3.9	Materie im Magnetfeld; Magnetische Suszeptibilität χ_m	55
3.9.1	Mikroskopisches Modell; Magnetisierung \vec{M}	56
3.9.2	Stetigkeitsbedingungen für \vec{H} - und \vec{B} -Feldlinien an Grenzflächen	59
4	Wechselstrom	61
4.1	Einführung komplexer Grössen zum Rechnen	61
4.2	Wechselstrom-Leistung; Effektivwerte $U_{(eff)}$ und $I_{(eff)}$	63
4.2.1	Zur Messung von Wechselströmen	64
4.2.2	Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung	64
4.3	Der Transformator	65
4.4	Beispiele von Wechselstrom-Kreisen	66
4.4.1	Der RL-Kreis	66
4.4.2	Der RLC-Seriekreis; Resonanz	66
4.5	Drehstrom	68
4.6	Freie elektrische Schwingung; RLC-Seriekreis	69
5	Elektromagnetische Wellen	71
5.1	Die ebene, linear polarisierte elektromagnetische Welle	72
5.2	Energietransport und Poynting-Vektor \vec{S}	73
5.3	Elektrische Wellen entlang Drähten; Lechersystem	74
5.4	Der Hertz'sche Dipol	74
5.5	Das elektromagnetische Spektrum	76
IV	Optik	78
1	Reflexion und Brechung	80
1.1	Das Prinzip von Fermat (Pierre de Fermat, 1650)	82
1.2	Total-Reflexion	83
1.3	Polarisation durch Reflexion; Brewster'scher Winkel	83
2	Geometrische Optik	85
2.1	Abbildendes System	85
2.1.1	Die dünne Linse als abbildendes System	86

3	Wellenoptik	88
3.1	Linsenwirkung im Wellenbild	88
3.2	Beugung	89
3.2.1	Beugung am Strichgitter	89
3.2.2	Beugung an der Spaltblende	91
3.2.3	Beugungsbegrenzte Auflösung; Rayleigh-Kriterium	92
3.2.4	Abbe'sche Theorie der mikroskopischen Abbildung (Ernst Abbe, 1873)	93
3.3	Dispersion	95
3.4	Reflexion und Transmission an Grenzflächen	96
3.5	Interferenz; Farben dünner Schichten	97
3.6	Doppelbrechung	99
3.6.1	Herstellung von zirkular polarisiertem Licht	100
3.7	Optische Aktivität	101
V	Einblick in die moderne Physik	103
1	Quantisierung der Energie	105
1.1	Strahlungsgesetz und Planck'sche Konstante h	105
1.2	Photoeffekt (Lichtelektrischer Effekt)	105
1.3	Linienpektren	106
2	Wellenmechanik; Schrödingergleichung	107
2.1	Die Schrödingergleichung	107
2.2	Wellenfunktion des freien Teilchens	108
2.2.1	Wellenfunktion und Aufenthaltswahrscheinlichkeit	109
2.3	Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf	109
2.3.1	Die Unschärferelation	110
2.4	Energie-Eigenwerte des Wasserstoffatoms	111

Teil III
Elektrizitätslehre

Die Erfahrung lehrt uns, dass neben der Gravitationswechselwirkung eine zweite Wechselwirkung grosser Reichweite auftritt, welche auf der Existenz **elektrischer Ladungen** beruht. Wir müssen die Ladung als eine Gegebenheit der Natur ansehen, wie etwa die Zeit oder die Masse; sie besitzt eine über die Mechanik hinaus gehende physikalische Dimension, welche mit dem Symbol Q bezeichnet wird. Im **Internationalen Einheitsystem** wird aber nicht die elektrische Ladung, sondern die elektrische **Stromstärke** als zusätzliche **Basisgrösse** festgelegt. Die Einheit der Stromstärke, auf deren Definition wir später eingehen werden, ist das **Ampere** (A). Daraus ergibt sich die **Ladungseinheit**:

$$\boxed{1 \text{ Coulomb (C)} = 1 \text{ Ampere} \cdot \text{Sekunde (A} \cdot \text{s)}}$$

Die **Elektrostatik** behandelt die Kraftwirkung ruhender Ladungen. Die **Elektrodynamik** beschreibt die Wirkungen bewegter Ladungen.

Kapitel 1

Elektrostatik

1.1 Eigenschaften der elektrischen Ladung

Seit dem Altertum ist bekannt, dass Körper durch Reiben „elektrisch“ gemacht werden können. Gezielte Experimente mit elektrisch geladenen Körpern wurden vor allem im 18. Jahrhundert durchgeführt, sie sind verknüpft mit Namen wie etwa **C. A. Coulomb**, **H. Cavendish** und **B. Franklin**. Elektrische Ladungen haben folgende Eigenschaften:

1. Es gibt zwei Arten von Ladungen, die sich gegenseitig neutralisieren können. Wir nennen sie „**positiv**“ und „**negativ**“.
2. Ladung ist immer an Materie gebunden.
3. Gleichartig geladene Körper stoßen sich ab, verschiedenartig geladene Körper ziehen sich an.
4. Es gibt Stoffe, an denen die Ladungen örtlich haften, die **Isolatoren** (Glas, Bernstein, Kunststoff, etc.) und solche, wo sich die Ladungen spontan auf der Oberfläche verteilen, die **Metalle**.
5. Für die elektrische Ladung gilt ein Erhaltungssatz:
In einem abgeschlossenen System ist die algebraische Summe der Ladungen konstant.
6. Die Ladung ist **quantisiert**; alle beobachteten Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der **Elementarladung** $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
7. Für die Kraftwirkungen zwischen Ladungen gilt das **Superpositions-Prinzip**: Die Kraft, welche zwei Ladungen Q_1 und Q_2 auf eine dritte Ladung Q ausüben, ist gleich der vektoriellen Summe der Kräfte, welche Q_1 , bzw. Q_2 allein auf Q ausüben würden.

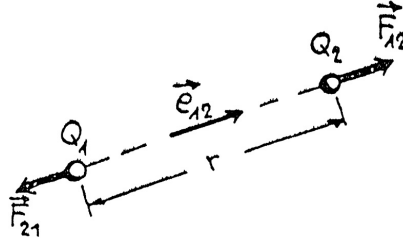
1.2 Coulomb'sches Gesetz (1785)

Charles A. Coulomb hat mit der von ihm erfundenen Drehwaage die Kraftwirkungen zwischen elektrisch geladenen Metallkugeln quantitativ untersucht und gefunden:

Die gegenseitige Kraftwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Körpern ist dem Produkt der beiden Ladungsmengen direkt und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional. Die Kraft hat die Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen.

Wie schon beim Gravitationsgesetz muss auch hier vorausgesetzt werden, dass die Ausdehnung der Körper verglichen mit ihrem Abstand klein ist. Wir führen deshalb den fiktiven Begriff der **Punktladung** ein und schreiben für die Kraftwirkung auf die Punktladung Q_2 , herrührend von der Punktladung Q_1 :

$$(1) \quad \vec{F}_{12} = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (Q_1 \cdot Q_2/r^2) \cdot \vec{e}_{12}, \quad \text{Coulomb-Gesetz im Vakuum.}$$



Die in (1) auftretende Konstante ϵ_0 heisst Influenzkonstante. Im SI-System hat sie den Wert

$$(2) \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}, \quad \text{Influenzkonstante.}$$

Das Coulomb-Gesetz und das Gravitationsgesetz haben dieselbe mathematische Struktur. Sie unterscheiden sich jedoch in der Stärke der Wechselwirkung (im mikroskopischen Bereich kann die Gravitation gegenüber der Coulombkraft vernachlässigt werden). Im Gegensatz zur Masse kann die Ladung aber auch negativ sein, so dass anziehende oder abstossende elektrische Kräfte auftreten, während Gravitation immer Anziehungskräfte erzeugt.

Übungsaufgabe:

Das Elektron besitzt eine Ruhemasse $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ und eine negative Elementarladung. Wie gross ist das Verhältnis von Coulombabstossung zu Gravitationsanziehung zwischen zwei Elektronen?

1.3 Elektrische Feldstärke \vec{E} und Potential U einer Punktladung

Im Ursprung eines Koordinatensystems soll sich die Punktladung Q befinden. Dann hat der Raum die Eigenschaft, dass eine zweite Punktladung, die **Probeladung** q , an der Stelle $\vec{r} = (x, y, z)$ die Kraft

$$(3) \quad \vec{F} = \vec{e}_r \cdot Q \cdot q / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2)$$

beträgt. Die von q unabhängige Grösse \vec{F}/q nennt man die elektrische Feldstärke \vec{E} .

$$(4) \quad \vec{E}(\vec{r}) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (Q/r^2) \cdot \vec{e}_r, \quad \text{elektrische Feldstärke } \vec{E} \text{ der Punktladung } Q.$$

Dimension: (Kraft/Ladung)

Einheit: N/C

In jedem Raumpunkt gilt dann

$$(5) \quad \vec{F} = q \cdot \vec{E}, \quad \text{Kraft auf Probeladung } q.$$

In Analogie zur Gravitationsfeldstärke ist das Linienintegral der Feldstärke \vec{E} entlang eines geschlossenen Weges immer gleich null (siehe Physik I, S. 45).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0,$$

Das elektrostatische Feld \vec{E} ist konservativ; es besitzt ein Potential $U(x,y,z)$.

Wählen wir den Nullpunkt im Unendlichen, so erhalten wir für die Potentialfunktion der Punktladung Q :

$$U(r) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad \text{oder} \quad U(\vec{r}) = -Q/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0) \cdot \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}/r^2.$$

$$(7) \quad U(r) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q/r, \quad \text{Coulombpotential der Punktladung } Q.$$

Dimension: (Arbeit/Ladung)

Einheit: J/C, 1 J/C = 1 Volt (V)

Das Potential $U(x, y, z)$ gibt an, welche **Arbeit** aufgewendet werden muss, um die **positive Einheitsladung** vom **Potentialnullpunkt** nach $\vec{r} = (x, y, z)$ zu verschieben.

Der Gradient der skalaren Funktion U ; grad U

Aus einer skalaren Funktion $U(x, y, z)$ kann durch Bildung der drei partiellen Ableitungen das Vektorfeld grad U hergeleitet werden.

$$(8) \quad \text{grad } U(x, y, z) = (\partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z).$$

Es erweist sich als nützlich, den **Nabla-Operator** $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ einzuführen, so dass gilt

$$\text{grad } U = \vec{\nabla} U.$$

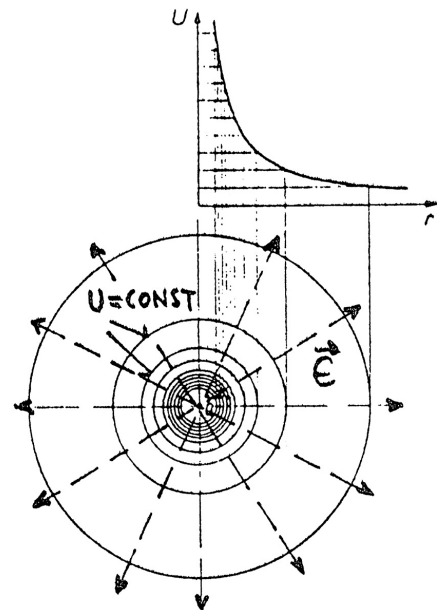
Wie in den Übungen gezeigt wird, existiert für ein **konservatives Vektorfeld** $\vec{E}(x, y, z)$ immer ein **skalares Potentialfeld** $U(x, y, z)$. \vec{E} und U sind verknüpft durch die Beziehung

$$(9) \quad \vec{E}(x, y, z) = -\text{grad } U(x, y, z).$$

Punkte mit gleichem Potential bilden eine Aequipotentialfläche.

$$(10) \quad U(x, y, z) = \text{const.}, \quad \text{Aequipotentialfläche.}$$

Die Feldlinien der Feldstärke \vec{E} stehen immer **senkrecht** zu den Aequipotentialflächen. Aus Symmetriegründen sind die zur Punktladung gehörenden Aequipotentialflächen $U(r) = \text{const.}$ Kugelflächen, die dazu orthogonalen Feldlinien des E-Feldes sind radiale Geraden.

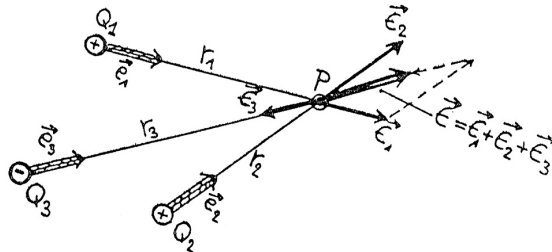


1.4 Superposition der Felder vieler Punktladungen

Sind viele Punktladungen vorhanden, so ergibt sich das Feld \vec{E} in einem beliebigen Punkt P durch vektorielle Addition der Felder \vec{E}_i aller Ladungen Q_i . Also

$$(11) \quad \vec{E}(P) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot ((Q_1/r_1^2) \cdot \vec{e}_1 + (Q_2/r_2^2) \cdot \vec{e}_2 + (Q_3/r_3^2) \cdot \vec{e}_3 + \dots).$$

Da für jeden Summanden in (11) das Linienintegral über einen geschlossenen Weg verschwindet, trifft dies auch für das resultierende Feld \vec{E} zu.



$$(12) \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \text{das elektrostatische Feld einer beliebigen Ladungsverteilung ist konservativ.}$$

Das zu \vec{E} gehörige Potential U folgt ebenfalls durch Superposition der Potentialbeiträge der einzelnen Punktladungen:

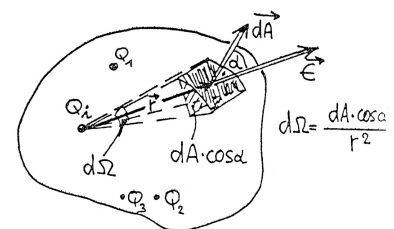
$$(13) \quad U(p) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot ((Q_1/r_1) + (Q_2/r_2) + (Q_3/r_3) + \dots).$$

1.5 Das Durchflutungsgesetz von Gauss

In der Mechanik der Strömungen haben wir das skalare Produkt $\vec{v} \cdot d\vec{A}$ eines Geschwindigkeitsfeldes mit einem Flächenelement als Fluss von \vec{v} durch dA bezeichnet (siehe Physik I, S. 84). Ganz analog führen wir nun den Begriff des elektrischen Feldflusses ϕ durch eine Fläche A ein:

$$(14) \quad d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \text{elektrischer Feldfluss } d\phi \text{ durch } dA$$

Jetzt fragen wir nach dem elektrischen Gesamtfluss ϕ durch eine geschlossene Fläche A , welche eine Anzahl Punktladungen Q_i umschließt. Denken wir uns ein Q_i als Spitze eines Kegels, dessen Mantellinien den Raumwinkel $d\Omega$ bilden, so schneidet dieser das Flächenelement $dA = d\Omega \cdot r^2 / \cos \alpha$ aus A heraus (s. Figur). Der von Q_i herrührende Fluss durch dA ist



$$d\phi_i = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (Q_i/r^2) \cdot dA \cdot \cos \alpha, \quad \text{und mit } d\Omega = dA \cdot \cos \alpha / r^2 : \\ d\phi_i = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q_i d\Omega$$

Integration über den vollen Raumwinkel $\Omega = 4 \cdot \pi$ ergibt dann $\phi_i = Q_i/\epsilon_0$ und Summation über alle Punktladungen Q_i führt auf

$$(15) \quad \phi = \sum_i Q_i = \epsilon_0, \quad \text{Durchflutungsgesetz von Gauss.}$$

Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist gleich der umschlossenen Ladung, dividiert durch ϵ_0 .

Übungsaufgabe:

Beweise, dass das Feld einer ausserhalb der geschlossenen Fläche A liegenden Punktladung durch A den Gesamtfluss null erzeugt.

Das Gesetz von Gauss ist eine Konsequenz des Coulomb-Gesetzes und des Superpositionsprinzips. Ist A eine konzentrische Kugelfläche bezüglich einer Punktladung Q , so folgt aus (15) umgekehrt das Coulombgesetz.

Liegt im Raum eine kontinuierliche Ladungsverteilung vor (eine „Ladungswolke“), so beschreiben wir diese durch eine Ladungsdichte $\varrho(x, y, z)$.

$$(16) \quad \varrho(x, y, z), \quad \text{Ladungsdichte.}$$

Dimension: (Ladung/Volumen)

Einheit: C/m^3

Auf jedes Ladungselement $\varrho(x, y, z) \cdot dV$ im Volumenelement dV können wir dann das Coulomb-Gesetz anwenden. Dies führt uns auf folgende Formulierung des Durchflutungsgesetzes von Gauss:

Umschliesst eine geschlossene Fläche A ein Volumen V , so ist

$$(17) \quad \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (1/\epsilon_0) \iiint \varrho(x, y, z) \cdot dV.$$

(17) ist lediglich eine andere Schreibweise von (15) und sagt uns, wie ein Oberflächenintegral der elektrischen Feldstärke mit einem Volumenintegral der Ladungsdichte ϱ verknüpft ist. Wir können auch sagen, dass die **Elektrostatik des Vakuums** durch die beiden Gleichungen

$$(17) \quad \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (1/\epsilon_0) \iiint \varrho(x, y, z) \cdot dV \quad \text{und} \quad (12) \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

beschrieben wird.

Das Gauss'sche Gesetz ist sehr nützlich zur Berechnung des E-Feldes, wenn eine Ladungsverteilung hoher räumlicher Symmetrie vorliegt. So folgt z.B aus (17) sofort:

Im Innern einer homogen geladenen Kugelschale ist kein elektrisches Feld vorhanden.

Ausserhalb einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung herrscht dasselbe elektrische Feld, wie wenn die Gesamtladung als Punktladung im Kugelzentrum sitzen würde.

Versuche, die beiden Aussagen zu beweisen. Analoges gilt auch für das Gravitationsfeld von Massenverteilungen (siehe Physik I, S. 46). Der dort geführte Beweis, dass das Gravitationsfeld im Innern einer homogenen Kugelschale null ist, wäre mit Hilfe des Gauss'schen Gesetzes viel einfacher gewesen (Der Gravitations-Feldfluss durch eine geschlossene Fläche ist proportional der eingeschlossenen Masse).

1.6 Feld \vec{E} und Potential U der homogen geladenen Kugel

Eine Ladung Q sei homogen auf ein kugelförmiges Volumen mit dem Radius R verteilt, so dass die Ladungsdichte $\varrho = Q/(4 \cdot \pi \cdot R^3/3)$ ist. Aus Symmetriegründen müssen die \vec{E} -Feldlinien radial verlaufen. Durch eine konzentrische Kugelfläche mit dem Radius $r \geq R$ ist der Fluss

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot E(r), \quad \text{und nach (17):}$$

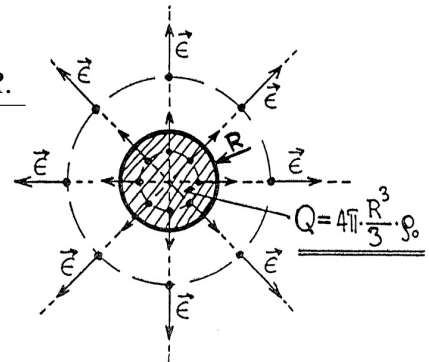
$$4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot E(r) = Q/\epsilon_0, \quad \text{somit}$$

$$\boxed{E(r) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q/r^2 \quad \text{für } r \geq R.}$$

Eine konzentrische Kugelfläche mit $r < R$ umschließt die Ladung $Q \cdot (r/R)^3$, es ist

$$4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot E(r) = Q \cdot r^3 / (\epsilon_0 \cdot R^3) \quad \text{oder}$$

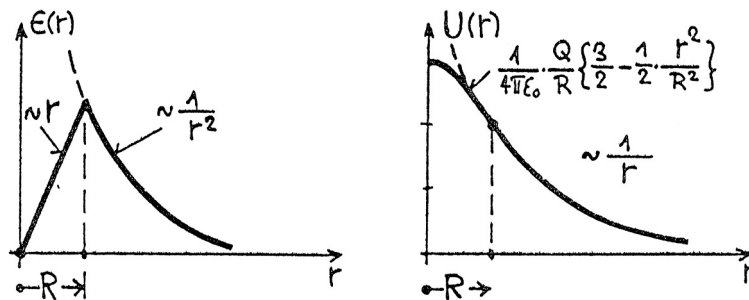
$$\boxed{E(r) = Q/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3) \cdot r, \quad \text{für } r < R}$$



Das Potential $U(r) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q/r$ ausserhalb der Kugel hat an der Kugeloberfläche den Wert $U(R) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q/R$, daran schliesst das Potential im Innern stetig an, also

$$U(r) = U(R) - \int_R^r Q/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3) \cdot r \cdot dr.$$

$$\boxed{U(r) = (1/(8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q/R \cdot (3 - (r^2/R^2)), \quad \text{für } r < R.}$$



1.7 Divergenz eines Vektorfeldes \vec{E} ; $\text{div } \vec{E}$

Am obigen Beispiel wurde die Nützlichkeit der „integralen“ Form (17) des Gesetzes von Gauss demonstriert. In manchen Fällen ist eine „differentielle“ Formulierung erforderlich, d.h. eine Aussage über das lokale Verhalten des Feldes \vec{E} in einem Raumpunkt, wenn in diesem Punkt die Ladungsdichte ρ vorhanden ist. Wir benötigen dazu den mathematischen Begriff der Divergenz.

Um einen festen Punkt P des Vektorfeldes \vec{E} legen wir eine geschlossene Fläche A, welche das Volumen V umschließt. Jetzt betrachten wir den Quotienten aus dem Feldfluss ϕ durch A und dem umschlossenen Volumen V und bilden dessen Grenzwert, wenn sich die Fläche A auf den festen Punkt P zusammenzieht und $V \rightarrow 0$ geht.

Definition:

$$\boxed{(18) \quad \text{div } \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{V}, \quad \text{Divergenz von } \vec{E} \text{ im Punkt P.}$$

Wenn das Feld $\vec{E}(x, y, z) = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z))$ gegeben ist, kann der Grenzwert (18) berechnet werden (siehe Ergänzungen und Übungen). Es zeigt sich, dass \vec{E} durch partielles Ableiten der Komponenten von \vec{E} folgendermassen ausgedrückt werden kann:

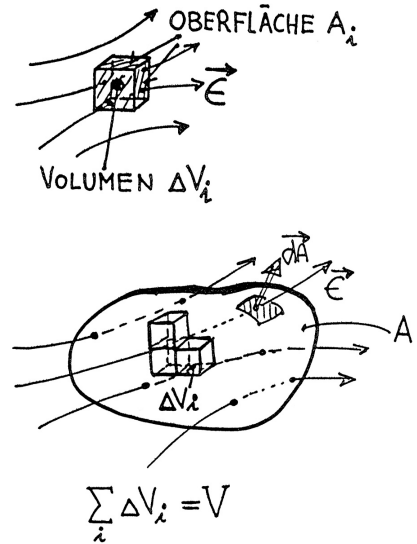
$$(19) \quad \text{div } \vec{E} = \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z \quad \text{oder} \quad \text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}.$$

Wird ein kleines Volumenelement $\Delta V_i \rightarrow 0$ durch die Oberfläche A_i abgegrenzt, so kann wegen (18) der Feldfluss durch A_i geschrieben werden als

$$(20) \quad \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}_i = \Delta V_i \cdot \text{div } \vec{E}.$$

Denken wir uns das makroskopische, von A eingeschlossene Volumen V durch differentiell kleine, würfelförmige ΔV_i aufgebaut, so ist die Summe aller Feldflüsse durch die Würfeloberflächen gerade gleich dem Feldfluss durch A . Dies ist so, weil alle Flussbeiträge von inneren Würfelflächen paarweise mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommen und sich wegheben. Mit (20) ergibt sich dann

$$(21) \quad \begin{aligned} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \sum_i \Delta V_i \cdot \text{div } \vec{E} \quad \text{oder} \\ \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \iiint_V dV \cdot \text{div } \vec{E}. \end{aligned}$$



Durch Vergleich von (21) mit (17) folgt:

$$(22) \quad \text{div } \vec{E} = \rho(x, y, z) / \epsilon_0, \quad \text{Durchflutungsgesetz von Gauss in differentieller Form.}$$

Ist die Ladungsverteilung $\rho(x, y, z)$ gegeben, so stellt (22) eine partielle Differentialgleichung für $\vec{E}(x, y, z)$ dar. Da \vec{E} konservativ ist, also durch $-\text{grad } U$ ersetzt werden kann, gilt auch

$$\text{div grad } U = -\rho / \epsilon_0.$$

In kartesischen Koordinaten bedeutet dies wegen (8) und (19):

$$(23) \quad \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 + \partial^2 U / \partial z^2 = -\rho(x, y, z) / \epsilon_0.$$

Die linke Seite kürzen wir mit dem Symbol des **Laplace-Operators** $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ ab.

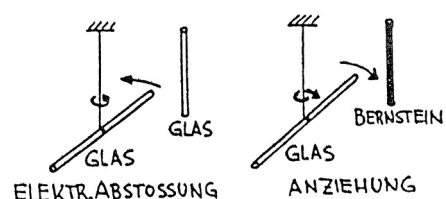
$$(23) \quad \Delta U(x, y, z) = -\rho(x, y, z) / \epsilon_0, \quad \text{Poisson-Gleichung.}$$

Das elektrostatische Potential muss immer der Poissongleichung genügen. In ladungsfreien Gebieten, wo also $\rho = 0$ ist, erfüllt das Potential $U(x, y, z)$ immer die Laplace-Gleichung

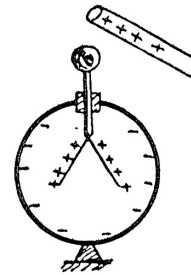
$$(24) \quad \Delta U(x, y, z) = 0, \quad \text{Laplace-Verteilung.}$$

Demonstrationen:

1. Reibungs-Elektrizität
Zwei Sorten von Ladung.



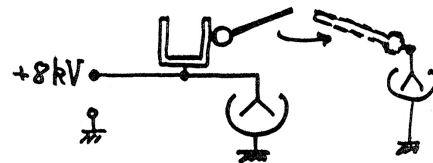
2. Ladungsnachweis mit Elektrometer



3. Bernstein und Katzenfell
Hörbare Funken bei Ladungstrennung.

4. Statisches V-Meter (Trüb-Täuber)
Messung der entstehenden Potentialdifferenzen durch Reibung.

5. Ladung sitzt auf Aussenseite eines Metallbechers



6. Faraday-Käfig



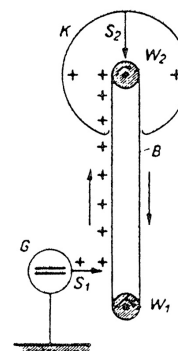
7. Aufladung durch Glasbecher hindurch
Isolatoren sind durchlässig für elektrische Felder.



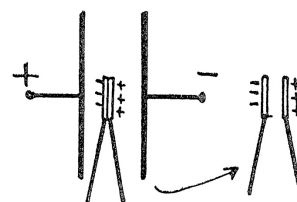
8. Elektrisiermaschine
Aufladung von Metallkugeln und Kräfte.



9. Van de Graf Generator



10. Miesch'sche Platten
Influenz.

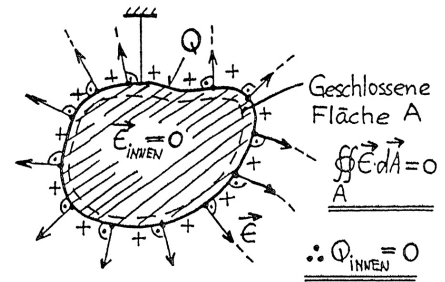


1.8 Ladung auf leitenden Materialien; Influenz

Elektrisch leitende Materialien enthalten bewegliche Ladungsträger (z.B. „Leitungselektronen“ bei Metallen). Wird ein Leiterstück in ein elektrostatisches Feld \vec{E} gebracht, so verschieben sich die beweglichen Ladungsträger so lange, bis das äussere Feld durch das Feld der bewegten Ladungsträger im Innern des Körpers exakt zu null kompensiert wird. Daraus folgt:

$$(25) \quad \vec{E}_{\text{innen}} = 0, \quad \text{im Innern eines Leiters existiert kein elektrostatisches Feld.}$$

Wir denken uns einen isoliert aufgehängten Leiter, auf welchen eine Ladung Q aufgebracht wird. Wegen (25) ist der elektrische Fluss durch jede vollständig im Innern liegende geschlossene Fläche gleich null. Somit ist nach dem Gesetz von Gauss im Innern des Leiters auch keine elektrische Überschussladung vorhanden; dies bedeutet notwendigerweise:



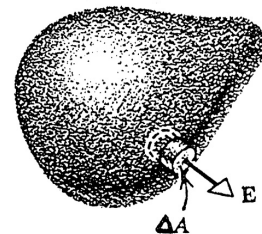
Wird ein elektrischer Leiter aufgeladen, so verteilt sich die Ladung auf der Oberfläche des Leiters.

Ausserhalb des Leiters muss ein von den Oberflächenladungen erzeugtes Feld auftreten. Weil jede zur Leiteroberfläche parallele Feldkomponente eine Ladungsverschiebung bewirken würde, werden diese Komponenten im statischen Fall null sein.

Die \vec{E} -Feldlinien stehen immer senkrecht zur Oberfläche eines geladenen Leiters.

Die Leiteroberfläche ist eine Aequipotentialfläche.

Grenzen wir nun ein zylindrisches Volumenelement derart ab, dass die Grundfläche dA des Zylinders unmittelbar unter, die Deckfläche dA unmittelbar ausserhalb der Leiteroberfläche liegt, so wird die Oberflächenladung dQ umschlossen.



$$dQ = \sigma \cdot dA, \quad \sigma = \text{Flächenladungsdichte in C/m}^2.$$

Da nur die Deckfläche dA vom \vec{E} -Feld durchsetzt wird und zum Feldfluss beiträgt, folgt aus dem Durchflutungsgesetz von Gauss

$$\sigma \cdot dA / \epsilon_0 = dA \cdot E \quad \text{oder}$$

$$(26) \quad \sigma = \epsilon_0 \cdot E.$$

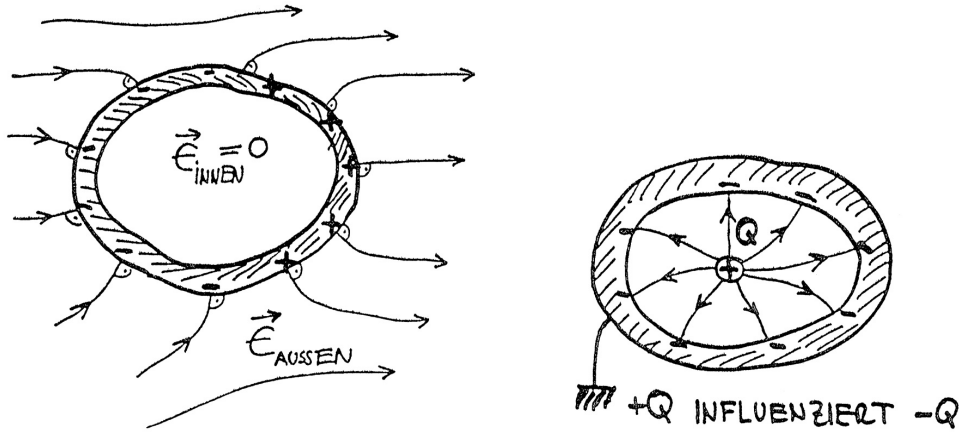
Die Flächen-Ladungsdichte eines geladenen Leiters ist gleich $\epsilon_0 \cdot E$. Sie ist positiv, wenn der Feldvektor \vec{E} an der Leiteroberfläche nach aussen zeigt, und negativ, wenn dieser ins Innere der Leiters zeigt.

Die Tatsache, dass kein elektrostatisches Feld in leitendem Material vorhanden ist und ferner die Gesetze (17) und (12) gelten, führt dazu, dass ein durch Metallwände umschlossenes Volumen feldfrei bleibt, auch wenn sich das Metallgefäss in einem äusseren statischen \vec{E} -Feld befindet. (Abschirmeffekt des **Faraday-Käfigs**).

Zum $1/r^2$ -Kraftgesetz: Wir haben schon beim Gravitationsgesetz (siehe Physik I, S. 46) gesehen, dass die Feldfreiheit im Innern einer homogenen Kugelschale eine Folge des $1/r^2$ -Kraftgesetzes ist.

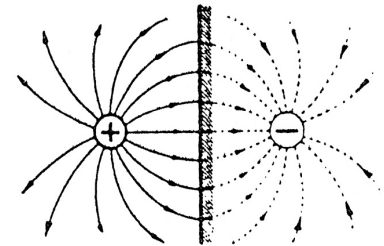
Dieselbe Argumentation kann auf die geladene Hohlkugel übertragen werden. Umgekehrt lässt sich $\vec{E} = 0$ experimentell sehr exakt überprüfen, so dass die $1/r^2$ -Abhängigkeit im Coulomb'schen Gesetz mit grosser Genauigkeit gesichert ist (der Exponent weicht weniger als 10^{-16} von 2 ab).

Der Faradaykäfig hindert auch Felder von Ladungen im Innern daran, in den Aussenraum auszutreten, vorausgesetzt, dass der Käfig geerdet ist. Eine Ladung im Innern **influenziert** auf der **Innenwand** eine **entgegengesetzt gleich grosse Ladung**.



Influenz- und Spiegelbild-Ladung:

Betrachten wir das Feld von zwei Punktladungen $+Q$ und $-Q$ im Abstand $2a$ (siehe unten: elektrischer Dipol), so wird die Spiegelsymmetrieebene eine Äquipotentialfläche sein. Ersetzen wir die Symmetrieebene durch eine geerdete Metallplatte im Abstand a von der positiven Ladung, so verschwindet die rechte Hälfte des ursprünglichen Feldes, ohne dass die linke Hälfte sich ändert. Befindet sich also eine Punktladung vor einer leitenden, geerdeten Ebene, so können wir das Feld mit Hilfe des Coulombgesetzes berechnen, wenn wir uns im Abstand a hinter der Metallebene eine entgegengesetzt gleich grosse Ladung denken.



Saugwirkung von Spitzen:

Trägt eine Metallkugel vom Radius R die Ladung Q , so ist die Feldstärke an der Oberfläche

$$E(R) = (1/4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0) \cdot Q/R^2, \quad \text{das Potential} \quad U(R) = (1/4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0) \cdot Q/R.$$

$$\text{Es ist also} \quad E(R) = U(R)/R.$$

Je kleiner der Radius, umso grösser ist für ein gegebenes Potential der Kugel die Feldstärke an ihrer Oberfläche. Wird die Krümmung der Oberfläche zu gross, wie dies etwa bei einer Metallspitze der Fall ist, so treten Feldstärken auf, die zu Ionisation der Luft oder zu Emission von Ladungsträgern aus dem Metall führen (Feldemission). In der Hochspannungstechnik müssen deshalb polierte Metalloberflächen mit genügend grossen Krümmungsradien verwendet werden. Eine Anwendung des Phänomens der Spitzenentladung findet sich im Feldemissions-Mikroskop.

1.9 Elektrischer Dipol

Unter einem elektrischen Dipol versteht man ein Ladungssystem, das aus einer negativen Punktladung $-Q$ und einer um den Vektor \vec{a} verschobenen, ebenso grossen Ladung $+Q$ besteht. Diese Ladungsverteilung besitzt das elektrische Dipolmoment \vec{p} , eine vektorielle Grösse, definiert durch

$$(27) \quad \vec{p} = Q \cdot \vec{a}, \quad \text{elektrisches Dipolmoment } \vec{p}.$$

Lassen wir die z-Richtung unseres Koordinatensystems mit \vec{a} zusammenfallen, so dass die Ladungen symmetrisch zum Ursprung O liegen, ergibt sich ein rotationssymmetrisches Potential der Form $u(r, \vartheta)$. Wir beschränken uns auf Feldpunkte, welche verglichen mit der Ausdehnung a weit weg liegen (Fernzone), setzen also voraus:

$$(28) \quad r \gg a.$$

Das Superpositionsprinzip liefert

$$U(r, \vartheta) = (Q/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (1/(r - \Delta) - 1/(r + \Delta)), \quad \text{mit } \Delta = (a/2) \cdot \cos \vartheta.$$

Wegen (28) ist $\Delta/r \ll 1$ und U wird approximiert durch

$$U(r, \vartheta) = (Q/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (1/r) \cdot (1 + \Delta/r - (1 - \Delta/r)) \quad \text{oder}$$

$$(29) \quad U(r, \vartheta) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q \cdot a \cdot (\cos \vartheta)/r^2.$$

Im Unterschied zum $1/r$ -Abfall des Potentials einer Punktladung (eines „Monopols“), fällt $U(r, \vartheta)$ des Dipols bei festem ϑ mit $1/r^2$, also schneller ab. Mit der Definition (27) erhalten wir

$$(30) \quad U(\vec{r}) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot \vec{p} \cdot \vec{e}_r / r^2.$$

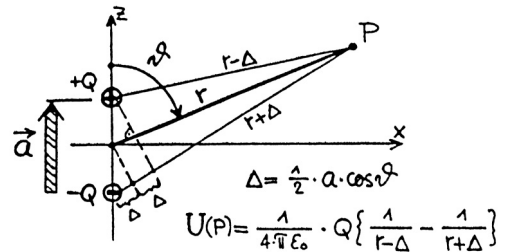
In der Nahzone unseres Systems ist (28) nicht erfüllt und das Dipolpotential (30) weicht vom wirklichen Potential ab. Ein idealer Dipol liegt vor, wenn a beliebig klein, dafür Q so gross ist, dass $Q \cdot a = p$ einen endlichen Wert hat.

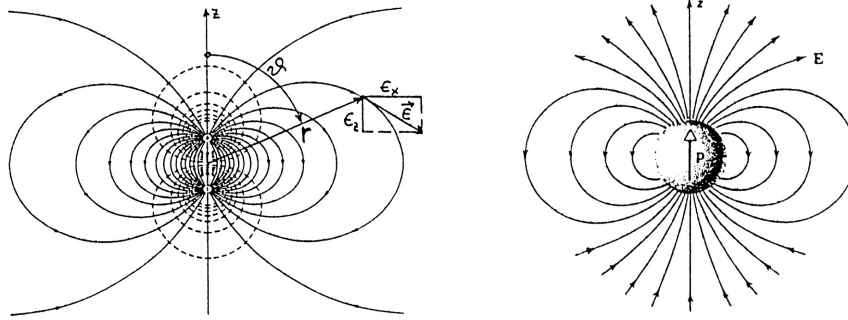
Das elektrische Feld \vec{E} gewinnt man durch Bildung des negativen Gradienten von $u(\vec{r})$. Ohne die Rechnung hier auszuführen geben wir das Resultat:

$$(31) \quad \begin{aligned} E_x(r, \vartheta) &= (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (3 \cdot p \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta)/r^3, \\ E_z(r, \vartheta) &= (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (p \cdot (3 \cdot \cos^2 \vartheta - 1))/r^3, \end{aligned}$$

oder kompakter geschrieben:

$$(32) \quad \vec{E} = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (3 \cdot (\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \cdot \vec{p})/r^5.$$





Der Begriff des Dipolmomentes lässt sich allgemeiner für eine beliebige Ladungsverteilung $\rho(x, y, z)$ fassen, nämlich

$$(33) \quad \vec{p} = \iiint \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot dV, \quad \text{Dipolmoment einer Ladungsverteilung.}$$

Übungsaufgabe:

Zeige, dass wenn (33) auf das oben besprochene System von Punktladungen angewendet wird, gerade (27) herauskommt, und zwar unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs.

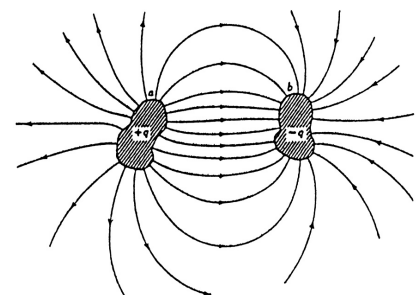
Nehmen wir als Beispiel einer Ladungsverteilung jene eines Atoms. Diese stellen wir uns vor als negative Ladungswolke, gebildet von den Elektronen. Im Innern davon sitzt der Atomkern, praktisch als positive Punktladung. Das Atom als Ganzes ist elektrisch neutral, es hat keinen Monopol-Charakter (d.h. kein mit $1/r$ abfallendes Potential). Die Definition (33) läuft darauf hinaus, dass der Betrag des Dipolmomentes gleich ist der Kernladung, multipliziert mit dem Abstand des **Ladungsschwerpunktes** der Elektronenwolke vom Kern.

$$\begin{aligned} \vec{R}_+ &= \frac{1}{+Q} \cdot \iiint \rho_+(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot dV \\ \vec{R}_- &= \frac{1}{-Q} \cdot \iiint \rho_-(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot dV \end{aligned} \quad \vec{p} = Q \cdot (\vec{R}_+ - \vec{R}_-)$$

Allgemein hat eine gesamthaft neutrale Ladungsverteilung immer dann ein elektrisches Dipolmoment, wenn der Schwerpunkt der positiven Ladung nicht mit jenem der negativen zusammenfällt. Überlege in diesem Zusammenhang, wie das elektrische Dipolmoment des Wassermoleküls zustande kommt.

1.10 Elektrischer Kondensator und Kapazität C

Zwei voneinander isolierte Leiter bilden einen **Kondensator**. Wird der eine Leiter (a) mit der Ladung $+Q$, der andere Leiter (b) mit $-Q$ aufgeladen, so bildet sich ein elektrisches Feld \vec{E} aus, dessen Feldlinien von der einen Leiteroberfläche ausgehen und auf der anderen enden. Die beiden Leiteroberflächen (a) und (b) sind Äquipotentialflächen. Es besteht zwischen ihnen die Potentialdifferenz



$$| U = U(a) - U(b), \quad \text{Potentialdifferenz.}$$

Als Folge des Superpositionsprinzips steigt die Feldstärke E in jedem Raumpunkt proportional zur Ladungsmenge Q , so dass auch die Potentialdifferenz U zwischen den Leitern proportional Q anwächst. Wir bezeichnen die Proportionalitätskonstante mit $1/C$; es gilt:

$$(34) \quad U = Q/C \quad \text{oder} \quad C = Q/U, \quad \text{Kapazität } C \text{ des Kondensators.}$$

Dimension: (Ladung/Spannung)

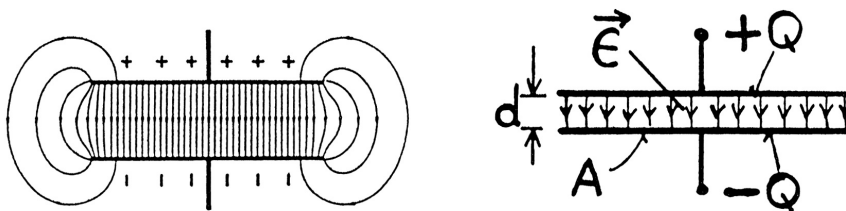
Einheit: C/V, 1 C/V = 1 F (Farad)

Die Kapazität wird durch die Geometrie der Leiteranordnung bestimmt.

