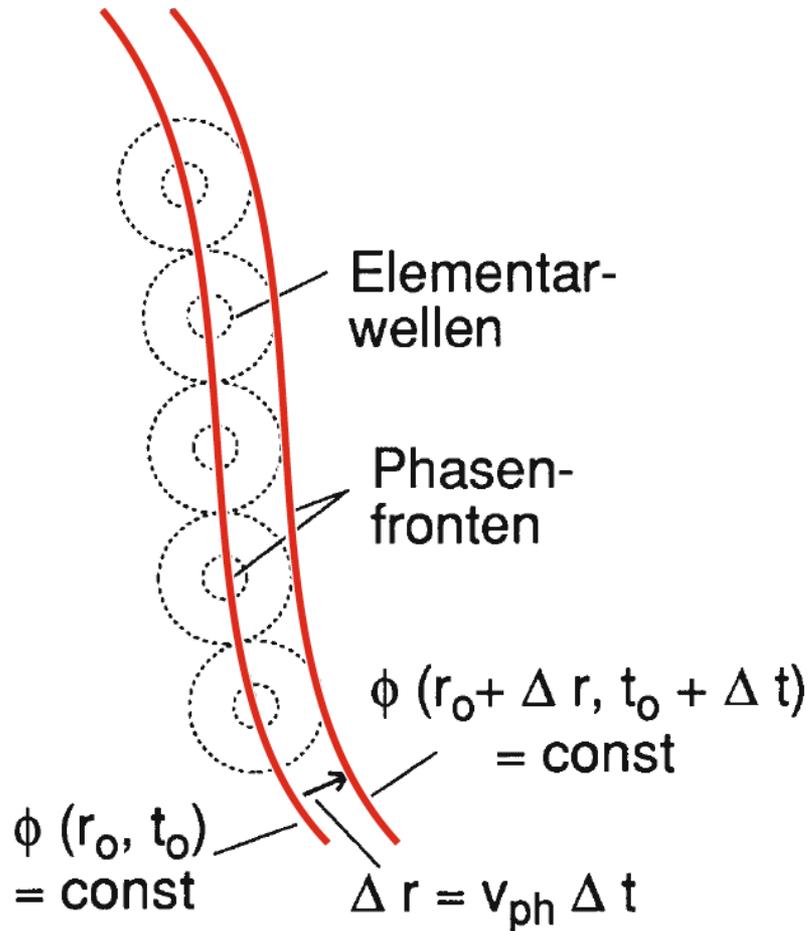


Kapitel 10: Beugung & Interferenz

- Huygenssche Prinzip,
- Beispiel-Anwendungen des H.P.
- Beugung
- Dispersion
- Interferenz

Das Huygenssche Prinzip

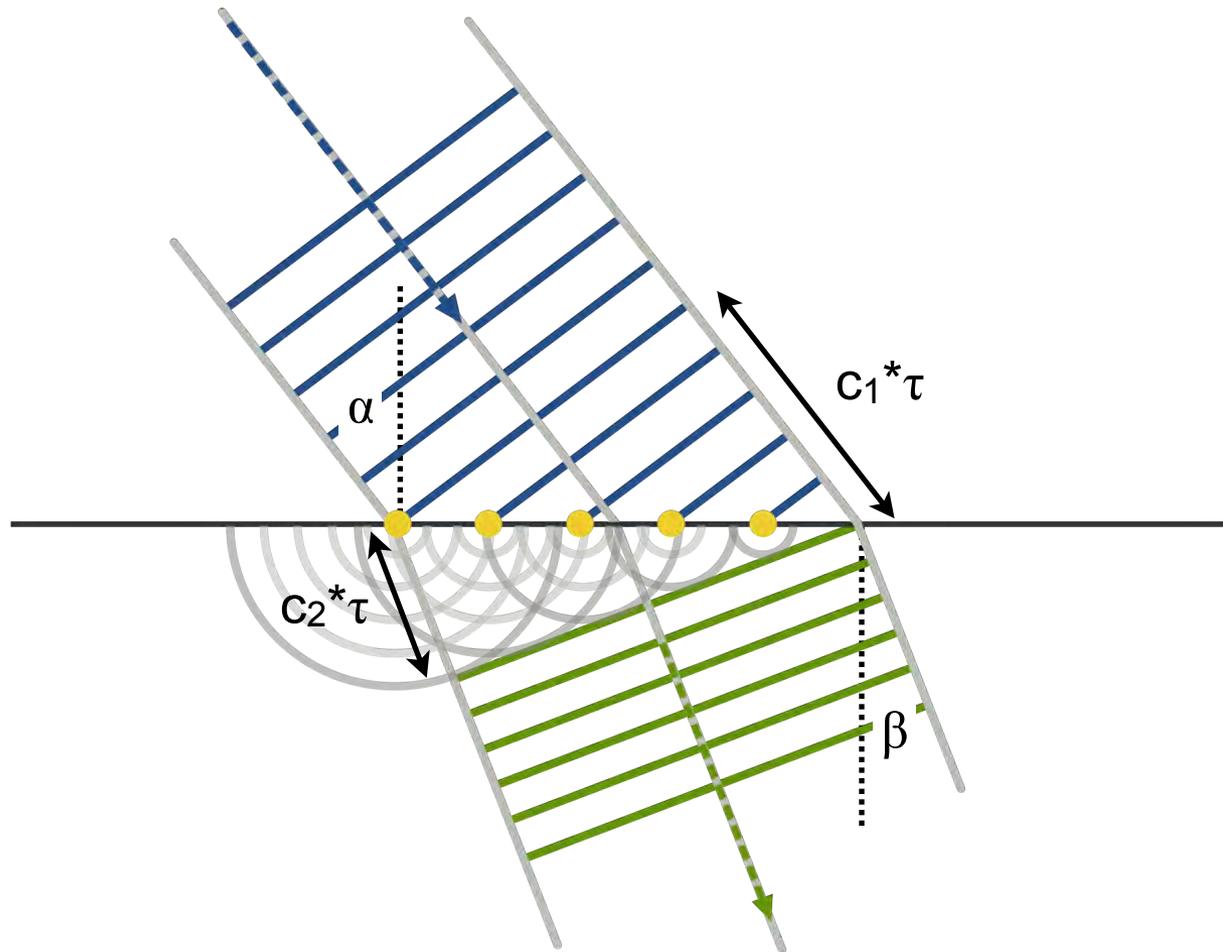
Jeder Punkt einer **Wellenfront** kann als Ausgangspunkt einer **Elementar-Welle** betrachtet werden.
Die neue Lage der folgenden Wellenfront ergibt sich durch **Superposition** aller Elementarwellen.



Bemerkungen:

- **Wellenfront**=Fläche konstanter Phase Φ
- in 3D sind Elementarwellen kugelförmig, in 2D, kreisförmig

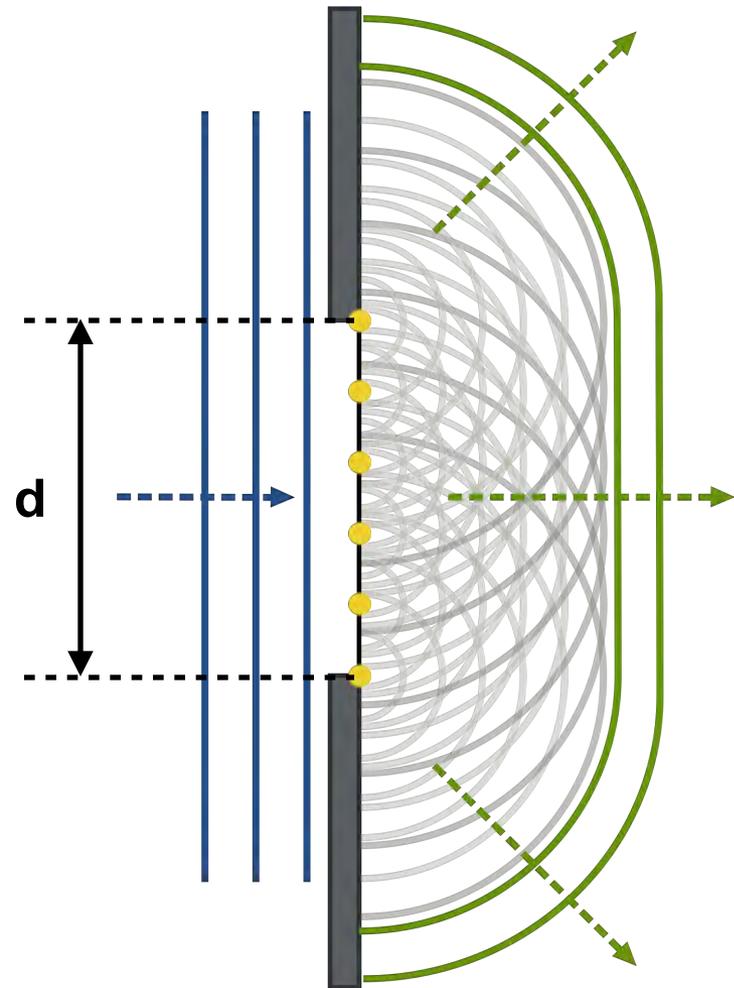
Huygenssches Prinzip: Brechung



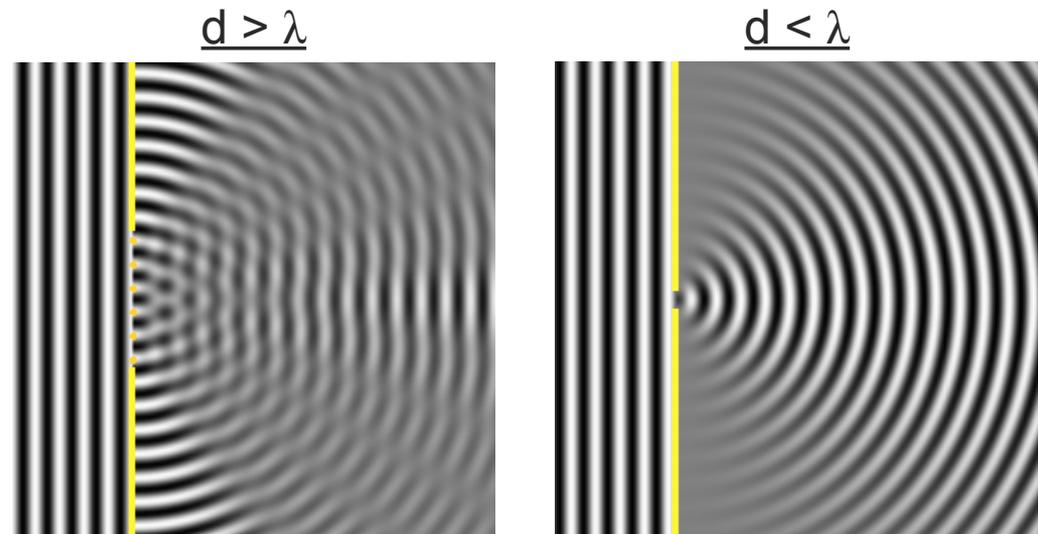
$$\begin{aligned}\sin\alpha &= c_1 \cdot \tau / s \\ \sin\beta &= c_2 \cdot \tau / s\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha / c_1 = \sin\beta / c_2 \quad \Leftrightarrow \underline{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \text{ (Snellius)}}$$

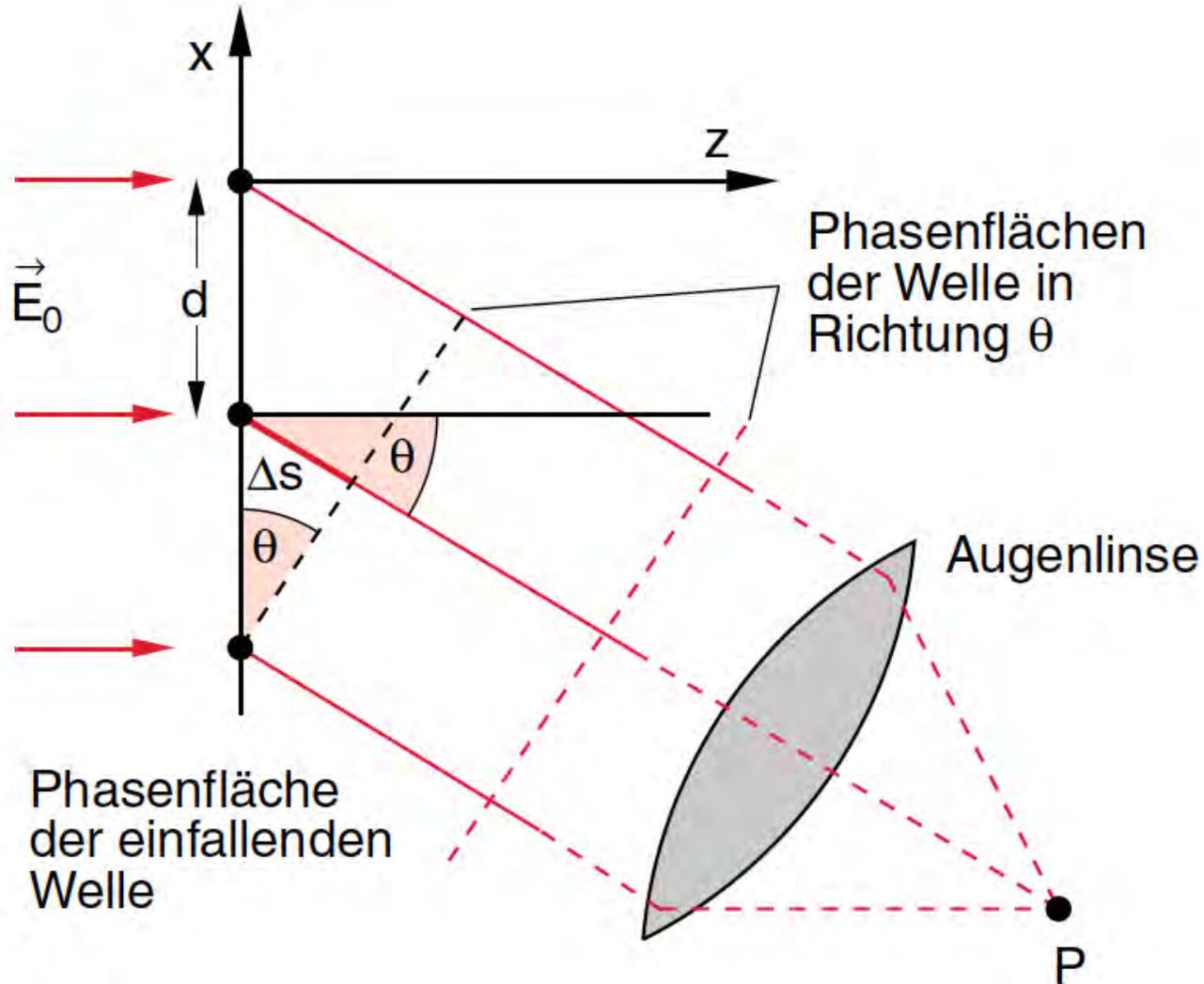
Huygenssches Prinzip: Transmission durch Spalt



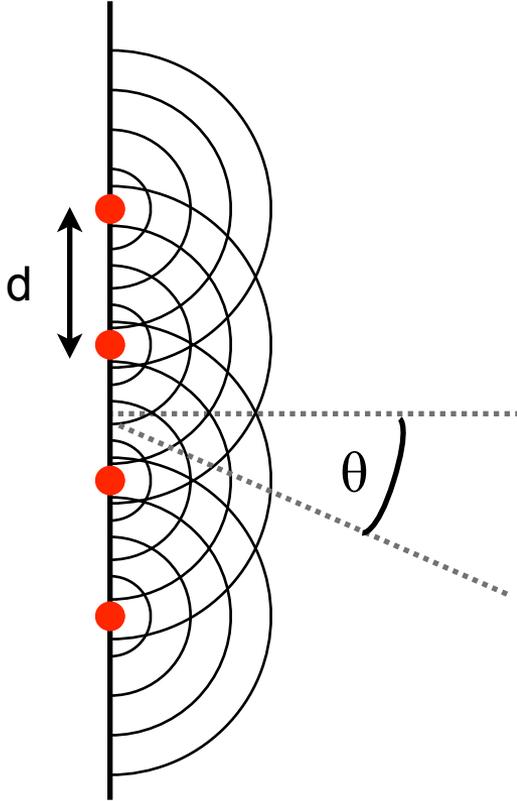
- Spaltbreite d
- Wellenlänge λ
- Für $d \gg \lambda$: Transmission wie in geometrischer Optik
- Für $d \sim \lambda$: Ablenkung der Welle weg von der optischen Achse: **Beugung**