Die Definition des Kondensators schliesst auch den Fall ein, dass nur ein **einziger Leiter** vorhanden ist; man denke sich in diesem Fall den zweiten Leiter unendlich weit weg.

Der Plattenkondensator:

Als speziell einfaches Beispiel betrachten wir den aus zwei planparallelen Platten bestehenden Kondensator. Seine Geometrie ist durch die Plattenfläche A und den Plattenabstand d charakterisiert. Sein elektrisches Feld ist im Gebiet des Plattenzentrums nahezu homogen; in der Nähe des Plattenrandes entsteht ein inhomogenes „Randfeld“.



Wir setzen nun voraus, dass der Abstand d der Platten sehr viel kleiner ist, als ihre lineare Ausdehnung (z.B. der Plattendurchmesser bei Kreisform). Dann dürfen wir das Randfeld als kleine Störung vernachlässigen und das E-Feld als homogen betrachten.

Nach dem Influenzgesetz (26) ist $E = Q/(\epsilon_0 \cdot A)$. Mit $U = E \cdot d$ erhalten wir aus (34) sofort

$$(35) \quad C = \epsilon_0 \cdot A/d, \quad \text{Kapazität des Plattenkondensators.}$$

Wir lesen daraus ab, dass die Kapazität umso grösser ist, je grösser die Plattenfläche und je geringer der Plattenabstand. Die Beziehung (34) lautet hier auch

$$U = (1/(\epsilon_0 \cdot A)) \cdot Q \cdot d.$$

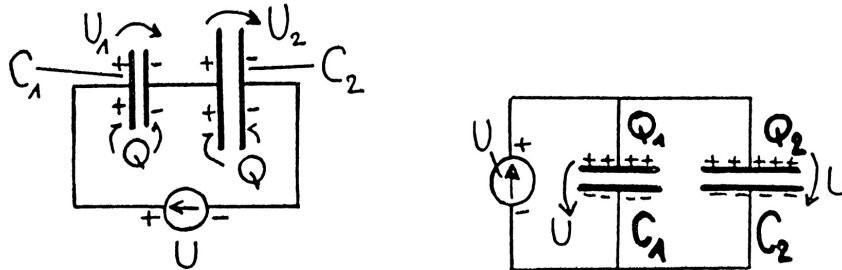
Bei konstanter Ladung Q nimmt U mit dem Plattenabstand linear zu, wobei das Auseinanderziehen der Platten mit einem Arbeitsaufwand verbunden ist. Bei konstanter Geometrie wächst natürlich Q proportional U .

1.10.1 Serie- und Parallelschaltung von Kondensatoren

Schaltet man Kondensatoren hintereinander, so addieren sich die Spannungsabfälle U_1, U_2, \dots usw. zur gesamten Potentialdifferenz U . Die Ladung Q ist wegen der Erhaltung der Gesamtladung auf jedem Kondensator dieselbe. Also

$$U = U_1 + U_2 + \dots \quad \text{oder} \quad Q/C = Q/C_1 + Q/C_2 + \dots, \quad \text{somit}$$

$$(36) \quad 1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots \quad \text{Addition der reziproken Kapazitäten bei Serieschaltung.}$$



Schaltet man Kondensatoren parallel, so liegt über jedem Kondensator dieselbe Spannung; die Ladungen sind nach Massgabe der einzelnen Kapazitäten verschieden und addieren sich zur Gesamtladung Q :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots \quad \text{oder} \quad C \cdot U = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + \dots, \quad \text{somit}$$

$$(37) \quad C = C_1 + C_2 + \dots \quad \text{Addition der Kapazitäten bei Parallelschaltung.}$$

Beachte:

Die **Kapazität** irgend eines Kondensators wird durch das Symbol des Plattenkondensators dargestellt und bedeutet ein **idealisiertes Schaltelement**. **Kondensatoren** sind **wirkliche Elemente**. Sie besitzen eine Kapazität C , haben aber daneben noch andere, hier noch nicht zur Diskussion stehende Eigenschaften (siehe das Kapitel über Wechselstrom).

1.10.2 Potentielle Energie des geladenen Kondensators

Um die Ladung Q eines Kondensators um dQ zu erhöhen, muss $+dQ$ vom negativ geladenen Leiter zum positiven gebracht werden, wobei die Potentialdifferenz $U(Q) = Q/C$ überwunden, also die Arbeit $dW = dQ \cdot U$ geleistet werden muss. Integration über Q von null bis Q ergibt die potentielle Energie

$$E(\text{pot}) = \int_0^Q Q \cdot dQ/C \quad \text{oder} \quad E(\text{pot}) = Q^2/(2C).$$

Mit (34) können wir $E(\text{pot})$ verschieden ausdrücken:

$$(38) \quad E(\text{pot}) = (1/2) \cdot Q^2/C,$$

$$(39) \quad E(\text{pot}) = (1/2) \cdot C \cdot U^2,$$

$$(40) \quad E(\text{pot}) = (1/2) \cdot Q \cdot U.$$

1.10.3 Energiedichte w des elektrischen Feldes

Beim Aufladen eines Kondensators wird im Raum zwischen den Leitern ein elektrisches Feld \vec{E} aufgebaut. Die vorhandene potentielle Energie wird also auch durch das \vec{E} -Feld repräsentiert. Im Falle

des Plattenkondensators können wir mit (39) und der Beziehung $U = E \cdot d$, die potentielle Energie schreiben als

$$E(\text{pot}) = (1/2) \cdot (\epsilon_0 \cdot A/d) \cdot E^2 \cdot d^2 \quad \text{oder} \quad E(\text{pot}) = (1/2) \cdot (\epsilon_0 \cdot A \cdot d \cdot E^2).$$

$A \cdot d$ ist das vom \vec{E} -Feld ausgefüllte Volumen, $E(\text{pot})/(A \cdot d)$ die potentielle Energie w pro Volumeneinheit.

$$(41) \quad w = \epsilon_0 \cdot E^2/2, \quad \text{Energiedichte des elektrischen Feldes.}$$

Der betrachtete Spezialfall des homogenen \vec{E} -Feldes beim Plattenkondensator lässt sich auf ein beliebiges, inhomogenes Feld verallgemeinern, da wir jedes inhomogene Feld durch infinitesimal kleine, homogene Feldgebiete zusammensetzen können. Die Gleichung (41) **ist allgemein gültig**.

1.10.4 Anziehungskraft der ebenen Kondensatorplatten

Das \vec{E} -Feld zwischen den Platten entsteht durch Superposition der Felder, welche durch die Oberflächenladungen $+Q$ und $-Q$ erzeugt werden. Zwischen den Platten verstärken sie sich, d.h. jede Plattenladung liefert das Feld $E/2$; im Aussenraum sind die beiden Feldbeiträge entgegengesetzt gleich; der Aussenraum ist feldfrei. Es ist demnach so, dass jede Platte mit dem Ladungsbetrag Q sich im Feld $E/2$ der gegenüberliegenden Plattenladung befindet. Die Kraftwirkung auf eine Platte ist $F = Q \cdot E/2$. Mit $Q = \epsilon_0 \cdot A \cdot E$ ergibt sich:

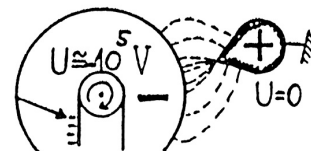
$$(42) \quad F = \epsilon_0 \cdot A \cdot E^2/2 \quad \text{oder} \quad F = \epsilon_0 \cdot A \cdot U^2/(2 \cdot d^2), \quad \text{Anziehungskraft der Platten.}$$

Übungsaufgabe:

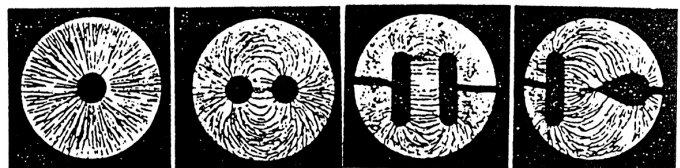
Leite (42) unter Verwendung von (38) mit Hilfe der Beziehung $F = -dE(\text{pot})/dx$ her.

Demonstrationen:

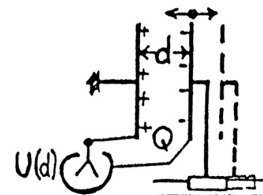
1. Saugwirkung von Metallspitzen



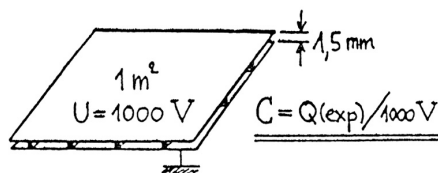
2. Feldlinienbilder



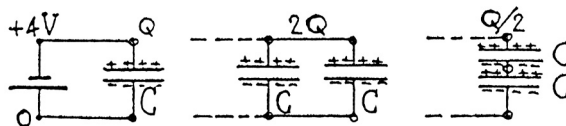
3. Plattenkondensator
 $U(d)$ bei $Q = \text{const.}$
 $Q(d)$ bei $U = \text{const.}$
 $Q(U)$ bei $d = \text{const.}$



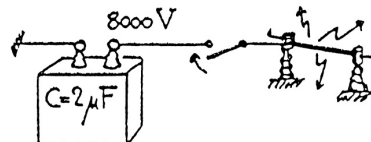
4. Kapazität des Plattenkondensators quantitativ
 $A = 1 \text{ m}^2, d = 1.5 \text{ mm}, C = 5.9 \text{ nF}.$



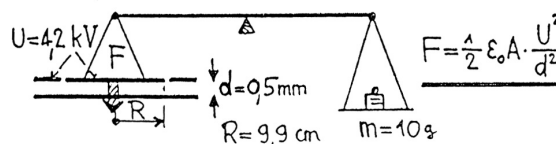
5. Serie- und Parallelschaltung



6. Energie des geladenen Kondensators
 $U = 8000 \text{ V}, C = 2 \mu \text{ F}, E(\text{pot}) = 64 \text{ J}.$



7. Kirchhoff-Waage
 Anziehung der Kondensatorplatten quantitativ gemessen.



1.11 Ladung Q im elektrischen Feld

Wir denken uns einen Plattenkondensator, der in einem evakuierten Raum das homogene Feld \vec{E} erzeugt. Die eine Platte liegt auf dem negativen Potential $U_1 = -U$, die andere ist geerdet ($U_2 = 0$). In diesem Feld soll sich ein Elektron der Masse m und der Ladung $Q = -e$ befinden. Für das negativ geladene Elektron stellt das \vec{E} -Feld ein **konservatives Kraftfeld** $\vec{F} = -e \cdot \vec{E}$ dar. Wählen wir den Nullpunkt der potentiellen Energie des Elektrons auf Erdpotential ($U_2 = 0$), so besitzt es an der negativen Kondensatorplatte die potentielle Energie $E(\text{pot}) = e \cdot U$. Hat es dort die Anfangsgeschwindigkeit null, so wird es entlang der Feldlinien beschleunigt und trifft auf der geerdeten Platte mit der kinetischen Energie $m \cdot v_0^2 / 2 = e \cdot U$ auf. Lassen wir auf negativem Potential $-U$ einen glühend heissen Draht Elektronen verdampfen (Glühkathode) und bringen wir an der geerdeten Elektrode eine kleine Austrittsöffnung an, so liegt bereits ein elektrostatischer **Teilchenbeschleuniger** vor, in diesem Fall eine „**Elektronenkanone**“.

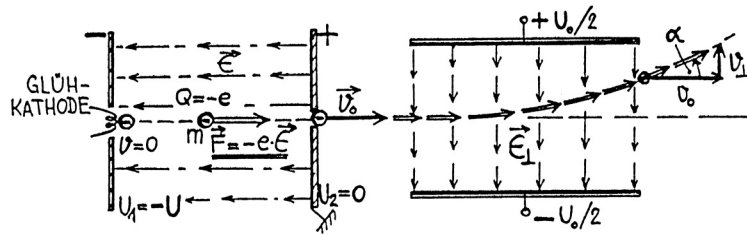
Hat ein zunächst ruhendes, die Ladung Q tragendes Teilchen die Potentialdifferenz U durchlaufen, so ist ihm die kinetische Energie

$$(43) \quad E(\text{kin}) = Q \cdot U \quad \text{erteilt worden.}$$

Es ist üblich und bequem, die Energie beschleunigter Teilchen in der Energieeinheit Elektronenvolt (eV) anzugeben.

Ein Elektronenvolt (1 eV) ist die Energie, die ein Teilchen beim Durchfallen der Potentialdifferenz von 1 Volt erhält, wenn es eine Elementarladung trägt.

$$(44) \quad 1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$



Beachte:

Unabhängig von der Geometrie der elektrostatischen Feldlinien, ist der Zuwachs an kinetischer Energie allein von der durchlaufenen Potentialdifferenz abhängig.

Mit einem senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \sqrt{2 \cdot Q \cdot U / m} \cdot \vec{e}_0$ stehenden, homogenen elektrischen Feld \vec{E}_\perp , erzeugt durch Platten der Länge L , kann der Teilchenstrahl abgelenkt werden. In Analogie zum schiefen Wurf im homogenen Gravitationsfeld ist die Flugbahn zwischen den Ablenkplatten eine Parabel. Während der Aufenthaltszeit $t = L/v_0$ im Ablenkfeld, erhalten die Teilchen eine normal zu \vec{v}_0 stehende Geschwindigkeitskomponente $v_\perp = Q \cdot E_\perp \cdot t/m$. Der Ablenkwinkel α ist dann gegeben durch

$$(45) \quad \text{tg}\alpha = v_\perp/v_0 \quad \text{oder} \quad \text{tg}\alpha = Q \cdot E_\perp \cdot L/(m \cdot v_0^2).$$

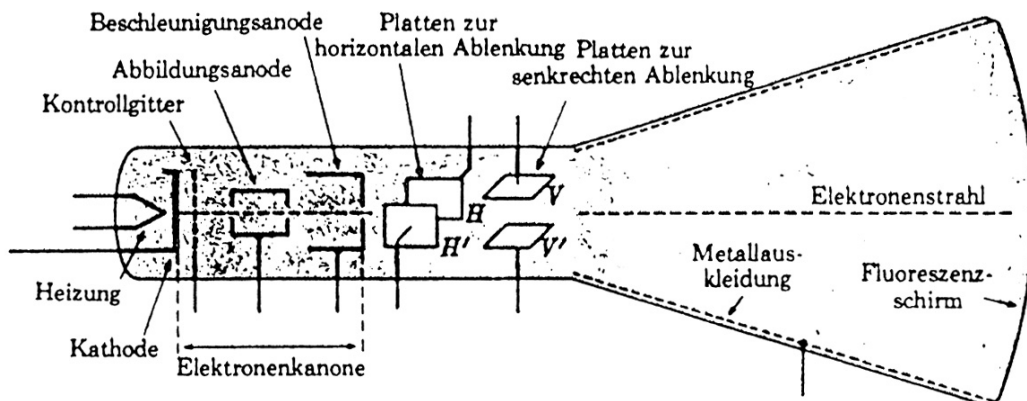
Mit $E_\perp = U_0/D$ und $m \cdot v_0^2 = 2 \cdot Q \cdot U$ erhält man

$$(46) \quad \text{tg}\alpha = U_0 \cdot L/(2 \cdot U \cdot D).$$

Wichtig:

Der Ablenkwinkel α hängt weder von der Ladung, noch von der Masse der Teilchen ab. Dies bedeutet: Geladene Teilchen, welche am gleichen Ort mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = 0$ starten, durchlaufen im elektrostatischen Feld dieselbe Bahn, und zwar **unabhängig von Q und m**.

Im Kathodenstrahloszillograf werden die besprochenen Bauelemente, also Elektronenkanone und elektrostatische Ablenkplatten, verwendet. Die horizontalen Ablenkplatten werden durch eine proportional der Zeit anwachsende „Sägezahn“-Spannung angesteuert (Zeitablenkung), die vertikalen mit der als Funktion der Zeit zu messenden Spannung $U(t)$.

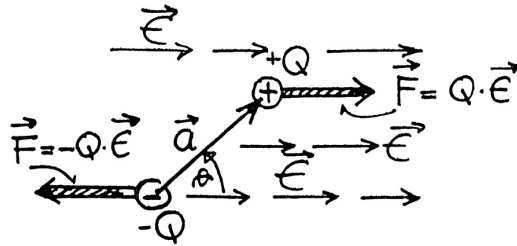


1.12 Elektrischer Dipol \vec{p} im \vec{E} -Feld

1.12.1 Homogenes \vec{E} -Feld

Im homogenen Feld \vec{E} verschwindet die resultierende Kraft auf den Dipol $\vec{p} = Q \cdot \vec{a}$, denn die Kräfte $Q \cdot \vec{E}$ und $-Q \cdot \vec{E}$ auf die beiden Punktladungen kompensieren sich. Der Dipol-Schwerpunkt wird also **nicht beschleunigt**. Hingegen erfährt der Dipol ein Drehmoment \vec{M} als Folge des wirkenden Kräftepaars.

$$(47) \quad \vec{M} = Q \cdot \vec{a} \times \vec{E} \quad \text{oder} \quad \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad \text{Drehmoment auf Dipol.}$$



Potentielle Energie $E_{pot}(\vartheta)$:

Wir wählen $E_{pot}(\pi/2)$ als Nullpunkt und drehen den Dipol um die festgehaltene negative Punktladung in die Stellung ϑ . Dabei muss die positive Ladung um $a \cdot \cos \vartheta$ in Feldrichtung verschoben, also die Arbeit $-Q \cdot a \cdot E \cdot \cos(\vartheta)$ geleistet werden.

$$(48) \quad E_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \text{potentielle Energie des Dipols.}$$

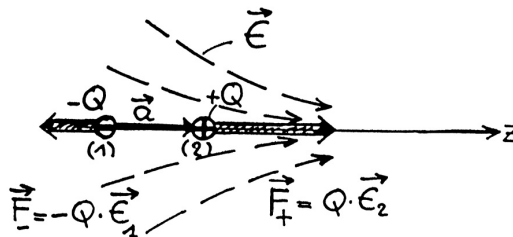
Ähnlich wie eine Magnetenadel im Erd-Magnetfeld, hat der elektrische Dipol im elektrostatischen Feld die Tendenz, sich parallel zu \vec{E} einzustellen (stabile Lage).

1.12.2 Inhomogenes \vec{E} -Feld

Ein elektrisches Feld $\vec{E} = (0, 0, E)$ sei entlang der z-Achse gerichtet und die z-Komponente E soll mit z anwachsen, also einen positiven Gradienten dE/dz besitzen. Legen wir einen elektrischen Dipol \vec{p} parallel zum \vec{E} -Feld in die z-Achse, die negative Punktladung liege an der Stelle $(0, 0, z)$, so erfährt er die Kraft

$$\begin{aligned} F_Z &= Q \cdot (E(z+a) - E(z)), & \text{für differentiell kleines } a \text{ also} \\ F_Z &= Q \cdot (E(z) + a \cdot dE/dz - E(z)), & \text{somit } F_Z = Q \cdot a \cdot dE/dz \text{ oder} \end{aligned}$$

$$(49) \quad F_Z = p \cdot dE/dz, \quad \text{Kraft auf Dipol.}$$



Diese Beziehung gilt nur für die hier speziell gewählte Konfiguration, sie lässt sich aber leicht verallgemeinern und lautet dann:

$$(50) \quad F_X = \vec{p} \cdot \text{grad } E_X, \quad F_Y = \vec{p} \cdot \text{grad } E_Y, \quad F_Z = \vec{p} \cdot \text{grad } E_Z.$$

Damit auf einen Dipol eine von null verschiedene resultierende Kraft wirken kann, ist die Inhomogenität des \vec{E} -Feldes an der betreffenden Stelle eine Voraussetzung. Die Kraftwirkung hängt zusätzlich noch von der Orientierung des Dipols ab. Liegt dieser z.B. parallel zur \vec{E} -Feldlinie, wie im obigen Spezialfall, so wird der Dipol ins Gebiet grösserer Feldstärke gezogen.

1.13 Isolatoren (Dielektrika) im \vec{E} -Feld

Bis jetzt haben wir das Feld von im leeren Raum verteilten elektrischen Ladungen untersucht und gefunden, dass die beiden Gleichungen

$$(17) \quad \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (1/\epsilon_0) \cdot \iiint \varrho(x, y, z) \cdot dV \quad \text{und} \quad (12) \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

die Elektrostatik im Vakuum vollständig beschreiben. Ferner haben wir gesehen, dass im Innern von elektrisch leitenden Materialien, insbesondere von Metallen, keine elektrostatischen Felder vorhanden sein können. Andererseits zeigte das Experiment, dass Isolatoren elektrische Kraftwirkungen nicht abschirmen, sondern dass sie vom \vec{E} -Feld durchdrungen werden (daher Dielektrika). Es stellt sich nun die Frage, in welcher Weise die obigen Gleichungen abgeändert, respektive durch neue physikalische Begriffe ergänzt werden müssen, um die Elektrostatik in Isolatoren richtig zu beschreiben.

1.13.1 Relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r

Experimentell lässt sich leicht verifizieren, dass die Kapazität C eines Kondensators sich ändert, wenn der vom \vec{E} -Feld eingenommene Raum mit einem isolierenden Material ausgefüllt wird. Es zeigt sich, dass C immer grösser $C(\text{Vakuum})$ ist. Durch das Verhältnis $C/C(\text{Vakuum})$ wird die Materialkonstante ϵ_r definiert:

$$(51) \quad \epsilon_r = C/C(\text{Vakuum}), \quad \text{Dielektrizitätskonstante } \epsilon_r \text{ (D.K.).}$$

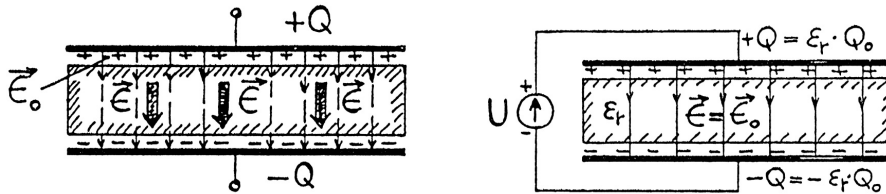
Typische Werte bei Zimmertemperatur und Normaldruck für einige feste, flüssige und gasförmige Stoffe sind:

Stoff:	D.K.:
Quarzglas	3.7
Porzellan	6
TiO ₂	40 – 80
Petroleum	2.1
Benzol	2.3
Aceton	21
Wasser	80.3
He	1.000060
O ₂	1.000486
O ₃	1.0019

Denken wir uns einen Plattenkondensator, welcher die **konstante Ladung Q** trägt, so dass das Feld $E(\text{Vakuum}) = E_0$ vorliegt. Füllen wir nun den Raum zwischen den Platten mit einem Isolator, so können wir aus (51) folgenden Schluss ziehen: Die Spannung $U = Q/C$ mit Dielektrikum ist kleiner als

im Vakuum, was bedeutet, dass der Mittelwert der Feldstärke E längs einer Feldlinie im Dielektrikum ebenfalls um den Faktor ϵ_r kleiner ist.

$$(52) \quad E = (1/\epsilon_0) \cdot E_0, \quad \text{kleinere Feldstärke } E \text{ im Dielektrikum, bei gleicher Ladung } Q \text{ auf den Platten.}$$



Legen wir eine **konstante Spannung U** über die Platten, so muss $E = E_0$ sein. Wegen $Q = U \cdot C$ muss dann beim Einschieben des Dielektrikums weitere Ladung von der Spannungsquelle auf den Kondensator fließen, die ursprüngliche Ladung Q_0 nimmt um den Faktor ϵ_r zu.

$$(53) \quad Q = \epsilon_r \cdot Q_0, \quad \text{mehr zugeführte Ladung, bei gleicher Spannung über dem Kondensator.}$$

Aus (39) folgt, dass dabei auch die potentielle Energie $(1/2) \cdot C \cdot U^2$ um den Faktor ϵ_r zunimmt, so dass wir mit (41) auch schreiben können:

$$(54) \quad w = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E^2/2, \quad \text{Energiedichte des Feldes im Dielektrikum.}$$

Die Vakuum-Feldstärke \vec{E}_0 folgt natürlich aus dem Coulomb'schen Gesetz (1) durch Aufsummieren der Feldbeiträge, erzeugt von den Ladungselementen $dQ = \sigma \cdot dA$ auf den Plattenflächen. Aus der Abschwächung des Feldes durch ein Dielektrikum nach (52) müssen wir schliessen, dass das Coulomb'sche Gesetz für die Feldstärke im Innern eines Isolators, herrührend von einer Punktladung Q im Abstand r , lautet:

$$(55) \quad \vec{E}(\vec{r}) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0)) \cdot (Q/r^2) \cdot \vec{e}_r, \quad \text{Coulombfeld im Dielektrikum.}$$

Übungsaufgabe:

Welche Bedeutung hat (55) für die Eigenschaften von Wasser ($\epsilon_r \cong 80$) als Lösungsmittel ?

1.13.2 Elektrische Polarisation \vec{P} und Suszeptibilität χ_e

Wir versuchen jetzt, die beobachteten Eigenschaften der Isolatoren mit einem mikroskopischen Modell zu erklären. Atome oder Moleküle können polar sein, d.h. sie können ein Dipolmoment \vec{p} besitzen. Es seien im Volumen V des Dielektrikums N solche Dipole \vec{p} vorhanden. Unter der Polarisation \vec{P} verstehen wir dann das Dipolmoment pro Volumeneinheit, also

$$(56) \quad \vec{P} = (1/V) \cdot \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad \text{Polarisation } \vec{P}.$$

Dimension: (Ladung/Fläche)

Einheit: C/m²

Falls die mikroskopischen Dipolvektoren \vec{p} regellos gerichtet sind, ist ihre Vektorsumme null und damit $P = 0$. Andererseits ist P maximal, wenn alle \vec{p} unter sich ausgerichtet sind. Im Allgemeinen muss ein äusseres \vec{E} -Feld angelegt werden, damit sich eine Polarisation ausbildet. Grundsätzlich führen dann zwei Prozesse zur Polarisation:

a) Verschiebungspolarisation:

Die Atome oder Moleküle besitzen zunächst kein Dipolmoment. Erst ein äusseres Feld \vec{E} deformiert die Elektronenwolke derart, dass ihr Ladungsschwerpunkt nicht mehr mit jenem der positiven Kernladungen zusammenfällt. Es gilt

$$(57) \quad \vec{p} = \alpha \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad \alpha = \text{Polarisierbarkeit des Atoms (Moleküls).}$$

Dimension von α : (Volumen)
Einheit: m^3

Alle mikroskopischen Dipolmomente \vec{p} sind parallel zum äusseren Feld \vec{E} gerichtet.

| **Die Verschiebungspolarisation ist temperatur-unabhängig.**

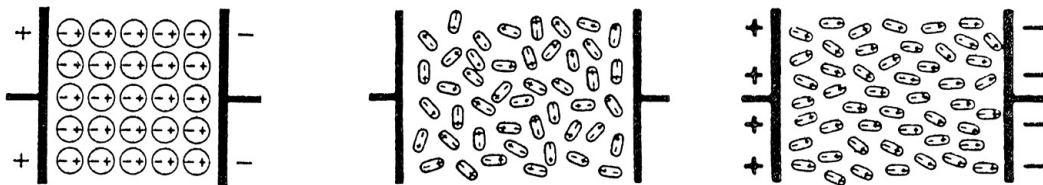
b) Orientierungspolarisation:

Die Moleküle besitzen schon ohne äusseres Feld ein **permanentes Dipolmoment** \vec{p} , sie sind **polar**.

Beispiele polarer Moleküle: H_2O , CHCl_3 , CH_2Cl_2 . Unpolare Moleküle: CH_4 , CCl_4 (Symmetrie). Das äussere \vec{E} -Feld richtet die permanenten mikroskopischen Dipole aus. Diese Ausrichtung wird aber durch die **Temperaturbewegung** behindert. P nimmt mit steigender Temperatur ab.

| **Die Orientierungspolarisation ist temperatur-abhängig.**

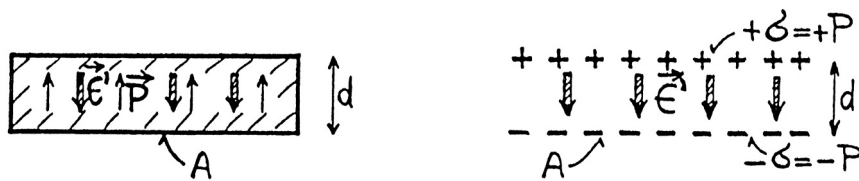
Verschiebungspolarisation tritt immer auf, auch als Zusatz zur Orientierungspolarisation.



Die Erfahrung zeigt, dass die Polarisation \vec{P} in sehr guter Näherung proportional zum wirkenden \vec{E} -Feld anwächst. Zur Verknüpfung von \vec{P} und \vec{E} führen wir eine dimensionslose Materialkonstante, die elektrische Suszeptibilität χ_e ein.

$$(58) \quad \vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad \chi_e = \text{elektrische Suszeptibilität.}$$

Wir denken uns jetzt eine dielektrische, ebene Platte der Dicke d und der Fläche A , in welcher eine homogene, senkrecht zu den Flächen A stehende Polarisation \vec{P} vorhanden ist. Das totale Dipolmoment dieser Platte ist dann $p(\text{total}) = P \cdot A \cdot d$. Nun belegen wir die Plattenflächen mit Ladung der konstanten Flächendichte $+\sigma$ bzw. $-\sigma$ und ersetzen das Materialvolumen durch Vakuum. Ist σ gerade gleich P , so erzeugt diese Ladungsverteilung dasselbe totale Dipolmoment $\sigma \cdot A \cdot d = P \cdot A \cdot d$, wie vorher die polarisierte Platte. Dies bedeutet, dass die beiden Systeme ausserhalb des Plattenvolumens dasselbe \vec{E} -Feld erzeugen. Zwischen den Flächenladungen $+\sigma$ und $-\sigma$ herrscht nach dem Satz von Gauss das homogene Feld $E' = \sigma/\epsilon_0$. Nun gilt auch in Anwesenheit eines Dielektrikums, dass beim Verschieben einer Probeladung auf einem geschlossenen Weg, die geleistete Arbeit verschwinden muss (sonst liesse sich ein Perpetuum mobile bauen). Also wie im Vakuum ist auch im Dielektrikum $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$.



Das heisst aber, dass das längs d **gemittelte Feld im Dielektrikum** ebenfalls gleich E' ist. Wegen $\sigma = P$ erhalten wir

$$(59) \quad \vec{E}' = -(1/\epsilon_0) \cdot \vec{P}, \quad \text{mittleres, durch die Polarisation } \vec{P} \text{ erzeugtes Feld } \vec{E}' \text{ im Dielektrikum.}$$

Nun betrachten wir wieder die Situation entsprechend der Figur auf S. 25 links. Offenbar kommt das Feld \vec{E} im Innern des Dielektrikums zustande durch Superposition des Vakuumfeldes \vec{E}_0 und dem Feld $\vec{E}' = -\vec{P}/\epsilon_0$ von der polarisierten Materie.

$$(60) \quad \vec{E} = \vec{E}_0 - (1/\epsilon_0) \cdot \vec{P}.$$

\vec{P} ist aber selbst durch das innere Feld \vec{E} über die Suszeptibilität χ_e bestimmt, nämlich durch $\vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$, dies in (60) eingesetzt, ergibt:

$$(61) \quad \vec{E} \cdot (1 + \chi_e) = \vec{E}_0.$$

Der Vergleich mit (52) liefert den Zusammenhang

$$(62) \quad 1 + \chi_e = \epsilon_r.$$

Die Polarisation \vec{P} erzeugt an der Oberfläche des Dielektrikums eine **Polarisationsladung** $Q_p = P \cdot A$, welche das äussere Feld E_0 um den Faktor $\epsilon_r^{-1} = (1 + \chi_e)^{-1}$ schwächt. Allgemein ist die folgende Aussage richtig:

An der Grenzfläche eines Dielektrikums ist die Normalkomponente E_\perp des elektrischen Feldes unstetig.

Im Unterschied zu den Polarisationsladungen Q_p an dielektrischen Grenzflächen, bezeichnet man die beweglichen Ladungen Q an Leiteroberflächen als **wahre Ladungen**. Wir können sagen:

Neben den wahren Ladungen sind auch die Polarisationsladungen Quelle des \vec{E} -Feldes.

1.13.3 Die Verschiebungsdichte \vec{D}

Zur Beschreibung der elektrischen Phänomene in Dielektrika ist es sinnvoll, eine weitere physikalische Grösse einzuführen, nämlich das Vektorfeld \vec{D} der elektrischen Verschiebung. Dieses ist definiert durch

$$(63) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}, \quad \text{Verschiebungsdichte } \vec{D}.$$

Dimension: (Ladung/Fläche)

Einheit: C/m²

Im Vakuum ist $\vec{P} = 0$ und $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$. In isotropen Dielektrika ist die Polarisation \vec{P} immer parallel zu \vec{E} gerichtet, so dass auch der \vec{D} -Vektor zu \vec{E} parallel ist. In anisotropen Medien ist dies aber nicht so, weil die Elektronen sich nicht in jeder Richtung gleich gut verschieben lassen und folglich die

Richtung von \vec{P} nicht gleich der von \vec{E} ist (vgl. Doppelbrechung in der Optik). Im Allgemeinen fallen die Feldlinien von \vec{D} nicht mit jenen von \vec{E} zusammen. Die Suszeptibilität ist dann ein Tensor. Wir beschränken uns hier jedoch auf isotrope Medien.

Drückt man \vec{P} mit (58) durch die Suszeptibilität χ_e aus, so folgt aus (63)

$$(64) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}(1 + \chi_e) \quad \text{oder} \quad \vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}.$$

Während die Normalkomponente des \vec{E} -Feldes beim Eintritt ins Dielektrikum wegen der Reduktion um den Faktor $1/\epsilon_r$ un stetig ist, trifft dies für das \vec{D} -Feld nicht zu, denn nach (64) tritt der Faktor ϵ_r bei der Bildung von \vec{D} auch im Zähler auf, so dass er sich mit $(1/\epsilon_r)$ wegekürzt. Der von aussen ins Dielektrikum eintretende Feldfluss von \vec{D} setzt sich ungeschwächt ins Innere fort; dies bedeutet, dass die an der Grenzfläche sitzenden Polarisationsladungen keine Quellen für das \vec{D} -Feld darstellen.

Nur wahre Ladungen sind Quellen des \vec{D} -Feldes.

Nun können wir die eingangs Kapitel 1.13 gestellte Frage nach der Gültigkeit von (17) und (12) in Dielektrika beantworten. Die im Gauss'schen Satz (17) rechts auftretenden Ladungen fassen wir als „wahre“ Ladungen auf. Im Vakuum ($\vec{P} = 0$) ist wegen (63) die Gleichung (17) äquivalent

$$(65) \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint \rho(x, y, z) \cdot dV, \quad \text{Satz von Gauss.}$$

In Dielektrika treten zusätzlich noch Polarisationsladungen auf, diese sind aber keine Quellen des \vec{D} -Feldes, so dass (65) sowohl im Vakuum, als auch im Dielektrikum die richtige Form des Gauss'schen Satzes ist.

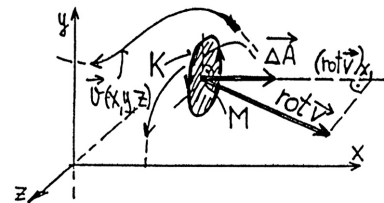
Die Gleichung (12) für das \vec{E} -Feld, welches auch im Dielektrikum für die Kraftwirkung auf Ladungen verantwortlich ist, ist nach wie vor gültig (siehe obiges Argument mit dem Perpetuum mobile).

Mit (64) lässt sich die Gleichung (54) für die Energiedichte im Feld in der allgemein gültigen Form schreiben

$$(66) \quad w = \vec{D} \cdot \vec{E}/2, \quad \text{Energiedichte im elektrostatischen Feld.}$$

1.13.4 Zum Begriff der Rotation eines Vektorfeldes \vec{v} ; $\text{rot } \vec{v}$

Im Kapitel 1.7 haben wir den Begriff der Divergenz eines Vektorfeldes \vec{v} , $\text{div } \vec{v}$, eingeführt. Sie ist eine skalare Grösse und macht lokal, d.h. in jedem Punkt des Feldes \vec{v} eine Aussage über die Quellstärke an dieser Stelle. Eine andere Aussage über eine lokale Eigenschaft des Vektorfeldes \vec{v} macht seine „Rotation“ im betreffenden Punkt. Die Rotation eines Vektorfeldes ist wieder ein Vektor, wird also z.B. durch drei kartesische Komponenten bestimmt.



Es sei ein Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z)$ gegeben. In einem beliebigen Punkt M ist die x-Komponente $(\text{rot } \vec{v})_x$, folgendermassen definiert: Durch den Punkt M legen wir ein kleines Flächenelement ΔA , dessen Normalenvektor $\vec{\Delta A}$ in x-Richtung zeigt. ΔA werde durch die Kurve K berandet, welche bezüglich der x-Richtung im rechts-Sinn durchlaufen wird. Dann ist

$$(67) \quad (\text{rot } \vec{v})_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} K \frac{\oint \vec{v} \cdot d\vec{r}}{\Delta A}, \quad \text{x-Komponente von rot } \vec{v}.$$

Entsprechendes gilt für die anderen Komponenten.

Übungsaufgabe:

Betrachte das Geschwindigkeitsfeld einer mit ω um die x -Achse rotierenden starren Scheibe und berechne $(\text{rot } \vec{v})_x$ auf der x -Achse (Die \vec{v} -Feldlinien sind hier geschlossene Kreislinien).

Beachte, dass für das konservative \vec{E} -Feld $\text{rot } \vec{E}$ verschwindet, weil $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$ immer null ist. Dies bedeutet auch:

| Ein rotationsfreies Feld hat keine geschlossenen Feldlinien (es ist kein „Wirbelfeld“).

1.13.5 Die Gesetze der Elektrostatik

In diesem Kapitel haben wir zur Beschreibung der Elektrostatik **drei Vektorfelder** benützt, nämlich

$$\left\| \begin{array}{ll} \text{Elektrisches Feld:} & \vec{E} \\ \text{Elektrische Polarisation:} & \vec{P} \\ \text{Elektrische Verschiebungsdichte:} & \vec{D} \end{array} \right\|$$

Ferner haben wir **zwei Materialkonstanten** definiert:

$$\left\| \begin{array}{ll} \text{Relative Dielektrizitätskonstante:} & \epsilon_r \\ \text{Elektrische Suszeptibilität:} & \chi_e \end{array} \right\|$$

Es bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

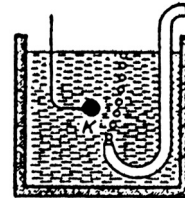
$$\begin{array}{l} \vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad \epsilon_r = 1 + \chi_e \\ \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \end{array}$$

Wir können jetzt die Gesetze der Elektrostatik im Dielektrikum (mit $\epsilon_r = 1$ gelten sie auch im Vakuum) folgendermassen formulieren:

Integrale Form:	Differentielle Form:
(68) $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint \varrho(x, y, z) \cdot dV$	(68a) $\text{div } \vec{D} = \varrho(x, y, z)$
(69) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$	(69a) $\text{rot } \vec{E} = 0$

Demonstrationen:

1. Aluminium-Späne zwischen Kondensator-Platten
Kraft auf geladene Partikel
2. Ablenkung eines Wasserstrahls im E-Feld
3. Elektronenstrahl und Ablenkplatten im K.O.
4. Offene K.O.-Röhre
5. D.K.-Messung von Cibanit, Glas und Öl
6. D.K.-Messung von Wasserstoff, Luft und CO_2
Qualitativ mittels Schwingkreis mit Schallfrequenz
7. Kraft des inhomogenen E-Feldes auf elektrischen Dipol
Luftblasen in Öl
8. Kollektion von technischen Kondensatoren



Kapitel 2

Stationäre elektrische Ströme

In der Elektrostatik befinden sich die beweglichen Ladungsträger in Ruhe; es existieren keine Potentialdifferenzen in einem Leiter. Durch äussere Energiequellen (z.B. einer Batterie) kann jedoch längs eines Leiters eine Potentialdifferenz aufrechterhalten werden, so dass sich die **Ladungsträger bewegen** und damit ein **elektrischer Strom** fliesst. Die Stromstärke I in einem Leiter ist definiert als Ladungsmenge Q , die pro Zeiteinheit durch jeden Leiterquerschnitt hindurchfliesst.

$$(70) \quad I = dQ/dt, \quad \text{Stromstärke } I.$$

Dimension: (Ladung/Zeit)

Einheit: C/s, 1 C/s = 1 A (Ampere)

Ein Leiter ist ein System, welches bewegliche Ladungsträger anbietet. Wichtige Beispiele solcher Systeme sind:

- a) Metalle mit Elektronen als Ladungsträger.
- b) Elektrolyte mit beweglichen Ionen.
- c) Freie Ladungen im Vakuum, z.B. in der Elektronenröhre.

Enthält der Leiter an der Stelle (x, y, z) n Ladungsträger der Ladung q pro Volumeneinheit, und bewegen sich diese mit der Geschwindigkeit \vec{v} , so ergibt sich die Stromdichte

$$(71) \quad \vec{j} = n(x, y, z) \cdot q \cdot \vec{v}(x, y, z), \quad \text{Stromdichte } \vec{j}.$$

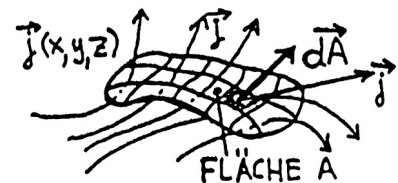
Dimension: (Strom/Fläche)

Einheit: A/m²

Der Strom durch eine beliebige Leiterfläche kann dann geschrieben werden als

$$(72) \quad I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}, \quad \text{Strom durch Fläche } A.$$

Stationäre Ströme sind dadurch gekennzeichnet, dass $\vec{j}(x, y, z)$ **nicht von der Zeit abhängt**.



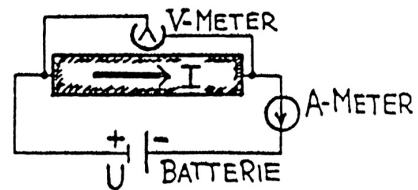
2.1 Der elektrische Widerstand R

Liegt über den Enden eines Leiters die von einer Batterie aufrechterhaltene Potentialdifferenz oder Spannung U , so wird der Widerstand des Leiters definiert durch

$$(73) \quad R = U/I, \quad \text{elektrischer Widerstand } R.$$

Dimension: (Spannung/Stromstärke)

Einheit: V/A, 1 V/A = 1 Ω (Ohm)



Die von der Batterie dem Leiter zugeführte Leistung P , ist gleich der Arbeit, welche pro Zeiteinheit aufgebracht werden muss, um in der Batterie positive Ladung vom negativen zum positiven Pol zu transportieren.

$$(74) \quad P = dQ \cdot U/dt \quad \text{oder} \quad P = I \cdot U, \quad \text{Leistung } P.$$

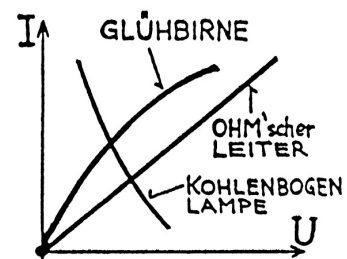
Mit (73) kann die Leistung auch durch den Widerstand R und U oder I ausgedrückt werden, also

$$(75) \quad P = U^2/R \quad \text{oder} \quad (75a) \quad P = I^2 \cdot R.$$

Die im Verbraucher z.B. in Wärme umgewandelte Energie ist gleich der Abnahme der chemischen Energie in der Batterie. Auf die Physik der Energiequellen, sowie Strom- und Spannungsquellen gehen wir später ein. Dasselbe gilt für Strom- und Spannungsmessinstrumente.

2.2 Strom-Spannungs-Charakteristik. Ohm'sches Gesetz

Für die meisten Leiter ist der Widerstand R nicht konstant, sondern ist seinerseits eine Funktion des Stromes oder der Spannung. Den Verlauf der Stromstärke $I = f(U)$ als Funktion der am Verbraucher angelegten Spannung U , nennt man **Strom-Spannungs-Charakteristik**. Nebenstehende Figur zeigt einige Beispiele. Der Sonderfall, dass I linear mit U wächst, der Widerstand $R = U/I$ also konstant ist, trifft z.B. für metallische Leiter bei konstanter Temperatur in guter Näherung zu; man nennt solche Leiter **Ohm'sche Leiter**. Sie gehorchen der Beziehung



$$(76) \quad R = U/I = \text{konst.}, \quad \text{Ohm'sches Gesetz.}$$

Spezifischer Widerstand ρ_w eines Ohm'schen Leiters:

Bei gegebener Geometrie des Leiters ist der Widerstand materialabhängig. Als entsprechende Materialkonstante wird der spezifische Widerstand eingeführt. Ein homogenes, Ohm'sches Material mit konstantem Querschnitt A und der Länge L , besitzt den Widerstand

$$(77) \quad R = \rho_w \cdot L/A, \quad \rho_w = \text{spezifischer Widerstand.}$$

Dimension von ρ_w : (Widerstand \cdot Länge)

Einheit: $\Omega \cdot m$

Der reziproke Wert von ρ_w ist das Leitvermögen.

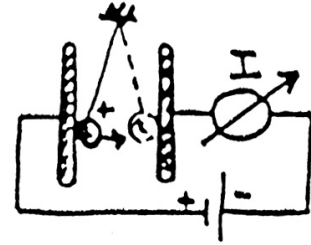
$$(78) \quad 1/\rho_w = \sigma_w, \quad \text{Leitvermögen } \sigma_w.$$

Dimension: $1/(\text{Widerstand} \cdot \text{Länge})$

Einheit: $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$

Demonstrationen:

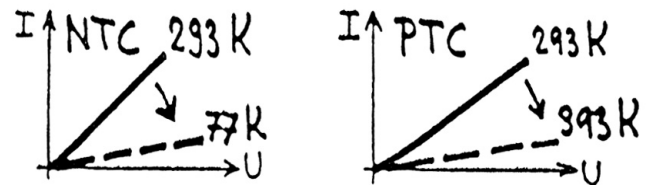
1. Strom = bewegte Ladung
Metallkugel als beweglicher Ladungsträger.



2. Zwei Beispiele von Strom-Messinstrumenten
Hitzdraht- und Drehspulinstrument.
3. Charakteristik verschiedener Leiter



4. Temperatur-Abhängigkeit von R
NTC- und PTC-Widerstand



5. Leitender Glasstab
Isolator oder nicht, eine Frage der Temperatur.
(Ionenleitung bei ca. 900 K beobachtet).

6. Supraleitung bei 90 K
Aktuell: YBaCuO-Probe, als 90 K-Supraleiter
seit 2. März 1987 bekannt. Auch Schweben
auf inhomogenen Magnetfeld demonstriert.



In einem Strom führenden Leiterstück der Länge L herrscht das elektrische Feld $E = U/L$ und es ist $I = E \cdot L/R$. Mit (77) heisst dies auch: $I/A = E/\rho_w$ oder

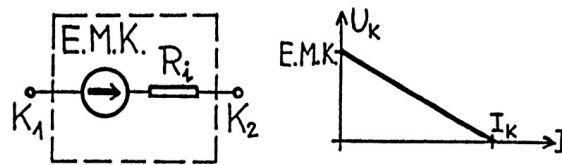
$$(79) \quad \vec{j} = \sigma_w \cdot \vec{E}. \quad \text{Stromdichte} = \text{Leitvermögen} \cdot \text{Feldstärke.}$$

Im homogenen Medium ist die Stromdichte \vec{j} in jedem Punkt parallel zur lokalen Feldstärke.

2.3 Quellen elektrischer Energie; Spannungs- und Stromquellen

Elektrische Energiequellen sind immer auch Ladungs- und Spannungsquellen. In ihrem Innern wirken Kräfte, welche positive und negative Ladungen trennen und an den betreffenden Polen in einem gewissen Ausmass anhäufen, also zwischen diesen eine Spannung (von alters her „elektromotorische Kraft“, E.M.K. genannt) erzeugen. Je nach Art der Quelle sind verschiedene Ursachen für diese Kräfte verantwortlich, etwa chemische Prozesse beim galvanischen Element oder elektrische Felder bei induktiven Quellen (Dynamo). Eine Quelle besitzt neben ihrer **E.M.K.** immer auch einen **Innenwiderstand R_i** , denn sie enthält metallische oder elektrolytische Leiter. Schematisch kann die Quelle als eine Serieschaltung der E.M.K. mit dem Innenwiderstand R_i aufgefasst werden. Bei Belastung mit der Stromstärke I entsteht über R_i der Spannungsabfall $I \cdot R_i$, so dass zwischen den Klemmen K_1 und K_2 die Spannung U_k entsteht:

$$(80) \quad U_k = E.M.K. - I \cdot R_i, \quad \text{Klemmenspannung } U_k.$$



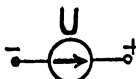
Wird die Quelle kurzgeschlossen, d.h. werden die Klemmen K_1 und K_2 widerstandslos verbunden, so fliesst der Strom

$$(81) \quad I_k = E.M.K./R_i, \quad \text{Kurzschluss-Strom.}$$

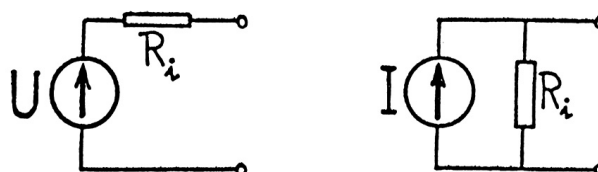
Durch Kurzschliessen können Quellen mit niedrigem Innenwiderstand zerstört werden (z.B. Autoakku). Sind die Klemmen offen (Lastwiderstand $R = \infty$), also $I = 0$, so ist die Klemmenspannung gleich der E.M.K. und heisst die **Leerlaufspannung**.

Kurzschluss-Strom und Leerlaufspannung charakterisieren die Quelle.

Zum Berechnen von Schaltungen werden wirkliche Energiequellen mit Vorteil durch fiktive, ideale Elemente dargestellt. Es sind dies

Spannungsquelle  **und Stromquelle.**

Eine Spannungsquelle liefert unabhängig von der Belastung immer dieselbe Klemmenspannung U . Eine Stromquelle liefert auch bei noch so grossem Lastwiderstand immer denselben Strom I . Die Pfeilrichtung in den Symbolen gibt die Stromrichtung durch den geschlossenen Kreis an. Die folgenden Darstellungen einer Energiequelle durch Spannungsquelle mit Seriewiderstand oder Stromquelle mit Parallelwiderstand sind **aequivalent**, denn beide ergeben die Leerlaufspannung $U(\text{leer}) = E.M.K.$ und den Kurzschluss-Strom $I(\text{kurz}) = E.M.K./R_i$, vorausgesetzt, dass für die Spannungsquelle $U = E.M.K.$ und für die Stromquelle $I = E.M.K./R_i$ gewählt wird.



2.4 Leitungsmechanismen

Wenn wir die spezifischen elektrischen Widerstände verschiedener Materialien vergleichen, können sie in folgende Klassen eingeteilt werden: **Metalle**, **Halbleiter** und **Isolatoren**. Wir greifen einige typische Vertreter und ihre spezifischen Widerstände bei Raumtemperatur heraus.

Metalle:	$\Omega \cdot m$	Halbleiter:	$\Omega \cdot m$	Isolatoren:	$\Omega \cdot m$
Silber	$0.016 \cdot 10^{-6}$	Germanium	0.46	Porzellan	$\sim 10^{12}$
Kupfer	$0.017 \cdot 10^{-6}$	Silizium	$6.25 \cdot 10^4$	Quarzglas	$5 \cdot 10^{16}$
Gold	$0.023 \cdot 10^{-6}$			Hartgummi	$2 \cdot 10^{13}$
Eisen	$0.098 \cdot 10^{-6}$				
Quecksilber	$0.958 \cdot 10^{-6}$				

Zum Vergleich der spezifische Widerstand einer NaCl-Lösung:

0.1 mol/m ³	930		
1 mol/m ³	94		

Die gewaltigen Unterschiede in der elektrischen Leitfähigkeit dieser Stoffgruppen sind in ihren unterschiedlichen Leitungsmechanismen begründet. Wir betrachten an dieser Stelle ein klassisches (nicht quantenmechanisches) Modell der metallischen Leitung, sowie die elektrolytische Leitung.

2.4.1 Metallische Leitung

In einem Metall sind die Valenzelektronen nicht an ein bestimmtes Atom gebunden, sondern sie können innerhalb des Kristallgitters, welches durch die Atomrümpfe (positive Ionen) gebildet wird, umherwandern. Beachte aber, dass in jedem Volumenelement, das noch eine grosse Zahl von Ionen enthält, Ladungsneutralität herrscht. Im Falle des Kupfers wird pro Atom etwa ein **Leitungselektron** zur Verfügung gestellt. Wir können die Gesamtheit der Leitungselektronen als „Elektronengas“ auffassen, welches im Metallvolumen eingesperrt ist. Diese Elektronen besitzen eine mittlere Geschwindigkeit $\langle \vec{v} \rangle$ von etwa $1.6 \cdot 10^6$ m/s, deren Richtung ohne äusseres Feld regellos verteilt ist.

Legen wir ein äusseres Feld an, so überlagert sich der ungeordneten Bewegung eine für alle Elektronen gleiche Geschwindigkeitskomponente in negativer Feldrichtung. Die Elektronen stossen aber mit den Atomrümpfen zusammen und geben dadurch die im E-Feld gewonnene Energie ab, was zu einer Temperaturerhöhung des Metalls führt. Die Elektronen besitzen eine mittlere freie Weglänge s , so dass die Zeit zwischen zwei Stössen im Mittel gerade gleich $s/\langle v \rangle$ ist. Während dieser Zeit werden die Elektronen ihre Geschwindigkeit um

$$\Delta \vec{v} = -(e \cdot \vec{E}/m) \cdot (s/\langle v \rangle)$$

ändern. Die mittlere gerichtete Geschwindigkeit zwischen zwei Stössen ist also

$$(82) \quad \vec{v}(\text{Drift}) = -e \cdot \vec{E} \cdot s / (2 \cdot \langle v \rangle \cdot m), \quad \text{Driftgeschwindigkeit.}$$

Sind n Leitungselektronen pro Volumeneinheit vorhanden, so ergibt sich mit (71) der Zusammenhang

$$(83) \quad \vec{j} = n \cdot e^2 \cdot (s / (2 \cdot \langle v \rangle \cdot m)) \cdot \vec{E},$$

und damit wegen (79)

$$(84) \quad \sigma_w = n \cdot e^2 \cdot s / (2 \cdot \langle v \rangle \cdot m) \quad \text{oder} \quad \varrho_w = 2 \cdot \langle v \rangle \cdot m / (n \cdot e^2 \cdot s).$$

Die mittlere freie Weglänge s nimmt mit steigender Temperatur ab, weil die intensivere Bewegung der Ionenrümpfe die Elektronen stärker behindert, was den normalerweise beobachteten positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes von Metallen erklärt. Ist T konstant, kommen jedoch in (84) nur konstante Grössen vor, d.h. es ergibt sich aus diesem Modell tatsächlich ein **Ohm'scher Leiter**. Die Bewegung der Elektronen unter dem Einfluss des E-Feldes ist zu vergleichen mit der Bewegung eines im Schwerfeld fallenden Partikels in einer viskosen Flüssigkeit. Es ist ein **dissipativer Vorgang**. Die pro Zeiteinheit entstehende **Joule'sche Wärme** ist äquivalent der elektrischen Leistung $P = I \cdot U$ der äusseren Energiequelle.

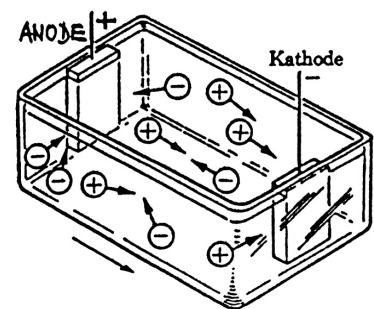
Beachte, dass die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ von der ungeordneten Temperaturbewegung der Elektronen etwa 10^{10} mal grösser ist, als eine typische Driftgeschwindigkeit $v(\text{Drift})$, welche den Strom erzeugt.

Übungsaufgabe:

Berechne $v(\text{Drift})$ für Kupfer, wenn $j = 1 \text{ A/mm}^2$ ist.

2.4.2 Elektrolytische Leitung; Faraday'sche Gesetze

Elektrolytische Lösungen und Schmelzen sind Stoffe, in welchen geladene Atome oder Moleküle, also **Ionen**, die beweglichen Ladungsträger sind. Im Gegensatz zur metallischen Leitung treten hier chemische Prozesse auf; es scheiden sich an den Elektroden Stoffe ab. Betrachten wir als Beispiel eine Silberchlorid-Lösung, so wandern positive Silberionen (Ag^+) zur negativen Elektrode (Kationen) und negative Chlorionen (Cl^-) zur positiven Elektrode (Anionen).



Für die Masse m des abgeschiedenen Stoffes und den damit verbundenen Ladungstransport Q gelten die **Faraday'schen Gesetze**:

$$\text{I. } m = A \cdot Q, \quad A = \text{elektrochemisches Äquivalent.}$$

Dimension: (Masse/Ladung)

Einheit: kg/C

Die elektrolytisch an einer Elektrode abgeschiedene Stoffmenge ist der transportierten Ladung $Q = I \cdot t$ proportional.

Ein Ion der **Wertigkeit Z** trägt die Ladung $Z \cdot e$. Ist M die Molmasse und N_A die Avogadrozahl, so besteht die Beziehung

$$Q = (m/M) \cdot N_A \cdot Z \cdot e \quad \text{oder} \quad m = (M/Z) \cdot (1/(N_A \cdot e)) \cdot Q.$$

$$M/Z = \text{äquivalente Masse}, \quad N_A \cdot e = F, \quad \text{die Faraday-Zahl;} \\ F = 96487 \text{ C/mol.}$$

Das zweite Faraday'sche Gesetz lautet dann:

Durch gleiche elektrische Ladungen Q abgeschiedene Stoffmengen verhalten sich wie die äquivalenten Massen der betreffenden Stoffe.

$$\text{II. } m = (M/Z) \cdot Q/F.$$

2.5 Die Kirchhoff'schen Gesetze

Wir fragen jetzt nach der Stromverteilung innerhalb eines Leitersystems, in welchem die einzelnen stromführenden **Zweige** in einem beliebigen **Netz** verknüpft sind. Die Widerstände der einzelnen Leiter und die in ihnen allfällig vorhandenen Spannungsquellen seien vorgegeben; gesucht sind die einzelnen **Zweigströme** I_k . Das Problem kann mit Hilfe der zwei Kirchhoff'schen Regeln gelöst werden.

$$1. \quad \sum I_k = 0, \quad \text{Knotenregel.}$$

In jedem Knoten (Verzweigungspunkt) ist die Summe der zufließenden gleich der Summe der wegfließenden Ströme (algebraische Summe).

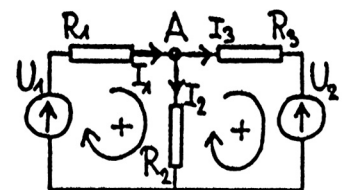
$$2. \quad \sum I_k \cdot R_k = \sum U_k, \quad \text{Maschenregel.}$$

In jeder Masche (aus dem Leiternetz herausgegriffener, in sich geschlossener Stromkreis) ist die Summe der Spannungsabfälle in den einzelnen Zweigen gleich der Summe der wirkenden EMK's.

Die mit willkürlichen Pfeilrichtungen markierten, zunächst noch unbekanntenen Stromrichtungen, müssen für die Maschenregel im Uhrzeigersinn etwa positiv, die andern negativ gerechnet werden. Ebenfalls sind die EMK's positiv zu zählen, wenn sie einen Strom im positiven Sinn hervorrufen.

Die Knotenregel folgt aus der Überlegung, dass in einem Knoten keine Ladung angehäuft werden kann, und dass das Prinzip der Ladungserhaltung gelten muss. Die Maschenregel ist eine Konsequenz der Grundgleichung (69). Im Beispiel des nebenstehenden Netzwerkes erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die unbekanntenen Zweigströme:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 && \text{Knoten A} \\ I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 &= U_1 && \text{Masche 1)} \\ - I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 &= U_2 && \text{Masche 2)} \end{aligned}$$



Bemerkung:

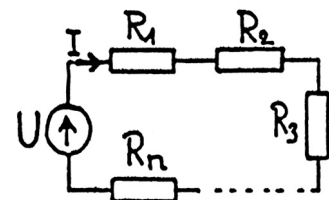
Es ist ökonomischer, die Zweigströme als Superposition von Maschenströmen darzustellen, so dass die Knotenregel automatisch erfüllt ist (siehe Übungen und Ergänzungen).

Einfache Anwendungen:

a) Serieschaltung von Widerständen

$$\begin{aligned} I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_n &= U \\ I \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_n) &= U \end{aligned}$$

$$(85) \quad R(\text{tot}) = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$



b) Parallelschaltung von Widerständen

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

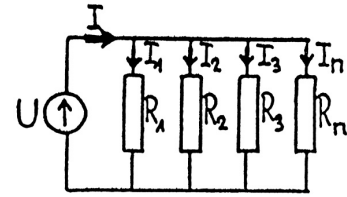
$$I_1 \cdot R_1 = U$$

$$I_2 \cdot R_2 = U, \quad U/R_1 + U/R_2 + \dots + U/R_n = I$$

...

$$I_n \cdot R_n = U, \quad U/R_{tot} = I$$

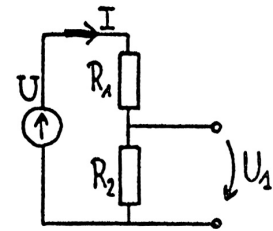
$$(86) \quad 1/R_{tot} = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n.$$



c) Spannungsteiler (Potentiometer)

Im Leerlauf, d.h. mit $R_{Last} = \infty$, ist $I = U/(R_1 + R_2)$. Die Ausgangsspannung wird über R_2 abgegriffen und beträgt somit ohne Belastung

$$(87) \quad U_1 = U \cdot R_2 / (R_1 + R_2).$$



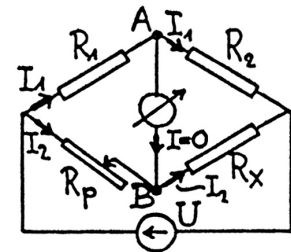
d) Die Wheatstone'sche Brücke

Das Potentiometer R_p wird so eingestellt, dass der Brückenstrom I_b verschwindet und somit die Potentiale $U(A)$ und $U(B)$ gleich sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_p \quad \text{und} \quad I_1 \cdot R_2 = I_2 \cdot R_x$$

R_1 , R_2 und R_p sind bekannt, so dass R_x bestimmt werden kann:

$$R_x = R_2 \cdot R_p / R_1.$$

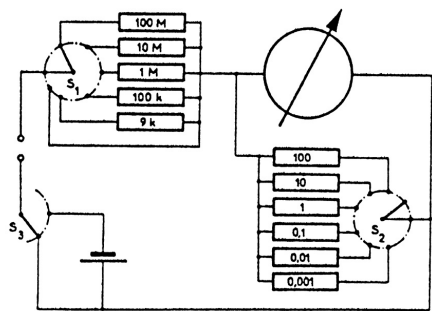


Übungsaufgabe:

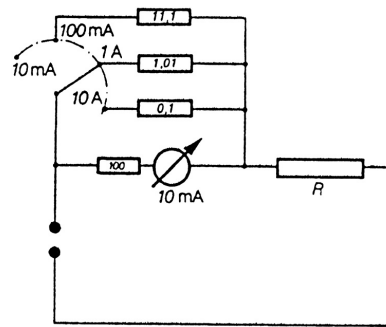
- Berechne die Ausgangsspannung eines Potentiometers, welches mit einem Widerstand R belastet wird.
- Berechne den Brückenstrom einer Wheatstone'schen Brücke als Funktion der vier Zweigwiderstände.

Ampere- und Voltmeter:

Der Zeigerausschlag der meisten Messgeräte hängt nur vom Strom durch das Instrument ab (z.B. vom Strom durch die Drehspule). Innenwiderstand R_i und der für Vollausschlag erforderliche Strom $I(max)$ charakterisieren das Instrument. Durch geeignete Parallelwiderstände (Shunt) kann der Strommessbereich erhöht werden. Andererseits kann das Amperemeter als Voltmeter verwendet werden, denn bei Vollausschlag liegt die Spannung $U = I(max) \cdot R_i$ über den Klemmen des Instrumentes. Durch Zuschalten von geeigneten Seriewiderständen wird der Messbereich erhöht.



Vielfachmesser für Strom, Spannung, Widerstand (schematisch)



Ein umschaltbares Amperemeter (verschiedene Parallelwiderstände oder Shunts) mißt den Strom durch den Verbraucher R

Demonstrationen:

1. Fallende Charakteristik der Bogenlampe
2. Kurzschluss-Strom und Leerlauf-Spannung einer Batterie
3. Elektrolytische Zersetzung von Wasser
4. Elektrolytische Abscheidung von Blei („Bleibaum“)
5. Potentiometer
6. Wheatstone'sche Brücke
7. Umeichen eines A-Meters zu einem V-Meter
8. Vergleich von statischem und stromführendem V-Meter
9. Kompensationsmethode

2.6 Das magnetische Feld \vec{B} stationärer Ströme (Magnetostatik)

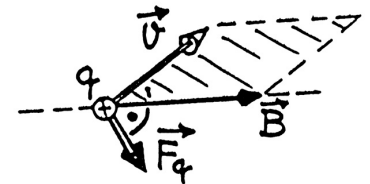
Das magnetische Feld \vec{B} hat die Eigenschaft, auf eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Probeladung q eine Kraft \vec{F}_q auszuüben und ist definiert durch die Beziehung

$$(87) \quad \vec{F}_q = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \quad \text{Lorentzkraft.}$$

Aus dieser Definition ergibt sich für \vec{B}

Dimension: (Kraft · Zeit)/(Ladung · Länge), und die
Einheit: N · s/(C · m) oder Vs/m², 1 Vs/m² = 1 T (Tesla).

Die Lorentzkraft steht sowohl senkrecht auf \vec{B} als auch auf die momentane Geschwindigkeit \vec{v} , d.h. auf die Bahnkurve des geladenen Teilchens. Letzteres bedeutet:



Das stationäre Magnetfeld leistet keine Arbeit am geladenen Teilchen.

Befindet sich ein stromführender Leiter, der n bewegliche Ladungsträger der Ladung q pro Volumeneinheit enthält, in einem Magnetfeld \vec{B} , so erfährt jedes Leiterelement dL eine Kraft $d\vec{F}$. Diese lässt sich mit (71) und (87) berechnen:

Ist der Leiterquerschnitt A , so enthält das Element der Länge dL gerade $n \cdot A \cdot dL$ Ladungsträger, welche nach (87) die Kraft $n \cdot A \cdot dL \cdot q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ erfahren. Nach (71) ist aber $n \cdot q \cdot \vec{v} = \vec{j}$ die Stromdichte und $A \cdot j = I$ die Stromstärke. Fassen wir das Leiterelement als Vektor $d\vec{L}$ in Richtung der Stromdichte auf, können wir schreiben:

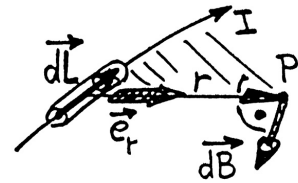
$$(88) \quad d\vec{F} = I \cdot d\vec{L} \times \vec{B}, \quad \text{Biot-Savart-Kraft.}$$

Wir haben bisher festgestellt, dass bewegte Ladungen und stromführende Leiter im Magnetfeld Kräfte erfahren, ohne danach zu fragen, auf welche Weise \vec{B} -Felder überhaupt zustande kommen. Experimente von **Oersted** (1819), **Biot** und **Savart** (1820) sowie **Ampere** (1820-1825), haben gezeigt, dass elektrische Ströme Magnetfelder verursachen. Die exakte Beziehung zwischen Strom und Magnetfeld kann durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$(89) \quad d\vec{B} = \mu_0 / (4 \cdot \pi) \cdot I \cdot (d\vec{L} \times \vec{e}_r) / r^2, \quad \text{Biot-Savart-Gesetz.}$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s} / (\text{A} \cdot \text{m}), \quad \text{Induktionskonstante.}$$

Jedes Leiterelement erzeugt am festen Ort P (der betrachtete „Aufpunkt“) einen Feldbeitrag $d\vec{B}$ gemäss (89). Das Gesamtfeld \vec{B} in P erhält man durch Integration von (89) entlang des notwendigerweise geschlossenen Leiters. (89) führt durch mathematische Umformung auf



$$(90) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{A}, \quad \text{Ampere'sches Verkettungsgesetz.}$$

und

$$(91) \quad \oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \text{es existieren keine magnetischen Monopole.}$$

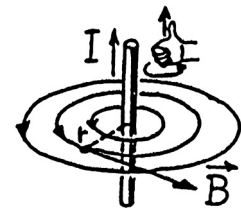
oder in differentieller Schreibweise:

$$(90a) \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} \quad \text{und} \quad (91a) \quad \text{div } \vec{B} = 0.$$

Wir wenden nun die Gesetze (89) oder (90) auf spezielle Leiterkonfigurationen an.

a) \vec{B} -Feld des geradlinigen Stromes

Aus Symmetriegründen sind hier die \vec{B} -Feldlinien sicher konzentrische Kreise zum Leiter. Die Anwendung des Ampere'schen Verkettungsgesetzes ist deshalb besonders einfach. Das Linienintegral längs einer Feldlinie mit Radius r ergibt dann $2 \cdot \pi \cdot r \cdot B(r)$, während das Integral auf der rechten Seite von (90) gleich dem Strom I ist. Wir erhalten



$$(92) \quad B(r) = \mu_0 \cdot I / (2 \cdot \pi \cdot r).$$

Beachte, dass die Richtung von \vec{B} einen Umlaufsinn definiert, welcher mit der Stromrichtung ein „Rechtssystem“ bildet („rechte Handregel“).

Übungsaufgabe:

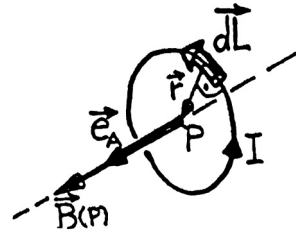
Versuche, das Resultat (92) durch Integration von (89) längs des geraden Drahtes zu erhalten.

b) Das \vec{B} -Feld im Zentrum eines Kreisstromes

In diesem Fall bietet sich das Biot-Savart-Gesetz zur Lösung an. Der Aufpunkt P liegt im Zentrum des Kreisstromes, d.h. r ist konstant und $d\vec{L} \times \vec{e}_r = dL \cdot \vec{e}_A$. (89) liefert:

$$B = \mu_0 / (4 \cdot \pi) \cdot I \cdot 2 \cdot \pi \cdot r / r^2 \text{ und}$$

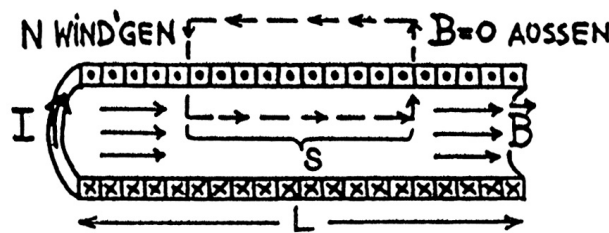
$$(93) \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot I / (2 \cdot r) \cdot \vec{e}_A.$$



c) \vec{B} -Feld der langen, dünnen Spule

Eine Spule (Solenoid) sei im Vergleich zum Windungsradius sehr lang, so dass Randeffekte vernachlässigt werden können. Aus Symmetriegründen muss das \vec{B} -Feld parallel zur Rotationssymmetrieachse liegen. Wir wenden das Ampere'sche Verkettungsgesetz (90) an und wählen den rechteckigen Integrationsweg entsprechend untenstehender Figur. Nur das achsenparallele Wegstück im Innern der Spule liefert Beiträge zum Linienintegral, denn die radial nach aussen verlaufenden Wegstücke stehen normal zum \vec{B} -Feld und in grosser Entfernung von der Achse ist $B = 0$. Die rechte Seite von (90) ergibt $\mu_0 \cdot N \cdot (s/L) \cdot I$, wenn L die Spulenlänge, N die Gesamtwindungszahl und s die Länge des im Innern der Spule liegenden achsenparallelen Wegstückes ist. Wir erhalten damit $B \cdot s = \mu_0 \cdot N \cdot (s/L) \cdot I$ oder

$$(94) \quad B = \mu_0 \cdot N \cdot I / L, \quad \text{Magnetfeld der langen dünnen Spule.}$$



2.6.1 Das magnetische Dipolfeld; magnetisches Dipolmoment \vec{m}

Betrachten wir eine stromführende, rechteckige Leiterschleife der Seitenlänge a und b im homogenen Magnetfeld \vec{B} , wobei die Leiterfläche \vec{A} mit \vec{B} den Winkel α einschliesst und die Seite b normal zu den Feldlinien steht. Aus (88) folgt, dass die Leiterschleife wegen der Biot-Savart-Kraft ein Drehmoment $M = I \cdot a \cdot b \cdot B \cdot \sin \alpha$ erfährt. Mit $a \cdot b = A$ und

$$(95) \quad \vec{m} = I \cdot \vec{A}, \quad \text{magnetisches Dipolmoment } \vec{m},$$

erhalten wir

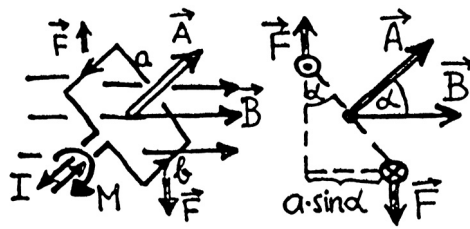
$$(96) \quad \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}, \quad \text{Drehmoment auf Dipol } \vec{m} \text{ im } \vec{B}\text{-Feld.}$$

Wählen wir den Nullpunkt der potentiellen Energie der Leiterschleife bei $\alpha = \pi/2$ so ergibt sich

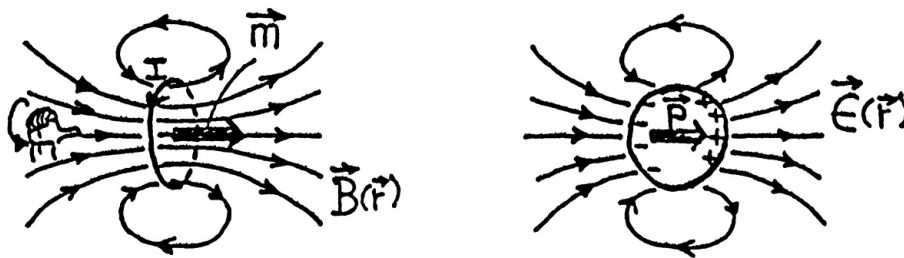
$$(97) \quad E(\text{pot}) = -\vec{m} \cdot \vec{B}, \quad \text{potentielle Energie von } \vec{m} \text{ in } \vec{B}.$$

Die Definition (95) des magnetischen Dipolmomentes \vec{m} gilt allgemein für jede Stromschleife, welche die Fläche A aufspannt. (96) und (97) sind von der gleichen Form wie die entsprechenden Grössen im elektrischen Fall (siehe Formeln (47) und (48)). Die Analogie gilt auch für das \vec{B} -Feldlinienbild des Schleifenstromes und das \vec{E} -Feldlinienbild des elektrischen Dipolfeldes. Aus Formel (32) für

das \vec{E} -Feld erhält man durch Einsetzen von \vec{m} anstatt \vec{p} und von $(1/\mu_0)$ anstatt ϵ_0 das magnetische Dipolfeld \vec{B} .



$$(98) \quad \vec{B} = (\mu_0/4 \cdot \pi) \cdot (3 \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \cdot \vec{m})/r^5, \quad \text{magnetisches Dipolfeld.}$$



Das Bohr'sche Magneton:

Magnetische Dipolmomente haben in der Atomphysik eine grosse Bedeutung. Umkreist ein Elektron den Atomkern auf einer „Bohr'schen Bahn“ mit der Kreisfrequenz ω und dem Radius r , so entspricht dies einem Kreisstrom $I = e \cdot \omega / (2 \cdot \pi)$. Das zugehörige magnetische Dipolmoment ist

$$m = I/\pi \cdot r^2 \quad \text{oder} \quad m = e \cdot \omega \cdot r^2/2.$$

Drücken wir $\omega \cdot r^2$ mit dem Bahndrehimpuls L des Elektrons aus, also $\omega \cdot r^2 = L/m_e$ (m_e = Elektronenmasse), erhalten wir $m = e \cdot L / (2 \cdot m_e)$.

Nun ist der Drall L immer ein ganzzahliges Vielfaches von $h/(2 \cdot \pi)$, d.h. es gilt die Quantisierungsbedingung

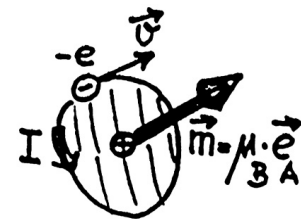
$$L = l \cdot h/(2 \cdot \pi), \quad l = 0, 1, 2, \dots ;$$

Definitionsgemäss ist das Bohrmagneton μ_B jenes magnetische Dipolmoment, welches ein Elektron mit der Drehimpuls-Quantenzahl $l = 1$ erzeugt. Es ist die der Atomphysik angemessene Einheit des magnetischen Dipolmomentes.

$$(99) \quad \mu_B = (1/(2 \cdot m_e)) \cdot e \cdot h/(2 \cdot \pi), \quad \text{Bohrmagneton, } \mu_B = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T.}$$

Im Folgenden stellen wir die Grundgleichungen der Elektrostatik und der Magnetostatik im Vakuum nochmals gegenüber:

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E}, \quad \text{Definition von } \vec{E}; \quad \vec{F}_q = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \quad \text{Definition von } \vec{B}$$



1. $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	2. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
3. $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$	4. $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$

Maxwell'sche Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik im Vakuum.

Als Gedächtnis-Stütze sind die folgenden Zuordnungen von Nutzen:

Elektrischer Dipol \vec{p} :	Magnetischer Dipol \vec{m} :
$E(\text{pot}) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$E(\text{pot}) = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
Drehmoment $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$	Drehmoment $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{E} &\longleftrightarrow \vec{B} \\ \vec{p} &\longleftrightarrow \vec{m} \\ \epsilon_0 &\longleftrightarrow 1/\mu_0 \end{aligned}$$

2.6.2 Definition der Stromstärke-Einheit

Die Einheit der **Stromstärke** ist eine **Basiseinheit**; sie wird mit Hilfe der Biot-Savart-Kraft auf ein Leiterelement definiert. Wir denken uns zwei parallele, geradlinige Ströme I_1 und I_2 im Abstand a . Der Strom I_1 erzeugt auf dem zweiten Leiter das Feld $B = \mu_0 \cdot I_1 / (2 \cdot \pi \cdot a)$. Nach (88) wirkt dieses Magnetfeld auf jedes Stück der Länge L des zweiten Leiters mit der Kraft

$$F = I_2 \cdot L \cdot B \quad \text{oder} \quad F = \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot L / (2 \cdot \pi \cdot a).$$

Setzen wir L , a , I_1 und I_2 in unserem Mass-System gleich ihrer Einheit, so ergibt sich wegen $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$ die Kraft $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$. Die Definition der Einheit 1 Ampere lautet:

Die **Basiseinheit 1 Ampere** ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je Meter Leiterlänge die **Kraft** $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ hervorrufen würde.

2.7 Bewegte Ladung im \vec{B} -Feld; technische Anwendungen

2.7.1 Ladung im homogenen \vec{B} -Feld

Ein Teilchen der Masse m trägt die Ladung q und besitzt zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $\vec{v}(0)$ in einem homogenen, statischen Feld \vec{B} . Wie ändert sich \vec{v} als Funktion von t ? Welche Bahn beschreibt das Teilchen?

Wir zerlegen \vec{v} in eine Normalkomponente \vec{v}_\perp und eine Parallelkomponente \vec{v}_\parallel zu \vec{B} , schreiben also

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_\perp(t) + \vec{v}_\parallel(t).$$

Dies eingesetzt in (87), ergibt für die Kraft:

$$\vec{F}_q = q \cdot (\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B} \quad \text{oder} \quad \vec{F}_q = q \cdot \vec{v}_\perp \times \vec{B}.$$

$\vec{v}_\parallel \times \vec{B} = 0$. \vec{F}_q besitzt keine Komponente parallel zu \vec{B} , so dass $\vec{v}_\parallel = \vec{v}_\parallel(0)$ konstant bleibt. In der Projektion auf eine Normalebene zu \vec{B} führt m eine gleichförmige Kreisbewegung aus, denn \vec{F}_q steht normal zu \vec{v}_\perp , wirkt als Zentripetalkraft und ändert den Betrag von \vec{v}_\perp nicht. Durch Gleichsetzen von Zentripetalkraft und Lorentzkraft

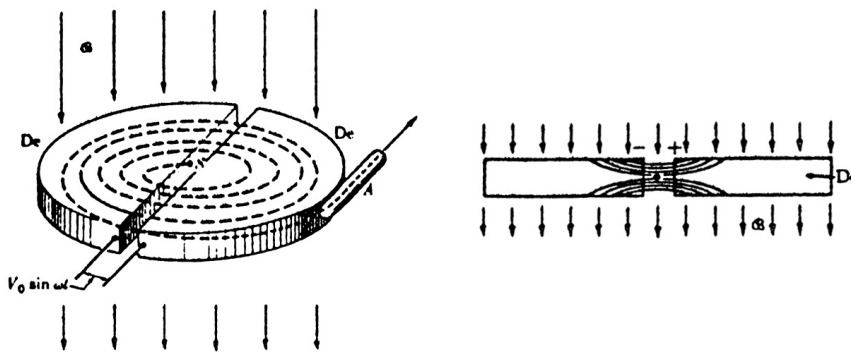
$$m \cdot v_{\perp}^2 / R = q \cdot v_{\perp} \cdot B \quad \text{folgt der Bahnradius}$$

$$(100) \quad R = m \cdot v_{\perp} / (q \cdot B), \quad \text{Zyklotron-Radius.}$$

Beachte, dass der Krümmungsradius R bei gegebener Ladung q und bekanntem Feld B durch den **Impuls** bestimmt wird. Anwendung: durch Ausmessen der Krümmungsradien von Teilchen-Bahnen in Blaskammern werden die Impulse von Reaktionsprodukten aus Elementarteilchenreaktionen bestimmt. Liegt eine Komponente v_{\parallel} vor, so ist die Teilchenbahn eine **Schraubenlinie** konstanter Steigung. Aus (100) ist ersichtlich, dass die Kreisfrequenz $\omega = v_{\perp} / R$ oder

$$(101) \quad \omega_{\text{Zykl.}} = q \cdot B / m, \quad \text{Zyklotron-Frequenz,}$$

nicht von der Teilchengeschwindigkeit abhängt (für $v \ll c$). Diese Tatsache bildet die Grundlage der Teilchenbeschleunigung m dem **Zyklotron**. Im Prinzip besteht dieses aus einer senkrecht zum \vec{B} -Feld liegenden, diagonal aufgeschnittenen Metalldose, den beiden „Dee’s“, an welche eine Wechselspannung mit der Zyklotronfrequenz angelegt wird. Im Zentrum befindet sich eine Ionenquelle (z.B. eine Wasserstoff-Gasentladung zur Erzeugung von Protonen). Das im Spalt zwischen den Dee’s herrschende \vec{E} -Feld hat unabhängig vom Radius der Teilchenbahn immer gerade das zur Beschleunigung nötige Vorzeichen. Der Bahnradius wächst mit jedem Energiezuwachs. Erreicht er einen bestimmten Maximalwert, wird das Teilchen durch eine Deflektorplatte ausgelenkt und fliegt tangentiell weg. Der Teilchenstrahl ist ein mit der Zyklotronfrequenz gepulster Strahl.