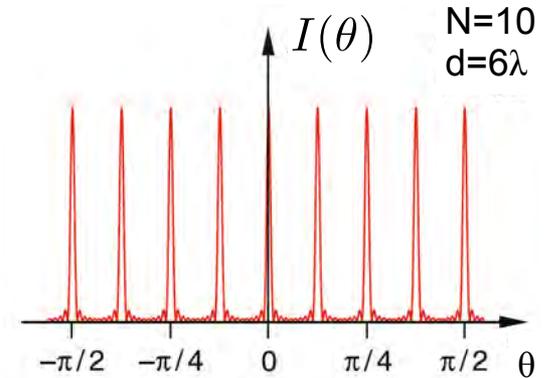
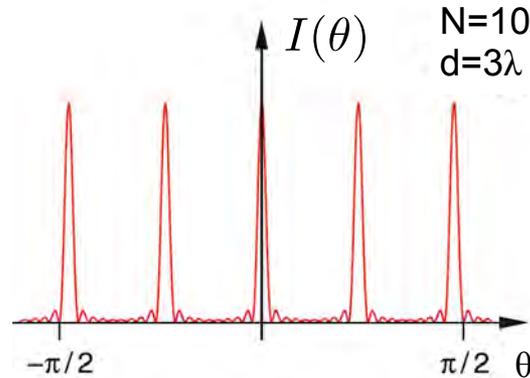
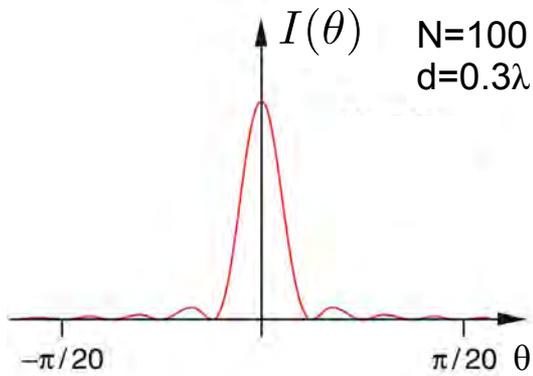
Beugung als Interferenz-Phänomen



Interferenz von linear angeordneten Kreiswellen



$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2} \Delta\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} \Delta\varphi\right)} = I_0 \frac{\sin^2\left(N\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta\right)}$$



Beugung

$$I(\theta) \propto \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

$$x = N\pi (d/\lambda) \sin(\theta)$$

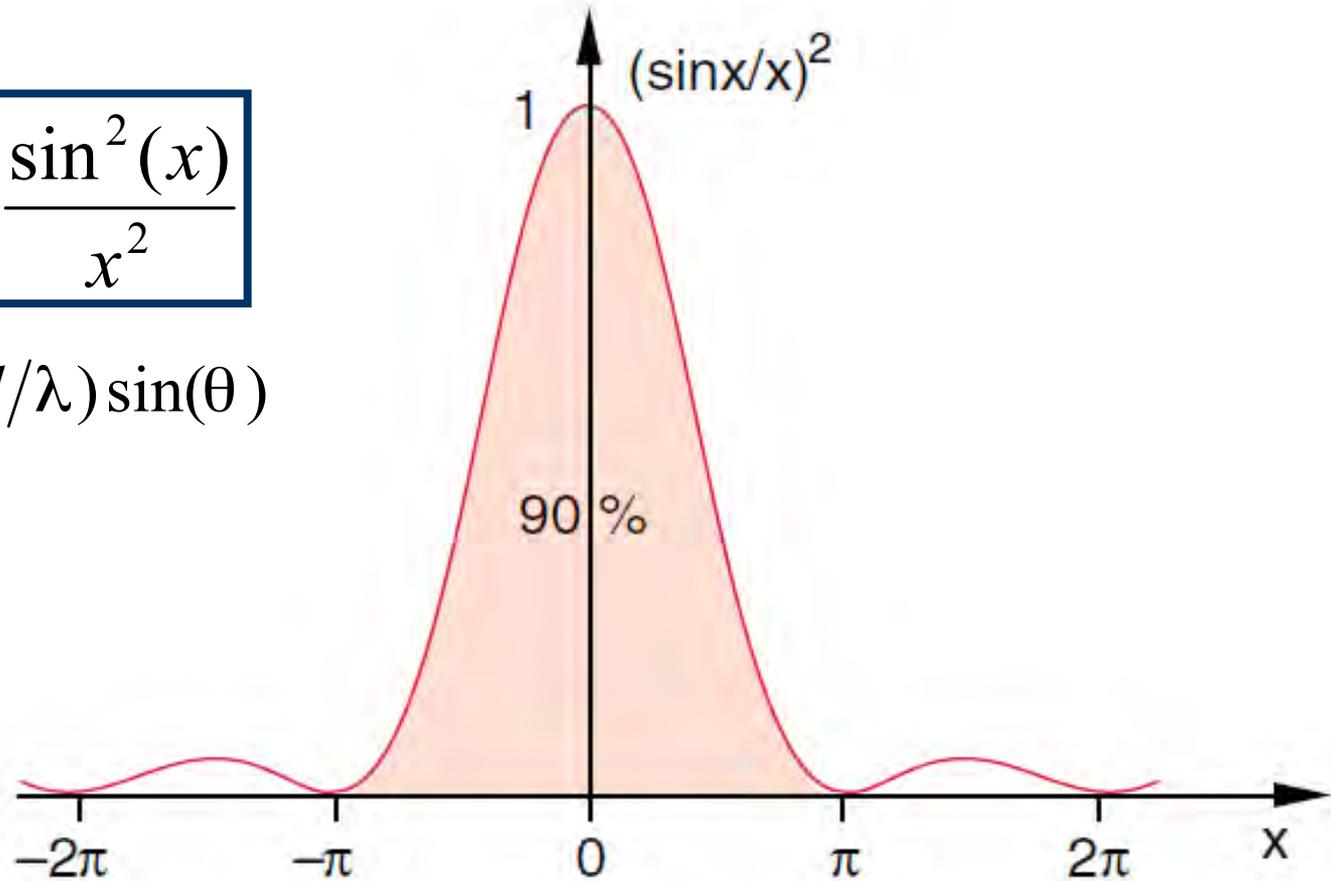


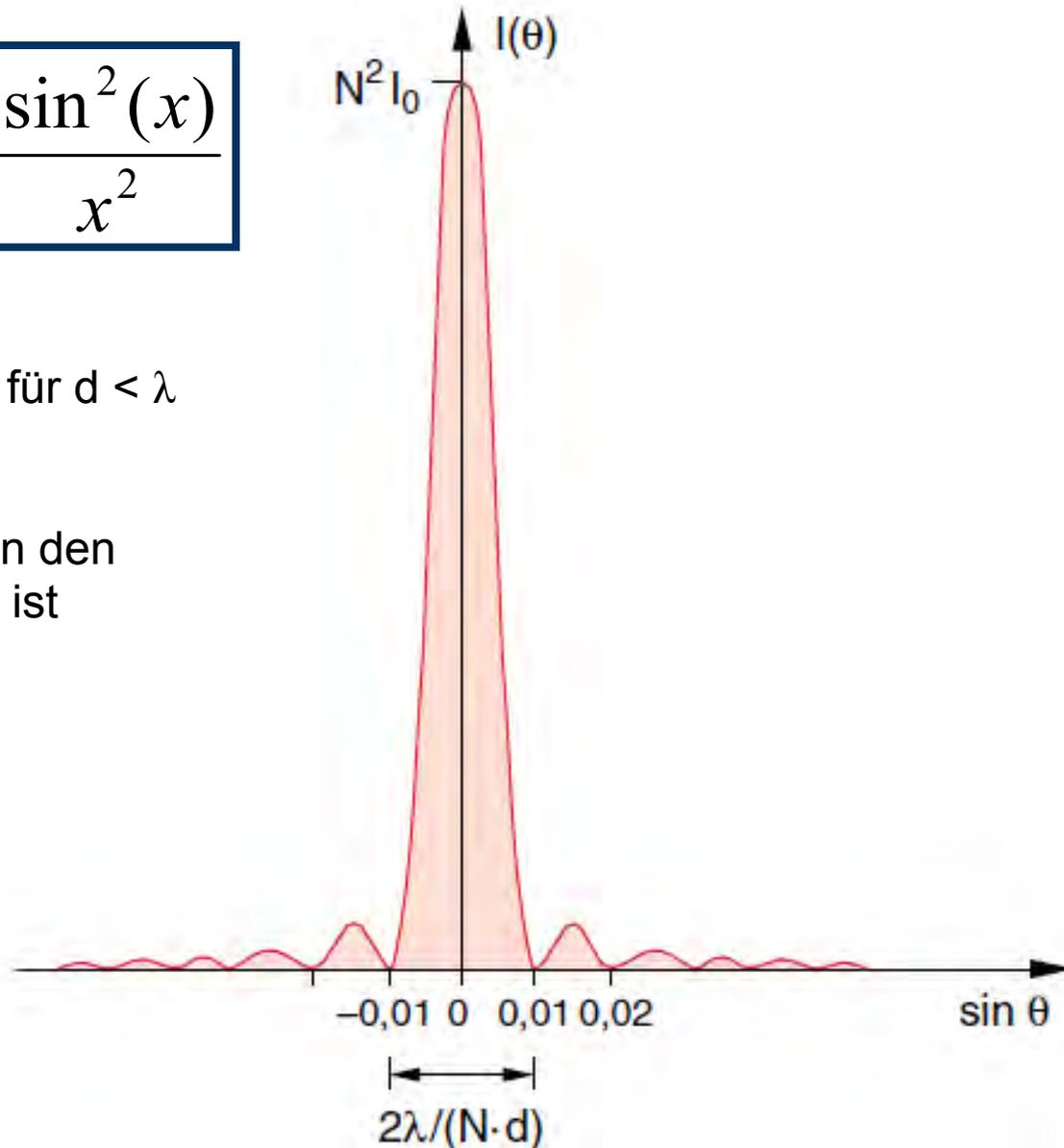
Abb. 10.36. Die Funktion $(\sin x/x)^2$

Beugung

$$I(\theta) = N^2 I_0 \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

Streuintensität $I(\theta)$ für $d < \lambda$
und $D=N \cdot d=100\lambda$.

Die Breite zwischen den
Nullstellen von $I(\theta)$ ist
 $\Delta\theta = 2\lambda/(N \cdot d)$



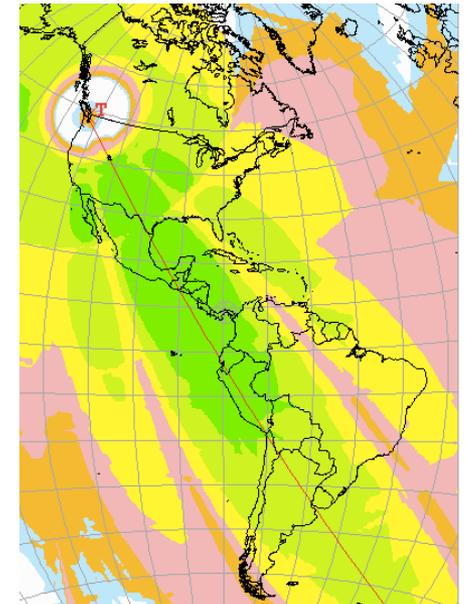
Interferenz von Punktquellen - Anwendungen

Richtantennen für Radiosender

regelmässige Anordnung von Dipol-Antennen



Abstrahl-Muster



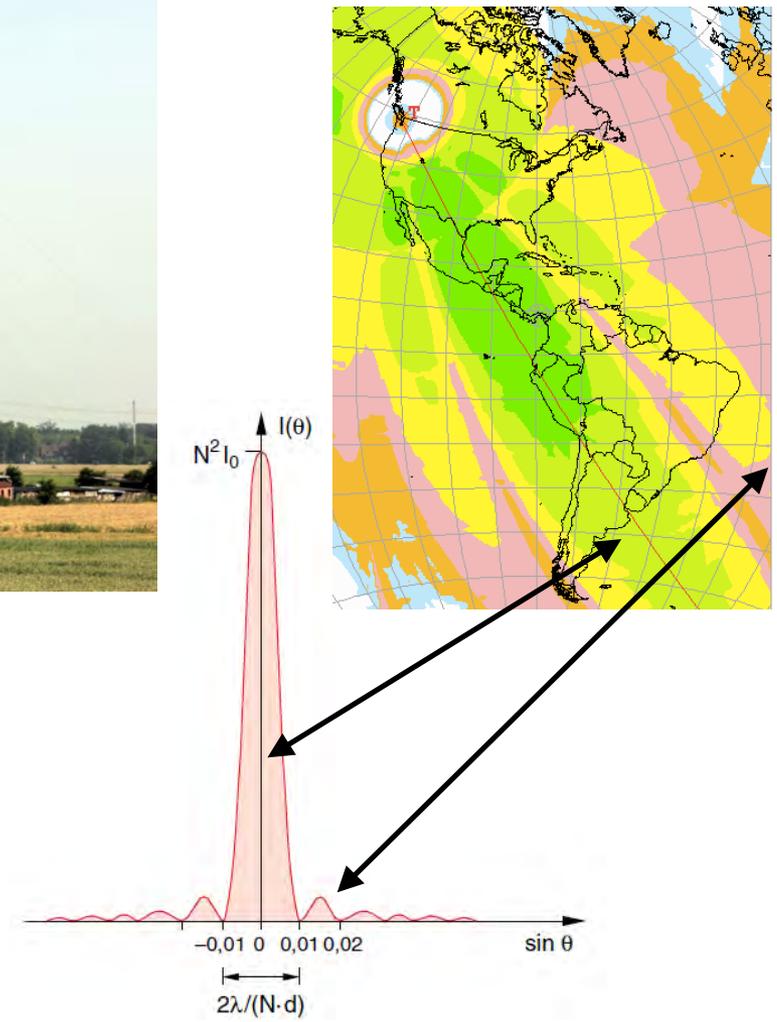
Interferenz von Punktquellen - Anwendungen

Richtantennen für Radiosender

regelmässige Anordnung von Dipol-Antennen



Abstrahl-Muster



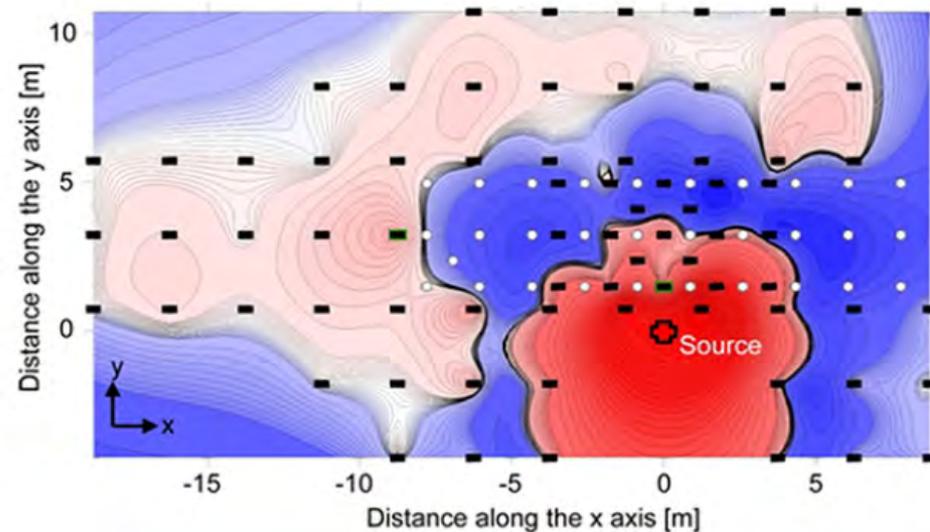
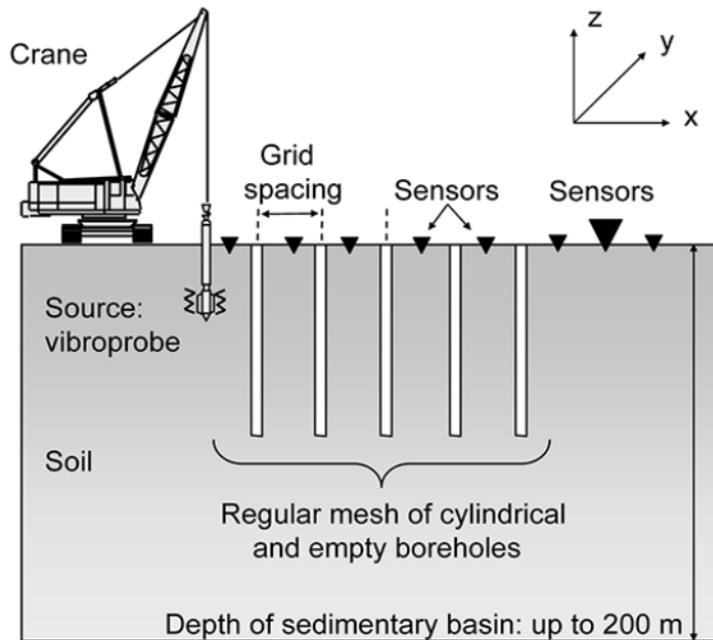
Interferenz von Punktquellen - Anwendungen