Übungsaufgabe:

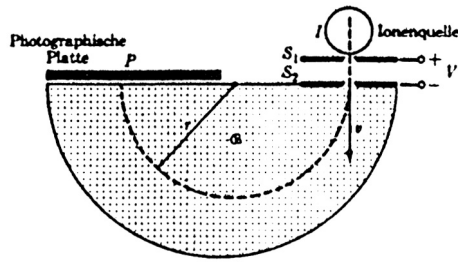
Ein Zyklotron besitzt einen Austrittsradius von $R = 92 \text{ cm}$, das Magnetfeld beträgt maximal $B = 1.5 \text{ T}$. Auf welche Energie (in eV) können Protonen beschleunigt werden? Wie gross ist die Frequenz $\omega(\text{Zyklotron}) / 2 \cdot \pi = f(\text{Zyklotron})$?

Das Massenspektrometer:

Eine weitere Anwendung der Kraftwirkungen elektrischer und magnetischer Felder finden wir im Massenspektrometer. Ionen der Masse m und der Ladung q werden elektrostatisch beschleunigt und senkrecht zu den Feldlinien eines homogenen \vec{B} -Feldes eingeschossen. Aus $m \cdot v^2 / 2 = q \cdot U$ und (100) ergibt sich der Bahnradius

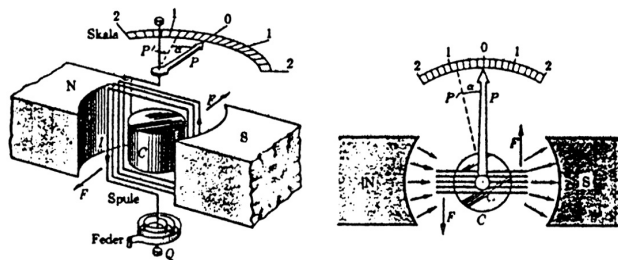
$$(102) \quad r = (1/B) \cdot \sqrt{2 \cdot U \cdot (m/q)}.$$

Das Massenspektrometer misst den **Quotienten** m/q .



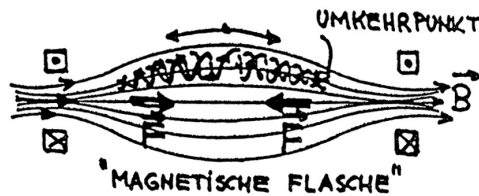
Das Drehspul-Instrument zur Messung von Gleichstrom:

Aus den Gleichungen (95) und (96) ersehen wir, dass eine drehbar gelagerte, ebene Spule, die von einem \vec{B} -Feld durchsetzt wird, ein Drehmoment erfährt, welches dem Spulenstrom I proportional ist. Versieht man die Spule mit einer Torsionsfeder, ist der Drehwinkel einer **Gleichstrom** führenden Spule ein Mass für diesen Strom.



2.7.2 Ladung im inhomogenen Feld

Weil die Lorentzkraft immer senkrecht zur momentanen Geschwindigkeit zeigt, ist $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2$ auch im inhomogenen \vec{B} -Feld eine konstante der Bewegung. Die spiralenförmige Bahn einer Ladung q erzeugt immer ein magnetisches Moment \vec{m} , welches zum \vec{B} -Feld antiparallel steht. $E(pot) = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ ist immer positiv, nimmt also im schwachen \vec{B} -Feld den kleinsten Wert an, Dies bedeutet, dass eine Kraftkomponente vorhanden ist, welche das Teilchen aus dem Gebiet starker \vec{B} -Felder fernhält, das inhomogene Feld wirkt als „magnetischer Spiegel“. Es ist daher möglich, geladene Teilchen in einer „magnetischen Flasche“ einzufangen (s. Van Allen Strahlungsgürtel und Plasmaphysik).



2.7.3 Hall-Effekt (E. Hall, 1879)

Bringt man eine Leiterplatte, längs derer ein Strom fließt, in ein zur Platte senkrecht stehendes Magnetfeld, so tritt eine Potentialdifferenz zwischen gegenüberliegenden Punkten am Rand der Platte auf. Ursache für diese Hall-Spannung U_H bzw. das damit verknüpfte Querfeld E_H ist die Lorentzkraft $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, wobei \vec{v} die Driftgeschwindigkeit der beweglichen Ladungen q ist. Infolge dieser Kraft werden die Ladungsträger in dem Mass seitlich abgelenkt, dass das dadurch entstehende elektrische Feld \vec{E}_H gerade ausreicht, die Lorentzkraft zu kompensieren. Es ist

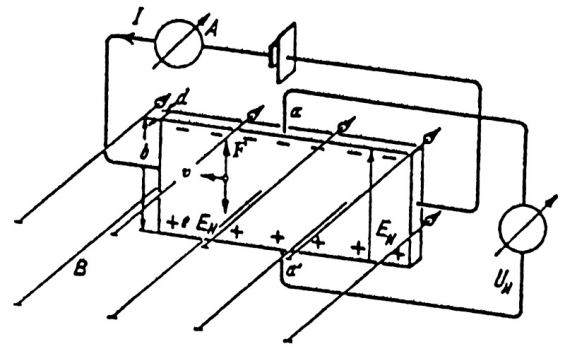
$$(103) \quad q \cdot \vec{E}_H = -q \cdot \vec{v} \times \vec{B}.$$

Mit (71) kann v durch den Strom I und den Leiterquerschnitt $b \cdot d$ ausgedrückt werden, nämlich

$$v = I / (n \cdot q \cdot b \cdot d).$$

Die Hall-Spannung $U_H = b \cdot E_H$ wird dann

$$(104) \quad U_H = 1 / (n \cdot q) \cdot I \cdot B / d, \quad \text{Hall-Spannung } U_H.$$



Das reziproke Produkt aus Ladungsträgerkonzentration und Ladung bezeichnet man als die Hall-Konstante eines Materials,

$$(105) \quad R_H = 1 / (n \cdot q), \quad \text{Hall-Konstante.}$$

Eine Messung der Hall-Spannung $U_H = R_H \cdot I \cdot B / d$ nach Betrag und Vorzeichen, erlaubt bei Kenntnis von I , B und Probendicke d eine Bestimmung sowohl der **Konzentration** der Ladungsträger als auch deren **Ladungsvorzeichen**.

Bei Metallen sind die Ladungsträger Elektronen und es ist $R = -1 / (n \cdot e)$. Halbleiter, wie z.B. InAs, zeigen, verglichen mit Metallen, grosse Hall-Spannungen, weil hier n klein ist. Mit Hilfe von Halbleiter-Hall-Sonden können Magnetfelder bequem gemessen werden (handelsübliche „Gaussmeter“).

Demonstrationen:

1. Ablenkung bewegter Ladung im B-Feld
2. Magnetische Feldlinien von geradlinigem Strom und Kreisstrom
3. Biot-Savart-Kraft auf stromführenden Leiter
4. Magnet zerbrechen
5. Torus-Spule, lange dünne Spule, Stromschleife und Permanentmagnet
6. Hall-Effekt
7. Unipolarinduktion
8. Ionenreibung
9. Lorentz-Schaukel
10. Drehspulinstrument
11. Lautsprecher
12. Kraft zwischen Strömen

Kapitel 3

Zeitlich veränderliche Ströme (Quasistationäre Ströme)

Im Folgenden betrachten wir Ströme und Felder, die zeitlich nicht konstant sind. Die Änderungen sollen aber so langsam sein, dass die Laufzeiten der Signale in unseren Netzwerken (Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit c) vernachlässigbar sind. Man nennt solche Ströme und Felder „quasistationär“. Es stellt sich nun die Frage, ob die Maxwell'schen Gleichungen für stationäre Felder (siehe S. 43) auch auf zeitabhängige Felder anwendbar sind, oder ob sie revidiert werden müssen. Die Antwort gibt das Experiment.

3.1 Ein- und Ausschalten im R-C-Kreis

Im nebenstehend dargestellten R-C-Kreis ist die Kapazität C zunächst ungeladen (Schalterstellung b)). Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter nach a) umgelegt, so dass infolge der wirkenden konstanten Spannung U_0 ein Ladestrom $I(t)$ fließt. Wie verhält sich $I(t)$ im Zeitintervall $0 \leq t < \infty$? In jedem Zeitpunkt t muss die Maschengleichung erfüllt sein. Über der Kapazität ist der Spannungsabfall $U_c = Q(t)/C$ und

$$(106) \quad I(t) \cdot R + Q(t)/C = U_0.$$

Ableiten nach t führt wegen $dQ/dt = I$ auf

$$(107) \quad dI/dt + I/(R \cdot C) = 0,$$

mit der allgemeinen Lösung

$$(108) \quad I(t) = I(0) \cdot \exp(-t/(R \cdot C)).$$

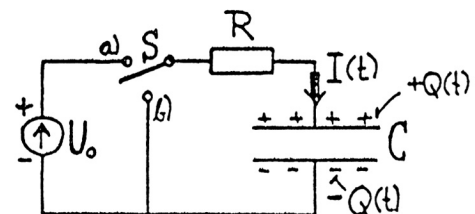
Zur Zeit $t = 0$ liegt der gesamte Spannungsabfall über R (wegen $U_c = 0$), also wird $I(0) = U_0/R$ die Anfangsbedingung sein. Die Lösung lautet somit

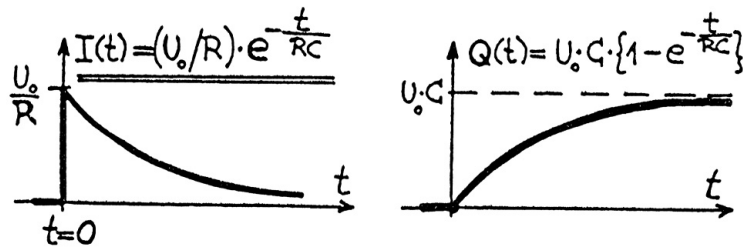
$$(109) \quad I(t) = (U_0/R) \cdot \exp(-t/(R \cdot C)).$$

Der Ladestrom nimmt exponentiell mit der **Zeitkonstanten** $\tau = R \cdot C$ ab.

Die Ladung $Q(t)$ ergibt sich aus $Q(t) = \int_0^t I(t) \cdot dt$, also

$$(110) \quad Q(t) = C \cdot U_0 \cdot (1 - \exp(-t/(R \cdot C))).$$





Für $t \gg R \cdot C$ liegt die Gesamtspannung U_0 über C , d.h. der Kondensator trägt die Ladung $Q(\infty) = C \cdot U_0$. Ist die Kapazität geladen, und wird der Schalter zur Zeit $t = 0$ bei b) geschlossen, so ergibt die Lösung von (107):

$$\begin{aligned} (111) \quad I(t) &= -(U_0/R) \cdot \exp(-t/(R \cdot C)) \\ \text{und} \\ (112) \quad Q(t) &= C \cdot U_0 \cdot \exp(-t/(R \cdot C)). \end{aligned}$$

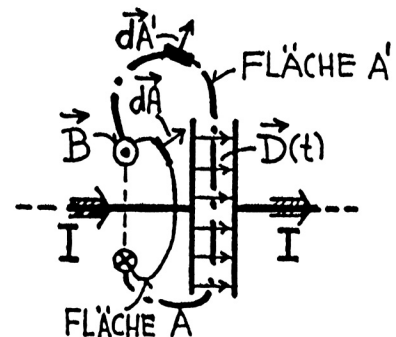
3.2 Die Maxwell'sche Ergänzung

Das für statische Felder gültige Ampere'sche Verkettungsgesetz (90) führt auf einen Widerspruch, wenn die Felder zeitabhängig sind. Wir können dies am speziellen Beispiel des Ladevorgangs beim Plattenkondensator einsehen. Der Integrationsweg des Linienintegrals von \vec{B} soll die Stromzuführung umschliessen und die Fläche A beranden, welche vom Strom I durchstossen wird. Es ist dann nach (90)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \iint \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad \text{oder} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot I.$$

Wählen wir jedoch als vom Integrationsweg berandete Fläche nicht A , sondern A' , welche zwischen den Kondensatorplatten verläuft und folglich nicht von I durchstossen wird, so ergibt die rechte Seite null, anstatt I , obwohl das Linienintegral auf der linken Seite dasselbe geblieben ist. Dieser Widerspruch wird behoben, wenn das Ampere'sche Verkettungsgesetz (90) durch den

Maxwell'schen Verschiebungsstrom $\iint_A \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A}$



ergänzt wird. (90) geht dann über in

$$(113) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \iint (\vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t) \cdot d\vec{A}.$$

Dass diese Gleichung widerspruchsfrei ist, sehen wir an unserem speziellen Beispiel leicht wenn wir beachten, dass der Betrag des Verschiebungsvektors \vec{D} gleich ist der Flächendichte der wahren Ladung auf den Kondensatorplatten. Es ist also

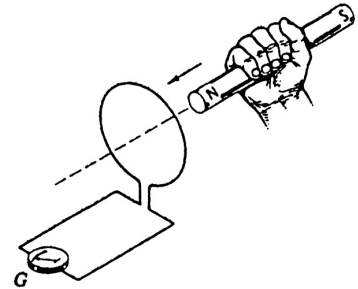
$$\iint_{A'} \vec{D} \cdot d\vec{A}' = Q \quad \text{und} \quad \iint_A (\partial\vec{D}/\partial t) \cdot d\vec{A} = I.$$

(113) wird unabhängig davon, ob A oder A' als Fläche gewählt wird. Man kann allgemeiner argumentieren und zeigen, dass die **Maxwell'sche Ergänzung** $\partial\vec{D}/\partial t$ zur Stromdichte \vec{j} im Ampere'schen Verkettungsgesetz zwingend aus dem Prinzip der **Ladungserhaltung** folgt.

3.3 Induktion (Michael Faraday, 1831)

Bewegt man einen Permanentmagneten auf einen geschlossenen Leiterkreis zu, so fließt in diesem ein Strom. Zieht man den Magneten zurück, fließt ein Strom in umgekehrter Richtung. Ruht der Magnet relativ zum Leiterkreis, so fließt kein Strom. Der Permanentmagnet kann auch durch eine stromführende Spule ersetzt werden. Die Beobachtung lehrt:

Jede Änderung des magnetischen Flusses durch eine von einem Leiter begrenzte Fläche, erzeugt in diesem **Induktionsströme**, deren Stärke und Richtung von der Art der Änderung abhängt.



Induktionswirkungen gehorchen der **Lenz'schen Regel**:

Die Induktionsströme haben eine solche Richtung, dass ihr eigenes Magnetfeld der induzierenden Fluss-Änderung entgegenwirkt, der induzierende Vorgang also gehemmt wird.

Weil natürlich der **Energiesatz** erfüllt sein muss, erfordern induzierende Vorgänge (z.B. das Bewegen des Magneten) immer eine den Induktionswirkungen entsprechende **Arbeit**.

Der Induktionsstrom im Leiterkreis ist eine Folge der **induzierten E.M.K.**, ($E.M.K. = U(ind)$), welche auch bei Abwesenheit des materiellen Leiters entlang einer geschlossenen Kurve C vorhanden ist. Bezeichnen wir den magnetischen Fluss durch C hindurch mit

$$(114) \quad \phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \text{Magnetischer Fluss } \phi.$$

Einheit: $V \cdot s$, $1 V \cdot s = 1 \text{ Wb (Weber)}$

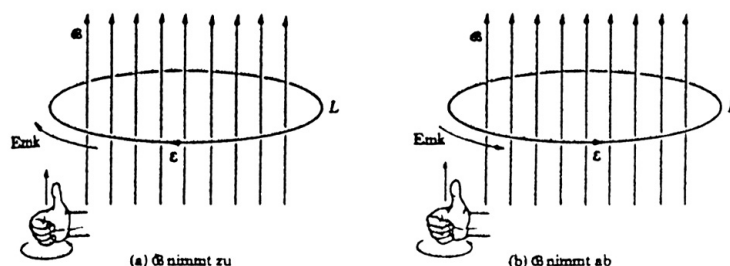
so wird die induzierte Spannung quantitativ beschrieben durch

$$(115) \quad U(ind) = -d\phi/dt, \quad \text{Faraday'sches Induktionsgesetz.}$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite beinhaltet die Lenz'sche Regel. Wir wollen zunächst annehmen, dass der geschlossene Weg im Laborsystem ortsfest ist. (115) kann auch in der Form geschrieben werden:

$$(116) \quad \oint_G \vec{E} \cdot d\vec{r} = -(d/dt) \cdot \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

\vec{E} ist das **induzierte elektrische Feld**. Beachte, dass der Umlaufsinn mit dem Vektor des Flächenelementes, $d\vec{A}$, ein Rechtssystem bildet.



Das Induktionsgesetz in der Form (116) besagt, dass jedes zeitlich variable \vec{B} -Feld von einem \vec{E} -Feld umgeben ist, dessen Zirkulation nicht null ist. Aus der Definition von $\text{rot } \vec{E}$ nach (67), folgt die differentielle Formulierung von (116) (Satz von Stokes), nämlich

$$(117) \quad \text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t, \quad \text{Induktionsgesetz in differentieller Form.}$$

Für zeitunabhängige \vec{B} -Felder gehen (116) und (117) über in (69) bzw. (69a), schliessen also den Fall statischer Felder ein. In (117) sind \vec{E} und \vec{B} im gleichen Koordinatensystem zu messen.

Das Induktionsgesetz in der Form (115) oder (116) ist aber auch gültig, wenn der Leiterkreis sich relativ zum \vec{B} -Feld bewegt, wenn unter \vec{E} in (116) jenes Feld verstanden wird, welches ein mit dem Leiter mitbewegter Beobachter misst. Unter $d\phi/dt$ auf der rechten Seite ist die **totale Ableitung** des magnetischen Flusses nach der Zeit zu verstehen; sie enthält im Allgemeinen zwei Anteile: eine von der zeitlichen Variation $\partial/\partial t$ von $B(t)$ herrührende Änderung, und eine Flussänderung, welche eine Folge einer geometrischen Variation des Leiterkreises ist. Als Beispiel betrachten wir den Fall einer im homogenen, zeitlich konstanten \vec{B} -Feld rotierenden Leiterschleife, wo also $\partial B/\partial t = 0$ ist.

Rotierende Leiterschleife im homogenen \vec{B} -Feld:

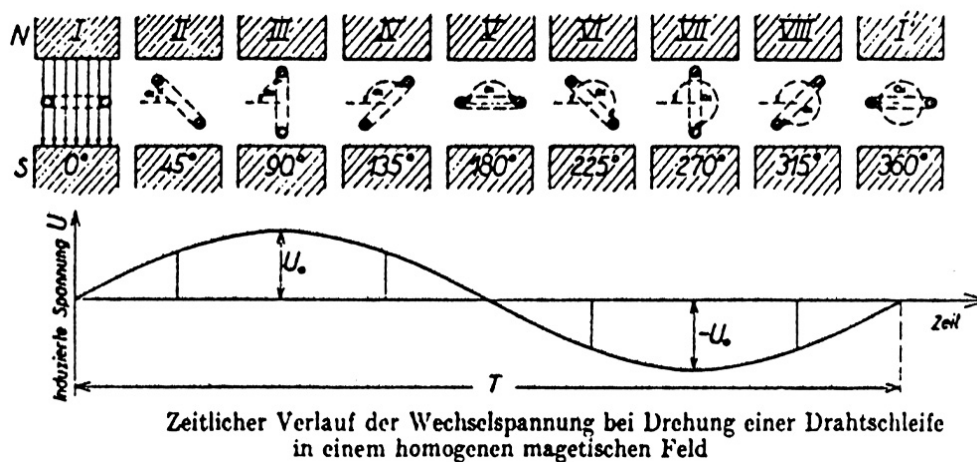
In einem zeitlich konstanten, homogenen Magnetfeld soll eine Leiterschleife, welche die Fläche A umschliesst, um eine zum \vec{B} -Feld senkrecht stehende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Der Flächenvektor \vec{A} bildet mit \vec{B} den Winkel $\vartheta = \omega \cdot t$. Der Fluss $\phi(t)$ durch A ist dann

$$(118) \quad \phi(t) = B \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz (115) resultiert in der Leiterschleife die induzierte Spannung

$$(119) \quad U(\text{ind}) = \omega \cdot B \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

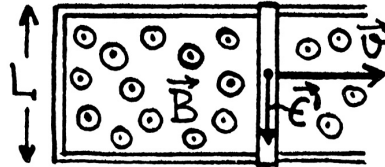
Das Prinzip des Wechselspannungsgenerators beruht auf (119).



3.4 Relativitäts-Prinzip und Induktionsgesetz

Das Relativitätsprinzip besagt, dass die physikalischen Gesetze in verschiedenen Inertialsystemen die gleichen sind. Ist die Relativgeschwindigkeit $|\vec{v}|$ zweier Systeme klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c , so sind die Raum- und Zeitkoordinaten durch die Galileitransformation verknüpft (siehe

Physik I, S. 20). Die Gesetze müssen dann **invariant** gegenüber der **Galilei-Transformation** sein. Dass das Faraday'sche Induktionsgesetz (116) diese Forderung erfüllt, können wir an folgendem Beispiel einsehen: Eine rechteckige Leiterschleife wird von einem zeitlich konstanten, homogenen Magnetfeld \vec{B} durchsetzt. Die eine Seite des Rechtecks besteht aus einem beweglichen Leiterstück der Länge L , das sich mit der Geschwindigkeit v nach rechts verschiebt. Ein Beobachter im Laborsystem gibt folgende Interpretation: Die magnetische Flussänderung ist $d\phi/dt = B \cdot L \cdot v$, die induzierte Spannung wird nach (116)



$$(120) \quad \oint \vec{E}' \cdot d\vec{r} = -B \cdot L \cdot v.$$

Nun betrachten wir den Vorgang im mit \vec{v} nach rechts bewegten System S' , in welchem das Leiterstück der Länge L ruht. Wieder können wir (116) anwenden. Der im Labor feste Leiter und das \vec{B} -Feld bewegen sich jetzt mit $\vec{v}' = -\vec{v}$ nach links, die Flussänderung pro Zeiteinheit und die im Kreis induzierte Spannung stimmt mit (120) überein. Wenn der in S' sitzende Beobachter jedoch vom \vec{B} -Feld nichts weiss, wird er die Situation anders interpretieren: Im Leiterstück L stellt er ein elektrisches Feld \vec{E}' fest, denn die Ladungsträger erfahren die Lorentzkraft $q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, die er als elektrostatische Kraft $q \cdot \vec{E}'$ deutet. Im rechteckigen Kreis misst er somit die E.M.K.

$$(121) \quad \oint \vec{E}' \cdot d\vec{r} = -b \cdot L \cdot v.$$

was mit (120) wiederum übereinstimmt (Umlaufsinn wie in (120)).

Das Faraday'sche Induktionsgesetz steht im Einklang mit dem Prinzip der Relativität der elektromagnetischen Felder. Wir halten fest: Misst ein Beobachter O in seinem Koordinatensystem S ein elektrisches Feld \vec{E} und ein Magnetfeld \vec{B} , so misst der Beobachter O' im mit \vec{v} bewegten System S' das elektrische Feld

$$(122) \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}.$$

(122) gilt nur, wenn Glieder der Ordnung $(v/c)^2 \ll 1$ vernachlässigt werden. Die streng korrekten Transformations-Gleichungen sind die der **Lorentz-Transformation** der speziellen Relativitätstheorie, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik sind gegenüber der Elektrostatik durch die Maxwell'sche Ergänzung im Ampere'schen Verkettungsgesetz und durch das Induktionsgesetz zu modifizieren. Die **Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum** lauten:

Integrale Form	Differentielle Form
1. $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (1/\epsilon_0) \cdot \iiint \varrho \cdot dV,$	$\text{div } \vec{E} = \varrho/\epsilon_0,$
2. $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0,$	$\text{div } \vec{B} = 0$
3. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -(d/dt) \cdot \iint \vec{B} \cdot d\vec{A},$	$\text{rot } \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t,$
4. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \iint (\vec{j} + \epsilon_0 \cdot \partial\vec{E}/\partial t) \cdot d\vec{A},$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{j} + \epsilon_0 \cdot \partial\vec{E}/\partial t).$

Diese vier Gleichungen beschreiben die Elektrodynamik im Vakuum vollständig. Sie geben den Zusammenhang zwischen elektrischem Feld \vec{E} und magnetischem Feld \vec{B} bei gegebenen Stromverteilungen und Ladungsverteilungen. Diese formalen Beziehungen entsprechen den klassischen Gesetzen der Elektrizitätslehre:

1. **Coulomb'sches Gesetz**, bzw. **Gauss'sches Durchflutungsgesetz**.
2. **Gauss'scher Satz der Magnetostatik** (es gibt keine magn. Monopole).
3. **Faraday'sches Induktionsgesetz**.
4. **Ampere-Maxwell'sches Gesetz**.

3.5 Das Betatron

Das Betatron ist ein Elektronenbeschleuniger, welcher zwei Eigenschaften des \vec{B} -Feldes gleichzeitig ausnutzt: einerseits hält die Lorentzkraft $\vec{F}_q = -e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ die Elektronen auf einer Kreisbahn, andererseits erzeugt die zeitliche Änderung $\dot{\phi}$ des magnetischen Flusses das zur tangentiellen Beschleunigung der Elektronen erforderliche \vec{E} -Feld. Es besteht aus einer evakuierten Toroidröhre, deren Kreisebene zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten liegt, welcher das Feld $B(r)$ erzeugt. Damit die Elektronen im Toroid kreisen, muss nach (100) die Beziehung erfüllt sein

$$(123) \quad m \cdot v = e \cdot R \cdot B(R), \quad \mathbf{R} = \text{Bahnradius im Toroid.}$$

Der magnetische Fluss durch den umlaufenen Kreisquerschnitt ist $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$, oder wenn wir das über die Kreisfläche gemittelte Magnetfeld mit $B(\text{Mittel})$ bezeichnen, $\phi = \pi \cdot R^2 \cdot B(\text{mittel})$.

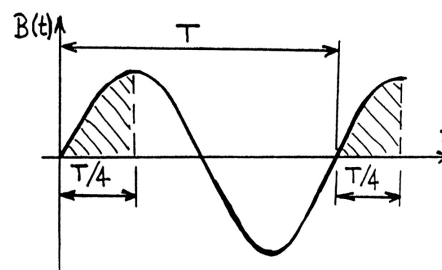
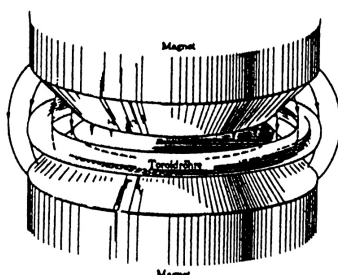
Ist B zeitabhängig, so ergibt das Induktionsgesetz (116) das tangentiell wirkende elektrische Feld $E = \pi \cdot R^2 \cdot \dot{B}(\text{mittel}) / (2 \cdot \pi \cdot R)$ oder die Kraft $F(\text{tang})$.

$$(124) \quad F(\text{tang}) = e \cdot R \cdot \dot{B}(\text{mittel})/2.$$

Differentieren von (123) nach der Zeit führt auf $m \cdot \dot{v} = e \cdot R \cdot \dot{B}(R)$, wobei $m \cdot \dot{v} = F(\text{tang})$ ist. Dies in (124) eingesetzt, liefert die Bedingung, welcher der Feldverlauf $B(r)$ genügen muss, damit bei zeitlich sich änderndem B-Feld der Bahnradius R konstant bleibt:

$$(125) \quad B(R) = B(\text{mittel})/2. \quad \text{Bedingung für das Feld } B(r) \text{ im Betatron mit Bahnradius } R.$$

Die Polflächen des Magneten müssen derart gestaltet sein, dass (125) erfüllt ist. Der Elektromagnet wird mit Wechselstrom der Periode T betrieben. Nur während des Zeitintervalls $T/4$ jeder Periode, wo $B(t)$ und dB/dt positiv sind, werden die Elektronen beschleunigt und auf ihrer Bahn gehalten. Es handelt sich also um eine gepulste Elektronenquelle. Im Zeitpunkt niedrigen B-Feldes werden Elektronen ins Toroid injiziert, im Zeitbereich des maximalen B-Feldes werden sie aus der Kreisbahn ausgelenkt. Es sind Betatrons bis zu Energien von 350 MeV für kernphysikalische Untersuchungen gebaut worden. Eine wichtige Anwendung ist die Verwendung des Betatrons zur Erzeugung von Röntgenstrahlen hoher Energie für die Krebstherapie.



der Strom linear ins Unermessliche ansteigen; es wäre immer $dI/dt = U_0/L$.

Um den Strom I durch L zu erzeugen, muss die Spannungsquelle die Arbeit

$$w = - \int_0^t U_L \cdot I \cdot dt \quad \text{oder} \quad W = L \cdot \int_0^I (dI/dt) \cdot I \cdot dt \quad \text{abgeben.}$$

Dies ist aber $W = L \cdot \int_0^I I \cdot dI$, oder

$$(130) \quad W = L \cdot I^2/2. \quad \text{In der Induktivität } L \text{ gespeicherte Energie, wenn der Strom } I \text{ fließt.}$$

Diese Energie wird durch das aufgebaute Magnetfeld repräsentiert. Ziehen wir das homogene B-Feld der langen, dünnen Spule heran, so folgt aus (128):

$$W = (\mu_0 \cdot N^2 \cdot A/l) \cdot I^2/2.$$

Division durch das Spulenvolumen $A \cdot l$ und Benützung von $B = \mu_0 \cdot N \cdot I/l$ führt auf die Energiedichte des Magnetfeldes

$$(131) \quad w = (1/2) \cdot B^2/\mu_0, \quad \text{Energiedichte des Magnetfeldes.}$$

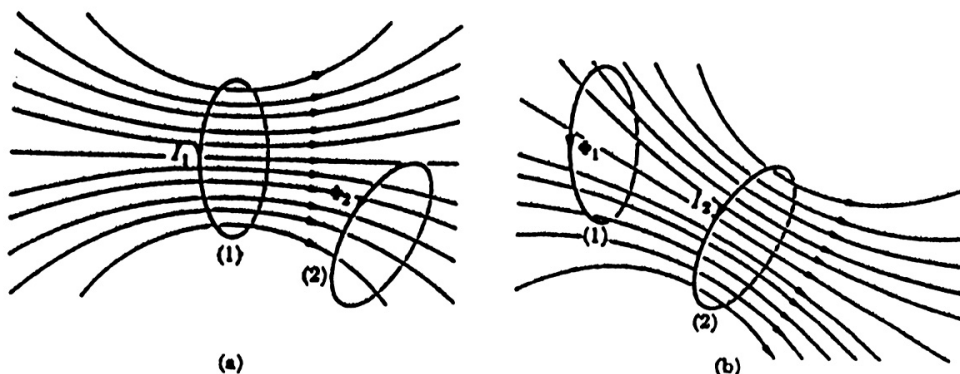
Wird der Schalter im R-L-Seriekreis geöffnet, wenn der vorhandene Strom U_0/R fließt, so erzeugt der grosse negative Wert von dI/dt eine riesige induzierte Spannung in L , welche den Strom aufrechterhalten möchte. Dies führt zu einem unerwünschten Spannungsdurchschlag im Schalter. Solche „Ausschaltspitzen“ lassen sich vermeiden, wenn eine Kapazität parallel zur Induktivität gelegt wird.

Geht die Spannung U_0 zur Zeit $t = 0$ (beim Strom U_0/R) auf null zurück, ohne dass der Stromkreis unterbrochen wird, so fällt der Strom exponentiell mit der Zeitkonstanten R/L auf null ab. Die in L gespeicherte magnetische Energie wird in R in Joule'sche Wärme verwandelt.

3.8 Gekoppelte Stromkreise; Gegeninduktivität M

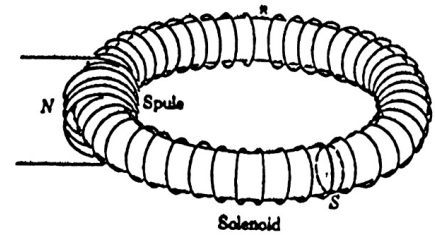
Liegen zwei benachbarte Stromkreise 1 und 2 vor, so wird im Allgemeinen der Strom I_1 im ersten Kreis einen magnetischen Fluss durch den Kreis 2 erzeugen. Jede Stromänderung dI_1/dt wird eine induzierte Spannung $U_{12}(ind)$ im Kreis 2 zur Folge haben. Die entsprechende Wirkung $U_{21}(ind)$ hat dI_2/dt in 2 auf Kreis 1. Der **Koeffizient der gegenseitigen Induktion M** ist definiert durch

$$(132) \quad U_{12}(ind) = -M \cdot dI_1/dt \quad \text{und} \quad U_{21}(ind) = -M \cdot dI_2/dt.$$



Der Koeffizient M der gegenseitigen Induktion ist ein Mass für die Kopplung zweier Kreise. Ein wichtiger Vertreter eines gekoppelten Systems ist der **Transformator**, wo Primär- und Sekundärkreis induktiv gekoppelt sind (siehe Abschnitt Wechselstrom).

Hier betrachten wir als spezielles Beispiel eine Spule 1 mit N Windungen, die um den Mittelteil eines Toroidsolenoids 2 mit n Windungen pro Längeneinheit und einem Querschnitt A gewickelt sind. Das B-Feld der Toroidspule 2 ist $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$, sein Fluss durch die Spule 1 somit $\phi = \mu_0 \cdot N \cdot A \cdot n \cdot I$. Die Gegeninduktivität beträgt



$$(133) \quad M = \mu_0 \cdot N \cdot n \cdot A.$$

Schreibt man die Maschengleichungen für gekoppelte Stromkreise auf, so erscheinen die gegeninduzierten Spannungen (132) zusätzlich zu allfällig in den Kreisen vorhandenen E.M.K.'s auf der rechten Seite. Handelt es sich speziell um **gekoppelte Schwingkreise**, so entstehen gekoppelte Differentialgleichungen, analog zu jenen für gekoppelte Pendel (siehe Physik I, S. 96). Ihre Lösungen ergeben im Allgemeinen ebenfalls Energieaustausch zwischen den Kreisen, begleitet von Schwebungserscheinungen.

3.9 Materie im Magnetfeld; Magnetische Suszeptibilität χ_m

Schalten wir bei der oben dargestellten Anordnung den Strom I in der Toroidspule aus, so wird in der Spule mit N Windungen eine Spannung induziert, welche dem Feld $B(\text{Vakuum})$ im Toroid, beim Strom I , proportional ist, d.h. das B-Feld lässt sich auf diese Weise aus der Induktionswirkung bestimmen. Füllen wir nun das ganze Toroidvolumen mit Materie, stellen wir experimentell fest, dass, bei gleichem Strom I , das Feld $B(\text{Materie})$ von $B(\text{Vakuum})$ verschieden ist. Wir definieren die Materialkonstante μ_r

$$(134) \quad \mu_r = B(\text{Materie})/B(\text{Vakuum}), \quad \text{relative Permeabilität } \mu_r.$$

Die Abweichung der relativen magnetischen Permeabilität von eins, $\mu_r - 1$, bezeichnen wir als

$$(135) \quad \chi_m = \mu_r - 1, \quad \text{magnetische Suszeptibilität } \chi_m.$$

Bezüglich ihrer magnetischen Suszeptibilität teilen wir die Stoffe in drei Hauptgruppen ein:

a) Diamagnetische Stoffe , $\chi_m < 0$.	Wismut, Bi,	$\chi_m = -165 \cdot 10^{-6}$
	Quecksilber, Hg,	$\chi_m = -28 \cdot 10^{-6}$
	Gold, Au,	$\chi_m = -34 \cdot 10^{-6}$
b) Paramagnetische Stoffe , $\chi_m > 0$.	Platin, Pt.	$\chi_m = +280 \cdot 10^{-6}$
	Aluminium, Al,	$\chi_m = +21 \cdot 10^{-6}$
c) Ferromagnetische Stoffe , $\chi_m \gg 1$.	Eisen, Fe (4% Si),	$\chi_m = 5800$
	Nickel, Ni (0.7% Mn),	$\chi_m = 1120$
	μ -Metall, (NiFeCuCr),	$\chi_m = 110000$

Probekörper dieser drei Stoffgruppen zeigen unterschiedliches Verhalten, wenn man sie in ein **inhomogenes Magnetfeld** bringt. Diamagnetische Stoffe erfahren Kräfte, die zu schwachen Feldgebieten hin zeigen. Para- und ferromagnetische Stoffe werden ins starke B-Feld gezogen. Die Kraftwirkung auf Ferromagnete ist einige tausend mal grösser, als auf para- oder diamagnetische Stoffe.

3.9.1 Mikroskopisches Modell; Magnetisierung \vec{M}

Atome oder Moleküle können ein magnetisches Moment \vec{m} besitzen, dessen Ursprung in der Bewegung der Elektronen um den Atomkern („Bohr’sche Bahnen“) begründet ist.

Die Atome **diamagnetischer Substanzen** besitzen **kein magnetisches Moment** \vec{m} wenn kein äusseres \vec{B} -Feld vorhanden ist.

Paramagnetische Atome haben auf Grund ihrer elektronischen Struktur ein **permanentes magnetisches Moment** \vec{m} .

In **ferromagnetischen Stoffen** bilden sich **Domänen**, die so genannten **Weiss’schen Bezirke** aus, innerhalb derer die atomaren magnetischen Momente unter sich parallel ausgerichtet sind. Die lineare Ausdehnung der Domänen kann sehr verschieden sein, typisch etwa 0,1 mm.

Zunächst sind bei Para- und Ferromagneten makroskopisch keine resultierenden magnetischen Momente vorhanden (bei Ferromagneten möglich), weil die mikroskopischen Momente statistisch verteilt sind. Was passiert nun beim Anlegen eines äusseren \vec{B} -Feldes?

a) Diamagnetismus:

Durch die Induktionswirkung beim Einbringen in ein \vec{B} -Feld werden die atomaren Elektronenströme so modifiziert, dass alle Atome **dem \vec{B} -Feld entgegen gerichtete magnetische Momente** \vec{m} bilden (Lenz’sche Regel). Die Ausrichtung ist **temperatur-unabhängig**.

b) Paramagnetismus:

Die permanenten, zunächst ungeordneten atomaren Momente \vec{m} versuchen sich im \vec{B} -Feld **auszurichten**, werden aber durch die Temperaturbewegung in diesem Prozess behindert. Der Paramagnetismus ist **temperatur-abhängig**. Im Gegensatz zum Diamagnetismus liegen hier die Momente \vec{m} mehrheitlich parallel zum angelegten Feld.

c) Ferromagnetismus:

Die Bildung von Weiss’schen Domänen ist nur **unterhalb** einer **kritischen Temperatur** T_c , der **Curie-Temperatur** des betreffenden Materials möglich (z.B. $T_c = 1047$ K für Fe). Beim Anlegen des äusseren \vec{B} -Feldes passieren zwei Dinge: Die in Feldrichtung magnetisierten Domänen wachsen auf Kosten der andern durch Verschieben ihrer Domänenwände, die ungünstig gerichteten Domänen drehen sich als Ganzes in die Feldrichtung (**Umklapp-Prozess**).

Die Magnetisierung \vec{M} :

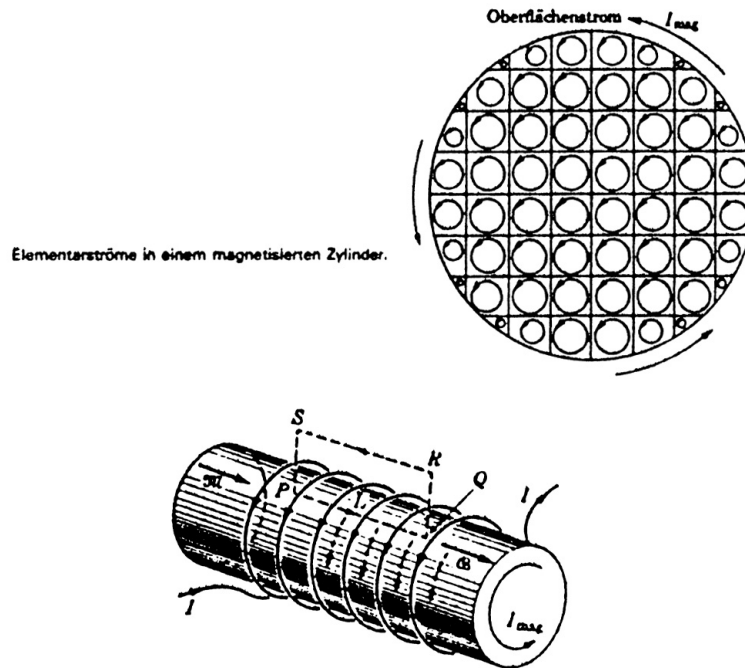
Enthält das Volumen V die Anzahl N atomare magnetische Momente \vec{m}_i so ist das makroskopische magnetische Moment pro Volumeneinheit

$$(136) \quad \vec{M} = (1/V) \cdot \sum_{i=1}^N \vec{m}_i, \quad \text{die Magnetisierung } \vec{M}.$$

Dimension: Strom \cdot Fläche/Volumen

Einheit: A/m

Betrachten wir nun einerseits einen langen, dünnen Hohlzylinder der Länge L , mit kreisförmigem Querschnitt A , in dessen Mantelfläche der Kreisstrom I fließt, und andererseits ein Stück Materie derselben Form, welches homogen in Richtung der Mantellinien die Magnetisierung \vec{M} aufweist. Das magnetische Dipolmoment des Stromes im Hohlzylinder ist definitionsgemäss $I \cdot A$, so dass $I \cdot A / (A \cdot L) = I/L$ sein magnetisches Moment pro Volumeneinheit ist. Setzen wir $I/L = M$ so ist die Stromkonfiguration des Hohlzylinders jener des mit \vec{M} magnetisierten Materials gleicher Geometrie äquivalent. Diese Tatsache ist auch daran ersichtlich, dass sich die mikroskopischen Kreisströme im Innern aufheben und nur der Strom in der Mantelfläche übrig bleibt.