Ablenkung von Erdbebenwellen

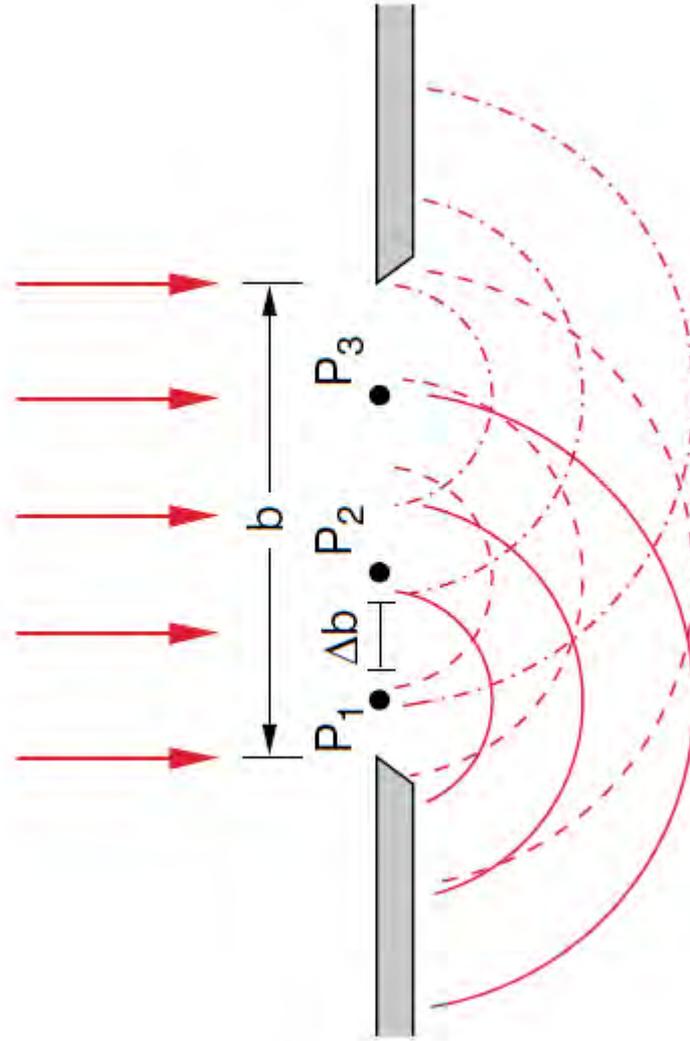
Experiments on Seismic Metamaterials: Molding Surface Waves

S. Brûlé, E. H. Javelaud, S. Enoch, and S. Guenneau

Physical Review Letters 112, 133901 2014 – Published March 31, 2014



Beugung am Spalt



Beugung am Spalt: Effekt der Spaltbreite b

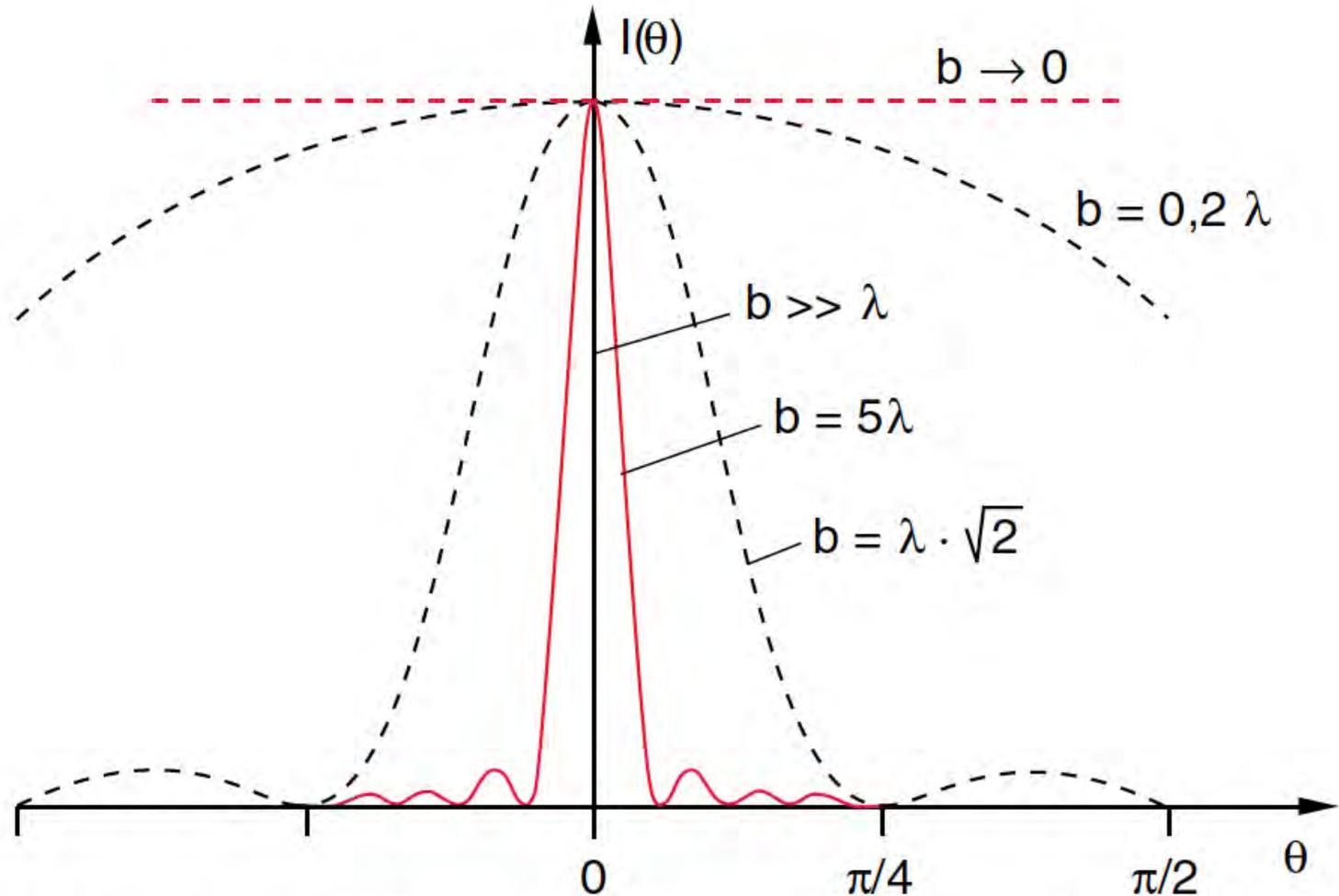


Abb. 10.39. Intensitätsverteilung $I(\theta)$ bei der Beugung am Spalt für verschiedene Werte des Verhältnisses b/λ von Spaltbreite b zu Wellenlänge λ

Beugung durch Kreisförmige Blende

$$I(\theta) = I_0 \cdot \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$$

$$x = \frac{2\pi R}{\lambda} \cdot \sin \theta$$

J_1 : Besselfunktion erster Ordnung

Nullstellen bei

$$x_1 = 1,22 \pi$$

$$x_2 = 2,16 \pi$$

....

Erste Nullstelle von $I(\theta)$ bei

$$\sin \theta_1 = 0,61 \lambda / R$$



Abb.10.41. Ringförmige Beugungsstruktur hinter einer Kreisblende, die mit parallelem Licht beleuchtet wird. Aus M.Cagnet, M.Francon, J.C.Thrierr: *Atlas optischer Erscheinungen* (Springer, Berlin, Göttingen 1962)

Beugung durch Kreisförmige Blende

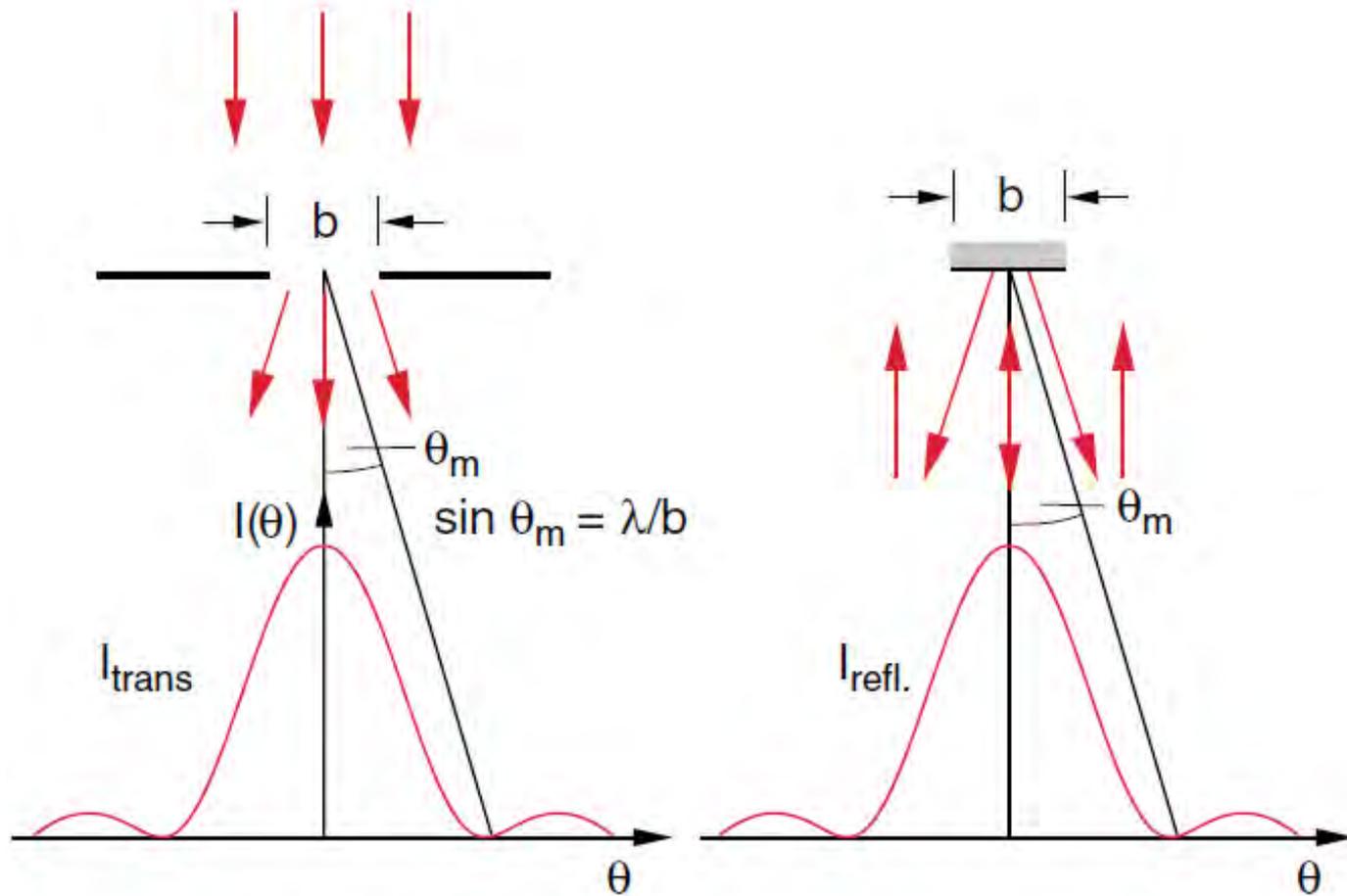
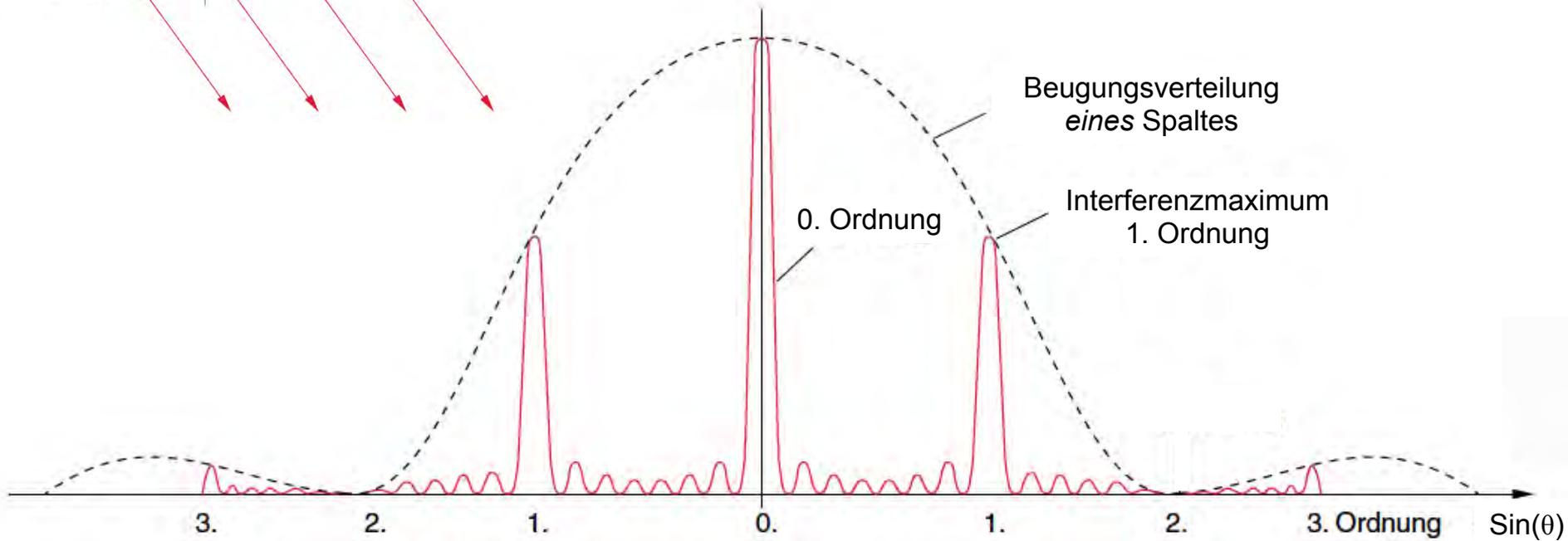
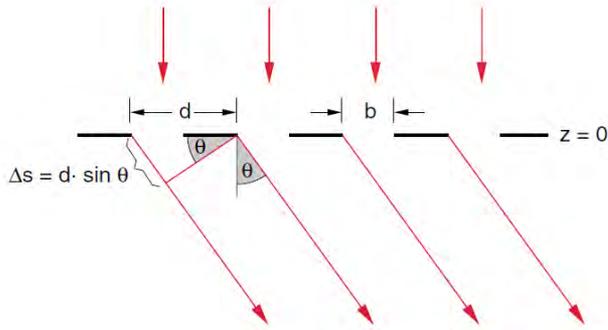
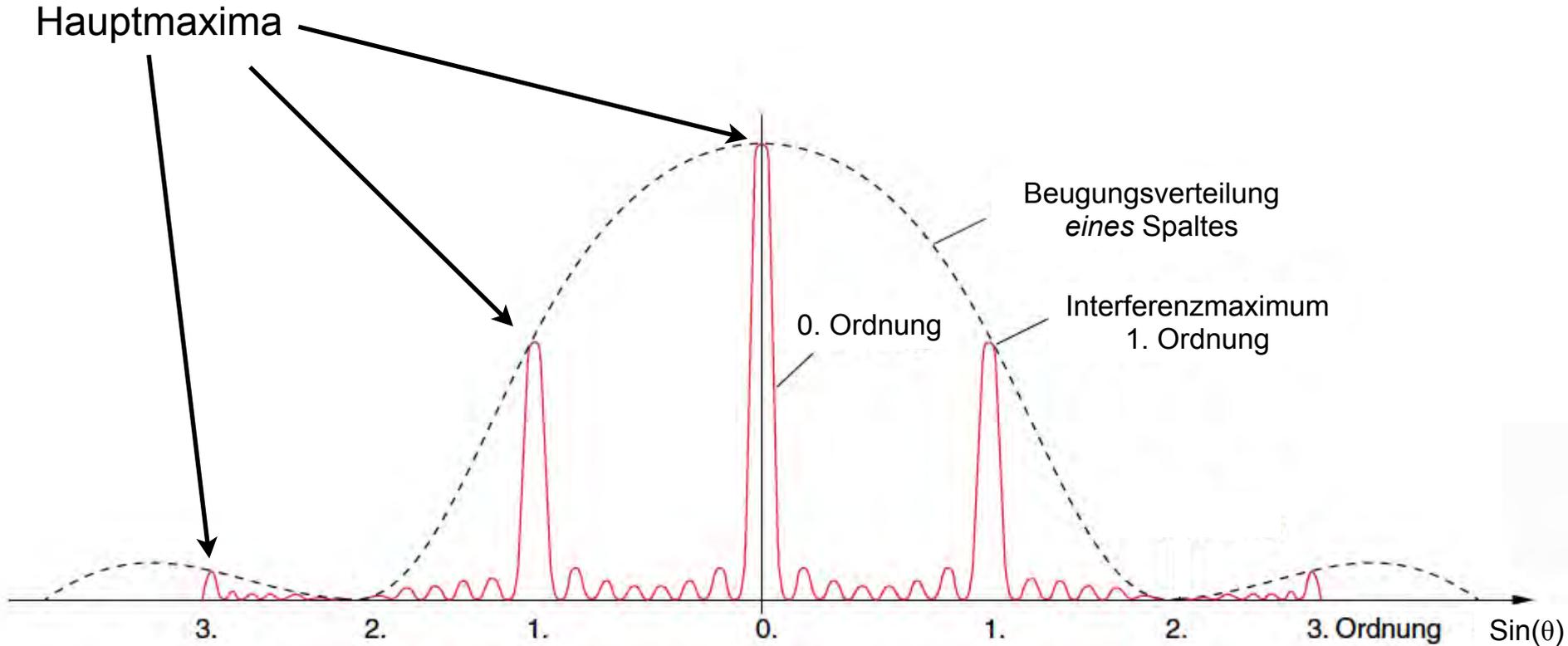


Abb. 10.42. Äquivalenz der Beugung des durch eine Blende transmittierten Lichtes und des an einem Spiegel gleicher Breite b reflektierten Lichtes

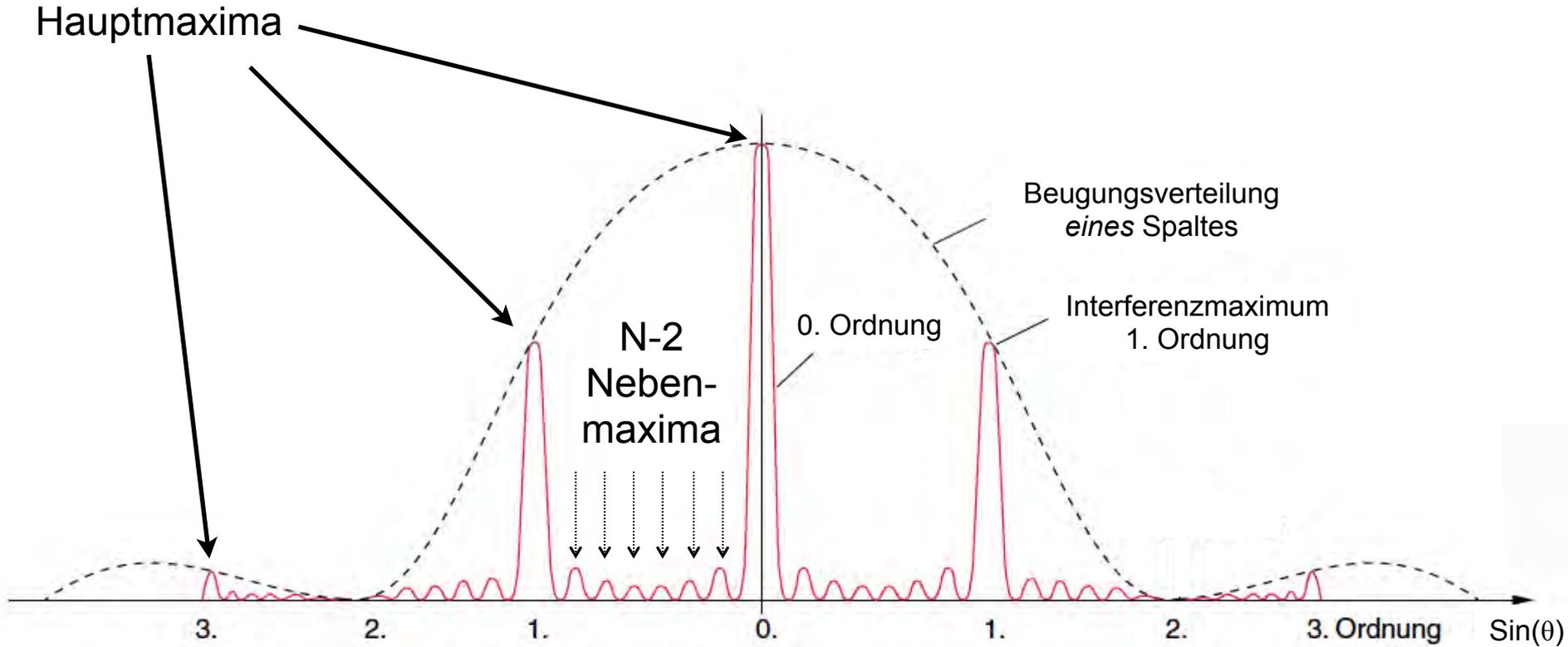
Beugungsgitter (8 Spalten, $d/b=2$)



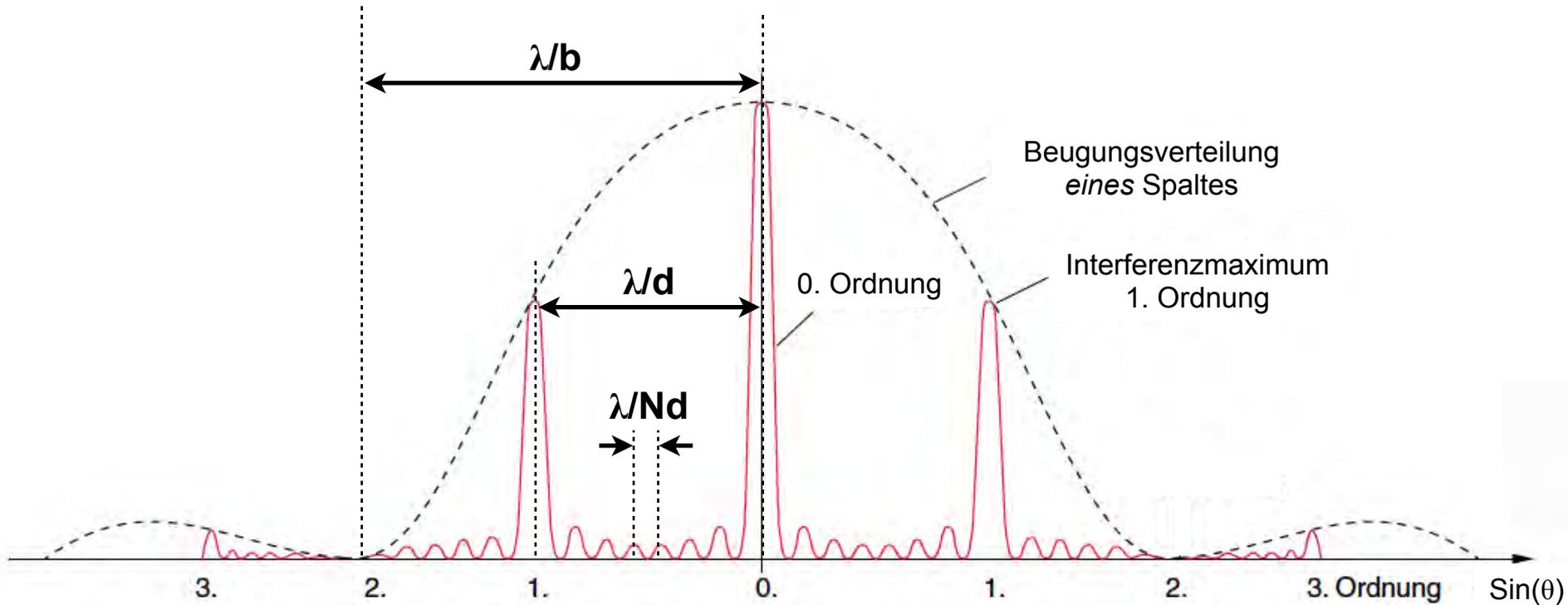
Beugungsgitter (N=8 Spalten, d/b=2)



Beugungsgitter (N=8 Spalten, d/b=2)

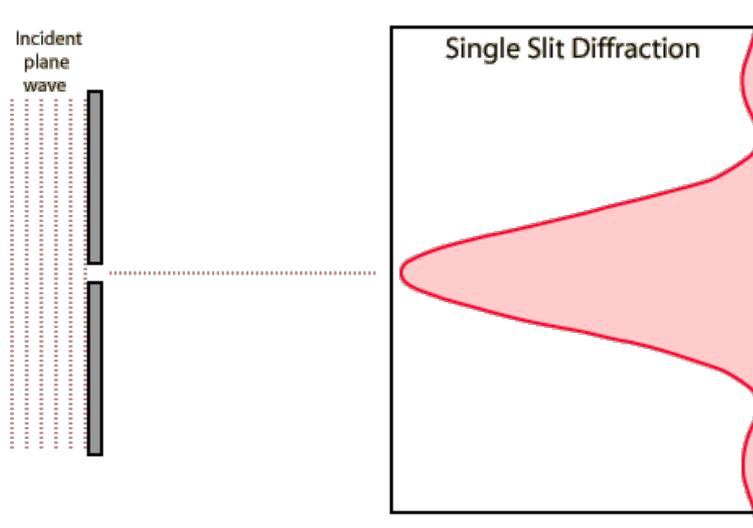


Beugungsgitter (N=8 Spalten, d/b=2)

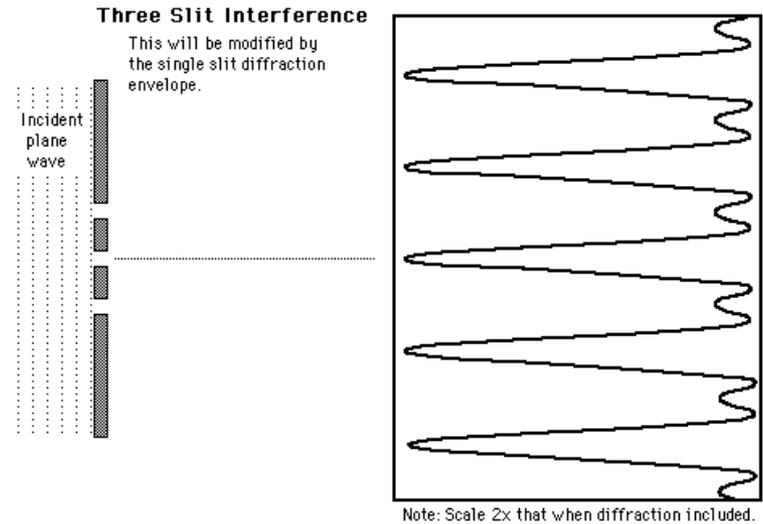


Beugungsgitter

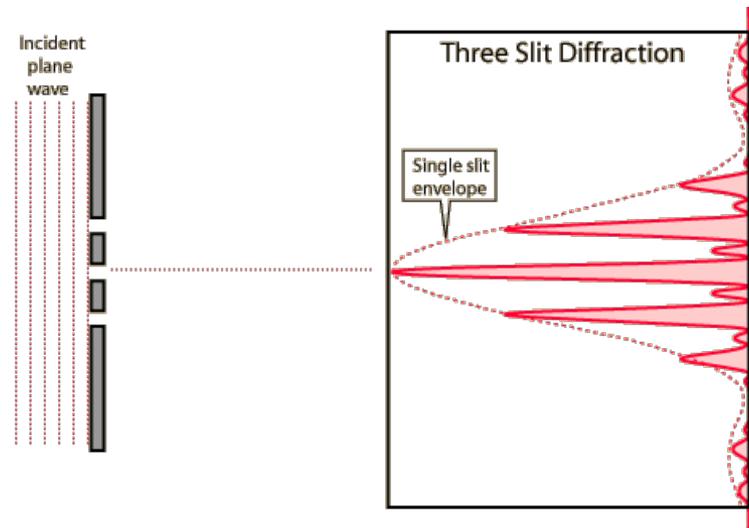
N=1, nur Beugung



N=3, nur Interferenz (Spalten)



N=3, Beugung + Interferenz zwischen Spalten



Gitter und Dispersion



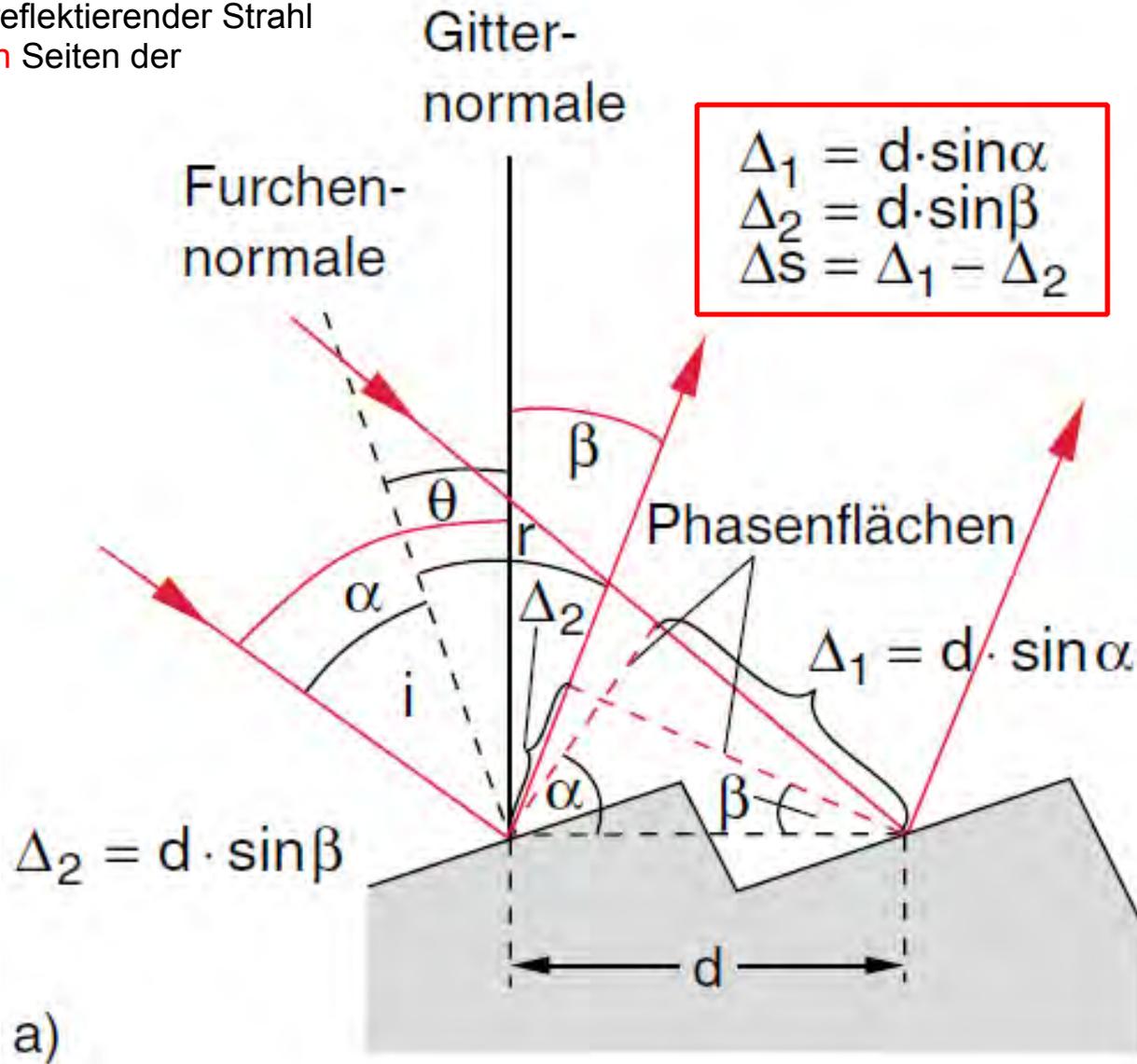
Nominal Distanz
zwischen CD "tracks"

$$d=1.6 \mu\text{m}$$

(625 tracks per mm)

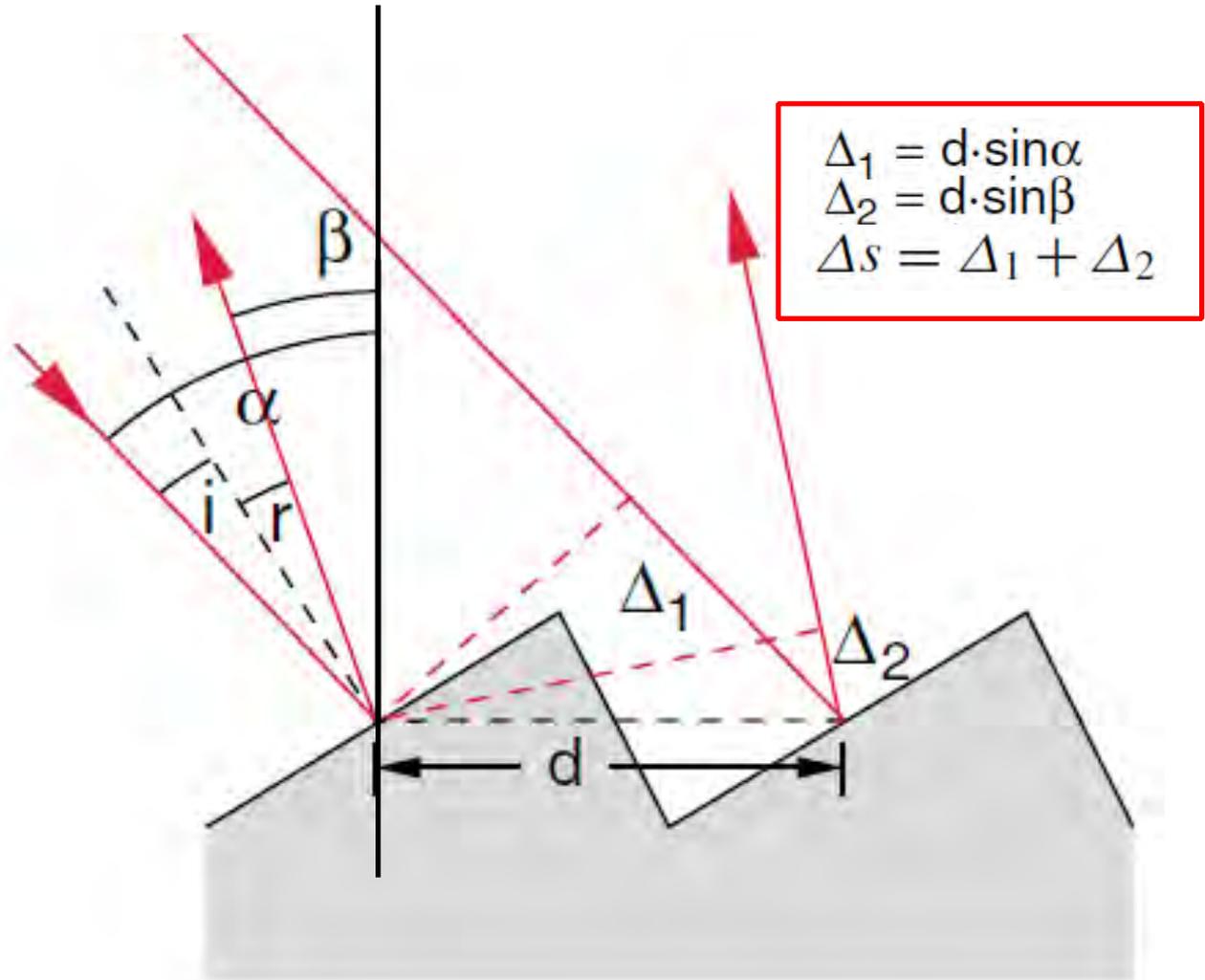
Reflexionsgitter

Einfallender und reflektierender Strahl auf **verschiedenen** Seiten der Gitternormalen