Wendet man diesen Sachverhalt auf die mit Materie gefüllte Toroidspule auf S. 55 an, kann folgendermassen argumentiert werden: Die Spule mit $n = N/L$ Windungen pro Meter erzeugt das \vec{B} -Feld $B_0 = \mu_0 \cdot I \cdot N/L$; die Magnetisierung \vec{M} der Materie wirkt selbst wie eine Spule und liefert den Beitrag $B_1 = \mu_0 \cdot M$ ans Gesamtfeld. Wir können schreiben

$$(137) \quad B = \mu_0(N \cdot I/L + M).$$

Einführung des Feldes

$$(138) \quad H = N \cdot I/L, \quad \text{magnetische Erregung } H,$$

ergibt:

$$(139) \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}).$$

Das \vec{H} -Feld wird durch „**wahre Ströme**“ erzeugt (mit dem Amperemeter messbare Leiterströme).

Die **Magnetisierung** wird durch **mikroskopische Ströme** in der Materie erzeugt.

Das \vec{B} -Feld entspringt sowohl „**wahren**“, als auch **mikroskopischen Strömen**.

Magnetische Suszeptibilität χ_m und Permeabilität μ_r :

In Analogie zur Gleichung (58) der Elektrostatik, $\vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$, müsste nun die Magnetisierung \vec{M} dem wirkenden \vec{B} -Feld proportional gesetzt werden. Aus historischen Gründen tun wir das nicht, sondern definieren die magnetische Materialkonstante χ_m durch

$$(140) \quad \vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}, \quad \text{magnetische Suszeptibilität } \chi_m.$$

Einsetzen in (139) ergibt

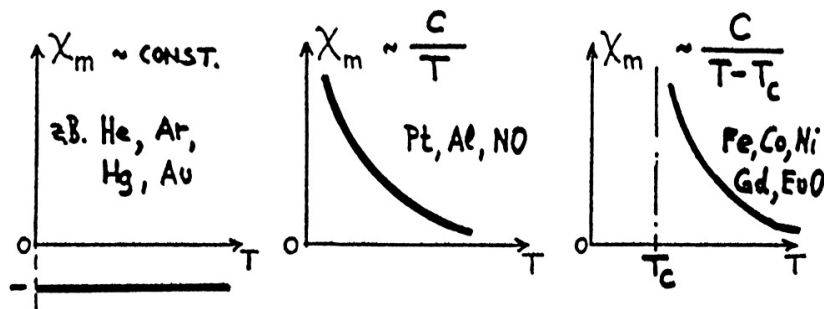
$$(141) \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \vec{H}, \quad \text{Permeabilität } (1 + \chi_m) = \mu_r.$$

Die mikroskopische Betrachtung, basierend auf der Magnetisierung \vec{M} , führt uns gerade zu den in (134) und (135) phänomenologisch eingeführten Beziehungen. Die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität χ_m für paramagnetische Stoffe gehorcht der Beziehung

$$(142) \quad \chi_m = \text{const.}/T, \quad \text{Curie-Gesetz.}$$

Ferromagnete zeigen oberhalb der Curie-Temperatur T_c paramagnetisches Verhalten:

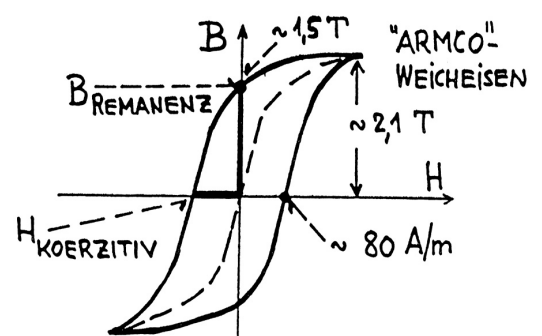
$$(143) \quad \chi_m = \text{const.}/(T - T_c), \quad \text{Curie-Weiss-Gesetz.}$$



Die Hysterese:

Wirkt auf einen Ferromagneten, der zunächst unmagnetisiert sein soll, eine magnetische Erregung \vec{H} , so wird seine Magnetisierung \vec{M} , und damit auch die Induktion $\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$, im $B(H)$ -Diagramm auf der so genannten „Neukurve“ anwachsen. Wird H wieder auf null reduziert, so bleibt eine gewisse Magnetisierung M und das **Remanenzfeld** $B(H = 0) = B(\text{Remanenz})$ erhalten (Permanentmagnet).

Um B zum Verschwinden zu bringen, ist das entgegen gerichtete Koerzitivfeld $H(\text{Koerzitiv})$ erforderlich. Oszillation des H -Feldes führt auf die **Hysteresis-Schleife**.



Beachte:

Die von der Hysteresisschleife umschlossene Fläche hat die Dimension Arbeit/Volumen. Sie ist gleich der Arbeit, die bei einem Magnetisierungszyklus pro Volumeneinheit des betreffenden Stoffes verbraucht wird.

3.9.2 Stetigkeitsbedingungen für \vec{H} - und \vec{B} -Feldlinien an Grenzflächen

Nachdem wir nun neben dem elektrischen Feld \vec{E} und dem Magnetfeld \vec{B} die elektrische Verschiebungsdichte \vec{D} , sowie die magnetische Erregung \vec{H} eingeführt haben, können wir die Maxwell'schen Gleichungen in allgemeiner, auch bei Anwesenheit von Materie gültiger Form anschreiben. Sie lauten in differentieller Form:

$$(144) \quad \begin{array}{ll} 1. \operatorname{div} \vec{D} = \varrho, & 2. \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ 3. \operatorname{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t, & 4. \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t. \end{array}$$

Ferner gelten die Materialgleichungen:

$$(145) \quad \vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}.$$

Über das Verhalten der \vec{B} - und \vec{H} -Feldlinien an Grenzflächen geben die Gleichungen 2 und 4 Auskunft. Wählen wir zur Bildung von $\operatorname{div} \vec{B}$ ein zylindrisches Volumenelement so, dass eine Deckfläche unmittelbar oberhalb, die andere unmittelbar unterhalb der Grenzfläche zweier Medien liegt, folgt aus 2:

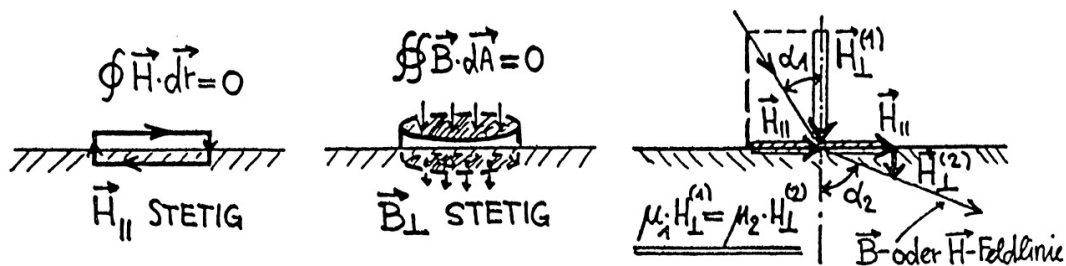
Die Normalkomponente von \vec{B} auf die Grenzfläche ist stetig.

Wählen wir andererseits zur Bildung von $\operatorname{rot} \vec{H}$ einen rechteckigen Weg, dessen eine lange Seite unmittelbar über der Grenzfläche, die andere darunter verläuft, während die Schmalseiten des Rechtecks beliebig kurz sind, die Rechtecksfläche also gegen null geht, so folgt aus 4:

Die Tangentialkomponente von \vec{H} auf die Grenzfläche ist stetig.

Aus untenstehender Figur kann man ablesen, dass die mit dem Lot zur Grenzfläche von den Feldlinien gebildeten Winkel α_1 und α_2 der Bedingung genügen:

$$(146) \quad \operatorname{tg} \alpha_1 / \operatorname{tg} \alpha_2 = \mu_1 / \mu_2, \quad \text{Brechungsgesetz für magnetische Feldlinien.}$$



Aus (146) ersieht man, dass beim Übergang magnetischer Feldlinien von z.B. Luft in ein ferromagnetisches Material, wegen $\mu_2 \gg 1$, der Winkel α_2 nahe bei 90 Grad liegt. Magnetische Feldlinien haben die Tendenz, im Innern von Ferromagneten entlang deren Oberfläche zu laufen, während sie aussen fast senkrecht zur Grenzfläche stehen. Oberflächen von Ferromagneten sind nahezu „magnetische Aequipotentialflächen“.

Übungsaufgabe:

Berechne das B-Feld im Luftspalt d eines Elektromagneten. Stromwindungszahl, mittlerer Weg der Feldlinien im Eisenjoch und dessen Permeabilität sind gegeben.

Demonstrationen:

1. R-C-Kreis
2. Transformator-Versuch nach Elihu Thomson
3. Lenz'sche Regel, Stabmagnet und Ring
4. Rotierende Spule im Solenoid
5. Waltenhofen'sches Pendel
6. R-L-Kreis
7. Induktives Zünden von Glühlampen
8. Zündspannung von Glimmlampe
9. Materie in inhomogenen Magnetfeld
10. Modell „Weiss'sche Bezirke“
11. Bestimmung der Permeabilität
12. Barkhausen-Effekt
13. Curie-Temperatur von Fe und Ni
14. Hysterese
15. Magnetostriktion
16. Magnetische Abschirmung

Kapitel 4

Wechselstrom

Im Alltag und in der Elektrotechnik ganz allgemein, nehmen die Wechselströme eine zentrale Stellung ein. Unter einem Wechselstromkreis verstehen wir ein Netzwerk, dessen Zweige Ohm'sche Widerstände R , Induktivitäten L und Kapazitäten C enthalten. Alle vorkommenden Spannungsquellen sollen Spannungen der Form $U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ liefern. Die Fragestellung lautet: Welche Ströme $I(t)$ fließen in den Zweigen eines Netzwerks, wenn die Spannungsquellen vorgegeben sind? Wir interessieren uns nur für den **stationären Zustand**. D.h. wir warten, bis die Einschwingvorgänge abgeklungen sind und berechnen Ströme der Form $I = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, wenn eine Spannung $U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ wirkt. Es ist die **Stromamplitude** I_0 und die **Phasenverschiebung** φ gegenüber der Spannung zu berechnen.

4.1 Einführung komplexer Größen zum Rechnen

Wechselspannungen und Ströme sind messbare, reelle physikalische Größen. Da sie eine Amplitude und eine mit der Zeit linear anwachsende Phase besitzen, können wir sie im **Zeigerdiagramm** darstellen (siehe Physik I, S. 95). Da ein Zeiger vom Betrag A und dem Phasenwinkel φ in der Gauss'schen Zahlenebene die **komplexe Zahl**

$$(147) \quad z = A \cdot \exp(i \cdot \varphi) \quad \text{oder} \quad z = A \cdot \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

$(i = \text{imaginäre Einheit, } i^2 = -1),$

darstellt, führen wir komplexe Rechnungsgrößen für Spannung und Strom ein:

$$(148) \quad \hat{U} = U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) \quad \hat{I} = I_0 \cdot \exp(i \cdot (\omega \cdot t + \varphi))$$

komplexe Spannung. komplexer Strom.

Die Impedanz \hat{Z} :

Liegt über einem Verbraucher (im Allgemeinen ein Zweipol, welcher aus R-, L- und C-Gliedern zusammengesetzt ist) die Spannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ wird ein Strom $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ fließen. Den komplexen Quotienten \hat{U}/\hat{I} aus den zugehörigen komplexen Größen (148) bezeichnen wir als Impedanz \hat{Z}

$$(149) \quad \hat{Z} = \hat{U}/\hat{I}, \quad \text{Impedanz } \hat{Z}.$$

Bei Serieschaltung oder Parallelschaltung von Zweipolen, gelten für die Gesamtimpedanzen die gleichen Rechenregeln, wie für Ohm'sche Widerstände:

$$\hat{Z}(\text{Serie}) = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \dots, \quad (1/\hat{Z})(\text{parallel}) = (1/\hat{Z}_1) + (1/\hat{Z}_2) + \dots$$

In jedem Zeitpunkt t muss in jeder Masche das zweite Kirchhoff'sche Gesetz (siehe Kap. 2.5) erfüllt sein. Die komplexe Schreibweise der Spannungsabfälle über den einzelnen Zweigen der Masche hat den grossen Vorteil, dass beim Summieren **die Phasenbeziehungen automatisch berücksichtigt werden**.

Die Impedanz \hat{Z}_R des Ohm'schen Widerstandes R :

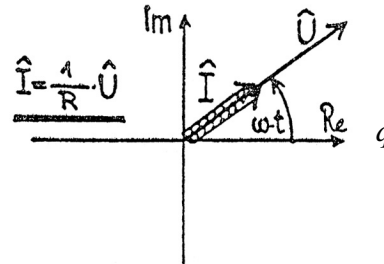
Definitionsgemäss ist $U = I \cdot R$ der Spannungsabfall über R . Die Impedanz wird

$$(150) \quad \hat{Z}_R = R, \\ \hat{I} = (1/R) \cdot \hat{U}$$

oder

$$I(t) = (U_0/R) \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Strom und Spannung sind in Phase.



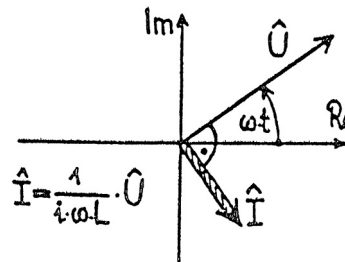
Die Impedanz \hat{Z}_L der Induktivität L :

Der Spannungsabfall über L ist $U = L \cdot dI/dt$, damit die induzierte Gegenspannung gerade kompensiert wird. Nach der Maschenregel gilt also

$$U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) = L \cdot d\hat{I}/dt.$$

Integration führt auf

$$\int L \cdot d\hat{I} = \int U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \quad \text{oder} \\ \hat{I} = (U_0/(i \cdot \omega \cdot L)) \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t).$$



Daraus erhalten wir die Impedanz

$$(151) \quad \hat{Z}_L = i \cdot \omega \cdot L.$$

Der Faktor i ist gleich $\exp(i \cdot \pi/2)$, somit

$$\hat{I} = (U_0/(\omega \cdot L)) \cdot \exp(i \cdot (\omega \cdot t - \pi/2)).$$

Der Strom hinkt der Spannung um $\pi/2$ nach.

Die Impedanz \hat{Z}_C der Kapazität C :

Der Spannungsabfall über C ist Q/C , die Maschengleichung lautet

$$U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) = Q/C$$

Mit $I = dQ/dt$ ergibt die Differentiation nach t

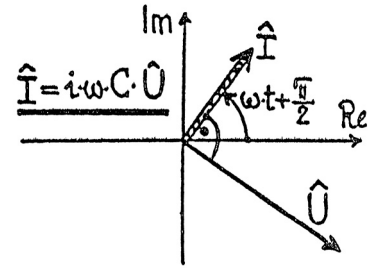
$$\hat{I} = i \cdot \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t).$$

Die Impedanz wird

$$(152) \quad \hat{Z}_C = 1/(i \cdot \omega \cdot C),$$

$$\hat{I} = \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \exp(i \cdot (\omega \cdot t + \pi/2)).$$

Der Strom läuft der Spannung um $\pi/2$ voraus.



4.2 Wechselstrom-Leistung; Effektivwerte $U(\text{eff})$ und $I(\text{eff})$

Wenn die Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ in einem Zweipol den Strom $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ erzeugt, so gibt die Spannungsquelle im Zeitpunkt t die momentane Leistung $P(t) = I(t) \cdot U(t)$ ab.

$$P(t) = I_0 \cdot U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

oder

$$P(t) = I_0 \cdot U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot (\cos(\omega \cdot t) \cdot \cos \varphi - \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi), \text{ somit}$$

$$(153) \quad P(t) = I_0 \cdot U_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2(\omega \cdot t) - I_0 \cdot U_0 \cdot (1/2) \cdot \sin \varphi \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t).$$

Bei der Bildung des zeitlichen Mittelwertes $\langle P \rangle$ von $P(t)$, gibt der zweite Summand von (153) keinen Beitrag („ungerade Funktion der Zeit“). Der erste Term liefert:

$$(154) \quad \langle P \rangle = (I_0 \cdot U_0/2) \cdot \cos \varphi, \quad \text{Wechselstromleistung.}$$

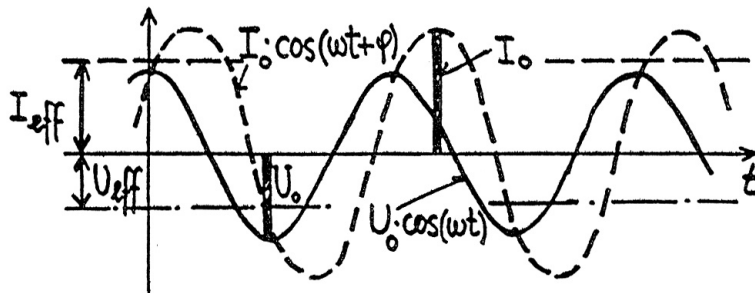
In der Elektrotechnik bezeichnet man die Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats von Strom oder Spannung als **Effektivwert $I(\text{eff})$ bzw. $U(\text{eff})$** . Also

$$I(\text{eff}) = \sqrt{\langle I^2 \rangle} \quad \text{und} \quad U(\text{eff}) = \sqrt{\langle U^2 \rangle}, \quad \text{oder}$$

$$(155) \quad I(\text{eff}) = I_0/\sqrt{2} \quad \text{und} \quad U(\text{eff}) = U_0/\sqrt{2}, \quad \text{Effektivwert.}$$

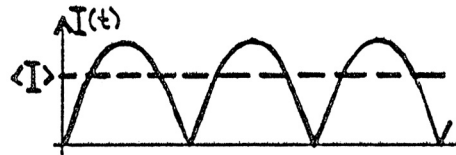
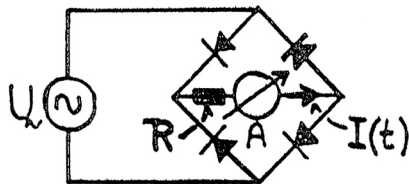
Die mittlere Leistung (154) ist damit auch

$$(156) \quad \langle P \rangle = I(\text{eff}) \cdot U(\text{eff}) \cdot \cos \varphi, \quad \text{Wechselstromleistung.}$$



4.2.1 Zur Messung von Wechselströmen

Der Zeigerausschlag eines Drehspulinstrumentes ist dem Strom proportional. Wegen der Trägheit des mechanischen Systems kann es bei den üblichen Wechselstrom-Frequenzen nur den Mittelwert, also null, anzeigen. Wird hingegen der Wechselstrom zuerst gleichgerichtet (z.B. Vollweggleichrichtung nach Graetz, wie in nebenstehender Figur), so entspricht der Zeigerausschlag dem Betrag des Mittelwertes. Auf der Skala ist der Effektivwert angeschrieben, welcher **nur für sinusförmigen zeitlichen Verlauf des Stromes richtig ist**. Daneben gibt es auch Instrumente, die vom Messprinzip her das Quadrat des Stromes anzeigen, z.B. das Hitzdrahtinstrument und das Weicheiseninstrument. Der abgelesene Effektivwert ist in diesem Fall unabhängig vom zeitlichen Stromverlauf richtig. Das **Dynamometer** besteht aus einer festen Magnetfeldspule und einer Drehspule. Werden die Spulen in Serie geschaltet, liegt ein Wechselstrominstrument vor, welches „quadratisch“ anzeigt. Legt man die eine Spule in den Stromkreis, die andere mit einem Vorschaltwiderstand parallel zu den Verbraucherklammern (Spannungsmessung), so wirkt das Dynamometer direkt als **Wattmeter**, d.h. es misst den wahren Mittelwert von $I(t) \cdot U(t)$.



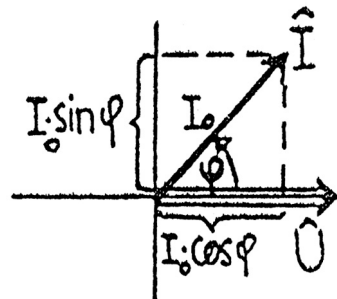
4.2.2 Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung

Der Mittelwert (156) der Wechselstrom-Leistung wird auch als **Wirkleistung**, der Faktor $\cos \varphi$ als **Leistungsfaktor** bezeichnet. Der Faktor $\cos \varphi$ tritt auf, weil nur derjenige Stromanteil im zeitlichen Mittel zu einer von null verschiedenen Leistung führt, welcher mit der Spannung U in Phase ist. Die Stromkomponente $I_0 \cdot \sin \varphi$ trägt zu $\langle P \rangle$ nichts bei. Wir unterscheiden daher:

Wirkleistung: $I(\text{eff}) \cdot U(\text{eff}) \cdot \cos \varphi$

Blindleistung: $I(\text{eff}) \cdot U(\text{eff}) \cdot \sin \varphi$

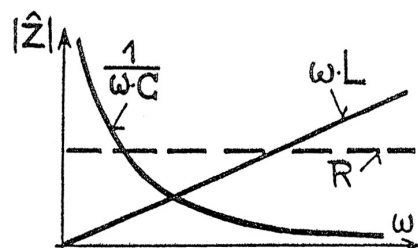
Scheinleistung: $I(\text{eff}) \cdot U(\text{eff})$



Im Falle rein induktiver oder rein kapazitiver Last liegt nur Blindleistung vor. Man bezeichnet

$|Z_L| = \omega \cdot L$ als **induktiven Blindwiderstand** oder **Induktanz** und

$|Z_C| = 1/(\omega \cdot C)$ als **kapazitiven Blindwiderstand** oder **Reaktanz**.



Wird eine Spannungsquelle mit dem Effektivwert $U(\text{eff})$ rein induktiv belastet, so nimmt $I(\text{eff})$ mit zunehmender Frequenz ab (Drosselleffekt), Mit rein kapazitiver Last ist der Blindwiderstand für tiefe Frequenzen gross (bei Gleichspannung fliesst kein stationärer Strom). Eine Ohm'sche Last besitzt den Wirkwiderstand R und $I(\text{eff})$ ist unabhängig von der Frequenz.

4.3 Der Transformator

In Wechselstromkreisen tritt als neues Element der **Transformator** auf. Der Transformator ist ein Vierpol, mit dessen Hilfe eine Wechselspannung U_1 an den Eingangsklemmen („Primärkreis“) in eine grössere oder kleinere Spannung U_2 gleicher Frequenz umgewandelt und über den Ausgangsklemmen („Sekundärkreis“) abgegriffen wird. Er besteht aus Primär- und Sekundärspule, die normalerweise auf einen gemeinsamen Eisenkern gewickelt sind. Der Eisenkern hat die Funktion, einerseits die Induktivitäten L_1 und L_2 der Spulen zu erhöhen und andererseits eine möglichst perfekte induktive Kopplung, d.h. maximale Gegeninduktivität M , zu erreichen. Wir betrachten im Folgenden den unbelasteten Transformator; der Sekundärkreis sei also offen, so dass kein Strom I_2 fliesst (allgemeine Behandlung in den Ergänzungen für Physiker).

Über der Primärspule der Windungszahl N_1 liegt die Spannung $U_1(t) = U_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)$. Der magnetische Fluss ϕ_1 im Eisenkern wird sich so einstellen, dass die induzierte Gegenspannung $-N_1 \cdot \dot{\phi}_1$ durch U_1 gerade kompensiert wird.

$$U_1 = N_1 \cdot \dot{\phi}_1.$$

Die Flussänderung $\dot{\phi}_1$ induziert in der Sekundärspule mit der Windungszahl N_2 die Spannung

$$U_2 = -N_2 \cdot \dot{\phi}_1.$$

Wir erhalten also

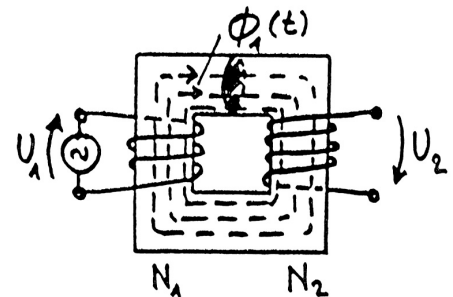
$$(157) \quad U_2/U_1 = -N_2/N_1, \quad \text{Übersetzungs-Verhältnis } \ddot{u} = -N_2/N_1.$$

Beim idealen Trafo sind die Spuleninduktivitäten so gross, dass der Wirkwiderstand gegenüber dem Blindwiderstand vernachlässigbar ist. Im **Leerlauf** sind dann U_1 und Primärstrom I_1 um 90 Grad phasenverschoben. Unter sekundärer Ohm'scher Belastung sind beim idealen Trafo U_1 und I_1 , sowie U_2 und I_2 in Phase. Wegen der Energieerhaltung ist die sekundär entnommene Leistung gleich der primär hineingesteckten Leistung.

$$I_2 \cdot U_2 = I_1 \cdot U_1, \quad \text{somit wird}$$

$$(158) \quad I_2/I_1 = -N_1/N_2.$$

Der Transformator dient sowohl zur Erzeugung hoher Spannungen (z.B. bei der Übertragung elektrischer Energie über grosse Distanzen), als auch zur Erzeugung grosser Ströme (z.B. beim Schweiß-Trafo und dem Induktions-Schmelzofen).



4.4 Beispiele von Wechselstrom-Kreisen

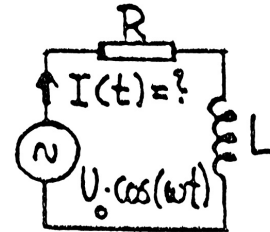
4.4.1 Der RL-Kreis

Ein Ohm'scher Widerstand R sei mit der Induktivität L in Serie geschaltet. Wie gross ist die Amplitude I_0 und die Phasenverschiebung φ des Stromes, wenn die Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ angelegt wird? Die Gesamtimpedanz des Zweipols ist

$$\hat{Z} = R + i \cdot \omega \cdot L$$

oder

$$\hat{Z} = \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} \cdot \exp(i \cdot \arctg(\omega \cdot L/R)).$$

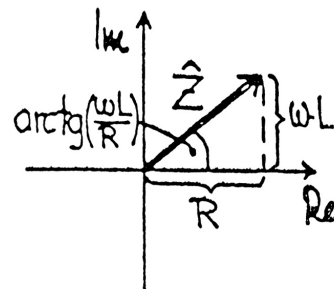


Nach (149) erhalten wir den Strom

$$\hat{I} = \hat{U} / (R + i \cdot \omega \cdot L)$$

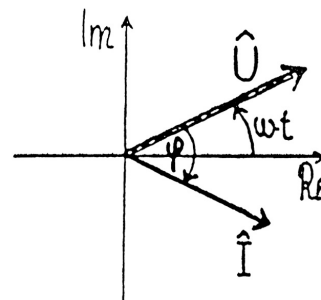
oder

$$\hat{I} = (U_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}) \cdot \exp(i \cdot (\omega \cdot t - \arctg(\omega \cdot L/R))),$$



woraus Stromamplitude und Phasenverschiebung abgelesen wird:

(159)	$I_0 = U_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}$,	Stromamplitude.
(160)	$\varphi = -\arctg(\omega \cdot L/R)$,	Phasenverschiebung.



Gemäss (154) gibt die Spannungsquelle die Wirkleistung $\langle P \rangle = (I_0 \cdot U_0/2) \cdot \cos \varphi$ an den Stromkreis ab. Mit den Beziehungen (159) und (160) können wir auch schreiben:

$$\langle P \rangle = (I_0^2/2) \cdot \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} \cdot \cos \varphi \quad \text{oder} \quad \langle P \rangle = I^2(\text{eff}) \cdot R.$$

Die dem Kreis während einer Periode T zugeführte Energie ist gleich der pro Periode im Ohm'schen Widerstand produzierten Joule'sche Wärme.

Übungsaufgabe:

Berechne die Stromamplitude I_0 und die Phasenverschiebung φ des Stromes gegenüber der Spannung für den R-C-Kreis.

4.4.2 Der RLC-Seriekreis; Resonanz

Fügen wir zum soeben besprochenen RL-Kreis noch das kapazitive Element C hinzu, so erhalten wir den **Serie-Resonanzkreis**. Der Imaginärteil der Impedanz enthält jetzt zwei Beiträge, den positiven

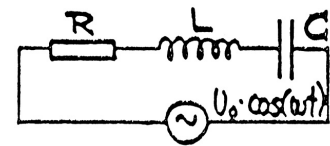
der Induktivität, $\omega \cdot L$, und den negativen der Kapazität, $-1/(\omega \cdot C)$. Es ist

$$\hat{Z} = R + i \cdot (\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))$$

oder

$$\hat{Z} = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))^2} \cdot \exp(i \cdot \arctg((\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))/R)),$$

Die Impedanz des RLC-Seriekreises.



Daraus folgt der Strom $\hat{I} = \hat{U}/\hat{Z}$, also

$$\hat{I} = (U_0/\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))^2}) \cdot \exp(i \cdot (\omega \cdot t - \arctg((\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))/R))).$$

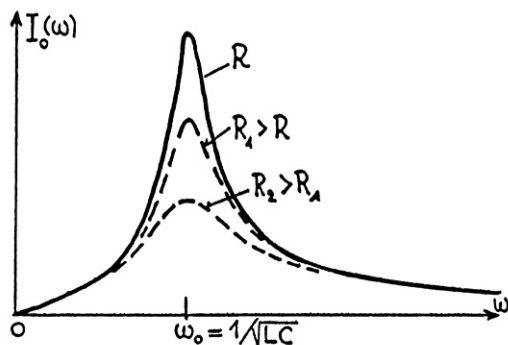
Stromamplitude und Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz sind:

$$(161) \quad I_0 = U_0/\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))^2}, \quad \text{Stromamplitude.}$$

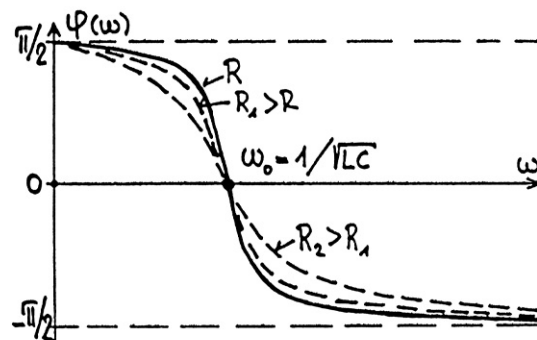
$$(162) \quad \varphi = \arctg((1/(\omega \cdot C) - \omega \cdot L)/R), \quad \text{Phasenverschiebung.}$$

Für $\omega \cdot L = 1/(\omega \cdot C)$ verschwindet der Imaginärteil der Impedanz, die Stromamplitude wird maximal, $I_{max} = U_0/R$, Strom und Spannung sind in Phase.

$$(163) \quad \omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}, \quad \text{Resonanz-Frequenz.}$$



STROM-RESONANZKURVE $I_0(\omega)$



PHASENVERSCHIEBUNG $\varphi(\omega)$

An der Resonanzstelle liegt kein Blindwiderstand vor, die vom Kreis aufgenommene Leistung ist maximal, nämlich

$$(164) \quad \langle P_{max} \rangle = U^2(ef)/R, \quad \text{aufgenommene Leistung bei Resonanz.}$$

Die Resonanzkurve wird um so schlanker und das Maximum um so höher, je geringer der Ohm'sche Widerstand ist.

Wir haben hier nur die „Stromresonanz“ betrachtet. Kurven von ähnlichem Charakter erhält man auch beim Auftragen der Spannungen über R , L und C oder der aufgenommenen Leistung als Funktion der Frequenz. Im Detail ist der Verlauf dieser Kurven aber verschieden. Über der Induktivität L und der Kapazität C treten bei Resonanzfrequenz Spannungen auf, die wesentlich höher liegen können, als die Amplitude U_0 der angelegten Spannung.

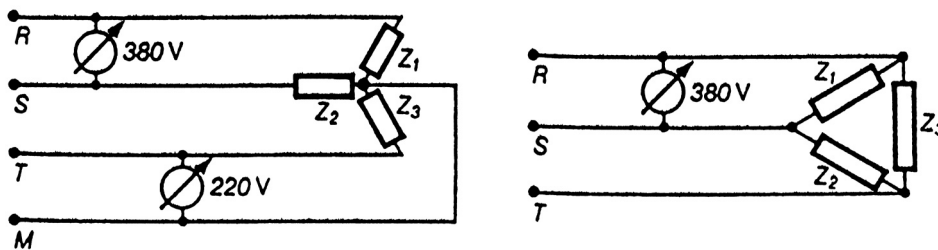
$$(165) \quad U_L/U_0 = U_C/U_0 = \omega_0 \cdot L/R = 1/(\omega_0 \cdot C \cdot R), \quad \text{Spannungsüberhöhung.}$$

Übungsaufgabe:

- Man berechne die vom Serie-Resonanzkreis aufgenommene Leistung $\langle P(\omega) \rangle$ als Funktion der Kreisfrequenz und diskutiere die „Energie-Resonanzkurve“.
- Wie gross ist an der Resonanzstelle die im Kreis gespeicherte Energie?
- Wie gross ist der Q-Wert? $Q = 2\pi \cdot \text{gespeicherte Energie} / (T \cdot \langle P(\omega_0) \rangle)$.

4.5 Drehstrom

Von grosser technischer Bedeutung ist der **Dreiphasen-** oder **Drehstrom**, welcher durch einen Generator ähnlich der schematischen Darstellung auf S. 50 erzeugt wird, der jedoch drei um 120 Grad gegeneinander verdrehte, rotierende Spulen besitzt. Die drei entstehenden Spannungen werden in verketteter Form zum Verbraucher befördert, nämlich durch den allen Spulen gemeinsamen **Null-Leiter M** und die drei **Aussenleiter R, S** und **T**. Zwischen *M* und jedem Aussenleiter besteht die Wechselspannung von 220 V Effektivwert. Zwischen je zwei Aussenleitern ergibt sich aus dem Zeigerdiagramm die Spannung $220 \cdot \sqrt{3} = 380$ V. Neben dem geringen Aufwand an Zuleitungen bietet der Dreiphasenstrom also zwei Spannungswerte an. Liegen drei gleiche Verbraucher zwischen *M* und den Aussenleitern (**Sternschaltung**), so führt der Null-Leiter keinen Strom. Liegen drei Verbraucher zwischen den Aussenleitern, spricht man von **Dreieck-Schaltung**.



Schaltet man in die drei Stromkreise Spulen ein, deren Achsen gegeneinander um 120 Grad verdreht sind, so erzeugen die Spulenströme ein magnetisches **Drehfeld**, das gleich rasch rotiert, wie das Spulensystem des Generators (siehe Demonstration „Kurzschlussanker-Motor“).

Demonstrationen:

- Drehspulinstrument und Gleichrichter
- U_{eff} mit Glühlampen (Vergleich Wechsel- und Gleichstrom)
- $Z(\omega)$ für R , L und C
- Phasenverschiebung mit R , L und C
- Dynamometer
- Modell Kurzschlussanker-Motor
- Transformator
- Modell „Überlandleitung“ mit und ohne Hochspannungs-Trafo
- Schweisstransformator
- Tesla-Transformator (100'000 Volt bei 750 kHz)
- Serie-Resonanzkreis
- Frequenzfilter (Tonfrequenzen)

4.6 Freie elektrische Schwingung; RLC-Seriekreis

In 4.4.2 haben wir gesehen, dass eine am RLC-Kreis angelegte Wechselspannung zur Erscheinung der elektrischen Resonanz führt. Dies bedeutet aber, dass dieser Kreis ein schwingungsfähiges System mit einer bestimmten **Eigenfrequenz** darstellt. Wir wollen die Differentialgleichung dieser Schwingung aus einer Energiebetrachtung herleiten. Zu einer bestimmten Zeit t soll der Strom $I(t)$ fließen und die Kapazität C soll gerade die Ladung $Q(t)$ tragen. Die Gesamtenergie setzt sich dann zusammen aus dem magnetischen Anteil $E(\text{mag}) = L \cdot I^2/2$ und dem elektrischen Anteil $E(\text{el}) = Q^2/(2 \cdot C)$. Diese gespeicherte Energie nimmt aber ständig ab, weil im Ohm'schen Widerstand R in der Zeit dt die Joule'sche Wärme $I^2 \cdot R \cdot dt$ produziert wird. Der Energieerhaltungssatz verlangt demnach die Beziehung

$$(166) \quad \frac{d}{dt} \cdot (Q^2/(2 \cdot C) + L \cdot I^2/2) = -I^2 \cdot R.$$

Ausführung der Differentiation ergibt

$$(Q/C) \cdot dQ/dt + L \cdot I \cdot dI/dt + I^2 \cdot R = 0.$$

Aus $dQ/dt = I$ und $dI/dt = d^2Q/dt^2$ folgt die Schwingungsgleichung

$$(167) \quad d^2Q/dt^2 + (R/L) \cdot dQ/dt + (1/(L \cdot C)) \cdot Q = 0.$$

Mit $R/L = 2 \cdot \beta$ und $\omega_0^2 = 1/(L \cdot C)$ erhalten wir die bekannte Form

$$(168) \quad \ddot{Q} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{Q} + \omega_0^2 \cdot Q = 0,$$

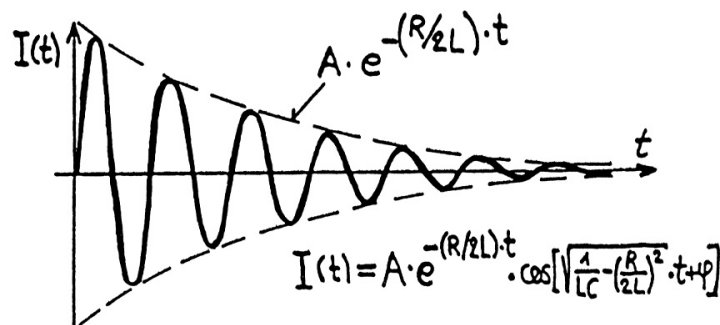
oder nach nochmaliger Ableitung nach t :

$$(169) \quad \ddot{I} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{I} + \omega_0^2 \cdot I = 0,$$

Differentialgleichung der gedämpften Schwingung.
(siehe Physik I, S. 91)

Für $\beta < \omega_0$, also nicht zu starke Dämpfung, lautet die allgemeine Lösung:

$$(170) \quad I(t) = A \cdot \exp(-\beta \cdot t) \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi), \quad \text{gedämpfte Schwingung.}$$



Der **Dämpfungsfaktor** $\beta = R/(2 \cdot L)$ ist verantwortlich für die zeitlich exponentiell abnehmende Stromamplitude und für die Reduktion der Eigenfrequenz gegenüber der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems. A und φ sind beliebige Integrationskonstanten. Wenn wir β und ω_0^2 des elektrischen Schwingkreises und des gedämpften Federpendels (siehe Physik I, S. 91) vergleichen, ergibt sich die Zuordnung

$$R/(2 \cdot L) \longleftrightarrow \alpha/(2 \cdot m) \quad \text{und} \quad 1/(L \cdot C) \longleftrightarrow k/m.$$

Es entspricht also der Ohm'sche Widerstand R dem Reibungskoeffizient α des mechanischen Pendels, die Induktivität L der Masse m und die reziproke Kapazität $1/C$ der Federkonstanten k . Die magnetische Energie $L \cdot I^2/2$ ist dann der kinetischen Energie $m \cdot v^2/2$ im Pendel zugeordnet, während die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie $Q^2/(2 \cdot C)$ der potentiellen Energie $k \cdot x^2/2$ der gespannten Feder analog ist. Die Joule'sche Verlustleistung $I^2 \cdot R$ ist der Reibungsleistung $\alpha \cdot v^2$ äquivalent. Im elektrischen Schwingkreis liegt die gespeicherte Energie alternierend in **magnetischer** und **elektrischer Feldenergie** vor, im mechanischen Schwingkreis in **kinetischer** und **potentieller Energie**.

Kapitel 5

Elektromagnetische Wellen

Die Existenz elektromagnetischer Wellen, sowie die elektromagnetische Natur des Lichtes, ist von **James Clerk Maxwell** auf Grund seiner Feldgleichungen (144) schon 1864 vorausgesagt worden. Es hat mehr als zwanzig Jahre gedauert, bis es **Heinrich Hertz** gelungen ist, elektromagnetische Wellen in der Umgebung elektrischer Schwingkreise mit kleiner Induktivität und Kapazität nachzuweisen. Er hat Wellenlängen, und damit auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit c), gemessen, aber auch Reflexion, Brechung und Polarisierung nachgewiesen.

Wir wollen die Maxwell'schen Gleichungen (144) für \vec{E} und \vec{B} in einem homogenen Medium der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_r \epsilon_0$, und der Permeabilität $\mu_r \mu_0$ betrachten. Das Material soll isolierend ($\vec{j} = 0$) und elektrisch neutral sein ($\rho = 0$). Die Feldgleichungen lauten dann:

$$(171) \quad \begin{aligned} (1) \quad \operatorname{div} \vec{E} &= 0, & (2) \quad \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ (3) \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\dot{\vec{B}}, & (4) \quad \operatorname{rot} \vec{B} &= \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \dot{\vec{E}}. \end{aligned}$$

Beachte die Symmetrie der Gleichungen bezüglich \vec{E} und \vec{B} . Ein sich änderndes \vec{B} -Feld erzeugt ein \vec{E} -Feld (Faraday'sches Induktionsgesetz (3)), ein sich änderndes \vec{E} -Feld erzeugt ein \vec{B} -Feld (Ampere-Maxwell'sches Gesetz (4)). Diese Kopplung zwischen \vec{E} und \vec{B} ermöglicht die wellenförmige Ausbreitung der elektromagnetischen Felder. Wir leiten jetzt die Wellengleichung für das \vec{E} -Feld her, indem wir in (3), mit Hilfe von (4), \vec{B} eliminieren. Dies geschieht durch Bildung der Rotation auf beiden Seiten von (3) und Ableitung nach t in (4):

$$(3a) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\dot{\vec{B}}}, \quad (4a) \quad \operatorname{rot} \dot{\vec{B}} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \dot{\dot{\vec{E}}},$$

somit erhalten wir

$$(172) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \dot{\dot{\vec{E}}}.$$

Nun genügt jede Komponente des Vektors $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V}$ eines beliebigen Vektorfeldes \vec{V} , z.B. die x -Komponente, der mathematischen Identität

$$(173) \quad (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V})_x = (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V})_x - \Delta V_x.$$

Anwendung auf (172), unter Berücksichtigung von (1), $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, führt auf die Wellengleichung für jede Komponente von \vec{E} , z.B.

$$(174) \quad \partial^2 E_x / \partial t^2 = (1 / (\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0)) \cdot \Delta E_x, \quad \text{Wellengleichung für } \mathbf{E}_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t).$$

Der Koeffizient vor $\Delta E_x = \partial^2 E_x / \partial x^2 + \partial^2 E_y / \partial y^2 + \partial^2 E_z / \partial z^2$ ist gerade das Quadrat der Phasengeschwindigkeit. Wir haben also im Vakuum ($\epsilon_r = \mu_r = 1$) die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$(175) \quad c = \sqrt{1/(\epsilon_0 \cdot \mu_0)}, \quad \text{Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle im Vakuum.}$$

Mit $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s}/(\text{V} \cdot \text{m})$ und $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$ wird $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

In Materie ist die Lichtgeschwindigkeit um den Faktor $\sqrt{1/(\epsilon_r \cdot \mu_r)}$ kleiner als im Vakuum (siehe auch: Begriff des Brechungsindex n in der Optik).