Reflexionsgitter

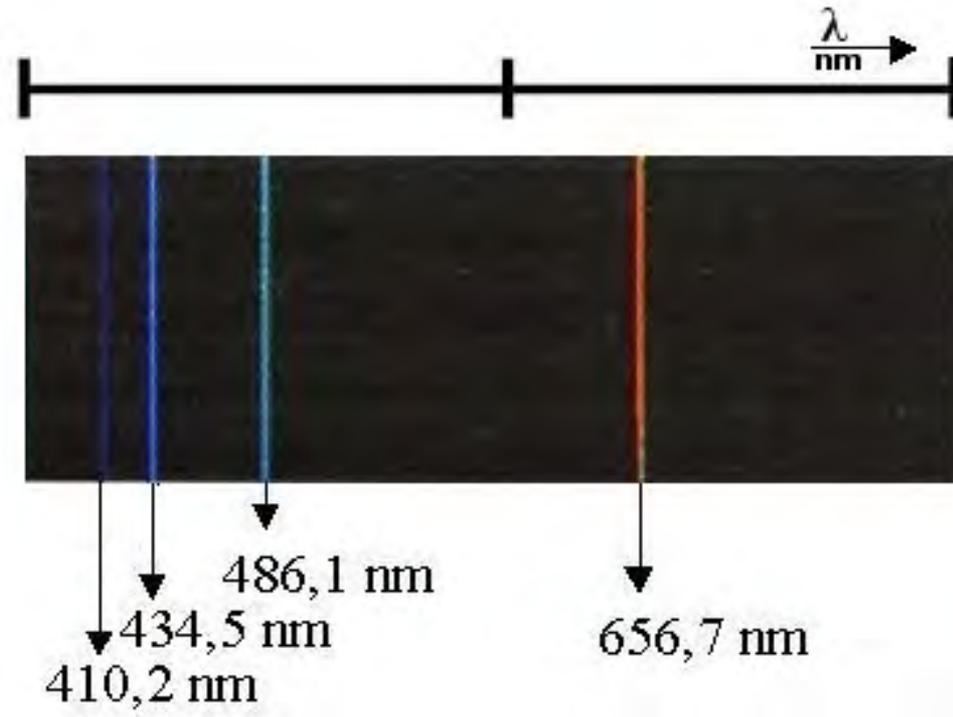
Einfallender und reflektierender Strahl
auf **gleicher** Seite der Gitternormalen



Reflexionsgitter: Spektroskopie

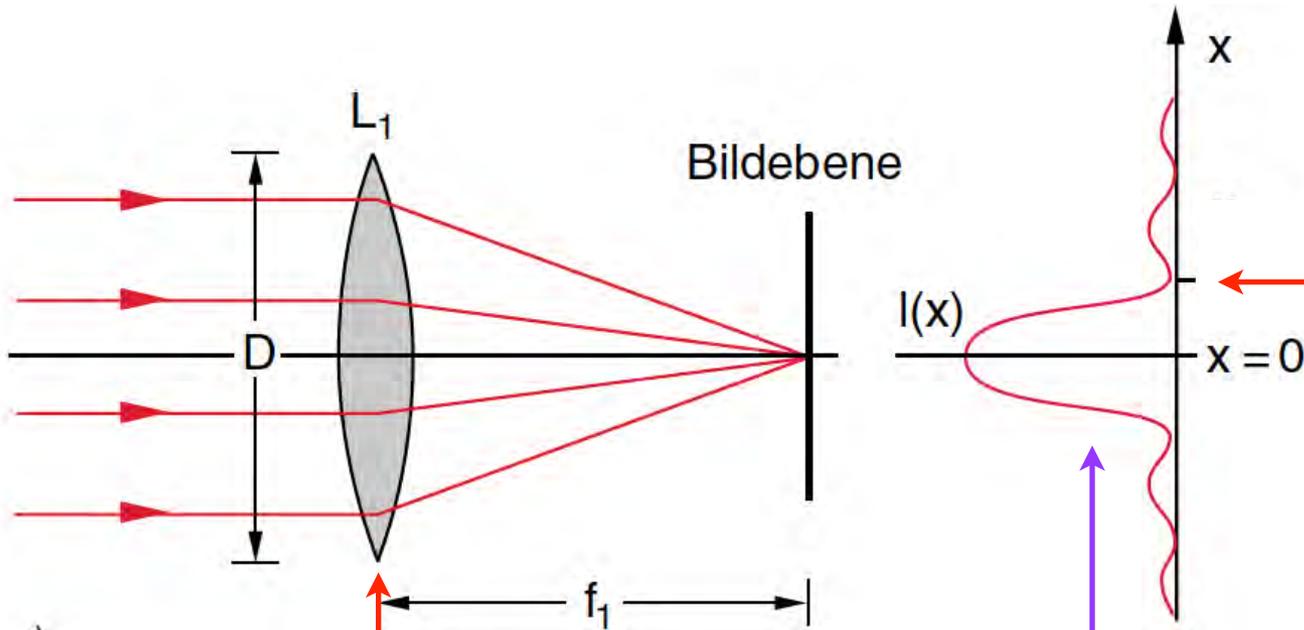
Wasserstofflampe

H₂ Moleküle durch Wasserstoffmoleküle durch Elektronenstrahl in angeregte H Atome zerlegt. Anregungsenergie wird dann in Form von elektromagnetischer Strahlung abgegeben.



Spektrum

Rayleigh Kriterium

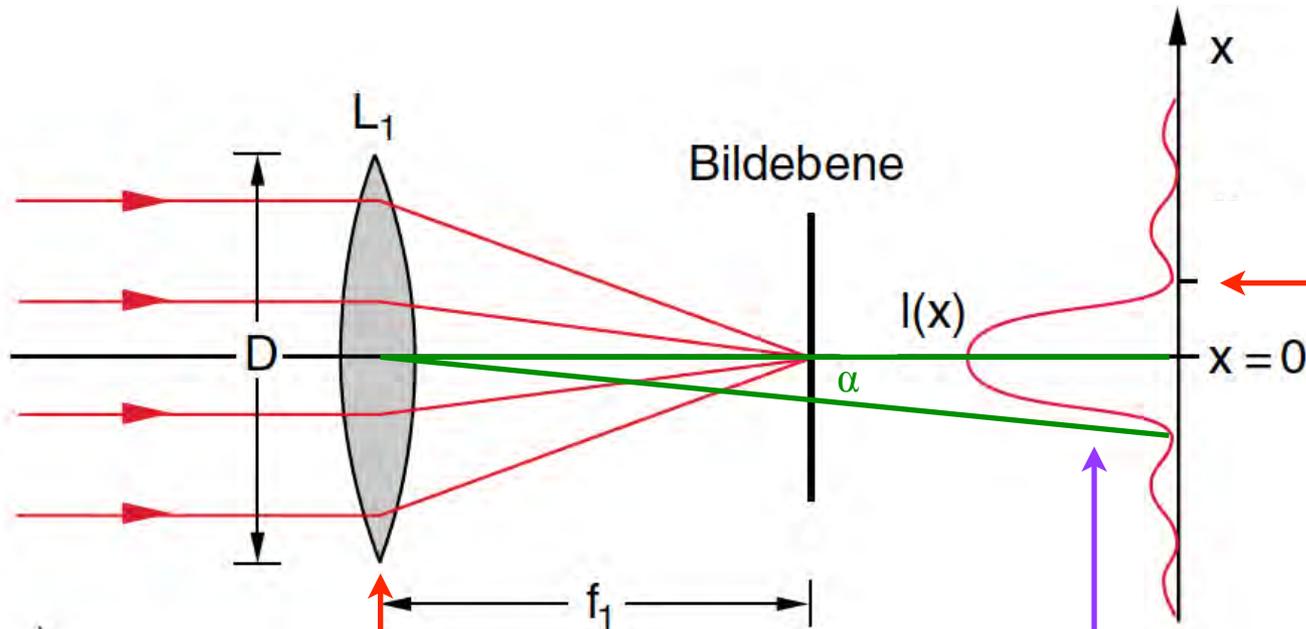


Linse als kreisförmige Apertur \Rightarrow Beugung

Beugungsmuster
 $\sim J_1(y)/y^2$
mit $y = \sin(\theta)\pi \cdot D/\lambda$

Nullstelle bei
 $y = 1.22\pi = \sin(\alpha)\pi \cdot D/\lambda$
 $\Rightarrow \alpha = 1.22\lambda/D$

Rayleigh Kriterium



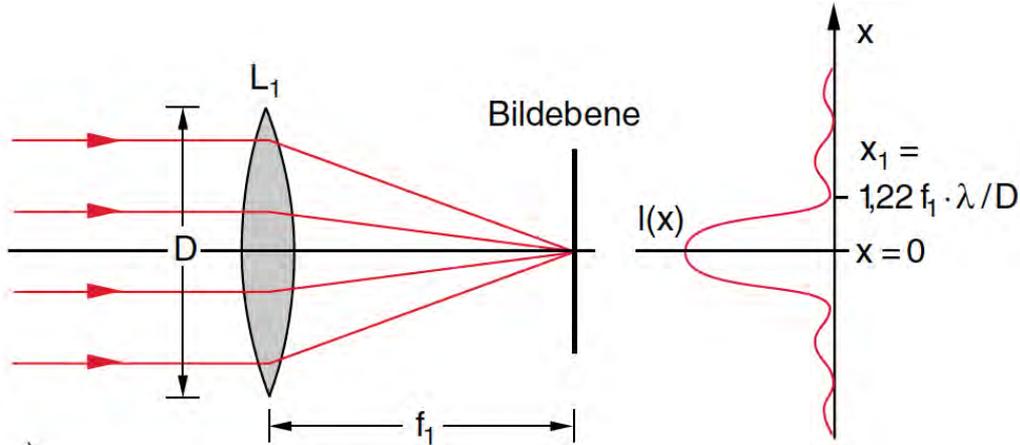
Linse als kreisförmige Apertur \Rightarrow Beugung

Beugungsmuster
 $\sim J_1(y)/y^2$
mit $y = \sin(\theta)\pi \cdot D/\lambda$

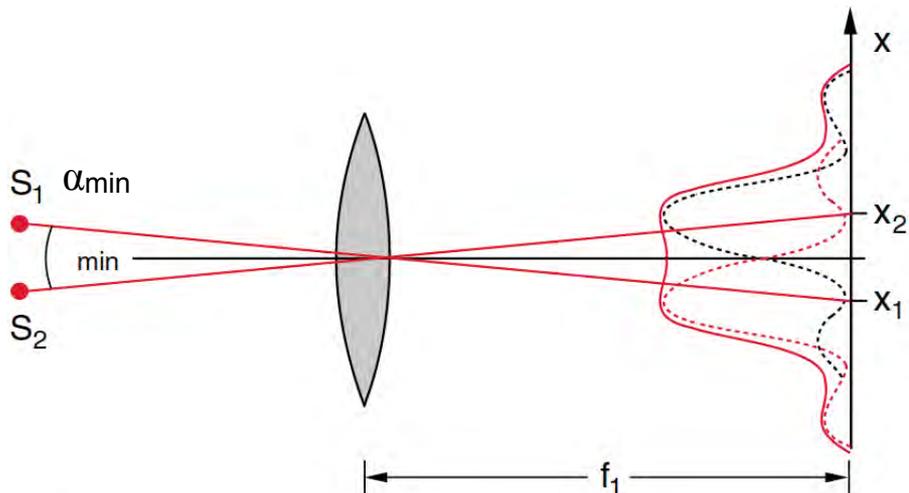
Nullstelle bei
 $y = 1.22\pi = \sin(\alpha)\pi \cdot D/\lambda$
 $\Rightarrow \alpha = 1.22\lambda/D$

Winkelauflösung
 $\Rightarrow \alpha_{\min} = 1.22\lambda/D$

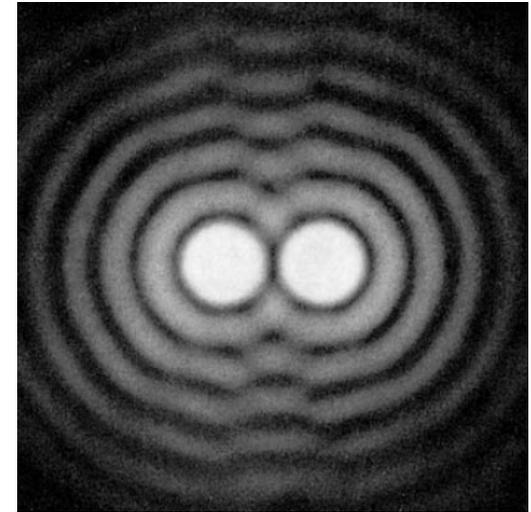
Rayleigh Kriterium



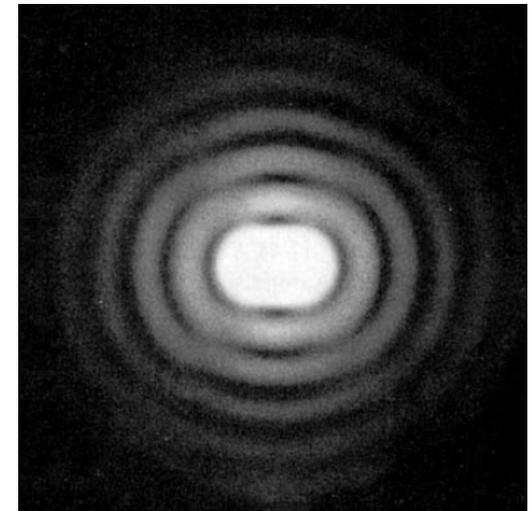
Winkelauflösung
 $\Rightarrow \alpha_{\min} = 1.22 \lambda / D$



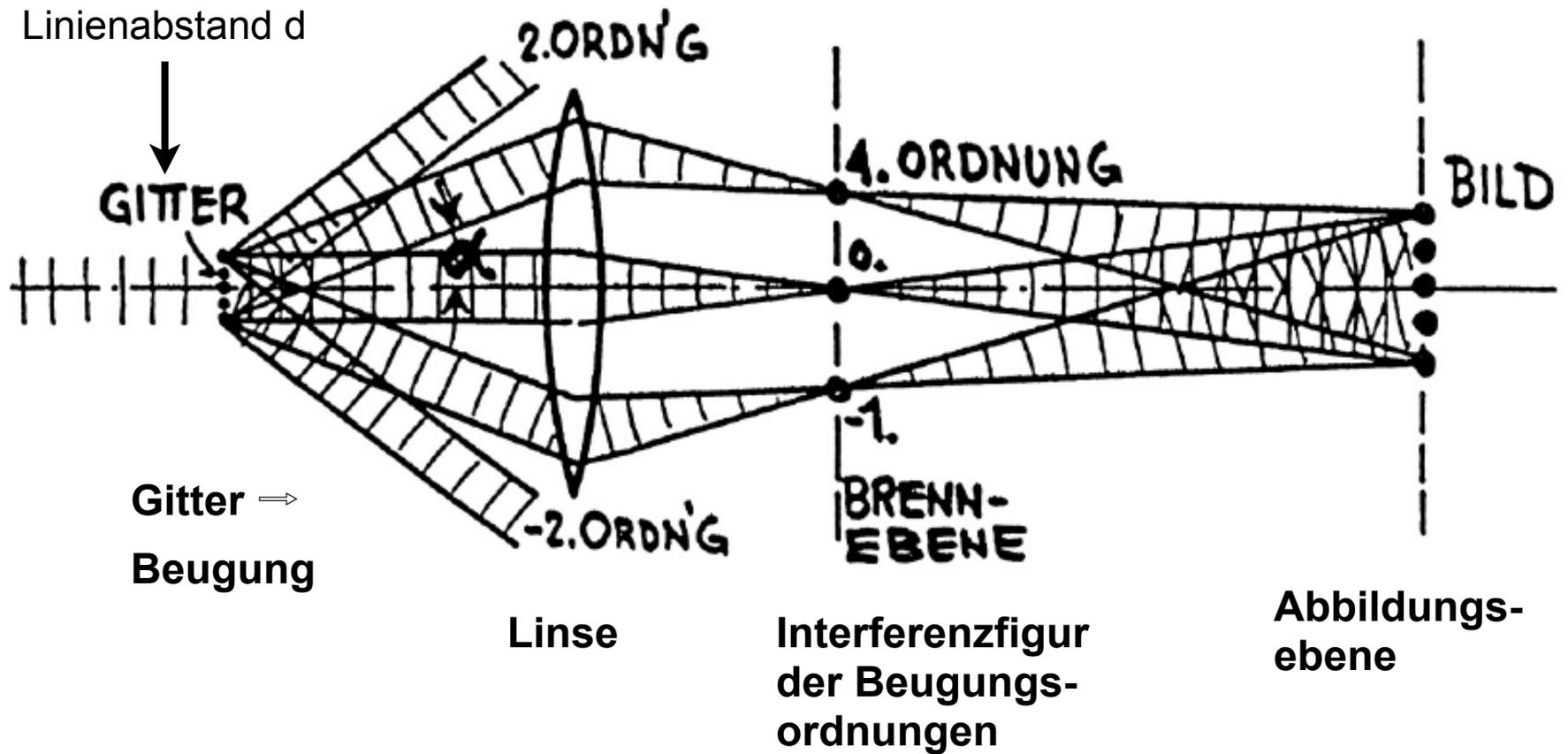
$\alpha > \alpha_{\min}$



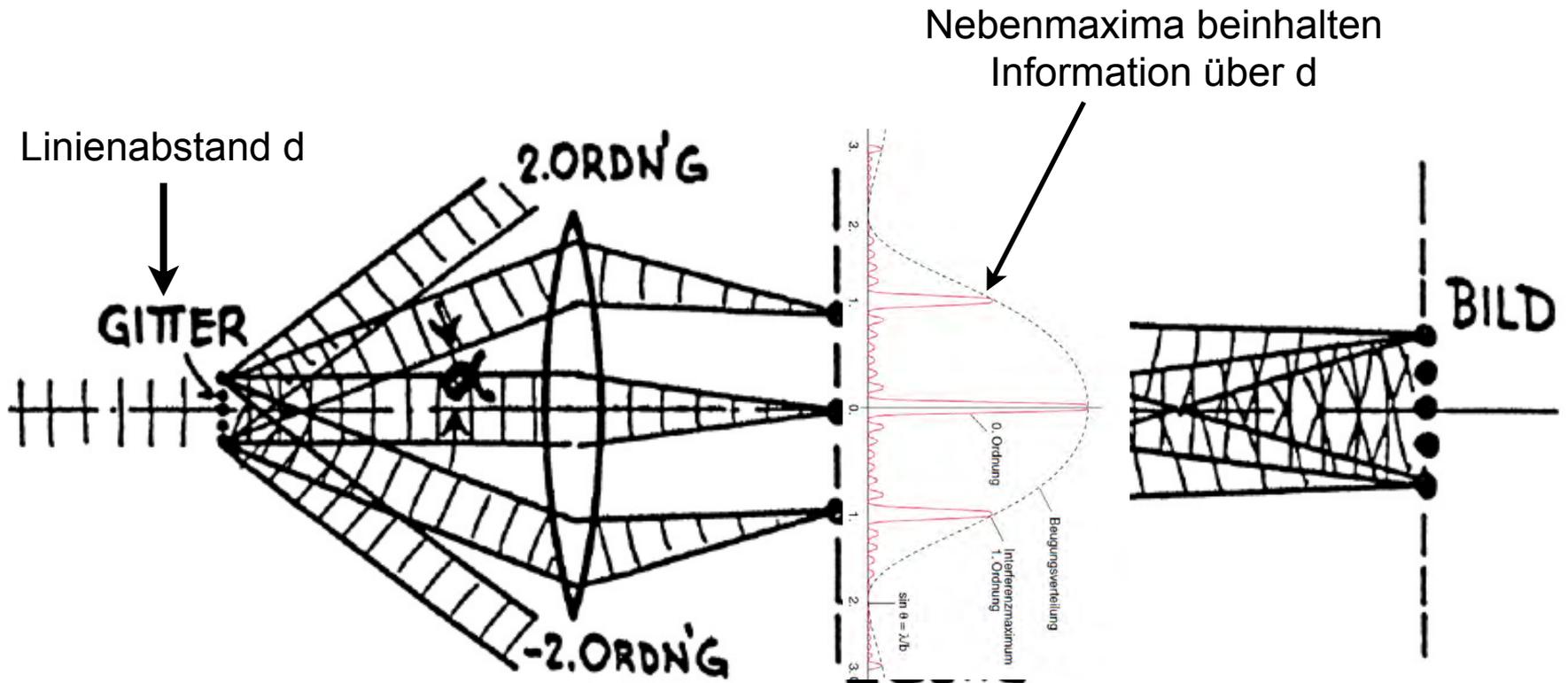
$\alpha \sim \alpha_{\min}$



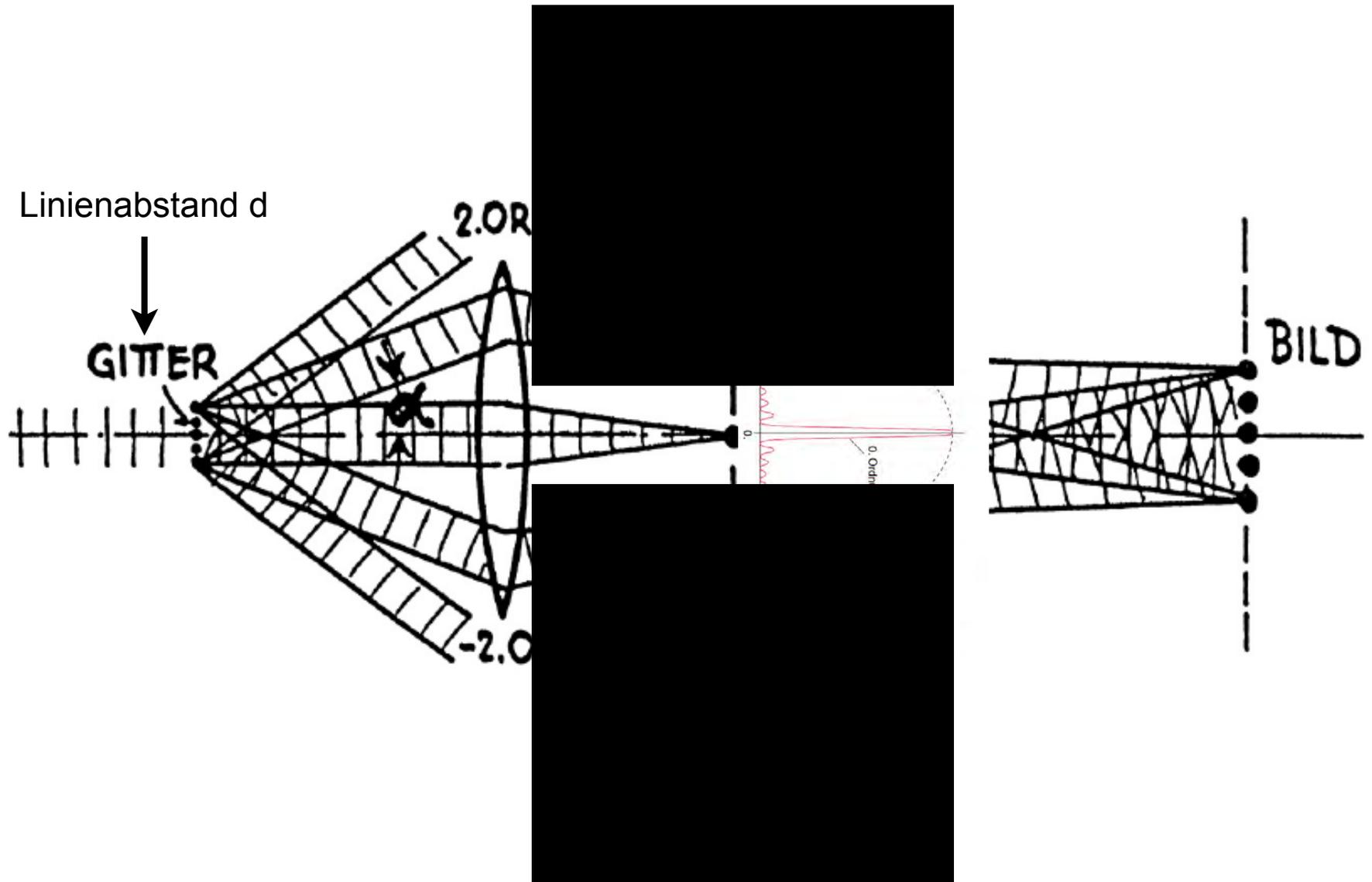
Abbé Auflösungsvermögen



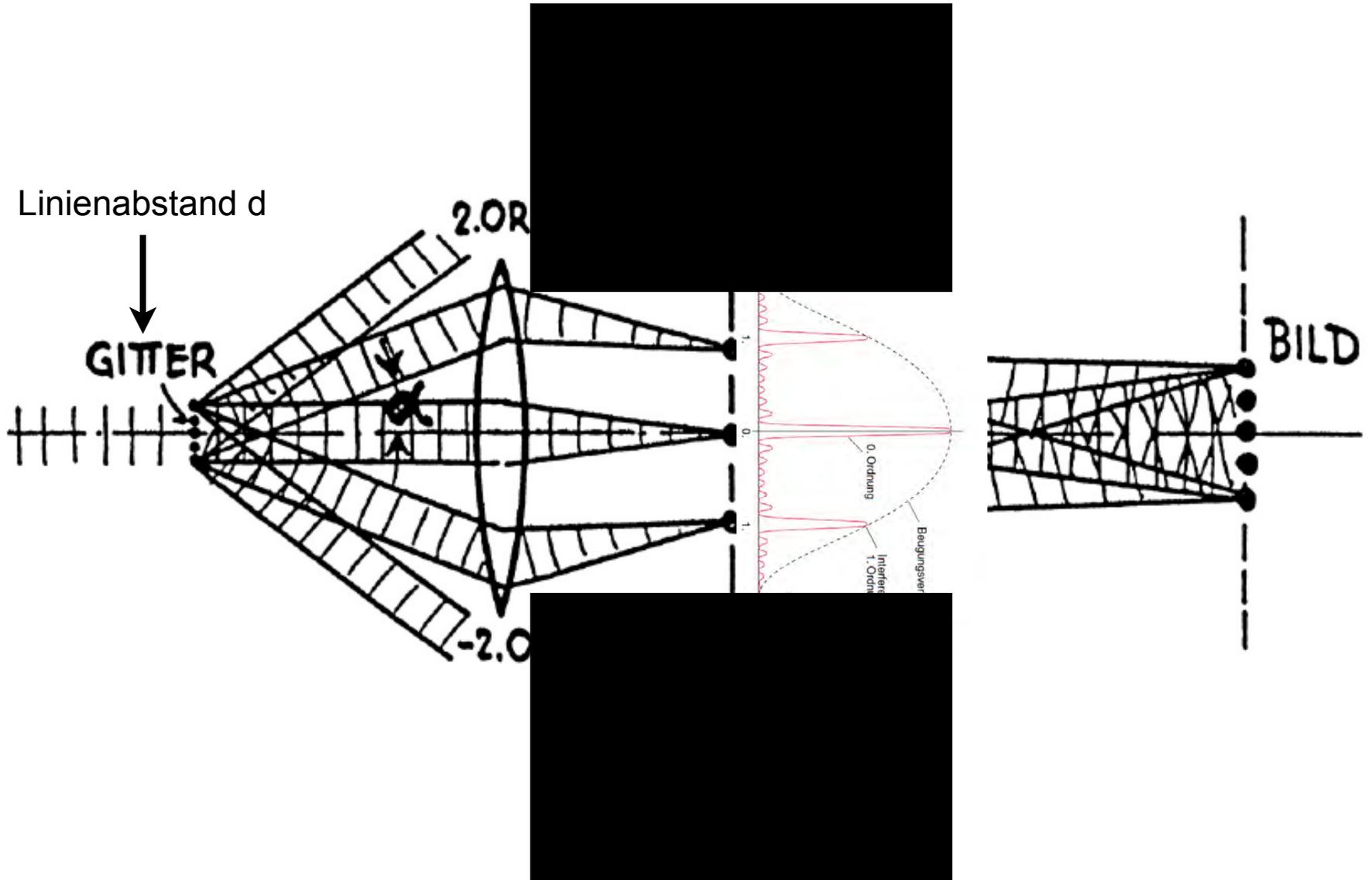
Abbé Auflösungsvermögen



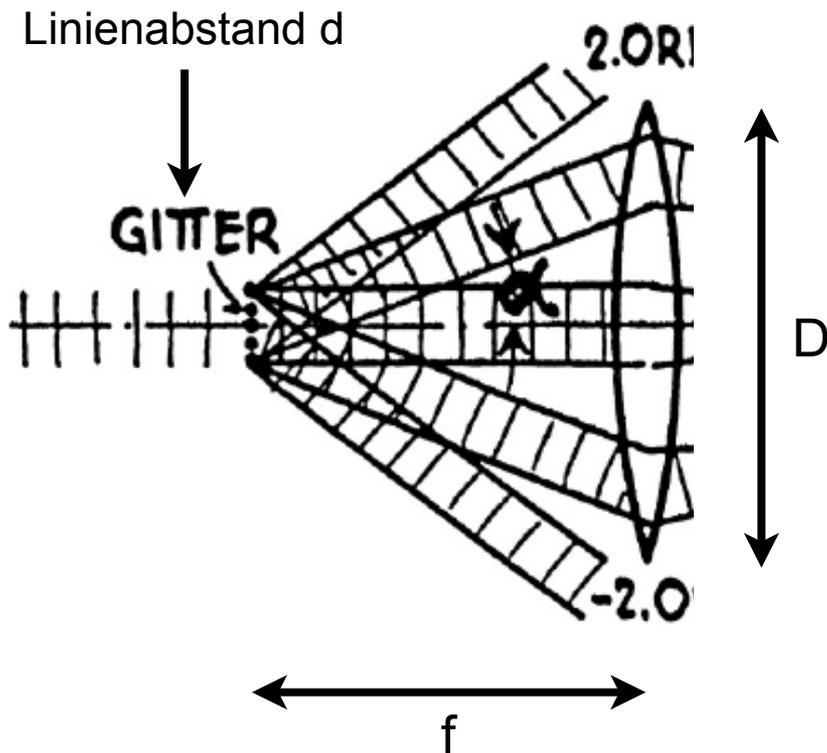
Abbé Auflösungsvermögen



Abbé Auflösungsvermögen



Abbé Auflösungsvermögen



Sammelwinkel Objektiv:

$$\sin(\alpha_{\text{obj}}) = D/2f$$

Beugung am Gitter, 1. Ordnung:

$$\sin(\alpha_{1.\text{Ord.}}) = \lambda/d$$

$$\text{Abbé} \Rightarrow \sin(\alpha_{\text{obj}}) > \sin(\alpha_{1.\text{Ord.}})$$

$$\Rightarrow \underline{d > \lambda / \sin(\alpha_{\text{obj}}) = \lambda_0 / \text{NA}}$$

Def.: $\text{NA} = n \cdot \sin(\alpha_{\text{obj}})$, "Numerische Apertur"

P.S.: Identisch mit Rayleigh Kriterium, bis auf Faktor 1.22

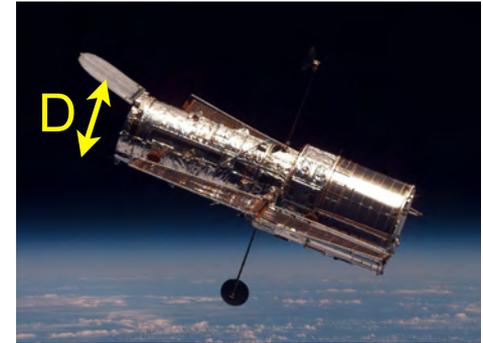
Optische Auflösung - Beispiele (Rayleigh)

- Hubble-Teleskop

- $D=2.4 \text{ m}$, $\lambda=500 \text{ nm}$

$\Rightarrow \alpha_{\min}=52.5 \cdot 10^7 \text{ rad}=0.053''$.

Entspricht **94 m auf Mond** (Dist. $3.8 \cdot 10^5 \text{ m}$)

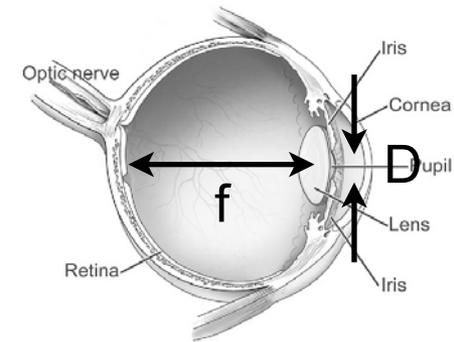


- Menschliches Auge

- $D=2 \text{ mm}$, $f=24 \text{ mm}$ $\lambda=500 \text{ nm}$

$\Rightarrow d_{\min}=f \cdot 2 \cdot 1.22 \lambda / D \sim \mathbf{10 \mu m}$ auf Netzhaut.