Übungsaufgabe:

Benütze $\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla}_{op} \times \vec{V}$, $\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla}_{op} \cdot \vec{V}$ und $\text{grad } V_x = \vec{\nabla}_{op} \cdot V$ zum Beweis von (173).

Man kann in (171) auch \vec{E} eliminieren und erhält in analoger Weise die Wellengleichung für jede Komponente von \vec{B} (Übung), z.B.

$$(176) \quad \partial^2 B_y / \partial t^2 = (1/(\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0)) \cdot \Delta B_y, \quad \text{Wellengleichung für } \mathbf{B}_y(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t).$$

5.1 Die ebene, linear polarisierte elektromagnetische Welle

Durch die Differentialgleichungen (174) und (176) wird eine grosse Mannigfaltigkeit von Wellen beschrieben. Wir gehen hier nur auf die einfachste Lösung, nämlich die **ebene Welle** ein, wo also \vec{E} und \vec{B} nur von einer Ortskoordinate, welche in der Ausbreitungsrichtung liegt, abhängen. Dies sei die z -Achse, also ist $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$ und $\vec{B} = \vec{B}(z, t)$. Dann ist $\text{div } \vec{E} = \partial E_z / \partial z$ und $\text{div } \vec{B} = \partial B_z / \partial z$. Weil die Felder nach (1) und (2) aber divergenzfrei sind, muss $\partial E_z / \partial z = 0$ sein, d.h., dass \vec{E} keine Komponente in Richtung der Fortpflanzung haben kann. Dasselbe gilt für \vec{B} .

Elektromagnetische Wellen sind transversal.

\vec{E} (bzw. \vec{D}) und \vec{B} stehen normal zur Ausbreitungsrichtung.

Die Richtung der x -Achse soll mit \vec{E} zusammenfallen, so dass $\vec{E}(z, t)$ gegeben ist durch $(E_x(z, t), 0, 0)$, mit

$$(177) \quad E_x(z, t) = E_0 \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t), \quad \omega/k = \mathbf{v}(\text{Phase}).$$

Das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}(z, t)$ erhalten wir mit (177) aus dem Induktionsgesetz, $\partial \vec{B} / \partial t = -\text{rot } \vec{E}$. Nur die y -Komponente von $\text{rot } \vec{E}$ ist von null verschieden, so dass \vec{B} parallel zur y -Achse liegen muss. Es ist

$$-(\text{rot } \vec{E})_y = -\partial E_x / \partial z, \quad \text{woraus folgt:}$$

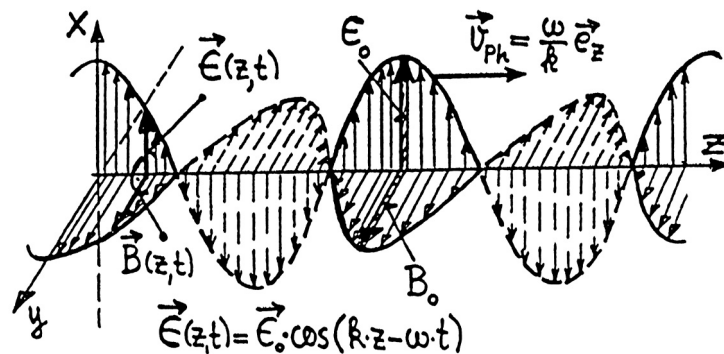
$$\partial B_y / \partial t = k \cdot E_0 \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t).$$

Durch Integration über t erhalten wir

$$(178) \quad B_y(z, t) = B_0 \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t), \quad \text{mit } \mathbf{B}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 / \omega.$$

Die Gleichungen (177) und (178) besagen, dass \vec{E} und \vec{B} in Phase sind, senkrecht aufeinander stehen, mit der Fortpflanzungs-Richtung ein **Rechtssystem** bilden, und dass immer die Beziehung erfüllt ist:

$$(179) \quad E(z, t)/B(z, t) = v(\text{Phase}).$$



Im Vakuum ist $v(\text{Phase}) = c$. Die betrachtete Welle hat die Eigenschaft, dass der elektrische Feldvektor $\vec{E}(z, t)$ immer in der xz -Ebene schwingt. Man nennt eine solche Welle **linear polarisiert**.

5.2 Energietransport und Poynting-Vektor \vec{S}

Wir wissen, dass das elektrische Feld \vec{E} nach (54) eine lokale Energiedichte $w(\text{el}) = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E^2/2$ repräsentiert, während die Energiedichte im Magnetfeld $w(\text{mag}) = B^2/(2 \cdot \mu_r \cdot \mu_0)$ ist. In einer elektromagnetischen Welle ist aber immer (179) erfüllt, so dass $w(\text{el}) = w(\text{mag})$ wird. Es ist also

$$(180) \quad w = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E^2, \quad \text{lokale Energiedichte in einer elektromagnetischen Welle.}$$

Da sich \vec{E} und \vec{B} mit der Phasengeschwindigkeit fortbewegen, wird durch jedes zu $\vec{v}(\text{Phase})$ normal stehendes Flächenelement dA pro Zeiteinheit die Energie $w \cdot v(\text{Phase}) \cdot dA$ transportiert. Wir bezeichnen die Energieströmung pro Zeit und Fläche mit S .

$$(181) \quad S = w \cdot v(\text{Phase}), \quad \text{Energieströmung pro Zeit- und Flächeneinheit.}$$

Mit Hilfe von (179) und (180) lässt sich S auch schreiben als

$$S = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E \cdot B \cdot v^2(\text{Phase}) \quad \text{oder} \quad S = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E \cdot B / (\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0).$$

Dies ist aber gerade identisch mit $S = \vec{E} \cdot \vec{H}$. Man kann nun S als den Betrag eines **Strömungsvektors** \vec{S} auffassen. \vec{S} zeigt in Richtung von $\vec{v}(\text{Phase})$ und kann als Vektorprodukt von \vec{E} und \vec{H} ausgedrückt werden:

$$(182) \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad \text{Poynting-Vektor.}$$

Dimension: Energie/(Fläche · Zeit)

Einheit: $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

Der Ausdruck (182) ist allgemein gültig, nicht nur für die hier diskutierte, ebene Welle. Dies ist so, weil jede beliebige Welle lokal, d.h. in einem differentiell kleinen Volumenelement, als Bestandteil einer ebenen Welle aufgefasst werden kann.

Beachte:

Der Betrag des Poyntingvektors variiert zeitlich und örtlich.

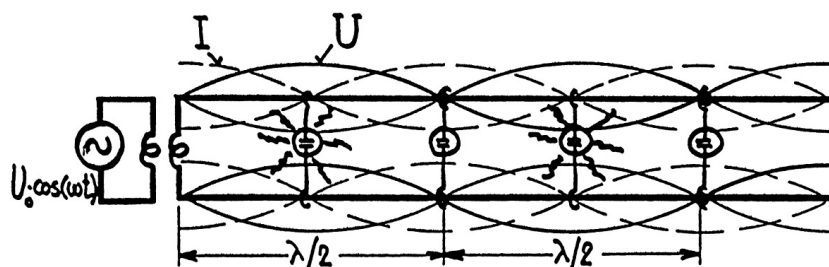
$$S(z, t) = E_0 \cdot H_0 \cdot \cos^2(k \cdot z - \omega \cdot t).$$

Die Richtung von \vec{S} fällt aber immer in die Fortpflanzungsrichtung der Welle. Im zeitlichen Mittel ist der Energietransport durch die Einheitsfläche pro Sekunde

$$(183) \quad \langle S \rangle = E_0 \cdot H_0 / 2, \quad \text{zeitlicher Mittelwert des Poynting-Vektors.}$$

5.3 Elektrische Wellen entlang Drähten; Lechersystem

Im Gegensatz zum Fall „quasistationärer“ Ströme (siehe Kap. 3), ist bei „schnell veränderlichen“ Feldern, also bei relativ hochfrequenten Wechselströmen, die Stromstärke längs eines Leiters nicht mehr konstant. Tritt an einer Stelle eines Leiters eine rasche Potentialänderung auf, so wirkt sich die Störung an weiter entfernten Stellen erst später aus. Nach der Maxwell'schen Theorie ergibt sich eine Ausbreitungsgeschwindigkeit, welche der Lichtgeschwindigkeit im den Draht umgebenden Medium entspricht. Drahtwellen treten z.B. an einem aus parallelen Drähten bestehenden System auf, dem so genannten **Lechersystem**, das wir experimentell untersuchen wollen. Über eine Kopplungsschleife am linken Ende wird ein Hochfrequenz-Generator induktiv angekoppelt. Das rechte Ende des Lechersystems ist offen. Die Spannung pflanzt sich zunächst längs der Drähte von links nach rechts fort, am offenen rechten Ende tritt eine Reflexion derart auf, dass dort ein Spannungsbauch liegt (siehe Physik I, S. 101). Die Kopplungsschleife links bedeutet einen Kurzschluss, so dass hier die Potentialdifferenz null zwischen den Drähten erzwungen wird. Ist die Drahtlänge ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$, so bildet sich eine stehende Welle aus, die das elektrische Analogon zur stehenden Seilwelle, mit einem festen und einem freien Seilende, darstellt. Die Potentialänderung längs der Drähte hat eine Stromwelle zur Folge, wobei am offenen, rechten Ende ein Stromknoten, am linken, geschlossenen Ende ein Strombauch liegt. Die stehende Stromwelle ist um $\lambda/4$ gegenüber der Spannungswelle verschoben. Im Experiment weisen wir die Spannungsbäuche und Knoten mittels Glimmlämpchen nach, die wir parallel geschaltet längs des Systems verschieben. An den Spannungsbäuchen brennen die Glimmlampen maximal, an den Knoten erlöschen sie. Bei einer Frequenz von $\nu = 27.3$ MHz ist der Abstand der Knoten $\lambda/2 = 5.5$ m. Daraus ergibt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \nu \cdot \lambda$ von $3 \cdot 10^8$ m/s.



5.4 Der Hertz'sche Dipol

Der Prototyp einer Quelle für elektromagnetische Wellen ist der **Hertz'sche Dipol**. Wir können seine Wirkungsweise gut verstehen, wenn wir von einem Lechersystem ausgehen, dessen parallele Drähte gerade die Länge $\lambda/4$ besitzen. Durch Aufbiegen in eine gestreckte Konfiguration erhalten wir

die Dipolantenne der Länge $L = \lambda/2$, welche durch einen Generator der Frequenz $\nu = c/\lambda$ in ihrer Grundschiwingung angeregt wird. Der Strombauch im Zentrum bewirkt eine periodische Ladungshäufung entgegen gesetzten Vorzeichens an den Enden des Drahtes. Es liegt somit ein oszillierendes elektrisches Dipolmoment $p(t)$ vor.

$$(184) \quad p(t) = p_0 \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

oder mit $p_0 = q \cdot L$, wenn q die effektive oszillierende Ladung bedeutet:

$$(185) \quad p(t) = q \cdot L \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Wir können hier die mathematisch relativ anspruchsvolle Berechnung des elektromagnetischen Feldes in der Umgebung des oszillierenden Dipols, ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen, nicht durchführen. Aber einige qualitative Aussagen sind trotzdem möglich. Im Abschnitt 1.9 haben wir gesehen, dass ein in z-Richtung liegender, statischer Dipol in der xy-Ebene ein \vec{E} -Feld erzeugt, welches auf dieser Ebene senkrecht steht. Die zeitliche Änderung der Geometrie unseres oszillierenden Dipols lässt in jedem Punkt der xy-Ebene einen \vec{E} -Vektor erwarten, der ebenfalls oszilliert, d.h. parallel zur z-Achse schwingt. Da die Ausbreitung des Feldes mit der endlichen Geschwindigkeit c erfolgt, erhalten wir eine vom Dipol weglaufende elektrische Welle mit $\lambda = c/\nu = 2 \cdot L$. Nach dem Biot-Savart-Gesetz müssen aber auch kreisförmige, zur z-Achse konzentrisch liegende magnetische Feldlinien auftreten, denn die oszillierende Ladung stellt einen Wechselstrom dar. \vec{E} und \vec{H} sind auf der xy-Ebene offenbar so gerichtet, dass ein Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ entstehen kann, der einer auslaufenden Welle, also einer **Energie-Abstrahlung** entspricht. In Richtung der z-Achse ist die Situation anders: aus Symmetriegründen kann es keine \vec{E} -Komponente geben, welche normal zur z-Achse steht, folglich muss der Poyntingvektor in z-Richtung verschwinden.

| In seiner Schwingungsrichtung kann ein linearer Oszillator keine Energie abstrahlen.

Offensichtlich ist die Strahlungsintensität vom Winkel ϑ zwischen Schwingungsrichtung und Emissionsrichtung abhängig. Für Distanzen $r \gg \lambda$ (in der so genannten „Fernzone“) ergibt die exakte Rechnung die nachfolgenden Resultate.

\vec{E} und \vec{H} sind in Phase, für ihre Amplituden E_0 und H_0 gilt:

$$E_0 \sim (\ddot{p}/r) \cdot \sin \vartheta, \quad \text{ebenso} \quad H_0 = (\ddot{p}/r) \cdot \sin \vartheta.$$

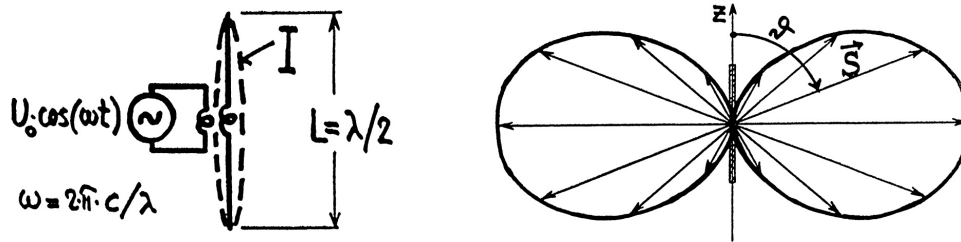
Die zweite zeitliche Ableitung \ddot{p} des Dipolmomentes $p(t)$ ist nach (185) auch

$$\ddot{p} = -\omega^2 \cdot q \cdot L \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{oder} \quad \ddot{p} = q \cdot \ddot{z}.$$

Der zeitliche Mittelwert $\langle S \rangle = E_0 \cdot H_0/2$ ist damit proportional dem Quadrat der Beschleunigung \ddot{z} der Ladung oder der 4. Potenz der Frequenz, und fällt mit $1/r^2$ ab (wie dies der Energiesatz verlangt).

$$(186) \quad \langle S \rangle \sim \omega^4 \cdot p_0^2 \cdot \sin^2 \vartheta / r^2.$$

Die graphische Darstellung von (186) führt zum **Strahlungsdiagramm**. Dies ist das zur Dipolachse rotationssymmetrische Polardiagramm von $\langle \vec{S} \rangle$, welches die räumliche Verteilung der Dipolstrahlung zum Ausdruck bringt.



Die exakte Berechnung von $\langle S \rangle$ und Integration über die Kugeloberfläche führt zur totalen, zeitlich gemittelten Strahlungsleistung

$$(187) \quad \langle P \rangle = \omega^4 \cdot p_0^2 / (12 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3), \quad \text{totale mittlere Strahlungsleistung.}$$

Der Energieverlust durch Ausstrahlung wirkt sich als Dämpfung des Antennen-Schwingkreises aus. In Analogie zum Dämpfungswiderstand R eines RLC-Kreises spricht man hier vom **Strahlungswiderstand** der Antenne.

Bemerkung zur ebenen Welle:

Im strengen Sinn treten die in 5.1 besprochenen, ebenen elektromagnetischen Wellen in der Natur nicht auf. Wie im Falle des Hertz'schen Dipols gehen die elektromagnetischen Wellen immer von räumlich eng begrenzten Zentren aus, z.B. von Sende-Antennen für Radiowellen oder von strahlenden Atomen in einer Lichtquelle. Befinden wir uns jedoch in Distanzen, die gross sind, verglichen mit der Quellendimension, so kann das Wellenfeld lokal in sehr guter Näherung durch eine ebene Welle approximiert werden. In diesem Sinn ist der oszillierende Dipol auch eine Quelle ebener Wellen.

Demonstrationen:

1. Gedämpfte, freie Schwingung (RLC-Seriekreis)
2. Erzeugung ungedämpfter Schwingungen; Rückkopplung
3. Lecher-System
4. Michelson-Interferometer (Oszillator 10.7 GHz, Wellenlänge 2.8 cm gemessen, daraus c -Bestimmung. Reflexion an Metallspiegel)
5. Linear polarisierte e.m. Welle (elektrische Dipolantenne, Nachweis der Polarisation)

5.5 Das elektromagnetische Spektrum

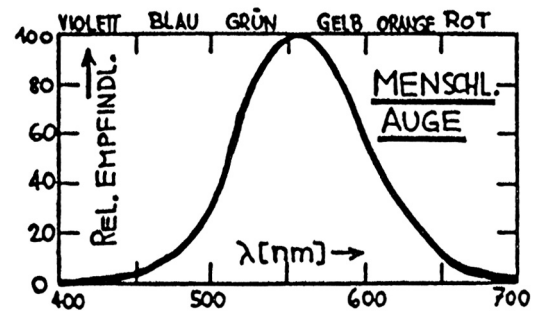
Die elektromagnetischen Wellen überdecken ein breites Frequenz- und Wellenlängengebiet. Entsprechend ihrem Ursprung werden sie traditionellerweise klassifiziert. Die Abgrenzungen sind aber fließend und verschiedene Quellen können Wellen sich überlappender Energiebereiche erzeugen. In der folgenden Tabelle sind die Wellenlängenbereiche mit den zugehörigen Frequenzen $\nu = c/\lambda$ und den Quantenenergien $E = h \cdot \nu$ angegeben („Energiequanten“ siehe Kap. V).

Strahlung (Quelle)	Wellenlänge λ (m)	Frequenz ν (Hz)	Energie $h \cdot \nu$ (eV)
Radiowellen (el. Schwingkreis)	$10^5 - 0.3$	$10^3 - 10^9$	$10^{-11} - a \cdot 10^{-6}$
Mikrowellen (el. UHF-Schwingkreis)	$0.3 - 10^{-3}$	$10^9 - 3 \cdot 10^{11}$	$4 \cdot 10^{-6} - 10^{-3}$
Infrarot (Wärmestrahlung, Molekülschwingungen)	$10^{-3} - 7.8 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{14}$	$10^{-3} - 1.6$
Sichtbar (Elektronen-Über- gänge in Atomhülle)	$7.8 \cdot 10^{-7} - 3.8 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{14} - 8 \cdot 10^{14}$	$1.6 - 3.2$
Ultraviolett (Atome in elektrischen Gasentladungen)	$3.8 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{14} - 5 \cdot 10^{17}$	$3 - 2 \cdot 10^3$
Röntgen (Röntgenröhre, Bremsstrahlung)	$10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	$1.2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^5$
Gamma (Kernstrahlung, Radioaktivität)	$10^{-10} - 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{18} - 3 \cdot 10^{22}$	$10^4 - 10^7$

Teil IV

Optik

Die Optik behandelt die Gesamtheit der Erscheinungen und Gesetze der **elektromagnetischen Wellen**. Von speziellem Interesse ist der Wellenlängenbereich zwischen etwa 380 nm und 780 nm, welcher vom menschlichen Auge als sichtbares Licht wahrgenommen wird. Die relative spektrale Empfindlichkeit des photopischen Receptorsystems (Zapfen-System), bezogen auf den Maximalwert bei 555 nm (grün-gelb), ist in nebenstehender Figur dargestellt. Für physikalische Experimente werden in vielen Fällen Photoplatten oder elektronische Detektoren verwendet, deren spektrale Empfindlichkeit über den sichtbaren Frequenzbereich hinaus gross sein kann.



Kapitel 1

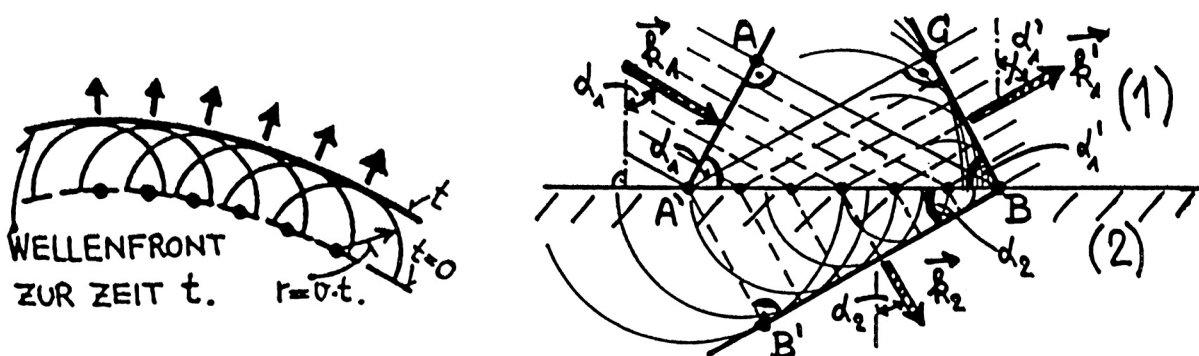
Reflexion und Brechung

Wie wird eine ebene elektromagnetische Welle, insbesondere sichtbares Licht, an **Grenzflächen** zwischen verschiedenen **dielektrischen Materialien** beeinflusst? Um diese Frage zu beantworten, müssten wir eigentlich Lösungen der Wellengleichung suchen, welche an den Grenzflächen bestimmte, durch die Maxwell'schen Gleichungen festgelegte, Randbedingungen erfüllen. Anstatt diesen rigorosen mathematischen Weg zu gehen, machen wir Gebrauch von einem allgemeinen, für alle Wellen gültigen Prinzip, welches schon 1678 von **Christian Huygens** intuitiv gefunden und 1818 von **Augustin Jean Fresnel** mathematisch begründet wurde.

Das Huygens-Fresnel'sche Prinzip:

Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer Kugelwelle (Elementarwelle) aufgefasst werden. Zu einem späteren Zeitpunkt wird die neue Wellenfront durch die allen Elementarwellen gemeinsame Tangentialfläche (Envelope) gebildet.

Wir wenden nun das Huygens-Fresnel'sche Prinzip auf eine ebene Welle an, welche zunächst in einem isotropen, isolierenden Medium (1) sich ausbreitet und in ein isotropes Dielektrikum (2) eindringt. Die Grenzfläche zwischen (1) und (2) sei eben, die Phasengeschwindigkeiten in den beiden Medien seien v_1 und v_2 . Den Winkel zwischen der Einfallsrichtung \vec{k}_1 und dem Lot auf die Grenzfläche bezeichnen wir mit α_1 .



Aus der Figur lesen wir ab, dass während der Laufzeit Δt für die Strecke \bar{AB} eine Elementarwelle mit Zentrum in A' im Medium (1) den Radius $\bar{A'C} = v_1 \cdot \Delta t$ und im Medium (2) den Radius $\bar{A'B'} = v_2 \cdot \Delta t$ erreicht. Die rechtwinkligen Dreiecke $A'AB$ und BCA' sind kongruent. Wir erhalten das

Reflexionsgesetz:

$$(1) \quad \alpha_1 = \alpha'_1, \quad \text{Einfallswinkel} = \text{Reflexionswinkel.}$$

Einfallender und reflektierter Wellenstrahl bilden mit dem Einfallslot eine Ebene.

Ferner muss gelten:

$$\sin \alpha_1 = \bar{AB}/\bar{A'B} \quad \text{und} \quad \sin \alpha_2 = \bar{A'B'}/\bar{A'B}.$$

Daraus folgt weiter:

$$(2) \quad \sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1 / v_2.$$

Den Quotienten aus den Phasengeschwindigkeiten in den beiden Medien bezeichnet man als relativen Brechungsindex.

$$(3) \quad n_{12} = v_1 / v_2, \quad \text{Definition des relativen Brechungsindex } n_{12}.$$

Mit (2) und (3) lautet das

Brechungsgesetz:

$$(4) \quad \sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = n_{12}.$$

Einfallender und gebrochener Wellenstrahl bilden mit dem Einfallslot eine Ebene.

Der Brechungsindex n eines Stoffes, bezogen auf das Vakuum, ist der absolute Brechungsindex, eine Materialkonstante:

$$(5) \quad n = c/v, \quad \text{absoluter Brechungsindex.}$$

Haben zwei Stoffe die absoluten Brechzahlen n_1 und n_2 , so folgt aus (3) und (5):

$$(6) \quad n_{12} = n_2 / n_1.$$

Nach der Maxwell'schen Theorie ist die Lichtgeschwindigkeit in Materie gegenüber dem Vakuum gerade um den Faktor $1/\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}$ reduziert (siehe S. 72). Für dielektrische Stoffe ist die relative Permeabilität $\mu_r \cong 1$, so dass hier gilt

$$(7) \quad n = c/v \cong \sqrt{\epsilon_r}, \quad \text{Maxwell'sche Relation.}$$

Beachte:

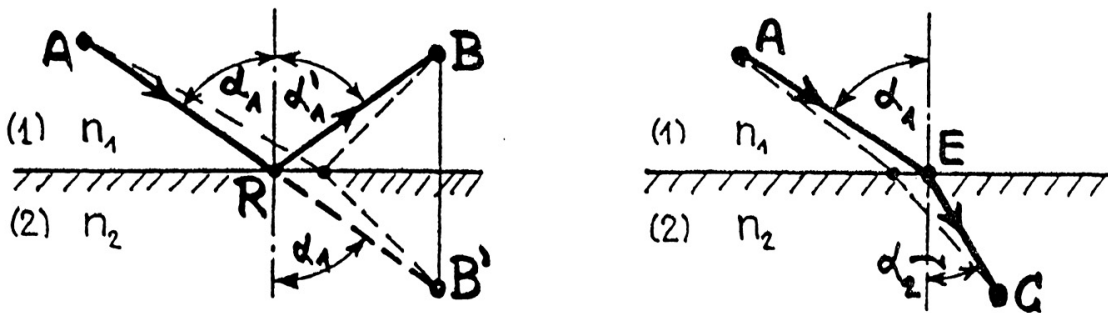
Wenn wir die statisch definierte Dielektrizitätskonstante (siehe S. 24) einsetzen, gilt die Maxwell'sche Relation für Isolatoren, solange elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen grösser als 1 mm betrachtet werden. Im Frequenzbereich von sichtbarem Licht muss der atomistischen Struktur der Materie Rechnung getragen und die Frequenzabhängigkeit von ϵ_r berücksichtigt werden.

1.1 Das Prinzip von Fermat (Pierre de Fermat, 1650)

Physikalische Gesetze können auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Ein schönes Beispiel dafür ist die Formulierung von Reflexions- und Brechungsgesetz durch ein allgemeines „**Variationsprinzip**“, welches auf den Mathematiker Fermat zurückgeht. Es besagt:

Ein Licht-Wellenstrahl, der durch zwei Punkte A und B hindurchläuft, folgt immer jenem Weg, der verglichen mit benachbarten Wegen zu einem Extremum der Laufzeit $t(A \rightarrow B)$ führt.

In einem homogenen Medium verlangt das Fermat'sche Prinzip offensichtlich minimale Laufzeit zwischen zwei Punkten, also geradlinige Lichtausbreitung. Im Falle der Reflexion ist leicht einzusehen, dass die Laufzeit für den reflektierten Strahl von A über R nach B ein Minimum ist. Er verläuft immer im Medium (1) mit konstanter Geschwindigkeit v_1 ; der Weg ARB und damit die Laufzeit ist dann minimal, wenn ARB' zum Spiegelbild B' von B eine Gerade, d.h. das Reflexionsgesetz $\alpha_1 = \alpha_1'$ erfüllt ist. Überschreitet der Wellenstrahl die Grenzfläche zwischen den Medien (1) und (2), so stellt sich das Extremalproblem, den Eintrittspunkt E so zu finden, dass die Summe der Laufzeiten für AE in (1) und EC in (2) minimal wird. Die Rechnung ergibt genau das Brechungsgesetz (4).



Übungsaufgabe:

Beweise, dass die minimale Laufzeit zwischen A und C gerade dann erreicht wird, wenn das Brechungsgesetz erfüllt ist.

Die Anzahl der Wellenlängen, welche zwischen zwei Punkten auf dem Wellenstrahl liegen, ist gleich dem Produkt aus Laufzeit und Frequenz. Da die Frequenz unabhängig vom Brechungsindex konstant ist, bedeutet minimale Laufzeit auch eine minimale Zahl von Wellenlängen zwischen den festen Punkten. Misst die Koordinate s die Weglänge auf dem Wellenstrahl und ist λ_0 die Wellenlänge im Vakuum, so ist $\lambda(s) = \lambda_0 / (n(s))$ die Wellenlänge an der Stelle s . Die Zahl N der Wellenlängen zwischen A und C wird dann $N = (1/\lambda_0) \cdot \int_A^C n(s) \cdot ds$. Man nennt

$$(8) \int_A^C n(s) \cdot ds, \quad \text{die optische Weglänge.}$$

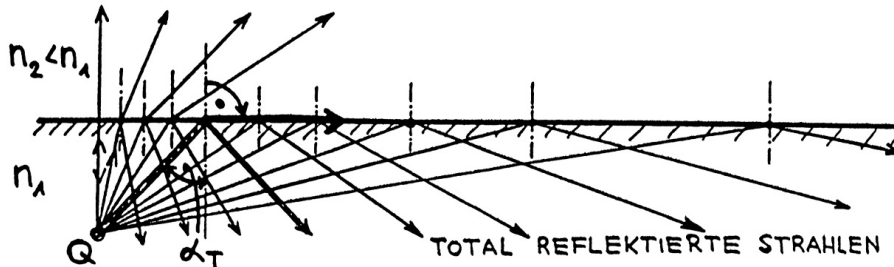
Das Fermat'sche Prinzip kann auch so ausgedrückt werden:

Zwischen zwei Punkten eines Wellenstrahls ist der Verlauf des Strahles so, dass der optische Weg ein Extremum ist.

1.2 Total-Reflexion

Wir setzen nun voraus, dass eine ebene Lichtwelle im Medium (1) auf die ebene Grenzfläche zum Medium (2) auftrifft, wobei (1) **optisch dichter** sein soll, als das Medium (2). Es ist also $n_1 > n_2$. Lassen wir den Einfallswinkel α_1 anwachsen, so wird schliesslich der Grenzwinkel $\alpha_1 = \alpha_T$ erreicht, zu dem ein Brechungswinkel $\alpha_2 = 90^\circ$ gehört. Für den Grenzwinkel α_T gilt:

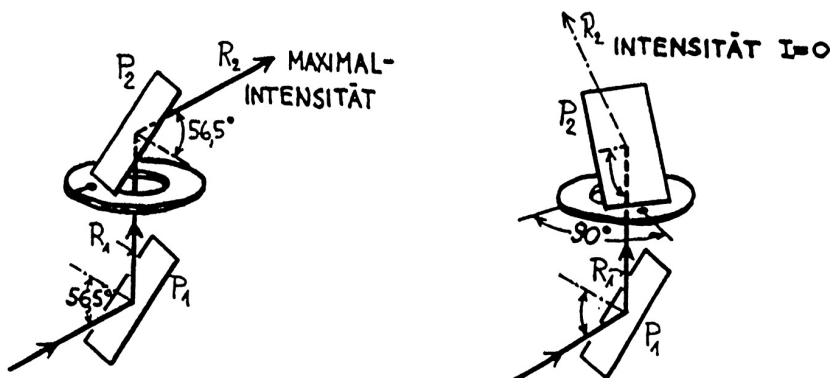
$$(9) \quad \sin \alpha_T = n_2/n_1, \quad \text{Grenzwinkel der Totalreflexion } \alpha_T.$$



Für Glas gegen Luft ist $n_2/n_1 \cong 1.00/1.50$ und $\alpha_T = 41.8^\circ$. Wenn dieser Grenzwinkel überschritten wird, ist ein Eindringen der Welle ins Medium (2) nicht mehr möglich; es tritt **Totalreflexion** auf. Als eine von vielen technischen Anwendungen sei die „Glasfaser-Optik“ erwähnt, wo Licht innerhalb von feinen Glasfäden mittels Totalreflexion transportiert wird. Für den Lichtverlust ist praktisch nur die Absorption im Glas, nicht die Reflexion verantwortlich, obwohl viele tausend Reflexionen stattfinden können.

1.3 Polarisierung durch Reflexion; Brewster'scher Winkel

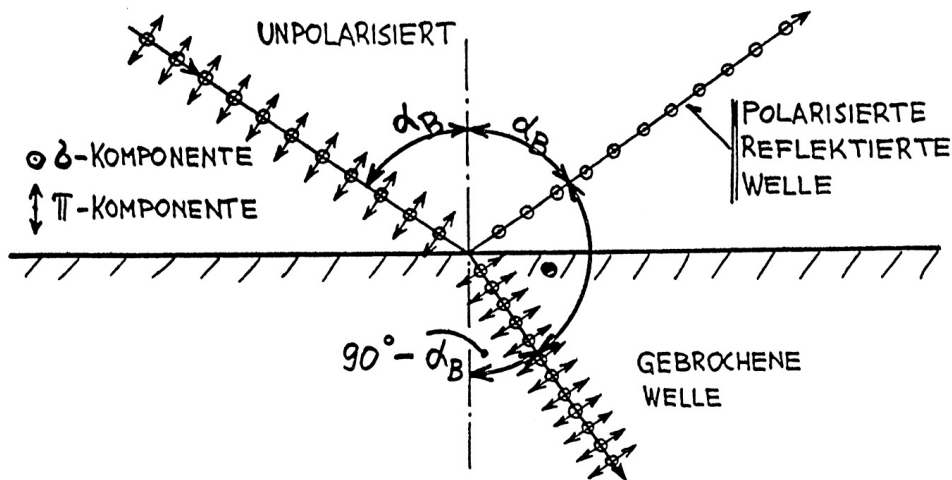
Wird Licht etwa von einer thermischen Lichtquelle emittiert, so hat der elektrische Feldvektor in jedem festen Punkt der Welle die Eigenschaft, seine transversale Schwingungsrichtung als Funktion der Zeit statistisch zu ändern. Jede Richtung in der Normalebene zum Wellenvektor tritt gleich häufig auf. Die Lichtwelle ist **unpolarisiert**. Wir lassen nun unpolarisiertes Licht von einer ebenen Glasplatte P_1 (Brechzahl $n = 1.52$) unter dem Einfallswinkel $\alpha_1 = 56.5^\circ$ reflektieren. Der reflektierte Strahl R_1 wird von einer Identischen, zur ersten parallel orientierten Glasplatte P_2 nochmals reflektiert (Strahl R_2). Drehen wir nun P_2 um R_1 als Drehachse, so ändert die Intensität von R_2 . Sie ist maximal, wenn die Reflexionsebenen beider Platten parallel sind und sie wird null, wenn diese normal aufeinander stehen.



Der spezielle Einfallswinkel $\alpha_1 = \alpha_B$ (Brewsterwinkel), bei welchem dieses Phänomen auftritt, ist jener Winkel, für welchen reflektierter und gebrochener Strahl gerade normal aufeinander stehen (experimentell gefunden durch **David Brewster**, 1811). Dies bedeutet, dass der Brechungswinkel $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$ ist. Nach dem Brechungsgesetz (4) wird dann

$$(10) \quad \text{tg} \alpha_B = n_2/n_1, \quad \text{Brewsterwinkel } \alpha_B.$$

Wie lässt sich nun dieses Verhalten erklären? Sowohl das Reflexionsgesetz (1) als auch das Brechungsgesetz (4), zu deren Herleitung wir lediglich das Huygens-Fresnel'sche Prinzip herangezogen haben, macht zwar eine Aussage über die Ausbreitungsrichtung der Welle, sagt aber nichts über die auftretenden Intensitäten. Die Intensitätsberechnung würde die schon erwähnte rigorose Behandlung mit den Maxwell'schen Gleichungen erfordern. Etwas Einsicht bringt uns folgende einfache Betrachtung: wir zerlegen den elektrischen Vektor \vec{E} der Welle in die zwei Normalkomponenten \vec{E}_π und \vec{E}_σ , wobei \vec{E}_π in der Reflexionsebene (diese enthält auch den gebrochenen Strahl) und \vec{E}_σ senkrecht zu dieser Ebene schwingen soll. Ist das einfallende Licht unpolarisiert, so sind beide Komponenten gleich stark vertreten. Beim Eindringen der Welle ins Glas werden die hier vorhandenen Elektronen zu erzwungenen Dipolschwingungen angeregt, d.h. sie wirken als Hertz'sche Dipole und senden Elementarwellen aus, die in ihrer Gesamtheit sowohl die reflektierte, als auch die gebrochene Welle erzeugen. Wenn nun (10) erfüllt ist, fallen die reflektierten Wellenstrahlen gerade mit der Dipolachse der in π -Richtung schwingenden Elektronen zusammen, so dass diese zur reflektierten Welle nichts beitragen können. Anders bei den in σ -Richtung angeregten Dipolschwingungen: Sie emittieren mit maximaler Intensität in Reflexionsrichtung. Dies hat zur Folge, dass die **reflektierte Welle vollständig polarisiert ist**, und zwar **senkrecht zur Reflexionsebene**. Die gebrochene Welle ist in π -Richtung nicht vollständig polarisiert, denn sie enthält auch Beiträge von σ -Komponenten. Wenn in unserem Experiment die Reflexionsebene der Platte P_2 gegenüber jener von P_1 um 90° verdreht ist, enthält die vollständig polarisierte Welle R_1 , bezogen auf P_2 , nur \vec{E}_π -Komponenten, so dass die für Reflexion erforderliche Feldkomponente fehlt. Es kann keine Reflexion auftreten. Die Platte P_1 wirkt als **Polarisator**, P_2 als **Analysator**.



Kapitel 2

Geometrische Optik

Wenn wir in der Normalebene zum Wellenvektor k einer Lichtwelle eine Lochblende anbringen, deren Durchmesser gross ist, verglichen mit der Wellenlänge, so wird die Welle in ihrer lateralen Ausdehnung begrenzt, es entsteht ein **Lichtbündel** oder **Wellenbündel**. Dieses Lichtbündel wird als **Lichtstrahl** bezeichnet. Die Lichtstrahlen folgen dem Weg, auf welchem die Lichtenergie sich ausbreitet. In isotropen Medien sind sie gerade Linien, stehen senkrecht auf den Wellenflächen und sind identisch mit den durch die Vektoren k festgelegten Wellenstrahlen. Die **geometrische Optik** ist eine **Approximation**, indem sie **Beugungseffekte vernachlässigt** (siehe Kap. 3.6). Für die Diskussion abbildender Systeme (z.B. Spiegel und Linsen) ist die Betrachtungsweise der geometrischen Optik bequem und oft hinreichend genau.

2.1 Abbildendes System

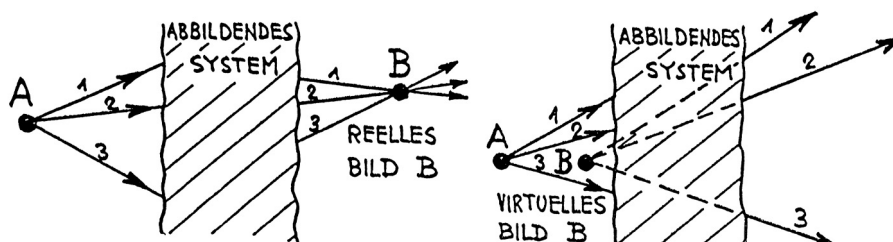
Treten die von einem **Objektpunkt A** ausgehenden Strahlen in ein **ideal abbildendes System** ein, so werden sie in ihrer Richtung so beeinflusst, dass sie nach passieren des Systems sich wieder in einem Punkt, dem **Bildpunkt B**, schneiden. Aus verschiedenen physikalischen Gründen sind reale abbildende Systeme immer durch **Aberrationen** gekennzeichnet, d.h. bildseitig schneiden sich die Strahlen in vielen Punkten, die ein endliches Volumen ausfüllen. Wir unterscheiden zwei Arten von Bildpunkten:

a) Reelles Bild:

Die von A ausgehenden Strahlen schneiden sich wirklich in B. In diesem Fall lässt sich der Bildpunkt B auf einem Schirm auffangen.

b) Virtuelles Bild:

Die von A ausgehenden Strahlen sind nach dem Verlassen des Systems divergent; sie scheinen von einem Punkt B herzukommen. Das Bild ist für einen Beobachter erkennbar, wenn er den austretenden Strahlen entgegenblickt.



2.1.1 Die dünne Linse als abbildendes System

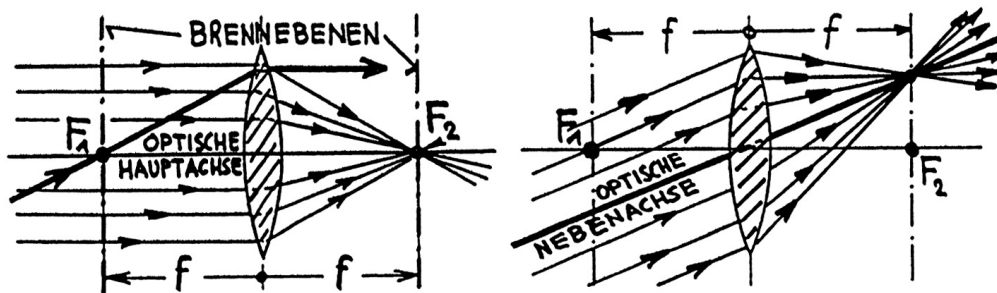
Am Beispiel der dünnen (oder „schlanken“) Linse repetieren wir kurz die wichtigsten Begriffe im Zusammenhang mit abbildenden Systemen.