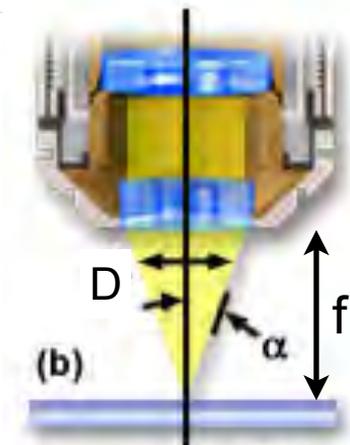
Entspricht Distanz zwischen Rezeptoren



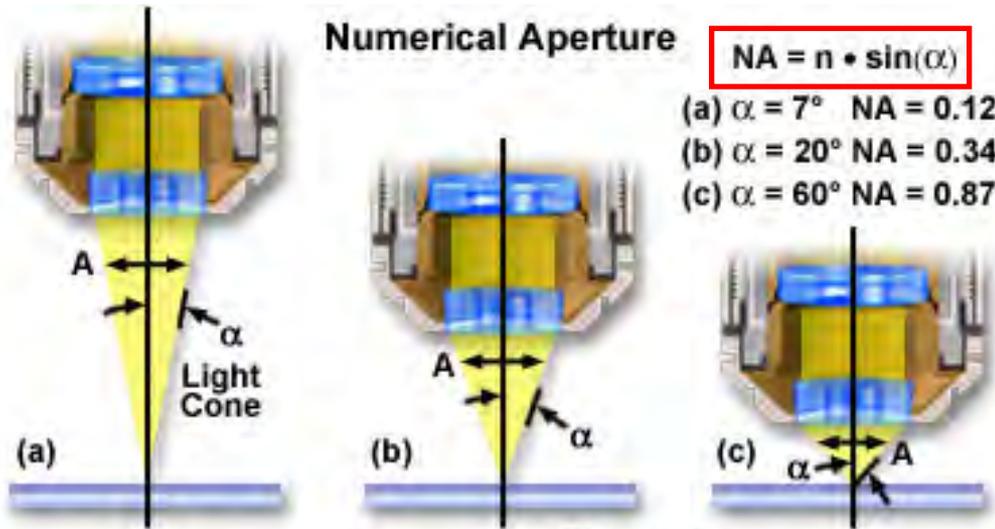
- Mikroskop

- $x_{\min}=1.22 \lambda f / D = 1.22 \lambda_0 / n / (2 \cdot \sin(\alpha)) = \mathbf{0.61 \lambda_0 / NA}$

- typ.: $n=1.5$, $\sin(\alpha)=0.8$ d.h. $NA=1.2 \Rightarrow \mathbf{x_{\min} \sim 0.5 \lambda}$



Numerische Apertur, NA



Numerical Aperture

$$NA = n \cdot \sin(\alpha)$$

(a) $\alpha = 7^\circ$ NA = 0.12

(b) $\alpha = 20^\circ$ NA = 0.34

(c) $\alpha = 60^\circ$ NA = 0.87

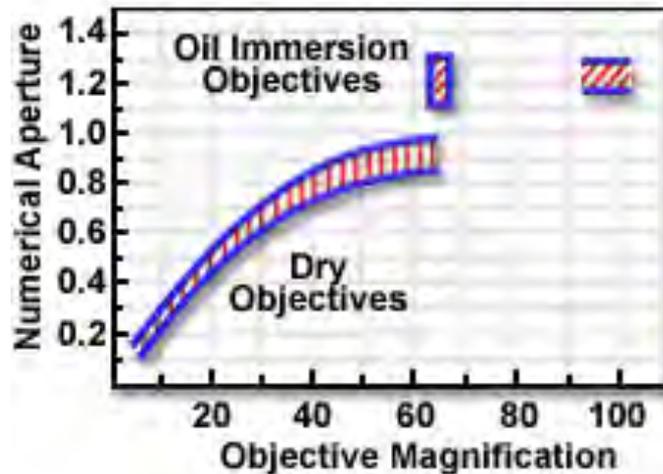
Figure 1

microscopy

NA: dimensionless nb

characterizes the luminosity of the objective

(= the range of angles over which the objective can accept (or emit) light)



photography: f/#-number or N

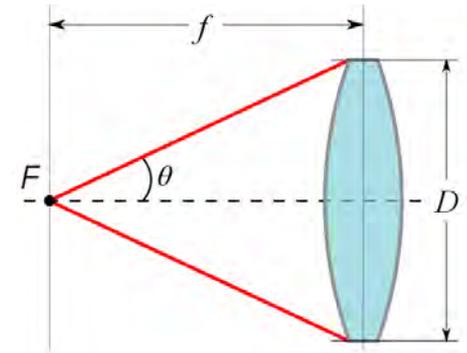
$$N = f/D$$

$$NA = n \cdot \sin(\theta)$$

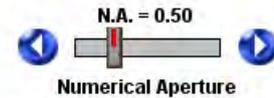
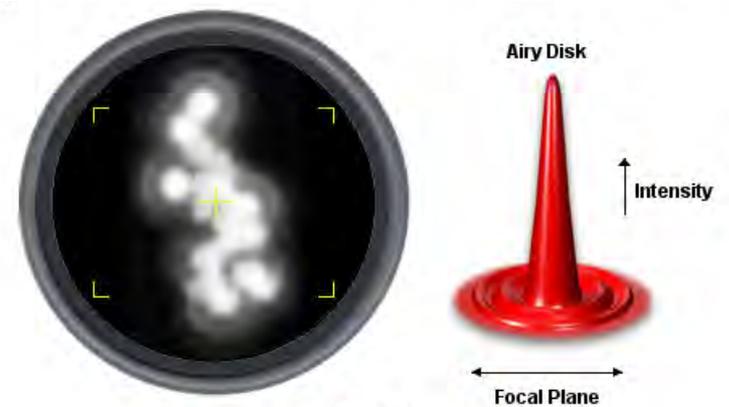
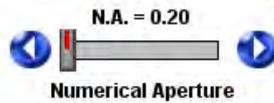
$$= n \cdot \sin [\text{atan}(D/2f)]$$

$$\approx n \cdot D/2f, (f \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow NA \approx 1 / (2 \cdot N) \quad (\text{in air})$$

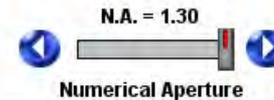
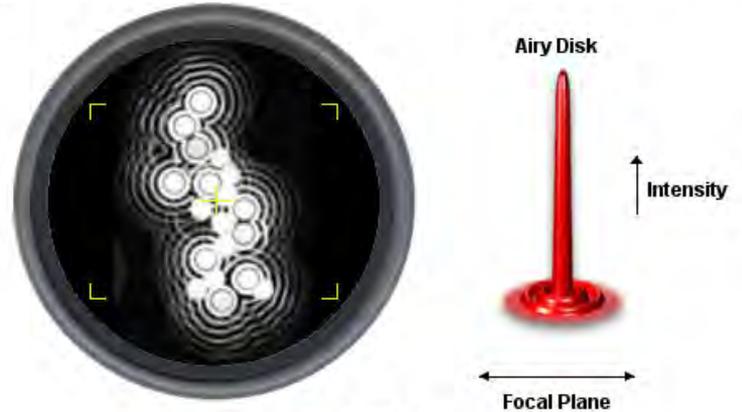
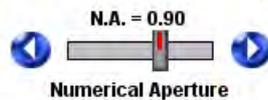
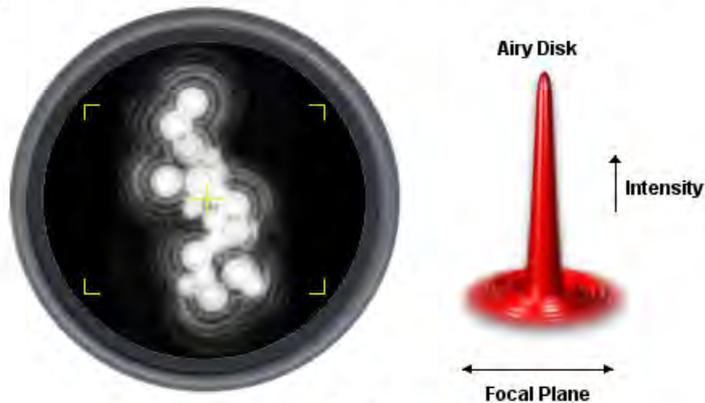


NA und Auflösungsgrenze



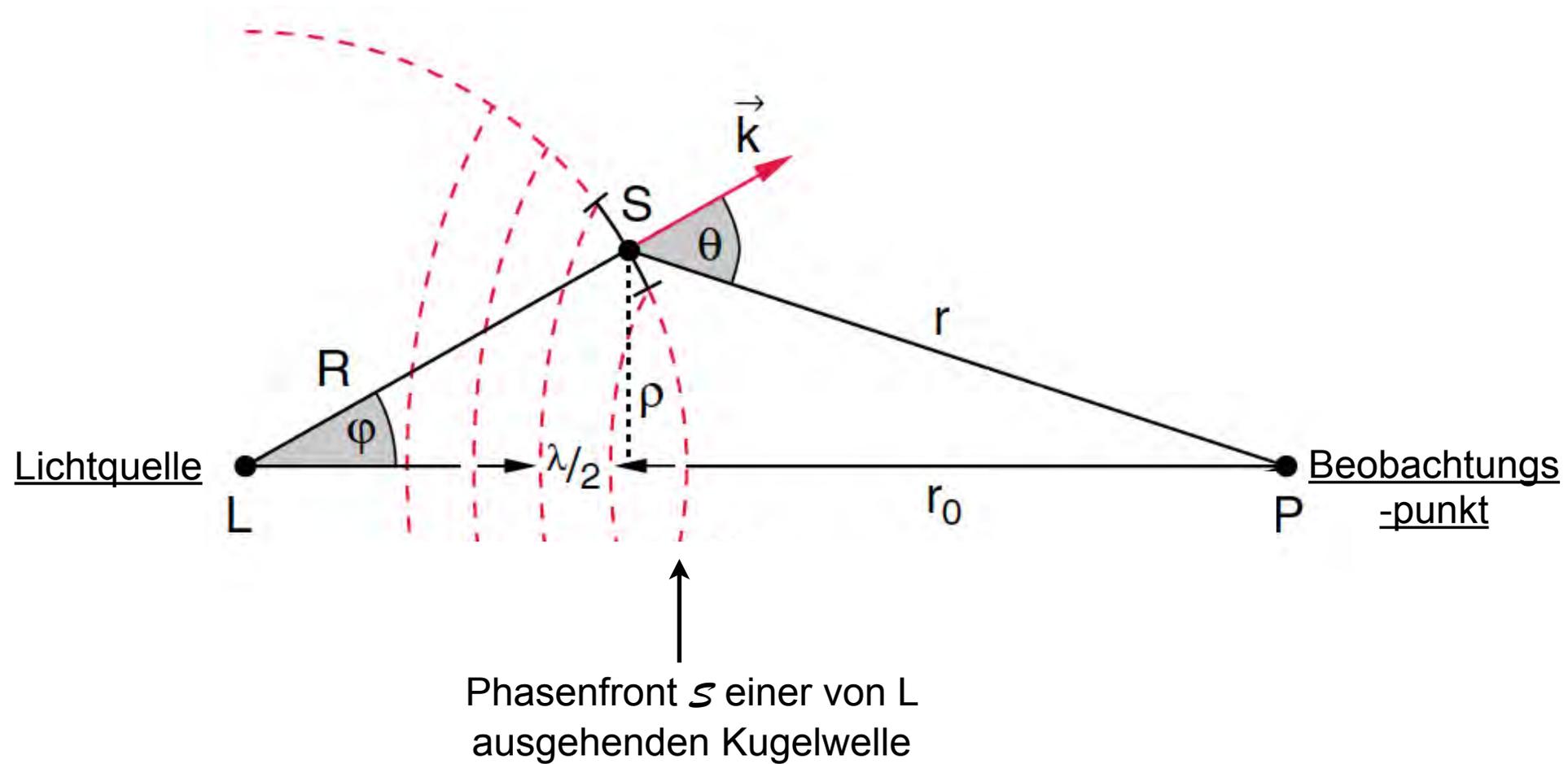
$$r(\text{Airy}) = 1.22 \cdot \lambda / (2 \cdot \text{NA}(\text{Obj}))$$

$$D \propto \lambda / \text{NA}$$



Fresnel Beugung

Konstruktion der Fresnelsche Zonen

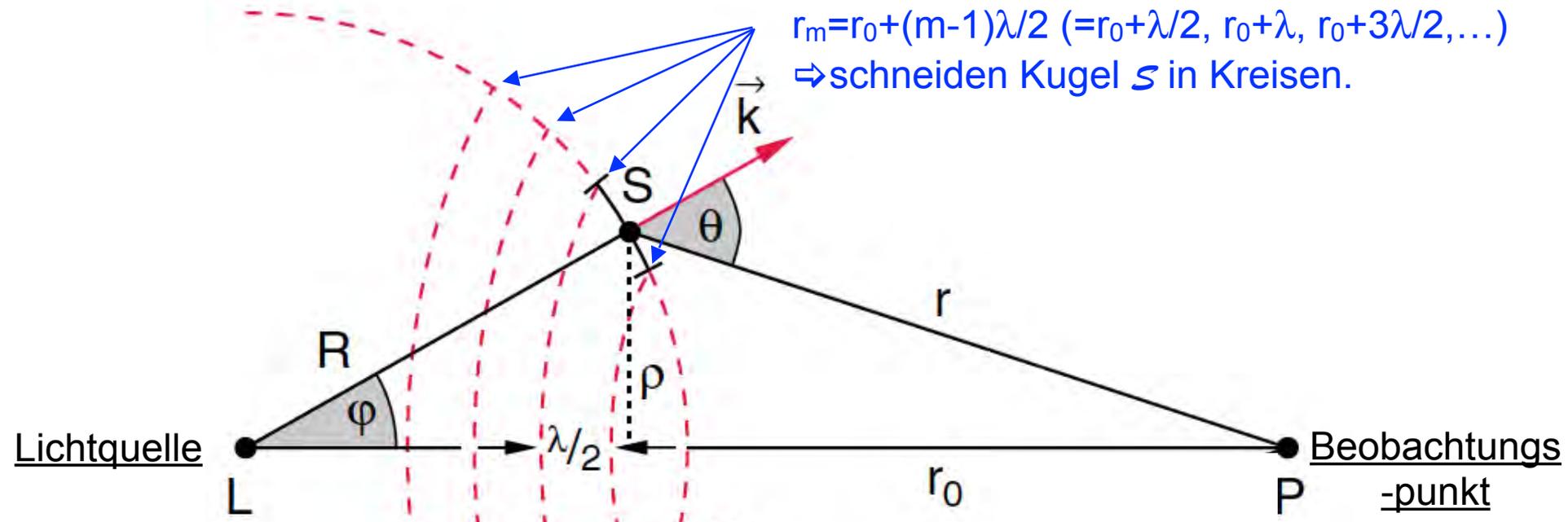


Konstruktion der Fresnelsche Zonen

Kugeln um P mit Radien

$$r_m = r_0 + (m-1)\lambda/2 \quad (=r_0 + \lambda/2, r_0 + \lambda, r_0 + 3\lambda/2, \dots)$$

⇒ schneiden Kugel S in Kreisen.