Unsere Linse besteht aus einem rotationssymmetrischen Stück Glas der Brechzahl n , welches durch zwei konvexe Kugelflächen mit den Radien R_1 und R_2 begrenzt ist. Wir bezeichnen die Rotationssymmetrieachse als **optische Hauptachse**. In der Mitte ist die Linse dicker als am Rand, es ist eine **Sammel-Linse**. Die Linse soll „dünn“, d.h. ihre Dicke klein sein, verglichen mit den Krümmungsradien R_1 und R_2 . Im Folgenden betrachten wir nur achsennahe Strahlen, welche mit der optischen Hauptachse kleine Winkel einschliessen („Paraxialstrahlen“). Aus dem Brechungsgesetz (4) folgt unter dieser Voraussetzung, dass alle parallel zur optischen Hauptachse einfallenden Strahlen sich jenseits der Linse im so genannten **Brennpunkt** schneiden. Der Abstand des Brennpunktes von der Linsenmitte heisst **Brennweite f** der Linse. Sie hängt ab von den Krümmungsradien R_1 und R_2 , sowie vom Brechungsindex des Linsenmaterials. Die reziproke Brennweite oder die Brechkraft ist

$$(11) \quad 1/f = (n - 1) \cdot (1/R_1 + 1/R_2), \quad \text{Brechkraft } 1/f.$$

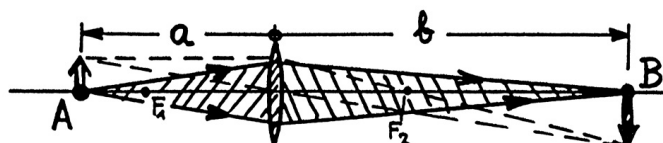
Einheit: m^{-1} , $1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ Dioptrie}$

Die dünne Linse besitzt immer zwei symmetrisch liegende Brennpunkte F_1 und F_2 , sowie zwei **Brennebenen**, die normal zur optischen Hauptachse stehen und einen Brennpunkt enthalten. Als **Hauptstrahl** bezeichnen wir einen Strahl durch die Linsenmitte; er wird nicht gebrochen und bildet eine **optische Nebenachse**. Zu einer optischen Nebenachse parallel einfallende Strahlenbündel verlassen die Linse immer so, dass sie sich im Durchstosspunkt der Nebenachse durch die Brennebene schneiden. Für alle Strahlwege gilt natürlich das Prinzip der **Umkehrbarkeit** der Lichtrichtung. Insbesondere verlassen alle durch einen Brennpunkt auf die Linse einfallenden Strahlen, so genannte **Brennstrahlen**, diese als zur optischen Hauptachse paralleles Strahlenbündel.



Liegt ein Gegenstandspunkt A im Abstand a auf der optischen Hauptachse, so gilt für den Abstand b des Bildpunktes B die Beziehung

$$(12) \quad 1/a + 1/b = 1/f, \quad \text{Abbildungsgleichung.}$$



Beachte:

Die Gegenstandsweite a ist immer positiv. Positives b bedeutet, dass das Bild auf der dem Gegenstand abgewandten Seite der Linse liegt. Für eine Zerstreuungslinse ist f negativ, was sich aus (11) ergibt, wenn die Krümmungsradien konkaver Flächen negativ genommen werden.

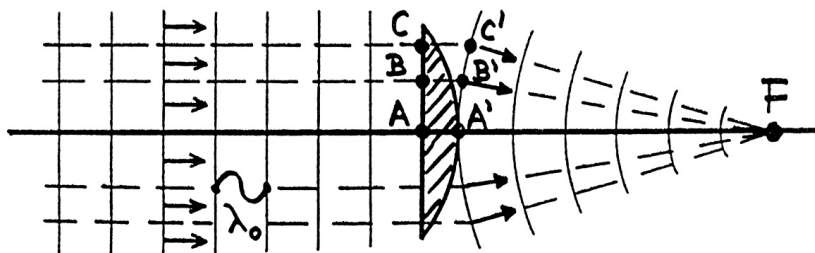
Kapitel 3

Wellenoptik

3.1 Linsenwirkung im Wellenbild

Anstatt die Wirkungsweise einer Linse im geometrisch optischen Bild auf Grund des Brechungsgesetzes zu interpretieren, können wir auch nach der Veränderung fragen, welche eine Welle beim Durchlaufen der Linse erfährt. Wir betrachten eine ebene Welle, die parallel zur optischen Hauptachse einer plankonvexen Linse von links einfällt. Die **Wellenflächen**, definiert als **Flächen gleicher Phasenlage**, sind Normalebenen zur Hauptachse. Folglich enthält die plane, linksseitige Linsenbegrenzung gerade Punkte gleicher Phasenlage des elektrischen Feldes, z.B. A , B und C . Im Linsenmaterial wird die Wellenlänge λ gegenüber λ_0 in der Luft, um den Faktor $1/n$ kürzer, d.h. der Phasenwandel ändert sich bei festgehaltener Zeit t als Funktion des Ortes im Glas schneller, als in der Luft. Mit wachsendem Abstand von der Hauptachse sind also längere geometrische Wegstücke als $A\bar{A}'$, etwa $B\bar{B}'$ und $C\bar{C}'$ nötig, um gleichen Phasenzuwachs zu erreichen, denn die Weganteile, welche im Glas verlaufen, nehmen nach aussen ab. Oder anders ausgedrückt: die **optischen Wege**

$$\int_A^{A'} n \cdot ds, \int_B^{B'} n \cdot ds \text{ und } \int_C^{C'} n \cdot ds \text{ sind gleich gross.}$$



Rechterhand von der Linse sind die **Flächen gleicher Phase gekrümmt**, so dass die Wellenstrahlen und damit der Energietransport überall auf die Hauptachse zu gerichtet ist. Bei der idealen Sammellinse nimmt die Dicke nach aussen gerade so ab, dass die Wellenflächen der ebenen, von links eintretenden Welle in Kugelflächen umgewandelt werden, deren Krümmungsmittelpunkt der rechtsseitige Brennpunkt F ist. Es entsteht eine **konvergente Kugelwelle**. In analoger Weise wird bei einer reellen Abbildung die divergierende, von einem Gegenstandspunkt A ausgehende Kugelwelle, durch die Sammellinse in eine auf den Bildpunkt B zulaufende, konvergierende Kugelwelle umgewandelt.



Beachte:

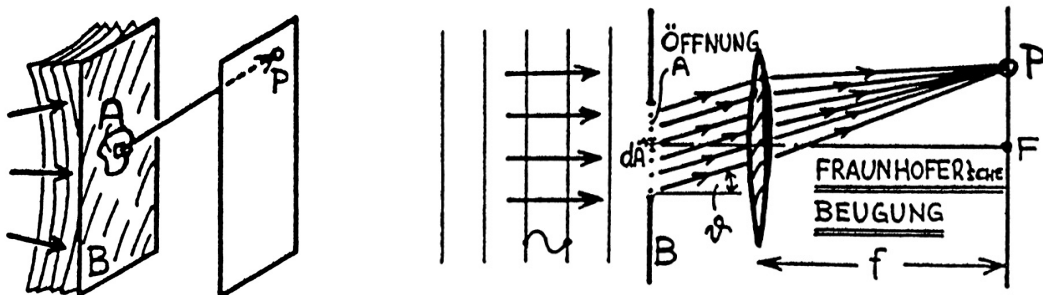
Für alle vom Gegenstandspunkt A zum Bildpunkt B laufenden Wellenstrahlen ist der optische Weg, d.h. die Anzahl der dazwischen liegenden Wellenlängen und damit auch die Laufzeit, gleich gross. Es liegt ein Spezialfall des Fermat'schen Prinzips vor: Die Laufzeit benachbarter Lichtstrahlen zwischen einem **Punkt A** und seinem **Bildpunkt B** ist **stationär**.

3.2 Beugung

Das Phänomen der Beugung ist durch **Arnold Sommerfeld** sehr treffend folgendermassen definiert worden:

Ist die Ausbreitung von Lichtstrahlen nicht geradlinig und erfolgt die Richtungsänderung nicht durch Reflexion oder Brechung, so liegt Beugung vor.

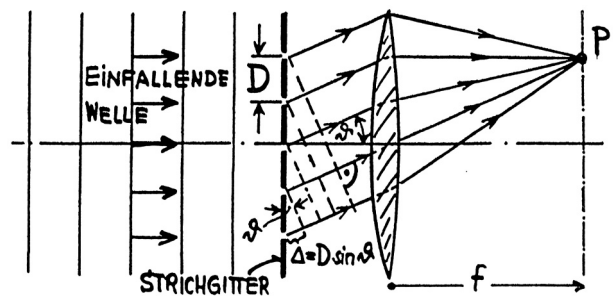
Beugung wurde 1665 von **Francesco Grimaldi** entdeckt, aber erst von Fresnel mit Hilfe des Huygens'schen Prinzips als Wellenphänomen interpretiert. Sie tritt typischerweise auf, wenn eine Wellenfront auf ein undurchlässiges Hindernis B auftrifft, welches eine für die Welle durchlässige Öffnung A besitzt. Die Amplitude des Wellenfeldes in einem hinter B liegenden Punkt P, ergibt sich aus der Superposition von Huygens'sche Elementarwellen, deren Zentren, über die Öffnung A verteilt, in infinitesimalen Flächenelementen dA sitzen. Wir nehmen an, P sei unendlich weit weg vom Gebiet A, so dass alle Strahlen nach P unter sich parallel sind. Man nennt diesen Grenzfall **Fraunhofer'sche Beugung**. In der Praxis wird dieser Fall realisiert, indem man P in die Brennebene einer Sammellinse legt.



Wir betrachten hier zwei Spezialfälle, nämlich die Beugung am optischen Strichgitter und die Beugung an einer Spaltblende.

3.2.1 Beugung am Strichgitter

Ein optisches Gitter besteht aus einer sehr grossen Zahl paralleler, äquidistanter Spaltöffnungen. Der **Abstand D** benachbarter Spalten ist die **Gitterkonstanten**. Wir wollen der Einfachheit halber voraussetzen, dass die Breite der Spalte klein sei, verglichen mit der Wellenlänge des Lichtes, so dass im Querschnitt eines Spaltes nur eine einzige Elementarwelle ihren Ausgangspunkt hat. Unser Gitter soll **N Spalten** besitzen, auf die von links eine ebene Lichtwelle senkrecht auftrifft. Nun fragen wir nach der Amplitude A der Lichtwelle im Punkt P, welcher in der Brennebene einer Sammellinse liegt. Alle durch P gehenden Strahlen verlassen die



Gitterspalte unter demselben Winkel ϑ . In der Gitterebene schwingen alle Huygens'schen Elementarwellen mit gleicher Phase. Ihre optische Weglänge nach P ist aber verschieden, so dass jede Spalte zwar mit gleicher Amplitude A_0 , aber verschiedener Phase zur Gesamtamplitude A beiträgt.

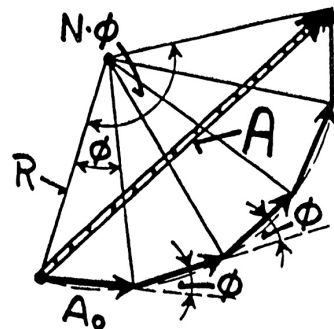
Für benachbarte Elementarwellen ist der Phasenunterschied

$$\phi = k \cdot \Delta \quad \text{oder} \quad \phi = 2 \cdot \pi \cdot (D/\lambda) \cdot \sin \vartheta.$$

In komplexer Schreibweise führt die phasengerechte Addition der Elementarwellen im Punkt P zur Gesamtamplitude A auf

$$(13) \quad \hat{A} = \sum_{n=0}^{N-1} A_0 \cdot \exp(i \cdot n \cdot \phi).$$

Aus der Figur liest man ab, dass der Umkreisradius R des entstehenden regelmässigen Polygons mit den Seiten A_0 ,



$$R = A_0 / (2 \cdot \sin(\phi/2)) \quad \text{ist und die Gesamtamplitude}$$

$$A = 2 \cdot R \cdot \sin(N \cdot \phi/2) \quad \text{oder} \quad A = A_0 \cdot \sin(N \cdot \phi/2) / \sin(\phi/2) \quad \text{beträgt.}$$

Die Lichtintensität ist dem Quadrat der Amplitude proportional. Mit $A_0^2 = I_0$ und $\phi/2 = \pi \cdot (D/\lambda) \cdot \sin \vartheta$ erhalten wir die Intensität

$$(14) \quad I = I_0 \cdot \sin^2(N \cdot \pi \cdot (D/\lambda) \cdot \sin \vartheta) / \sin^2(\pi \cdot (D/\lambda) \sin \vartheta).$$

I wird maximal, wenn der Nenner verschwindet, also für $(D/\lambda) \cdot \sin \vartheta = m$ oder

$$(15) \quad \sin \vartheta = m \cdot \lambda / D, \quad \text{Hauptmaxima, mit Ordnung } m \text{ des Beugungsmaximums.} \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots).$$

Die Bedingung (15) bedeutet, dass bei maximaler Verstärkung die Wegunterschiede benachbarter Elementarwellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Der Polygonzug in obiger Figur entartet zu einer Geraden der Länge $N \cdot A_0$. Die Maximalintensität ist also

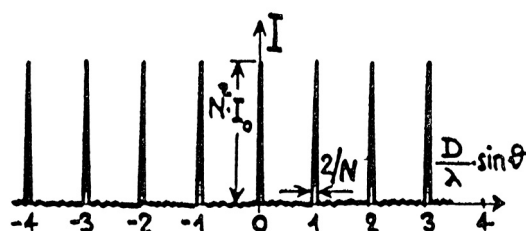
$$(16) \quad I(\max) = N^2 \cdot I_0, \quad \text{Maximalintensität.}$$

Nullstellen zwischen den Hauptmaxima treten auf, wenn der Zähler verschwindet, d.h. $N \cdot \pi \cdot (D/\lambda) \cdot \sin \vartheta = \nu \cdot \pi$ (ν ganz) ist, also

$$(17) \quad I = 0, \quad \text{für } \sin \vartheta = \nu \cdot \lambda / (N \cdot D), \quad (\text{ausser für } \nu = m \cdot N).$$

Beachte:

Die erste Nullstelle in der Nachbarschaft eines Hauptmaximums liegt umso näher, d.h. die **Maxima sind umso schärfer, je grösser die Zahl N der Gitterspalten ist.**

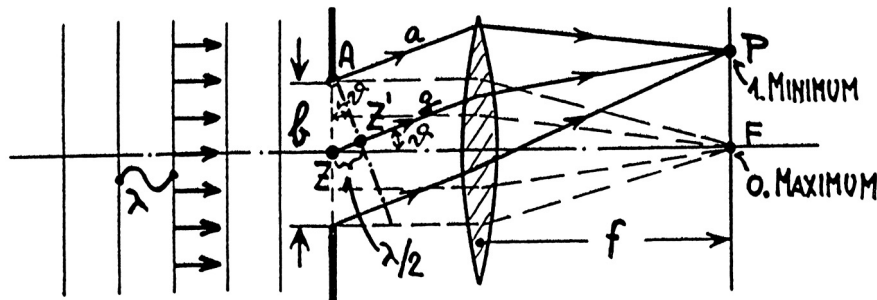


Es bilden sich auch Zwischenmaxima aus, wenn der Sinus im Zähler von (14) den Betrag eins erreicht. Deren Werte sind aber relativ zu den Hauptmaxima für grosse Strichzahlen N vernachlässigbar. Gute optische Gitter besitzen ca. 1000 bis 2000 Striche pro mm, so dass die Intensitätsverteilung in der Brennebene der Sammellinse oder in grosser Entfernung aus lauter δ -Funktionen (den Hauptmaxima m -ter Ordnung, m ganzzahlig) besteht.

Da die Abstände der Hauptmaxima mit der Wellenlänge λ der Strahlung anwachsen, spielt das Gitter eine grosse Rolle als **Spektralapparat**, wo es zur Trennung verschiedener Wellenlängen oder zu deren Bestimmung verwendet wird.

3.2.2 Beugung an der Spaltblende

Nun lassen wir eine ebene Welle auf ein Hindernis einfallen, welches eine lange, spaltförmige Öffnung der Breite b besitzt, deren Ebene parallel zu den Wellenfronten liegt. Über die Grösse von b setzen wir nichts voraus, werden aber sehen, dass die auftretenden Beugungserscheinungen am augenfälligsten sind, wenn b einige Wellenlängen beträgt. Die optische Hauptachse der hinter dem Spalt aufgestellten Sammellinse liegt in der Einfallrichtung und enthält das Spaltzentrum. Wie gross ist die Intensität $I(\vartheta)$ in der Brennebene, als Funktion des Beugungswinkels ϑ ?



Die Zentren der Huygens'schen Elementarwellen sind jetzt kontinuierlich über die Spaltbreite b verteilt. Für $\vartheta = 0$ sind alle Elementarwellen in Phase, so dass sich eine maximale Intensität I_0 im Brennpunkt F ergibt. Auf der zur Längsrichtung des Spaltes Parallelen durch F ist die Intensität konstant. Jetzt wählen wir ϑ so, dass die Wegdifferenz des Strahls z vom Spaltzentrum Z , gegenüber dem Randstrahl a , gerade $ZZ' = \lambda/2$ ist. Die Strahlen a und z löschen sich in P durch Interferenz aus, denn ihre Phasendifferenz ist π . Dasselbe gilt für alle Strahlenpaare, die von Spaltpunkten mit dem Abstand $b/2$ ausgehen; d.h. die Amplitude von jedem Strahl der einen Spalthälfte, wird durch einen der anderen Hälfte in P zu null kompensiert. Die Bedingung für die erste Nullstelle lautet:

$$(18) \quad \sin \vartheta_1 = \lambda/b, \quad \mathbf{1. \text{ Nullstelle bei } \vartheta_1.}$$

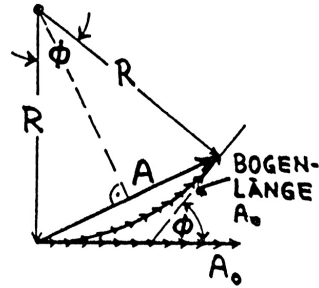
In analoger Weise können wir weitere Nullstellen angeben. Wählen wir $\vartheta = \vartheta_2$ so, dass Spaltpunkte im Abstand $b/4$ zu Strahlenpaaren mit Phasendifferenz π führen, muss $\sin \vartheta_2 = 2 \cdot \lambda/b$ erfüllt sein. Allgemein erhalten wir für die m -te Nullstelle die Bedingung

$$(19) \quad \sin \vartheta_m = m \cdot \lambda/b, \quad \mathbf{m\text{-te Nullstelle bei } \vartheta_m.}$$

Der gesamte Intensitätsverlauf $I(\vartheta)$ wird wieder durch phasengerechte Addition der komplexen Amplituden gewonnen. Unendlich viele Elementarwellen, mit differentiell kleinen Amplituden, werden aufintegriert. Anstatt einen regelmässigen Polygonzug, ergibt dann die graphische Darstellung ein Kreisbogenstück der Länge A_0 , wenn $I_0 = A_0^2$ die Maximalintensität im Brennpunkt ist. Dieser Kreisbogen bildet den Phasenwinkel ϕ , welcher gleich dem Phasenunterschied der von den Spaltändern ausgehenden Strahlen ist.

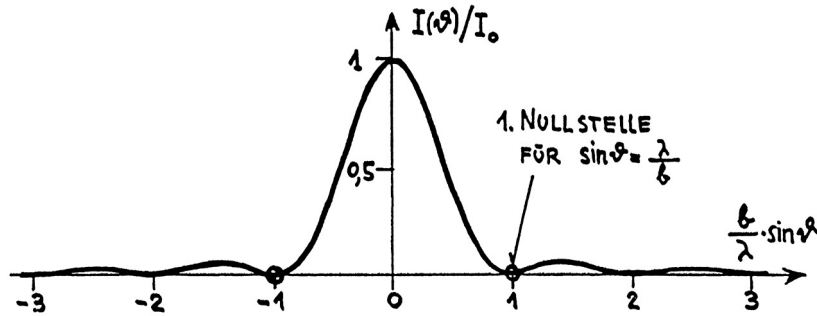
$$\phi = (2 \cdot \pi / \lambda) \cdot b \cdot \sin \vartheta, \quad \text{Phasendifferenz der Randstrahlen.}$$

Die resultierende Amplitude A kann aus der Figur abgelesen werden. Es ist $R = A_0 / \phi$ und $A = 2 \cdot R \cdot \sin(\phi/2)$, also



$$A = A_0 \cdot (\sin(\phi/2)) / (\phi/2). \quad \text{Mit } I = A^2 \text{ folgt}$$

$$(20) \quad I(\vartheta) = I_0 \cdot (\sin^2(\pi \cdot (b/\lambda) \cdot \sin \vartheta)) / (\pi \cdot (b/\lambda) \cdot \sin \vartheta)^2.$$

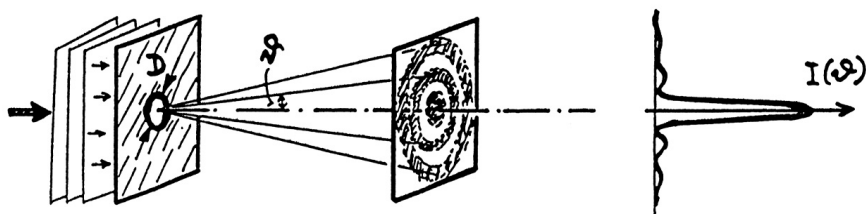


Nach den Regeln der geometrischen Optik wäre die Intensität in der Brennebene auf eine scharfe Gerade parallel zum Spalt begrenzt. Man sieht, dass die geometrische Optik nur im Grenzfall $b \gg \lambda$ anwendbar ist, dann liegen die Nullstellen des Intensitätsverlaufs beliebig nahe beim Nullpunkt.

Beugung an der Kreisblende:

In optischen Instrumenten wirken die rotationssymmetrischen Linsen immer auch als kreisförmige Begrenzung der Lichtbündel. Neben den erwünschten Linsenwirkungen treten daher immer auch störende Beugungseffekte auf. Ersetzen wir obigen Spalt durch eine konzentrische Lochblende mit dem Durchmesser D , so ergibt die Rechnung in der Brennebene der Linse (Linsendurchmesser $\gg D$) eine rotationssymmetrische Intensitätsverteilung mit ähnlichem Profil wie in obiger Figur. Der zur ersten Nullstelle gehörende Beugungswinkel genügt der Beziehung

$$(21) \quad \sin \vartheta = 1.22 \cdot \lambda / D, \quad \text{1. Nullstelle für die Kreisblende.}$$

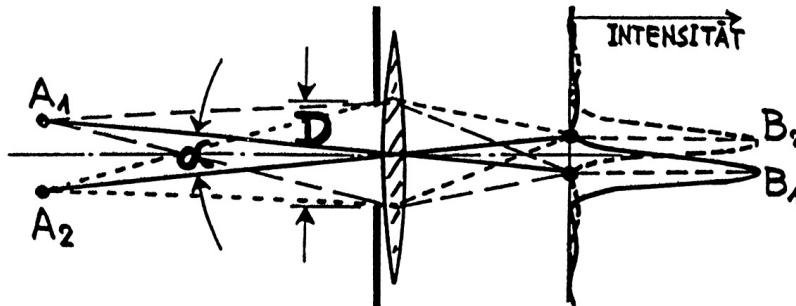


3.2.3 Beugungsbegrenzte Auflösung; Rayleigh-Kriterium

Zwei unendlich weit entfernte Gegenstandspunkte A_1 und A_2 , sollen in der Brennebene einer Linse abgebildet werden (z.B. durch die Objektivlinse eines Fernrohrs oder durch das menschliche Auge). Die Verbindungsgeraden von A_1 und A_2 zum Objektivmittelpunkt bilden den **Schwinkel** α . Wie klein darf nun α sein, damit noch zwei verschiedene Bildpunkte B_1 und B_2 entstehen? Würden keine

Beugungseffekte am Linsendurchmesser oder an der Eintrittsblende auftreten, wären B_1 und B_2 ebenfalls punktförmig, d.h. α dürfte beliebig klein sein. In Wirklichkeit gibt es aber gar keine Bildpunkte, sondern zwei Beugungsfiguren B_1 und B_2 , welche sich je nach Schinkel und Blendendurchmesser, mehr oder weniger stark überschneiden. Die Lage der beiden Intensitätsmaxima ist noch gut örtlich getrennt wahrnehmbar, wenn das erste Minimum von B_1 mit dem Maximum von B_2 zusammenfällt. Da $\alpha \ll 1$ ist, folgt die Bedingung:

$$(22) \quad \alpha \geq 1.22 \cdot \lambda/D, \quad \text{Rayleigh'sches Auflösungskriterium.}$$

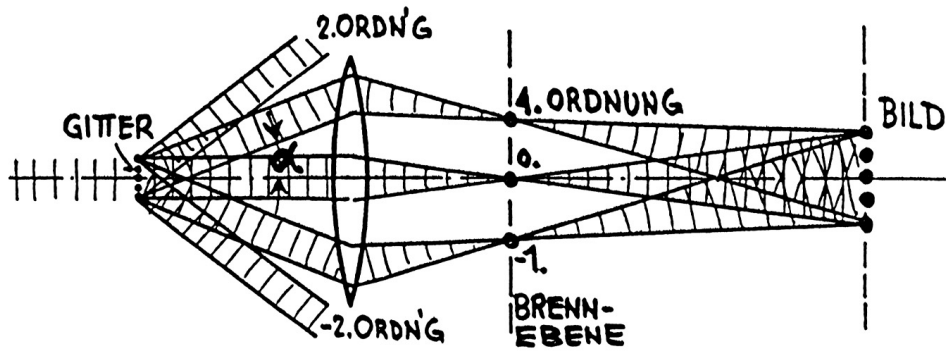


Übungsaufgabe:

Wie gross ist das angulare, beugungsbegrenzte Auflösungsvermögen des menschlichen Auges, wenn der Pupillendurchmesser 4 mm beträgt? Wie viele Rezeptoren pro mm^2 Retina müssten vorhanden sein, damit dieses Auflösungsvermögen voll ausgenutzt wird? (Abstand Linse-Retina ca. 17 mm; tatsächliche maximale Zapfendichte etwa 150 000 pro mm^2 , ist diese Dichte „vernünftig“?)

3.2.4 Abbe'sche Theorie der mikroskopischen Abbildung (Ernst Abbe, 1873)

Wenn man mit dem Mikroskop einen nicht selbst leuchtenden Gegenstand abbildet, so wird das Licht der externen Quelle an den feinen Strukturen des Objektes gebeugt. Diese Beugungserscheinungen beeinflussen die Intensitätsverteilung in der Bildebene der Objektivlinse. Zur Illustration wählen wir als Objekt ein Strichgitter, das mit Hilfe von durchfallendem Licht (in Transmission) abgebildet wird. Bevor die einzelnen, von den Gitterstrichen ausgehenden Lichtstrahlen, sich in der Bildebene wieder vereinigen, erzeugen sie in der Brennebene die verschiedenen Beugungsordnungen. Man kann also das Bild als Interferenzfigur der Beugungsordnungen auffassen. Implizit steckt die ganze Bildinformation auch in der Beugungsfigur. Abbe hat diese als das **primäre Bild** bezeichnet. Offensichtlich geht Bildinformation verloren, wenn nicht alle Beugungsordnungen zum Bild beitragen können. Setzt man in die Brennebene eine Spaltblende, die so eng ist, dass sie nur die nullte Ordnung durchlässt, wird im Bild keine Gitterstruktur sichtbar sein, denn jede Information über die Gitterkonstante ist verloren. Je mehr Beugungsordnungen andererseits zum Bild beitragen, umso vollständiger wird die Objektstruktur wiedergegeben. Damit die Periodizität des Gitters im Bild erscheint, muss mindestens auch die erste Ordnung mitwirken können. Akzeptiert das Objektiv noch Randstrahlen, welche den Winkel α mit der optischen Hauptachse einschliessen, so erhalten wir mit (15) die minimale Gitterkonstante $D(\text{min})$, die gerade noch abgebildet werden kann (d.h. für $D(\text{min})$ wird die erste Beugungsordnung gerade noch akzeptiert).



$$(23) \quad D(\min) = \lambda / \sin \alpha, \quad \text{Auflösungsvermögen.}$$

Bei Mikroskopobjektiven kurzer Brennweite, ist α nahezu 90° , so dass man sagen kann:

Das Auflösungsvermögen eines Mikroskops ist höchstens gleich der Wellenlänge des verwendeten Lichts.

Durch Verwendung eines Immersionsobjektivs (Zedernöl, Brechzahl $n = 1.4$ zwischen Linse und Objekt) kann die Wellenlänge um den Faktor n verkleinert und damit die Auflösung verbessert werden.

$$D(\min) = \lambda / (n \cdot \sin \alpha).$$

Die Grösse $n \cdot \sin \alpha$ heisst die **numerische Apertur**.

Das hohe Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops ist in der kurzen Wellenlänge der Elektronen begründet (siehe Kap. V), die typischer Weise etwa $100'000$ mal kürzer ist, als jene von sichtbarem Licht.

Beachte:

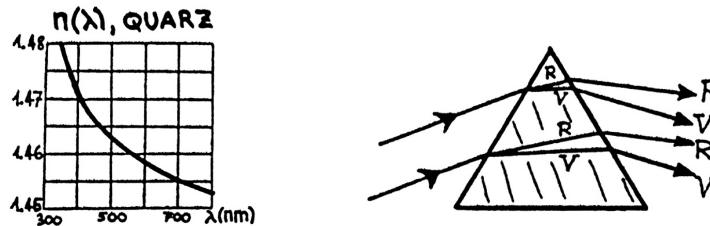
Diese Auflösungsvermögen sind als prinzipielle Grenzen aufzufassen. In Wirklichkeit werden sie nicht erreicht, weil noch andere Faktoren (z.B. Linsenfehler, etc.) eine Rolle spielen.

Demonstrationen:

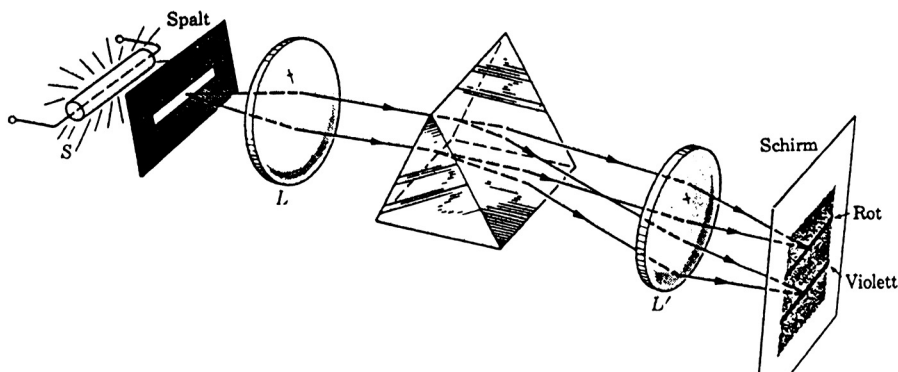
- | | |
|---|---|
| 1. Reflexion und Brechung (Wassertrog) | 2. Lichtleiter
(Wasserstrahl, Glasfaserbüschel) |
| 3. Polarisation (Brewsterwinkel) | 4. Camera Obscura |
| 5. Linsenmodell | 6. Schall-Linsen (CO ₂ - und H ₂ -Ballon) |
| 7. Abbildung | 8. Weisslicht-Hologramm |
| 9. Beugung von Laserlicht
(An Spalt und Draht, d.h. Babinet-Theorem,
an Loch, Strichgitter und Kreuzgitter) | |

3.3 Dispersion

Aus den Maxwell'schen Gleichungen ergibt sich die Tatsache, dass im Vakuum alle elektromagnetischen Wellen, unabhängig von ihrer Frequenz, dieselbe Phasengeschwindigkeit c besitzen. Der Brechungsindex des Vakuums ist $n = 1$. In Materie trifft dies im Allgemeinen nicht mehr zu. Insbesondere nimmt die Brechzahl des sichtbaren Lichtes in durchsichtigen Medien mit steigender Frequenz, bzw. fallender Vakuum-Wellenlänge, zu. Untenstehende Figur zeigt $n(\lambda)$ für Quarzglas als typisches Beispiel. Lässt man weisses Licht auf ein Glasprisma einfallen, wird daher rotes Licht weniger gebrochen als violetter (Gedächtnis-Stütze: R-ot läuft R-ascher, daher ist $n = c/v$ kleiner). Dieses „Auffächern“ der gebrochenen Strahlen nennt man **Dispersion**.

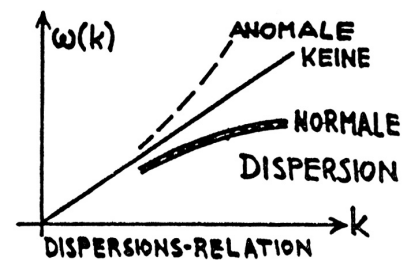


Die Dispersion führt zum Linsenfehler der **chromatischen Aberration**, indem die Brennweiten für verschiedene Farben verschieden sind. Durch Kombination verschiedener Glassorten lässt sich dieser Fehler stark reduzieren (**achromatische Linsen**). Im **Prismenspektroskop** nützt man die Dispersion zur Frequenzanalyse von Licht aus, d.h. man erzeugt damit **Spektren von Lichtquellen**.



Dispersions-Relation und Gruppengeschwindigkeit:

In jedem Material ist einer bestimmten Kreisfrequenz ω eine Wellenlänge λ oder eine Wellenzahl $k = 2 \cdot \pi / \lambda$ zugeordnet. Unter der **Dispersions-Relation** versteht man die Funktion $\omega(k)$. Wenn die Phasengeschwindigkeit $v(\text{Phase}) = \omega/k$ nicht von der Wellenlänge abhängt, ist die Dispersionsrelation eine Gerade mit der Steigung $v(\text{Phase})$. Liegt Dispersion vor, ist $\omega(k)$ gekrümmt. Die Steigung $d\omega/dk$ in einem Punkt der Kurve $\omega(k)$ ist die **Gruppengeschwindigkeit $v(\text{Gruppe})$** . Prägt man einer Trägerwelle ein Signal durch Amplitudenmodulation auf, so pflanzt sich das Signal mit der Gruppengeschwindigkeit fort. Ist $v(\text{Gruppe}) < v(\text{Phase})$, spricht man von **normaler Dispersion**. Die Dispersion von sichtbarem Licht (mit negativem $dn/d\lambda$) ist normal.



3.4 Reflexion und Transmission an Grenzflächen

Im Kapitel 1 haben wir Reflexion und Brechung besprochen, ohne uns darum zu kümmern, wie sich die Energie der einfallenden Welle auf die reflektierte und die gebrochene Welle aufteilt. Wir tun dies nun für den speziellen, aber praktisch sehr wichtigen Fall des senkrechten Lichteinfalls auf eine ebene Grenzfläche.

Die xy -Ebene bildet die Grenzfläche zweier Dielektrika. Für $z < 0$ ist die Brechzahl n_1 , für $z > 0$ ist sie n_2 . Entlang der z -Richtung fällt eine ebene Welle ein, deren \vec{E} -Vektor parallel zur x -Achse schwingt und die Amplitude E_0 besitzt.

$$\left. \begin{aligned} E_x(z, t) &= E_0 \cdot \cos(k_1 \cdot z - \omega \cdot t) \\ B_y(z, t) &= B_0 \cdot \cos(k_1 \cdot z - \omega \cdot t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{einfallende Welle, mit} \\ B_0 = E_0/v_1 \text{ und } v_1 = \omega/k_1 \end{array}$$

Stetigkeitsbedingungen:

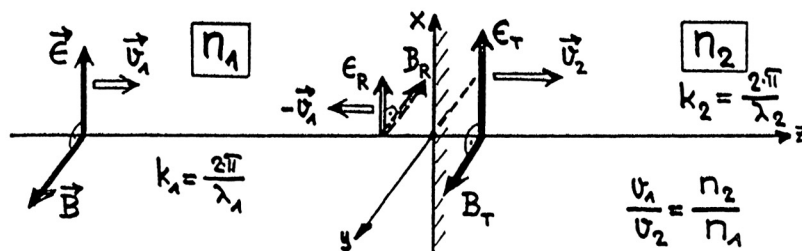
In Dielektrika fließen keine Ströme ($\vec{j} = 0$), so dass die Maxwell'schen Gleichungen

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\partial/\partial t \cdot \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \text{und} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = -\partial/\partial t \cdot \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

gelten müssen. Legen wir die Integrationswege so, dass C links und rechts der Grenzfläche entlang läuft, die umschlossene Fläche A also gegen null geht, so verschwinden die Integrale auf der rechten Seite. Dies bedeutet:

An Grenzflächen zwischen Dielektrika sind die Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} stetig.

Die Permeabilität ist in beiden Materialien $\mu_r \cong 1$, so dass auch B (*tangentiell*) mit grosser Genauigkeit stetig ist.



Ist E das Feld der einfallenden Welle an der Grenzfläche ($z = 0$), E_R jenes der reflektierten und E_T das der transmittierten Welle, so definieren folgende Beziehungen den Reflexions- und den Transmissionskoeffizienten:

$$(23) \quad \begin{array}{l} E_R = R \cdot E, \quad \text{Reflexionskoeffizient } \mathbf{R}. \\ E_T = T \cdot E, \quad \text{Transmissionskoeffizient } \mathbf{T}. \end{array}$$

R und T sind reelle, also positive oder negative Zahlen. Im Medium 1 superponieren sich einfallende und reflektierte Welle. Wir haben

$$\begin{aligned} \text{für } z < 0 : \quad E_x(z, t) &= E_0 \cdot (\cos(k_1 \cdot z - \omega \cdot t) + R \cdot \cos(k_1 \cdot z + \omega \cdot t)), \\ \text{für } z > 0 : \quad E_x(z, t) &= E_0 \cdot T \cdot (\cos(k_2 \cdot z - \omega \cdot t)). \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit des \vec{E} -Feldes bei $z = 0$ folgt:

$$(24) \quad 1 + R = T.$$

Die reflektierte Welle läuft nach links, d.h. bei positivem R ist an der Grenzfläche B_R entgegengesetzt zu B (einfallend) gerichtet. Mit $B = E/v_1$, $B_R = E_R/v_1$, $B_T = E_T/v_2$ und $v_1/v_2 = n_2/n_1$, fordert die Stetigkeit des B-Feldes bei $z = 0$:

$$(25) \quad 1 - R = (n_2/n_1) \cdot T.$$

Mit (24) und (25) lassen sich R und T durch die Brechungsindices ausdrücken:

$$(26) \quad R = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2),$$

$$(27) \quad T = 2 \cdot n_1/(n_1 + n_2).$$

Aus (26) ersehen wir, dass, für $n_2 > n_1$, R negativ ist, dass also bei **Reflexion am optisch dichteren Medium** das \vec{E} -Feld einen **Phasensprung von π** macht. (27) besagt, dass T immer positiv ist, also bei Transmission nie ein Phasensprung auftritt. Multiplikation von (24) und (25) ergibt

$$(28) \quad R^2 + (n_2/n_1) \cdot T^2 = 1.$$

Bildet man den Poyntingvektor für einfallende, reflektierte und transmittierte Welle, sieht man, dass (28) den Energiesatz ausdrückt. Reflektierte und transmittierte Energie sind gleich der einfallenden Energie.

Übungsaufgabe:

Welcher Lichtanteil wird bei senkrechtem Einfall auf eine Glasscheibe in Luft reflektiert? Die Antwort gibt (26), mit $n_1 = 1$ und $n_2 = 1.5$; nämlich $R^2 = 0.04$, d.h. es werden 4% des Lichtes **reflektiert**.

3.5 Interferenz; Farben dünner Schichten

Durchdringen sich Wellenfelder des gleichen Typs, z.B. Lichtwellen, so addieren sich ihre Amplituden an jedem Ort und zu jeder Zeit. Es gilt das **Superpositionsprinzip**. Um die Beugung zu erklären, haben wir eben dieses Prinzip auf die Huygens'schen Elementarwellen angewendet. Im Allgemeinen müssen die beteiligten Wellen gewisse Eigenschaften erfüllen, damit die phasengerechte Addition zu stationären Interferenzfiguren führt. Man nennt sie dann **kohärente** Wellen.

Zur Kohärenz:

Zwei Wellen sind kohärent, wenn ihre Phasendifferenz in jedem Raumpunkt zeitlich konstant ist. Notwendige Voraussetzung dafür ist, dass sie gleiche Frequenz haben.

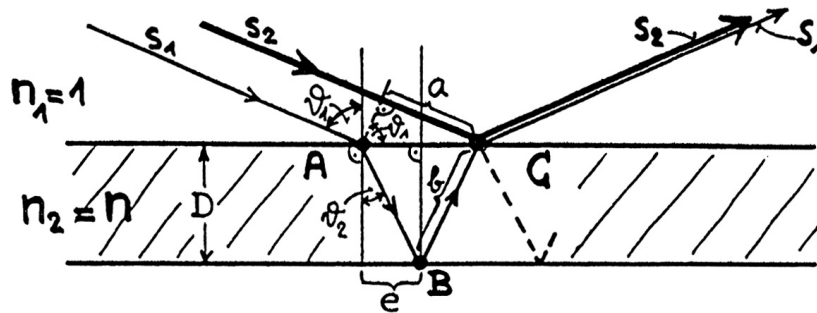
Kohärente Wellen erzeugen stationäre Interferenzen.

Entspringt Licht z.B. zwei verschiedenen Quellen, so besteht, selbst bei gleicher Frequenz, keine feste Phasenbeziehung zwischen den Wellenzügen, die ja von verschiedenen Atomen emittiert werden. Es entstehen **inkohärente** Wellen.

Die Gesamtintensität inkohärenter Wellen erhält man durch aufsummieren der Quadrate der Einzel-Amplituden.

Die Gesamtintensität kohärenter Wellen erhält man durch Quadrieren der Summe ihrer Amplituden.

Stationäre Interferenz tritt z.B. bei Reflexion von Licht an dünnen Schichten auf; sie gibt Anlass zu den bekannten, schillernden Farbmustern, etwa von Seifenblasen oder Ölfilmen. Wir betrachten die in der Figur dargestellte Situation der Reflexion an einem planparallelen Film der Dicke D . Die beiden Strahlen s_1 und s_2 kommen von einem weit weg liegenden Punkt einer Lichtquelle. Wir berechnen ihre Phasendifferenz nach dem Verlassen des Oberflächenpunktes C, wenn s_2 direkt in C reflektiert wird, s_1 jedoch in A gebrochen, dann auf der Rückseite des Films reflektiert wird und bei C wieder austritt, um sich mit s_2 zu vereinigen. Dazu benützen wir folgende Beziehungen:



$$\sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_2 = n, \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = e/D, \quad b = D / \cos \vartheta_2, \quad \lambda_2 = \lambda_1/n, \quad k_2 = n \cdot k_1.$$

Aus $a = 2 \cdot e \cdot \sin \vartheta_1 = 2 \cdot D \cdot \sin \vartheta_1 \cdot \sin \vartheta_2 / \cos \vartheta_2$, erhält man:

$$(29) \quad a = 2 \cdot D \cdot n \cdot \sin^2 \vartheta_2 / \cos \vartheta_2 \quad \text{und} \quad 2 \cdot b = 2 \cdot D / \cos \vartheta_2.$$

Die Phasendifferenz in C wird

$$\Delta\phi = k_2 \cdot 2 \cdot b - k_1 \cdot a - \pi \quad \text{oder} \quad \Delta\phi = k_1 \cdot (n \cdot 2 \cdot b - a) - \pi.$$

Beachte, dass der auftretende Phasensprung von π des Strahles s_2 , bei Reflexion am dichteren Medium, berücksichtigt ist. Einsetzen von (29) ergibt

$$(30) \quad \Delta\phi = k_1 \cdot 2 \cdot D \cdot n \cdot \cos \vartheta_2 - \pi.$$

Verstärkung durch Interferenz erfordert: $\Delta\phi = N \cdot 2\pi$, $N = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{also} \quad N \cdot 2\pi = (2 \cdot \pi / \lambda_1) \cdot 2 \cdot D \cdot n \cdot \cos \vartheta_2 - \pi \quad \text{oder}$$

$$(31) \quad 2 \cdot D \cdot n \cdot \cos \vartheta_2 = (N + 1/2) \cdot \lambda_1.$$

und

$$(32) \quad D = (\lambda_2/2) \cdot (N + 1/2), \quad \text{für senkrechten Lichteinfall.}$$

Beachte:

Die Strahlen s_1 und s_2 kommen vom selben Punkt der Lichtquelle und sind daher kohärent.

Bei bekannter Wellenlänge des Lichtes, kann mit (31) aus den Winkelunterschieden $\Delta\vartheta_2$ verschiedener Ordnungen N auf die Filmdicke geschlossen werden.

Mit weißem Licht kommen die Farben dadurch zustande, dass die Reflexionswinkel konstruktiver Interferenz abhängig von der Wellenlänge sind.

Fällt Licht auf eine keilförmige Schicht senkrecht ein, so wechseln nach (31) für den Beobachter helle und dunkle Stellen wegen der Variation von D ab. Es seien hier als Beispiel die **Newton'schen Ringe** erwähnt (siehe verschiedene Lehrbücher).

Eine technische Ausnutzung der Interferenzen reflektierter Strahlen findet sich in der **Vergütung von Linsen**. Hier werden Metalloxide geeigneter Brechungsindices zur Realisierung bestimmter R- und T-Werte nach (26) und (27) in solcher Dicke aufgedampft, dass sich die reflektierten Strahlen weginterferieren.

3.6 Doppelbrechung

Zwischen der Verschiebungsdichte \vec{D} , dem Feld \vec{E} und der elektrischen Polarisation \vec{P} eines Dielektrikums, bestehen die Beziehungen (63) und (64), nämlich

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \quad \text{und} \quad \vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}.$$

In einem **anisotropen** Medium lassen sich die Elektronen nicht in jeder Richtung gleich gut durch ein wirkendes Feld \vec{E} verschieben, so dass das Verhältnis der Komponenten von \vec{E} im Allgemeinen verschieden ist von dem Verhältnis entsprechender \vec{P} -Komponenten. Anders ausgedrückt: \vec{E} und \vec{P} sind im Allgemeinen **nicht parallel**. Dies bedeutet, dass ϵ_r ein **Tensor** ist (beachte die Analogie zum Trägheitstensor, wo Drall und Winkelgeschwindigkeit nicht parallel sind). Man kann zeigen, dass der ϵ_r -Tensor symmetrisch ist und sich, wie der Trägheitstensor, als Ellipsoid darstellen lässt. Folglich existieren drei orthogonale Hauptachsen, zu denen die Hauptdielektrizitätskonstanten ϵ_1 , ϵ_2 und ϵ_3 , bzw. die Brechungsindices $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ und $n_3 = \sqrt{\epsilon_3}$ gehören. Wir beschränken uns hier auf **einachsige Kristalle**, wo der Tensor rotationssymmetrisch ist und daher zwei Haupt-Brechungsindices gleich sind, etwa $n_2 = n_3 \neq n_1$. Man nennt die Rotationssymmetrieachse die **optische Achse**.

In Übereinstimmung mit der Beobachtung liefert die Maxwell'sche Theorie die im Folgenden zusammengefassten Ergebnisse.

Tritt eine ebene Lichtwelle in den einachsigen Kristall ein, so spaltet sie in zwei verschiedene, polarisierte ebene Wellen auf, die sich mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten ausbreiten und deren Polarisationsrichtungen normal zueinander stehen. Man bezeichnet die eine als **ordentliche** (o.), die andere als **ausserordentliche** (a.o.) Welle. Die von Einfallrichtung und optischer Achse aufgespannte Ebene nennt man den **Hauptschnitt**. Werden von einem Punkt im Kristall in jeder Richtung die Phasengeschwindigkeiten der beiden Wellen aufgetragen, bilden die Endpunkte die beiden **Fresnel'schen Geschwindigkeits-Flächen**.

Ordentliche Welle:

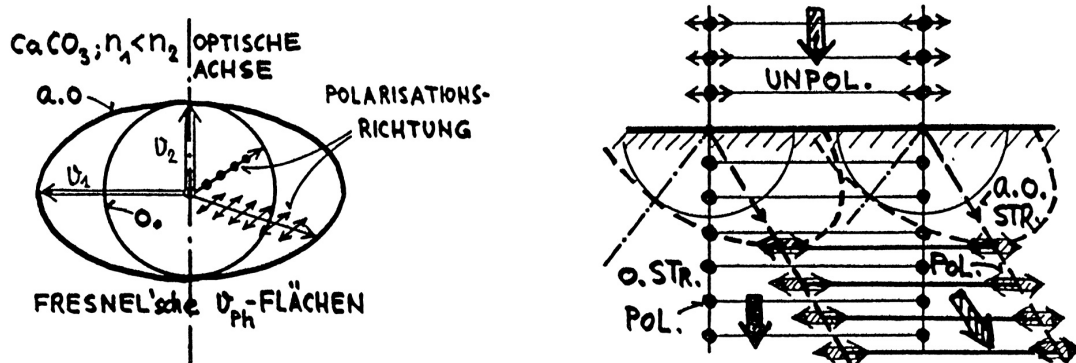
**Ihre Fresnel'sche Geschwindigkeitsfläche ist eine Kugelfläche.
Sie ist senkrecht zum Hauptschnitt polarisiert.**

Ausserordentliche Welle:

**Ihre Fresnel'sche Geschwindigkeitsfläche ist ein Rotationsellipsoid.
Sie ist parallel zum Hauptschnitt polarisiert.**

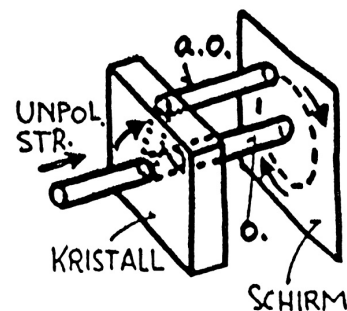
In Richtung der optischen Achse sind o. und a.o. Phasengeschwindigkeit gleich gross; die beiden Geschwindigkeitsflächen berühren sich dort, wo sie von der optischen Achse durchstossen werden.

Ist der Haupt-Brechungsindex $n_1 < n_2$, spricht man von einem „negativen“ Kristall. Ein Beispiel dafür ist Kalkspat (CaCO_3), mit $n_1 = 1.4864$ und $n_2 = n_3 = 1.6583$. Die folgenden Figuren beziehen sich auf negative Kristalltypen.



Anwendung des Huygens-Fresnel'schen Prinzips mit o. und a.o. Geschwindigkeitsflächen, erklärt die Doppelbrechung zwanglos. Die Enveloppen der Ellipsoide sind Ebenen gleicher Phase der a.o. Welle. Ihre \vec{D} - und \vec{E} -Vektoren schwingen im Hauptschnitt. \vec{D} liegt in der Phasenfläche, während \vec{E} , das ja **nicht parallel** zu \vec{D} ist, senkrecht zum Wellenstrahl steht. Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ und Wellenstrahl sind parallel.

Wenn ein unpolarisierter Lichtstrahl senkrecht auf ein planparalleles Kristallplättchen auftrifft und die optische Achse nicht parallel zur Oberfläche liegt, verlässt der o. Strahl den Kristall unverschoben, der a.o. Strahl parallel verschoben. Die beiden Parallelstrahlen sind polarisiert, der o. Strahl senkrecht, der a.o. parallel zum Hauptschnitt. Ein klassischer Polarisator für Licht, der auf Doppelbrechung beruht, ist das **Nicol'sche Prisma**. Ohne auf seine Wirkungsweise im Detail einzugehen, halten wir fest, dass auf Grund der geometrischen Form des Nicols, der a.o. Strahl schwach parallel verschoben zum einfallenden Strahl austritt, während der o. Strahl ausgelenkt wird.



3.6.1 Herstellung von zirkular polarisiertem Licht

Bis jetzt haben wir immer von linear polarisiertem Licht gesprochen, bei welchem alle \vec{E} -Vektoren parallel zu einer festen Ebene schwingen. Es kann mit einem Nicol'schen Prisma, oder heute einfacher mit einer **Polaroidfolie**, hergestellt werden. Letztere funktionieren auf Grund ihres **Dichroismus**, d.h., dass nur in einer **Vorzugsrichtung** polarisiertes Licht **nicht absorbiert** wird. Sie enthalten lange, in Plastik eingebettete, parallelorientierte Kettenmoleküle und wirken im Prinzip auf Licht so, wie die im Schauversuch mit cm-Wellen verwendeten Gitter aus parallelen Drähten.

Es soll nun eine linear polarisierte, monochromatische Welle der Form

$$E_x(z, t) = (E_0 / \sqrt{2}) \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t)$$

und

$$E_y(z, t) = (E_0 / \sqrt{2}) \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t)$$

senkrecht auf ein Kalkspatplättchen der Dicke D auftreffen, dessen optische Achse parallel zur x-Achse (also parallel zur Oberfläche) liegt. Im Innern des Kristalls sind die Wellenzahlen $k_1 = n_1 \cdot k$

der a.o. Welle und $k_2 = n_2 \cdot k$ der o. Welle verschieden. Die Wellenfronten bleiben parallel zur Eintrittsfläche; es findet keine Brechung statt. Nach Durchlaufen der Dicke D beträgt die Phasenverschiebung zwischen E_y und E_x :

$$(33) \quad \Delta\phi = k \cdot (n_2 - n_1) \cdot D \quad \text{oder} \quad \Delta\phi = (2 \cdot \pi \cdot D/\lambda) \cdot (n_2 - n_1).$$

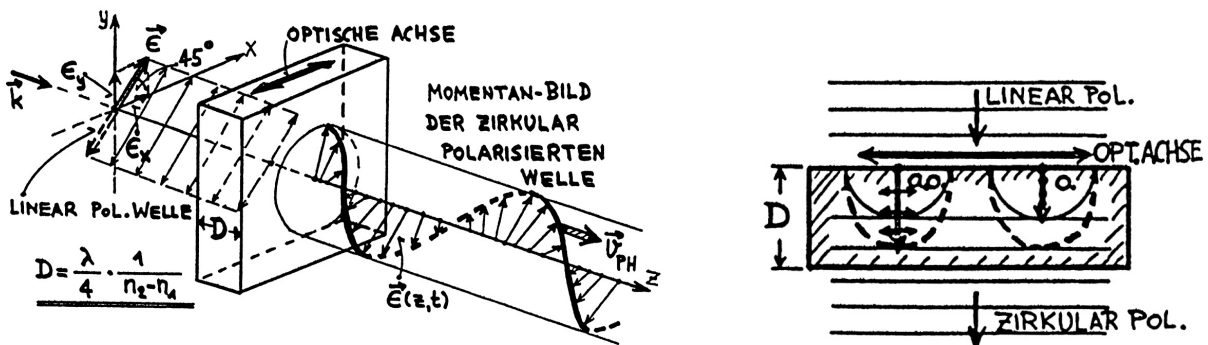
Nun wählen wir D so, dass die Phasendifferenz gerade $\pi/2$ wird. Nach (33) ist dies der Fall für

$$(34) \quad D = \lambda/(4 \cdot (n_2 - n_1)), \quad \text{Dicke } D \text{ des } \lambda/4\text{-Plättchens.}$$

Da nun die Phase von E_y jener von E_x um $\pi/2$ vorausläuft, erhalten wir nach dem Austritt aus dem $\lambda/4$ -Plättchen die Welle

$$(35) \quad \begin{aligned} E_x(z, t) &= (E_0/\sqrt{2}) \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t + \varphi), \\ E_y(z, t) &= (E_0/\sqrt{2}) \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t + \varphi). \end{aligned}$$

φ ist eine beliebige, konstante Phase. Die Gleichungen (35) stellen eine **zirkular polarisierte Welle** dar. An jedem festen Ort z rotiert das elektrische Feld, dessen Betrag E_0 konstant ist, mit der Kreisfrequenz ω . Bei festgehaltener Zeit t bilden die Pfeilspitzen der Vektoren \vec{E} eine Schraubenlinie mit der Steigung λ . In unserem Beispiel ist es eine „Rechtsschraube“, die als Funktion der Zeit links herum dreht. In einem mit der Phasengeschwindigkeit ω/k mitbewegten Bezugssystem sind alle \vec{E} -Vektoren in Ruhe.



3.7 Optische Aktivität

Durchläuft eine linear polarisierte Lichtwelle eine **optisch aktive** Substanz, so ist sie nachher immer noch linear polarisiert, aber die **Polarisationsebene** ist um einen Winkel α **verdreh**t. Der Drehwinkel α ist proportional der Weglänge im optisch aktiven Material. Viele anorganische Substanzen, z.B. **Quarz**, sind optisch aktiv. Aber auch gewisse Lösungen, z.B. Zuckerlösungen, haben diese Eigenschaft. Sie ist auf eine spiralenartige Struktur der beteiligten Moleküle, eine **Helizität**, zurückzuführen, die grosse Elektronenbeweglichkeit entlang einer Schraubenlinie zur Folge hat. Es gibt Substanzen, die in links und rechts drehender Form existieren. In Lösungen hängt die Stärke der optischen Aktivität von der Konzentration ab. Das molare Drehvermögen r ist durch die folgende Beziehung definiert:

$$\alpha = r \cdot L \cdot c, \quad \text{molares Drehvermögen } r \text{ (m}^{-1}\cdot\text{Liter/mol).}$$

L = Weg, c = Konzentration (mol/Liter).

Erinnere:

Als Demonstration des Prinzips wurde gezeigt, dass eine Schachtel, gefüllt mit rechtssinnigen Spiralfedern, die Polarisationsebene von hindurch laufenden cm-Wellen im Rechtssinn verdreht.

Demonstrationen:

1. Fresnel'sche Zonenplatte
(mit cm-Wellen)
2. Schlierenoptik
3. Spektrum von weissem Licht
(Prisma)
4. Dispersionskurve
(Kombination von Gitter und Prisma)
5. Transmission, Reflexion, Absorption
(Wasser, Milch, Tusche)
6. Interferenzen mit Glimmer an Hg-Lampe
7. Interferenzfarben an Seifenlamellen
8. Absorptions- und Reflexionsbereich eines Filters
9. Diffraktionsapparat nach Abbe
10. Sonnenuntergang
Streuung von Blaulicht, ω^4 -Gesetz
11. Doppelbrechung an Kalkspat
12. Optische Aktivität (Zuckersäule)

Teil V

Einblick in die moderne Physik

Bis jetzt haben wir Begriffe und Gesetze im Rahmen der „**Klassischen Physik**“ behandelt. Diese konnte gegen Ende des letzten Jahrhunderts als abgeschlossen betrachtet werden. Nach ihren beträchtlichen Erfolgen mehrten sich gleichzeitig die Anzeichen, dass auf mikroskopischer Ebene die klassische Physik versagte. Unter dem Druck einer Reihe von experimentellen Fakten, ist im ersten Viertel unseres Jahrhunderts schrittweise und mit enormen Anstrengungen vieler grosser Physiker, die „**Quantenphysik**“ entwickelt worden. Am Schluss dieses Kapitels sind Schlüsselexperimente und Marksteine dieser Periode aufgelistet.

Es ist aber nicht etwa so, dass klassische Physik und Quantenmechanik zueinander im Widerspruch stehen. Vielmehr ist die klassische Physik als Grenzfall in der Q.M. enthalten. Die Q.M. gibt genaue Kriterien über den Gültigkeitsbereich der klassischen Physik.

Es kann in diesem kurzen Kapitel nur darum gehen, dem Anfänger einen ersten Einblick in die „Spielregeln“ dieser **Quantenmechanik** zu vermitteln. Eine eigentliche Einführung in die Q.M. bietet die Vorlesung „Physik III“ im Wintersemester.

Wir erwähnen zunächst drei Phänomene (es gibt noch andere), welche entscheidend zur Formulierung einer „neuen“ Physik beigetragen haben.

Kapitel 1

Quantisierung der Energie

1.1 Strahlungsgesetz und Planck'sche Konstante h

Die Erfahrung zeigt, dass heisse Körper elektromagnetische Strahlung emittieren (z.B. Wärmestrahlung und Licht), wobei das Frequenzspektrum temperaturabhängig ist. Es besteht ein **thermodynamisches Gleichgewicht** zwischen **Materie** und **elektromagnetischer Strahlung**, welches die klassische Physik nicht richtig berechnen kann. Max Planck konnte 1900 Experiment und Theorie in Einklang bringen, indem er die Atome als strahlende, harmonische Oszillatoren auffasste und gleichzeitig forderte:

$$(1) \quad \Delta E = h \cdot \nu, \quad h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \quad \text{Planck'sche Konstante.}$$

Die Energie des harmonischen Oszillators ist quantisiert. Ist seine Eigenfrequenz ν , kann er seine Energie nur um ganzzahlige Vielfache von $h \cdot \nu$ ändern.

1.2 Photoeffekt (Lichtelektrischer Effekt)

Wird eine Metalloberfläche A mit hinreichend kurzwelligem Licht bestrahlt, treten Elektronen mit einer gewissen kinetischen Energie aus dem Metall aus. Legt man an die benachbarte Elektrode B die gegenüber A negative Spannung $-U$, die so gross ist, dass gerade kein Elektronenstrom mehr fließen kann, so beträgt die maximale Austrittsenergie der Elektronen nach dem Energieerhaltungssatz:

$$E(\text{kin}) = e \cdot U, \quad \text{kinetische Energie der Elektronen, beim Verlassen der Metalloberfläche.}$$

Das Experiment liefert folgende wesentliche Ergebnisse:

a) $E(\text{kin})$ der Elektronen hängt nicht von der Intensität des einfallenden Lichtes ab (P. Lenard, 1902), wie dies nach der klassischen Wellentheorie des Lichts zu erwarten wäre.

b) Die kinetische Energie der Elektronen gehorcht der Beziehung

$$(2) \quad E(\text{kin}) = h \cdot \nu - E_0, \quad \mathbf{h = Planck'sche Konstante,} \\ \mathbf{E_0 = Ablösearbeit.}$$

Die Ablösearbeit E_0 muss aufgewendet werden, um ein Elektron aus dem Metall zu entfernen und ist materialspezifisch. **Einstein** hat schon 1905 postuliert, dass Licht Partikelcharakter hat und aus Energiequanten der Energie $h \cdot \nu$, den **Photonen**, besteht. Das Ergebnis (2) ist schon damals von ihm vorausgesagt und 1914 durch **Millikan** experimentell exakt bestätigt worden. Beim Photoeffekt

verschwindet ein Photon und überträgt seine ganze Energie $h \cdot \nu$ auf das Elektron. (2) drückt die Energiebilanz aus.

1.3 Linienspektren

Im Gegensatz zu heißen Körpern, die e.m. Wellen mit kontinuierlichem Frequenzspektrum abstrahlen, emittieren z.B. elektrisch angeregte Atome einer Gasentladung diskrete Linienspektren. Es wird also nur Licht bestimmter Frequenzen abgegeben, so dass in einem Spektroskop (siehe Bild auf S. 95) diskrete Spaltbilder („Linien“) entstehen. Im Rahmen der klassischen Strahlungstheorie können diese Spektren nicht erklärt werden.

Einen fundamentalen Beitrag zur Physik der Atomspektren, der sich als ausserordentlich fruchtbar erweisen sollte, hat der Basler Mathematiklehrer **Johann Jakob Balmer** (1854-1919) im Jahre 1885 geleistet, indem er auf rein empirischer Grundlage fand, dass die beobachteten Frequenzen im H-Spektrum sehr exakt folgende Beziehung erfüllen:

$$(3) \quad \nu = \text{const.} \cdot (1/n^2 - 1/m^2), \quad \text{Balmerformel.}$$

n, m positiv und ganz, $m > n$.

Niels Bohr (1885-1962) hat 1913 postuliert, dass das Atom ein nicht klassisches System ist, das nur bestimmte Energiezustände E_n einnehmen kann und dass ein Übergang von einem energetisch höheren Zustand E_m , einem tieferen E_n , mit der Emission eines Lichtquants verbunden ist. Im tiefsten Zustand, seinem **Grundzustand**, kann es nicht strahlen. Es gilt

$$(4) \quad h \cdot \nu = E_m - E_n.$$

(4) steht im Einklang mit der Balmerformel (3), wenn die Energiezustände des Wasserstoffatoms von der Form sind:

$$(5) \quad E_n = -\text{const.} \cdot 1/n^2, \quad \text{quantisierte Energiezustände}$$

des Wasserstoff-Atoms.
Quantenzahl $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Kapitel 2

Wellenmechanik; Schrödingergleichung

Wir skizzieren nun eine mögliche Darstellung der Quantenphysik, die 1926 von **Erwin Schrödinger** (1887-1961) formuliert wurde. Es kann hier nur darum gehen, die „Spielregeln“ an einfachsten Beispielen zur Kenntnis zu nehmen; von tief sinnigen Begründungen und philosophischen Implikationen sprechen wir bewusst nicht.

Ein Teilchen der Masse m soll in einem skalaren Potentialfeld die potentielle Energie $V(x)$ besitzen. Die Newton'sche Mechanik ist nicht mehr gültig. An Stelle der klassischen Bewegungsgleichung gehen wir aus von der „Schrödingergleichung“, sie ist eine lineare Differentialgleichung für eine „Wellenfunktion“ $\psi(x, t)$. Die ψ -Funktion beschreibt das physikalische Verhalten unserer Masse m im Potential $V(x)$. Als Charakteristikum der Quantenphysik tritt in unserer Differentialgleichung, neben m und $V(x)$, noch die **Planck'sche Konstante** \hbar auf.

2.1 Die Schrödingergleichung

Die gesuchte Wellenfunktion $\psi(x, t)$ gehorcht der Differentialgleichung

$$(6) \quad -(\hbar^2/(2 \cdot m)) \cdot \partial^2 \psi / \partial x^2 + V(x) \cdot \psi(x, t) = i \cdot \hbar \cdot \partial \psi / \partial t,$$

zeitabhängige Schrödingergleichung, ($\hbar = h/(2 \cdot \pi)$).

Die Gesamtenergie des Teilchens sei $E = E(kin) + V$. Auch hier erscheint nun eine Frequenz (wie schon bei den Photonen), welche durch $E = h \cdot \nu$ mit Energie verknüpft ist. Wir setzen

$$(7) \quad \psi = \psi(x) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t), \quad \omega = E/\hbar.$$

Einsetzen von (7) in (6) ergibt:

$$-(\hbar^2/(2 \cdot m)) \cdot d^2 \psi / dx^2 + V(x) \cdot \psi(x) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) = \hbar \cdot \omega \cdot \psi(x) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t),$$

und

$$(8) \quad -(\hbar^2/(2 \cdot m)) \cdot d^2 \psi / dx^2 + V(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x),$$

zeit-unabhängige Schrödingergleichung.

Wenn ein System von einer Wellenfunktion der Form (7) beschrieben wird, spricht man von einem **stationären Zustand** der **Energie E**. $\psi(x)$ heisst die „Wellenfunktion des stationären Zustandes“.

Wir wollen jetzt die Schrödingergleichung auf zwei konkrete Beispiele anwenden und dabei lernen, wie man die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ interpretiert und aus ihr experimentell beobachtbare Grössen berechnet.

2.2 Wellenfunktion des freien Teilchens

Das kräftefreie Teilchen ist dadurch gekennzeichnet, dass $V(x)$ konstant ist, also gleich null gesetzt werden darf. Es liegt lediglich kinetische Energie vor: $E_E(kin)$. Nach (8) muss die stationäre Wellenfunktion $\psi(x)$ die Schrödingergleichung mit $V(x) = 0$ erfüllen, nämlich

$$(9) \quad -(\hbar^2/(2 \cdot m)) \cdot d^2\psi/dx^2 = E \cdot \psi(x), \quad \text{Schrödingergleichung des freien Teilchens.}$$

Wir setzen $2 \cdot m \cdot E/\hbar^2 = k^2$ und schreiben (9) als

$$(10) \quad d^2\psi/dx^2 + k^2 \cdot \psi(x) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist uns längst bekannt (siehe harmonische Schwingung), ihre allgemeine, komplexe Lösung lautet:

$$(11) \quad \psi(x) = A \cdot \exp(i \cdot k \cdot x) + B \cdot \exp(-i \cdot k \cdot x).$$

Setzen wir z.B. die Integrationskonstante $B = 0$, so erhalten wir mit (7) die vollständige Wellenfunktion $\psi(x, t)$ der Form

$$(12) \quad \psi(x, t) = A \cdot \exp(i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)), \quad k = (1/\hbar) \cdot \sqrt{2 \cdot m \cdot E}.$$

$\psi(x, t)$ ist in diesem Fall eine in positiver x-Richtung laufende **Welle**. Sie beschreibt ein mit $E(kin) = E$ nach **rechts laufendes Teilchen** der Masse m .

Klassisch ist $E(kin) = p^2/(2 \cdot m)$, wenn p den Impuls bedeutet, während hier $E(kin) = \hbar^2 \cdot k^2/(2 \cdot m)$ gilt. $\hbar \cdot k = h/\lambda$ unseres Wellenbildes entspricht offenbar dem Impuls p des Partikelbildes.

Einem Teilchen mit der Energie E und dem Impuls p ist eine Welle der Frequenz $\nu = \omega/(2 \cdot \pi)$ und der Wellenzahl $k = 2 \cdot \pi/\lambda$ zugeordnet. Es ist

$$\omega = E/\hbar \quad \text{und} \quad k = p/\hbar.$$

Die letzte Gleichung ist identisch mit der Beziehung $\lambda = h/p$, welche **Louis de Broglie** schon 1924 formuliert hat.

Dass Korpuskel tatsächlich Welleneigenschaften im Einklang mit der de Broglie-Beziehung besitzen, wurde 1927 am Phänomen der **Elektronenbeugung** von **C.J. Davisson** und **L.H. Germer** experimentell gezeigt.

Übungsaufgabe:

Man berechne die Wellenlänge von Elektronen, wenn ihre kinetische Energie 10 keV beträgt.

Die kurze Wellenlänge von Elektronen ($\lambda < 1$ Angström) führt dazu, dass die Kristallgitter zu gut sichtbaren Beugungseffekten Anlass geben. Aus den beobachteten Beugungsmustern der Intensitätsverteilung der Elektronen, die wiederum durch phasengerechte Addition von Huygens'schen Elementarwellen zustande kommen, kann umgekehrt die räumliche Anordnung der Materie-Atome berechnet werden.

Zur Aufklärung **atomarer Strukturen** in Festkörperphysik und Biologie spielen neben der Röntgen-diffraktion die **Elektronenbeugung** und die **Neutronenbeugung** eine wesentliche Rolle.

Beide Methoden beruhen auf der Richtigkeit der Schrödinger'schen Wellenmechanik.

2.2.1 Wellenfunktion und Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Am Beispiel des kräftefreien Teilchens hat sich herausgestellt, dass $\psi(x, t)$ im Allgemeinen eine komplexe Funktion ist. Sie enthält Information über dynamische Variablen des Systems, wie Impuls p und Energie E (messbare, physikalische Grössen). Die Wellenfunktion (12) sagt uns, dass $E = \hbar \cdot \omega$ und $p = \hbar \cdot k$ ist. E und p sind experimentell überprüfbar, in der Quantentheorie nennt man solche Grössen **Observable**. Die Wellenfunktion selbst ist keine Observable. Hingegen hat das Quadrat ihres Betrages die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsdichte. D.h. es ist

$$(13) \quad dw = |\psi(x, t)|^2 \cdot dx, \quad \text{Die Wahrscheinlichkeit } dw, \text{ das Teilchen zur Zeit } t \text{ an der Stelle } x \text{ im Intervall der Breite } dx \text{ zu finden.}$$

Aus der Lösung (12) lesen wir ab, dass für das freie Teilchen der scharfen Energie E , die Wahrscheinlichkeitsdichte weder von x , noch von t abhängt, denn es wird

$$(14) \quad |\psi|^2 = |A \cdot \exp(i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t))|^2 = |A|^2 = \text{const.}$$

Das Teilchen ist überall gleich häufig anzutreffen, es gibt keinen bevorzugten Aufenthaltsort.

Die wellenmechanische Behandlung des kräftefreien Teilchens führt also auf folgendes Ergebnis: Wenn die Energiemessung den exakten Wert E liefert (das haben wir hier vorausgesetzt), so ist

1. der **Impuls** ebenfalls **bestimmt** durch $p = \hbar \cdot k = \sqrt{2 \cdot m \cdot E}$.
2. der **Ort** des Teilchens vollständig **unbestimmt**.

2.3 Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf

Jetzt wollen wir ein Teilchen in einen rechteckigen Potentialtopf der Breite a einsperren, dessen „Wände“ unendlich hoch sind. Es sei

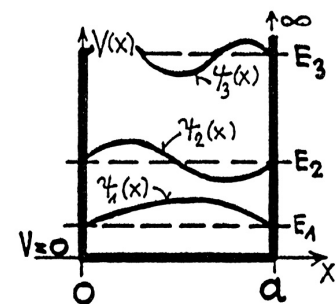
$$V(x) = 0, \quad \text{für } 0 < x < a,$$

$$V(x) = \infty, \quad \text{für } x \leq 0 \text{ und } x \geq a.$$

Im Innern des Kastens ist m kräftefrei, bei $x = 0$ und $x = a$ wirken unendlich grosse, ins Innere gerichtete Kräfte. Nun interessieren wir uns für die Energien E , welche das Teilchen besitzen kann. Klassisch würden beliebige Energien E zulässig sein, die Masse würde durch elastische Stösse an den Wänden hin und her reflektiert. Die stationäre Wellenfunktion im Innern muss wiederum der zeitunabhängigen Schrödingergleichung (9) genügen, denn es ist ja dort $V(x) = 0$. Also wird die Lösung wieder die Form haben

$$(15) \quad \psi(x) = A \cdot \exp(i \cdot k \cdot x) + B \cdot \exp(-i \cdot k \cdot x).$$

Im Unterschied zum freien Teilchen muss aber $\psi(x)$ ausserhalb des Kastens null und zudem stetig in $x = 0$ und $x = a$ sein (wir verzichten auf den Beweis, halten aber fest, dass ψ an den Potentialwänden



nur null wird, wenn diese unendlich hoch sind, andernfalls tritt der „Tunneleffekt“ auf, d.h. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit hat auch im klassisch verbotenen Gebiet einen endlichen Wert).

Die Randbedingung $\psi(0) = 0$ führt auf $B = -A$ und

$$\psi(x) = A \cdot (\exp(i \cdot k \cdot x) - \exp(-i \cdot k \cdot x)) \quad \text{oder} \quad \psi(x) = C \cdot \sin(k \cdot x).$$

Die Randbedingung $\psi(a) = 0$ fordert: $k \cdot a = n \cdot \pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Nur ganz bestimmte Wellenzahlen k und damit auch ganz bestimmte Energien E sind zulässig (in (9) ist $E = \hbar^2 \cdot k^2 / (2 \cdot m)$). Mit $k = n \cdot \pi / a$ erhalten wir

$$(16) \quad \psi_n(x) = C \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot x / a), \quad \text{Eigenfunktionen } \psi_n(x).$$

und

$$(17) \quad E_n = n^2 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^2 / (2 \cdot m \cdot a^2), \quad \text{Energie-Eigenwerte } E_n, \\ \text{Quantenzahl } n = 1, 2, 3, \dots$$

Beachte die Analogie zum Frequenzspektrum der eingespannten Saite. Die Randbedingungen erlauben nur diskrete stationäre Zustände. Im Unterschied zum freien Teilchen sind hier die Wellenfunktionen $\psi(x)$ normierbar. Da sich das Teilchen mit Gewissheit im Intervall $0 < x < a$ befindet, verlangen wir mit (13)

$$(18) \quad \int_0^a |\psi(x)|^2 \cdot dx = 1, \quad \text{Normierungs-Integral.}$$

Einsetzen von (16) ergibt für C den Wert $\sqrt{2/a}$. Es sind

$$(19) \quad \psi_n(x) = \sqrt{2/a} \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot x / a), \quad \text{normierte Eigenfunktionen.}$$

Die Energieeigenwerte wachsen mit n^2 . Der tiefste mögliche Zustand besitzt **nicht** die Energie $E = 0$, wie man dies klassisch erwarten würde. Sondern es ist

$$(20) \quad E_1 = \pi^2 \cdot \hbar^2 / (2 \cdot m \cdot a^2), \quad \text{die Nullpunkts-Energie.}$$

2.3.1 Die Unschärferelation

Am Beispiel des Teilchens im tiefen Kastenpotential lässt sich das Wesen der Unschärferelation der Quantentheorie illustrieren. Diese besagt:

**Es ist unmöglich, Ort x und Impuls p eines Teilchens gleichzeitig genau zu messen.
Es bestehen immer Unschärfen Δx und Δp , für die gilt:**

$$(21) \quad \Delta x \cdot \Delta p > \hbar, \quad \text{Unschärfe-Relation.}$$

Eine präzise Impulsmessung kann nur auf Kosten einer grossen Unsicherheit bezüglich des Aufenthaltsortes x des Teilchens durchgeführt werden, und umgekehrt.

Wie steht es nun mit den Unschärfen von Ort und Impuls in unserem Beispiel aus? Das Teilchen ist im Intervall $0 < x < a$ lokalisiert, also haben wir

$$\Delta x = a.$$

Vom Impuls kennen wir zwar den Betrag $\hbar \cdot k = n \cdot \pi \cdot \hbar / a$, das Vorzeichen kann aber positiv und negativ sein, so dass die Unsicherheit

$$\Delta p = 2 \cdot \hbar \cdot n \cdot \pi / a \text{ ist.}$$

Das Produkt der Unschärfen wird

$$\Delta x \cdot \Delta p = n \cdot 2 \cdot \pi \cdot \hbar \quad \text{oder} \quad \Delta x \cdot \Delta p = n \cdot h.$$

Das Minimum des Produktes ergibt sich im Grundzustand mit $\Delta x \cdot \Delta p = h$, im Einklang mit (21). Man kann die Nullpunktsenergie auffassen als die kleinstmögliche Energie, welche durch die Unschärferelation noch zugelassen wird. Je kleiner die Breite a des Potentialkastens ist, also je besser das Teilchen lokalisiert ist, desto höher liegt der Grundzustand, was durch (20) ausgedrückt wird.

2.4 Energie-Eigenwerte des Wasserstoffatoms

Um die Energie-Eigenwerte des H-Atoms zu erhalten, muss die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein Elektron gelöst werden, das sich im Coulombpotential eines Protons befindet. Sie lautet

$$\left| -(\hbar^2 / (2 \cdot m)) \cdot \Delta \psi(x, y, z) - (1 / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (e^2 / r) \cdot \psi(x, y, z) = E \cdot \psi(x, y, z). \right.$$

Die Lösung dieses Problems verschieben wir auf die „Physik III“. Man erhält Eigenfunktionen ψ_{nlm} welche von drei Quantenzahlen n , l und m abhängen. $|\psi_{nlm}|^2$ gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im betreffenden stationären Zustand. Die Quantenzahlen können folgende Werte annehmen:

Haupt-Quantenzahl: $n = 1, 2, 3, \dots$

Drehimpuls-Quantenzahl: $l = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$.

Magnetische Quantenzahl: $m = -l, (-l + 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (l - 1), l$.

Die Energie-Eigenwerte hängen nur von der Hauptquantenzahl n ab. Das Ergebnis der Rechnung ist

$$\left| (22) \quad E_n = -R_y \cdot 1/n^2, \quad \text{Energie-Eigenwerte des H-Atoms.} \right.$$

$$\text{Rydbergkonstante} = (1 / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)^2) \cdot m \cdot e^4 / (2 \cdot \hbar^2),$$

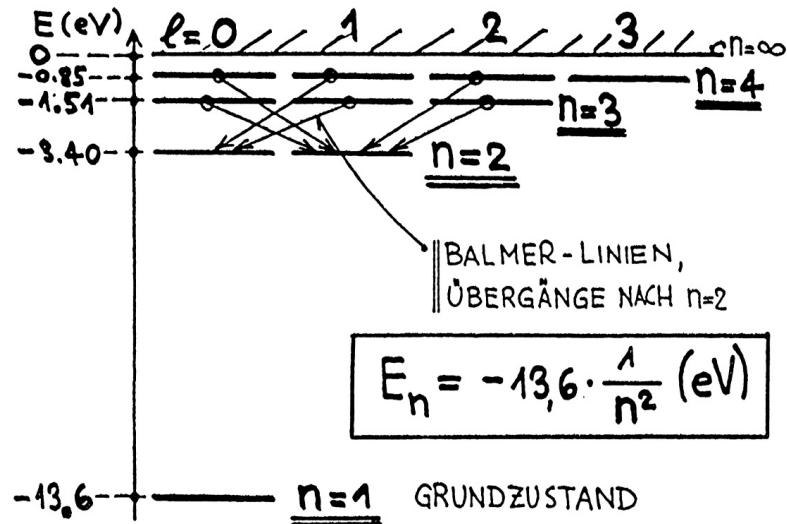
m = Elektronenmasse,

e = Elementarladung,

Zahlenwert: $R_y = 13.6 \text{ eV}$.

(22) ist identisch mit (5) und liefert quantitativ genau das Balmerpektrum des Wasserstoffatoms. Die Rydbergkonstante entspricht der Energie, die notwendig ist, um ein H-Atom im Grundzustand zu ionisieren. Zwei Bemerkungen: a) Der Spin (Eigendrehimpuls) des Elektrons wurde nicht berücksichtigt, er führt zu einer zusätzlichen „Feinstruktur“ im Energiespektrum. b) Die „Orbitalen“ der Chemiker sind Linearkombinationen der ψ_{nlm} .

Energie-Niveaux des H-Atoms und Quantenzahlen:



Demonstrationen:

1. Linienspektren von Fe und Cu
2. Na-D-Linien (in Emission und Absorption)
3. Hg-Spektrum
4. Franck-Hertz-Versuch
5. Fluoreszenz
6. Chemo-Lumineszenz
7. Licht „einfrieren“
8. Moseley-Gerade
(charakt. Rö-Strahlung v. Cu, Mo, Ba, Tb)
9. Elektronenbeugung
10. h -Bestimmung
11. Feldelektronenmikroskop
12. Alpha-Gamma-Eisen (Phasenumwandlung)
13. Piezo-Effekt
14. Alpha-, Beta- und Gamma-Strahlen
(Nachweis, Abschirmung, etc.)
15. $T(d, n)$ He_4 -Reaktion
(Moderator, Ag-Aktivierung
und Halbwertszeit)
16. Radioaktivität von K-40

Marksteine zur Entwicklung der Q.M. (unvollständig):

1895	Röntgenstrahlen	Wilhelm Röntgen	(1845-1923)
1896	Becquerel-Strahlen (Radioaktivität)	Henri Becquerel Marie-Curie Pierre Curie	(1852-1908) (1867-1934) (1859-1906)
1897	Freies Elektron	Joseph J. Thomson	(1856-1940)
1900	Energiequanten, $E = h \cdot \nu$	Max Planck	(1858-1947)
1905	Photoelektrischer Effekt, spez. Relativitäts-Theorie	Albert Einstein	(1879-1955)
1911	Atomkern	Ernest Rutherford	(1871-1937)
1913	Moseley-Gesetz	Jeffrey Moseley	(1884-1915)
1913	Bohr'sches Atommodell	Niels Bohr	(1885-1962)
1923	Compton-Effekt	Arthur Compton	(1892-1962)
1923	Materie-Wellen	Louis V. de Broglie	(1892-1976)
1925	Quantenmechanik	Werner Heisenberg	(1901-1976)
1925	Pauli-Prinzip	Wolfgang Pauli	(1900-1958)
1926	Schrödingergleichung	Erwin Schrödinger	(1887-1961)
1927	Elektronenbeugung	Clinton J. Davisson Lester H. Germer	(1881-1958) (1896-1971)