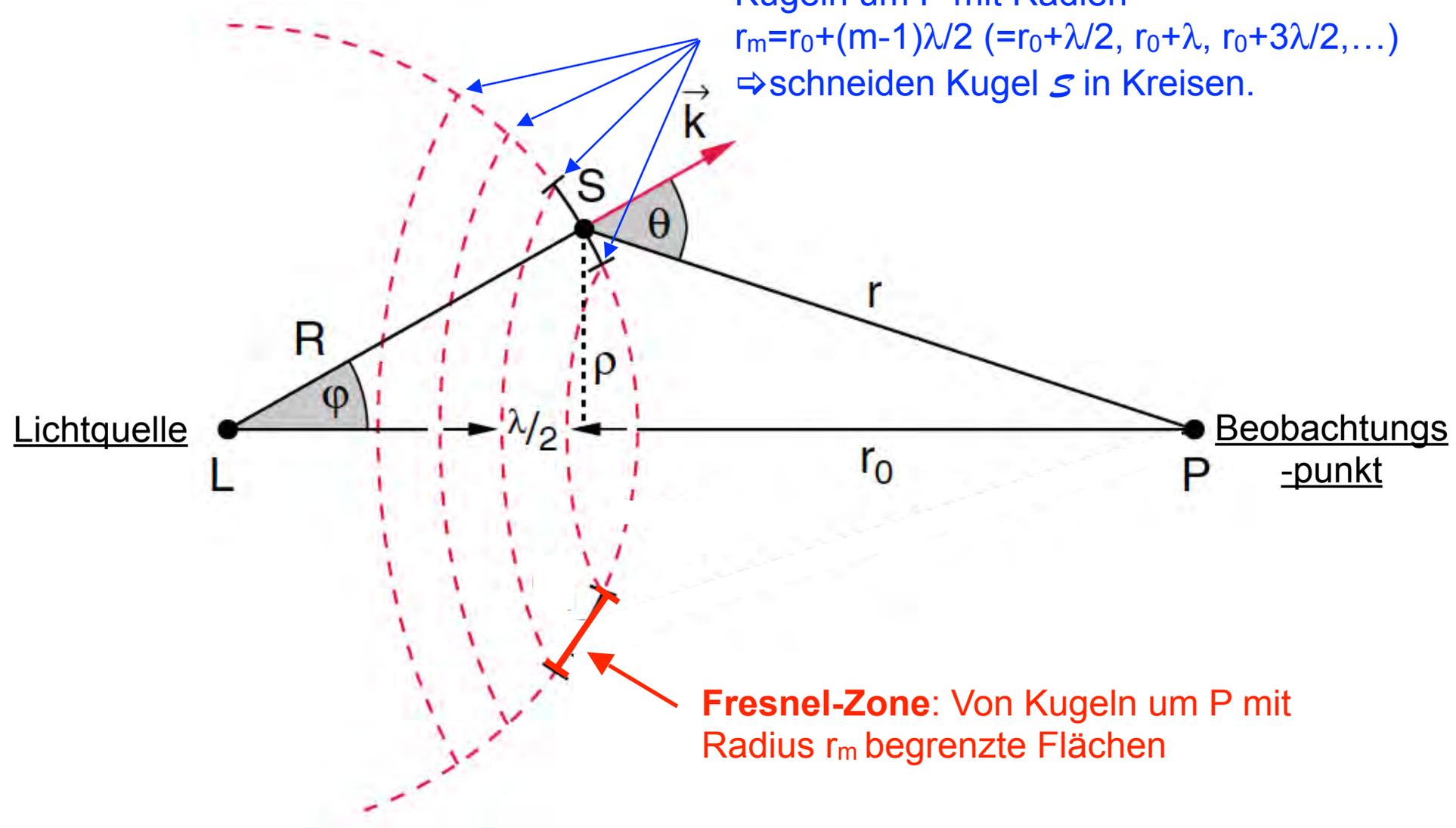


Konstruktion der Fresnelsche Zonen

Kugeln um P mit Radien

$$r_m = r_0 + (m-1)\lambda/2 \quad (=r_0 + \lambda/2, r_0 + \lambda, r_0 + 3\lambda/2, \dots)$$

⇒ schneiden Kugel \mathcal{S} in Kreisen.



Konstruktion der Fresnelsche Zonen

- Beitrag der m-ten F.Z. an Feldstärke in P:

$$dE = K \cdot \frac{E_a}{r} e^{i[-k(R+r) + \omega t]} dS$$

- Kann zeigen:

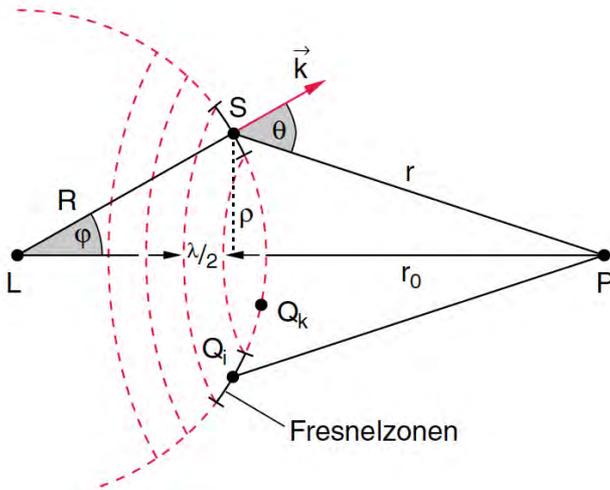
$$E_m = (-1)^{m+1} \frac{2\lambda K_m E_a R}{i(R+r_0)} e^{-i[k(R+r_0) - \omega t]}$$

- Totales Feld in P:

$$\begin{aligned} E(P) &= \sum_{m=1}^N E_m = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \dots \pm |E_N| \\ &= \frac{1}{2}|E_1| + \left(\frac{1}{2}|E_1| - |E_2| + \frac{1}{2}|E_3| \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}|E_3| - |E_4| + \frac{1}{2}|E_5| \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{2}|E_N|. \end{aligned}$$

$$E(P) \approx \frac{1}{2}(|E_1| + |E_N|)$$

- $E_N=0 \Rightarrow E(P) \approx \frac{1}{2}E_1$



Konstruktion der Fresnelsche Zonen

Wichtigste zwei Punkte:

- Benachbarte F.Z. interferieren destruktiv
- $E(P) \approx \frac{1}{2} E_1$

Konsequenzen:

- Transmission durch Scheibe mit Loch von Radius ρ_0 führt zu **doppelt so hoher Feldstärke** in P, verglichen mit Situation ohne Scheibe
- Transmission durch Kreisblende $\Rightarrow E(P)$ unverändert
- Weglassen jeder zweiten F.Z. $\Rightarrow E$ maximal in P \Rightarrow Fresnel-Linse ($f = \rho_0$)

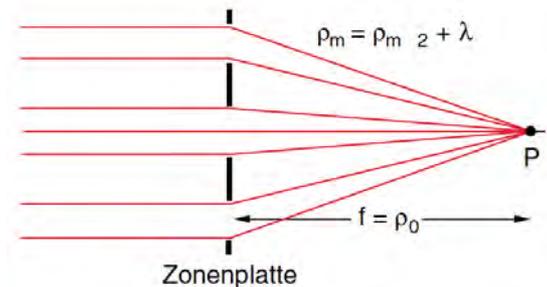
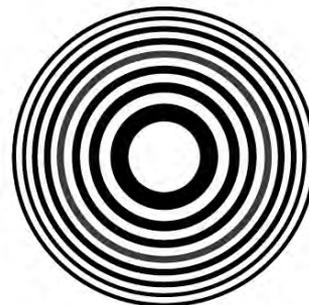
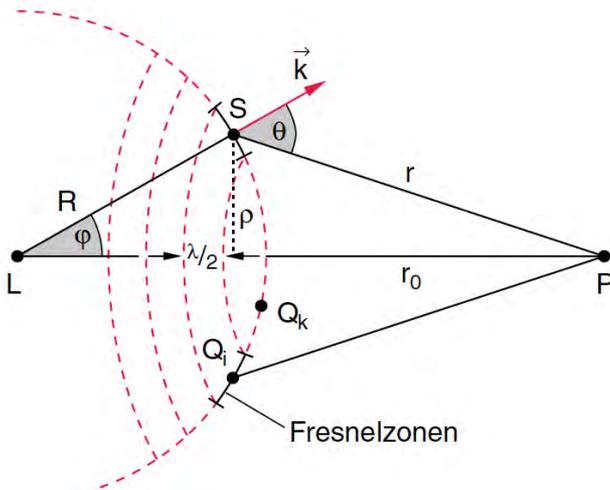
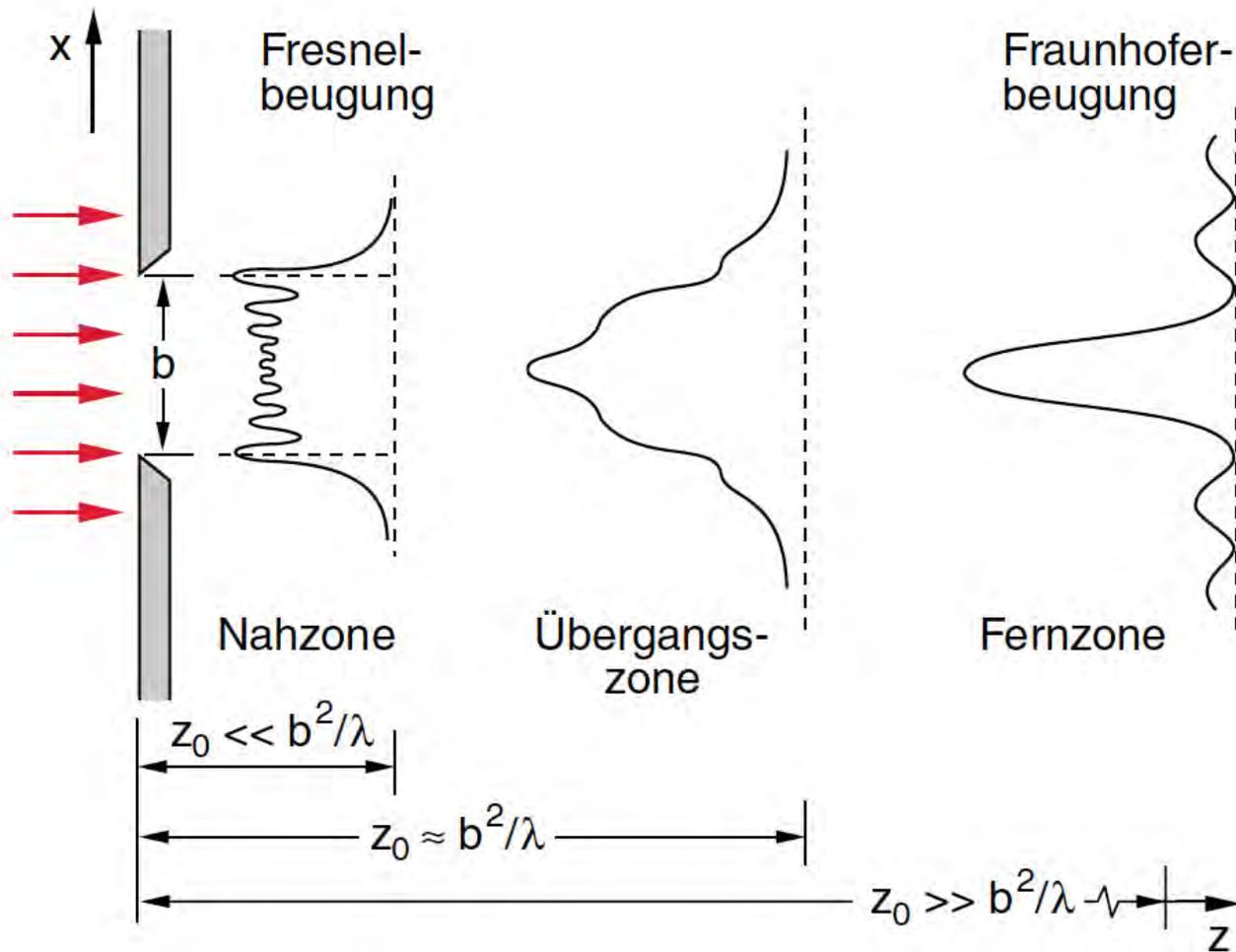
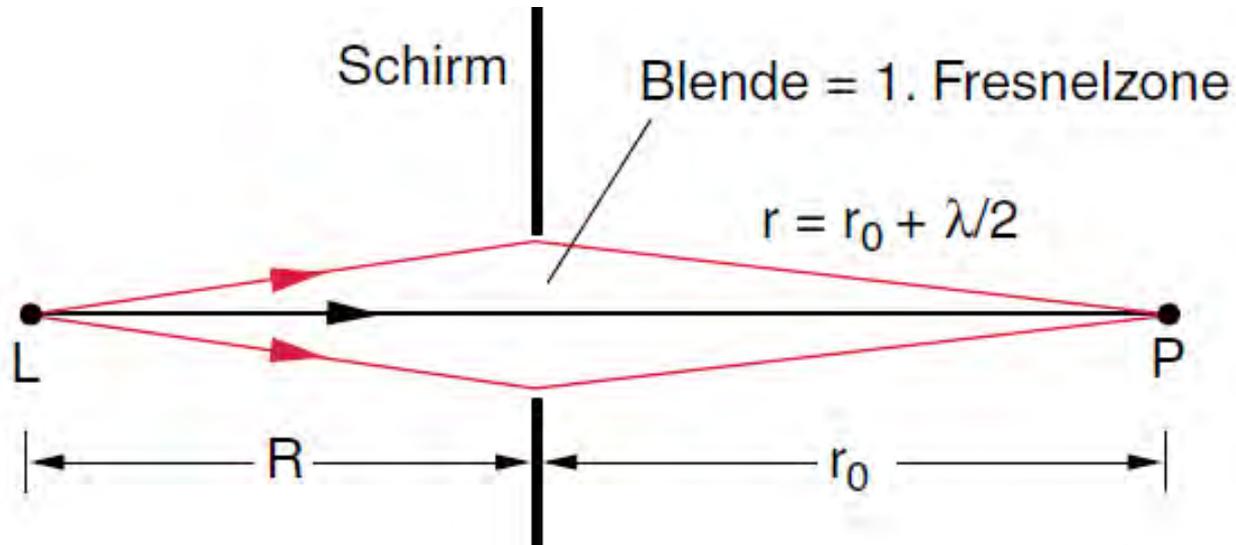


Abb. 10.52. Fresnelsche Zonenplatte

Fresnel vs. Fraunhofer Beugung



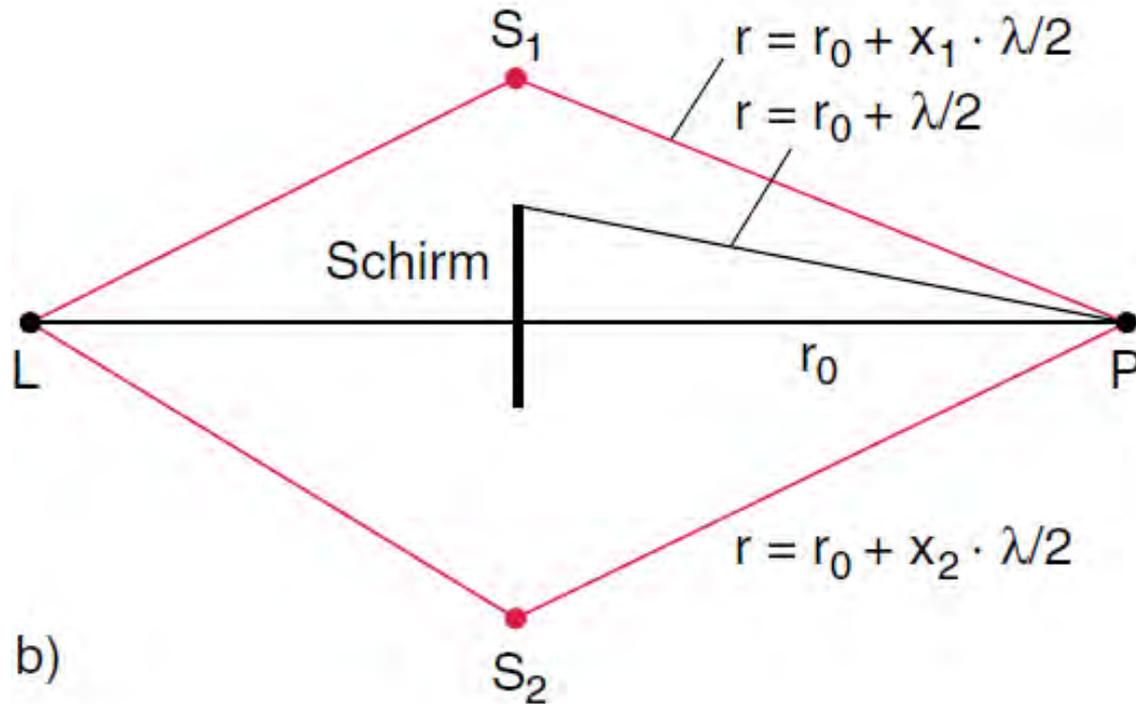
Fresnelsche Zonen



Ohne Schirm: $E(P) = \frac{1}{2} |E_1|$

Mit Schirm + Blende:

Fresnelsche Zonen



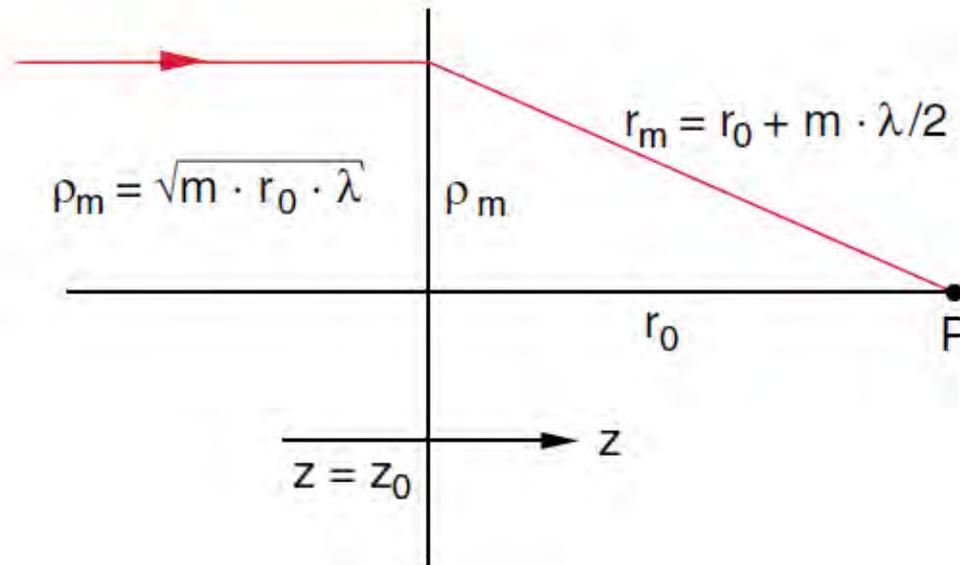
b)

Ohne Schirm:

$$\mathbf{E(P)} = \frac{1}{2} |\mathbf{E1}|$$

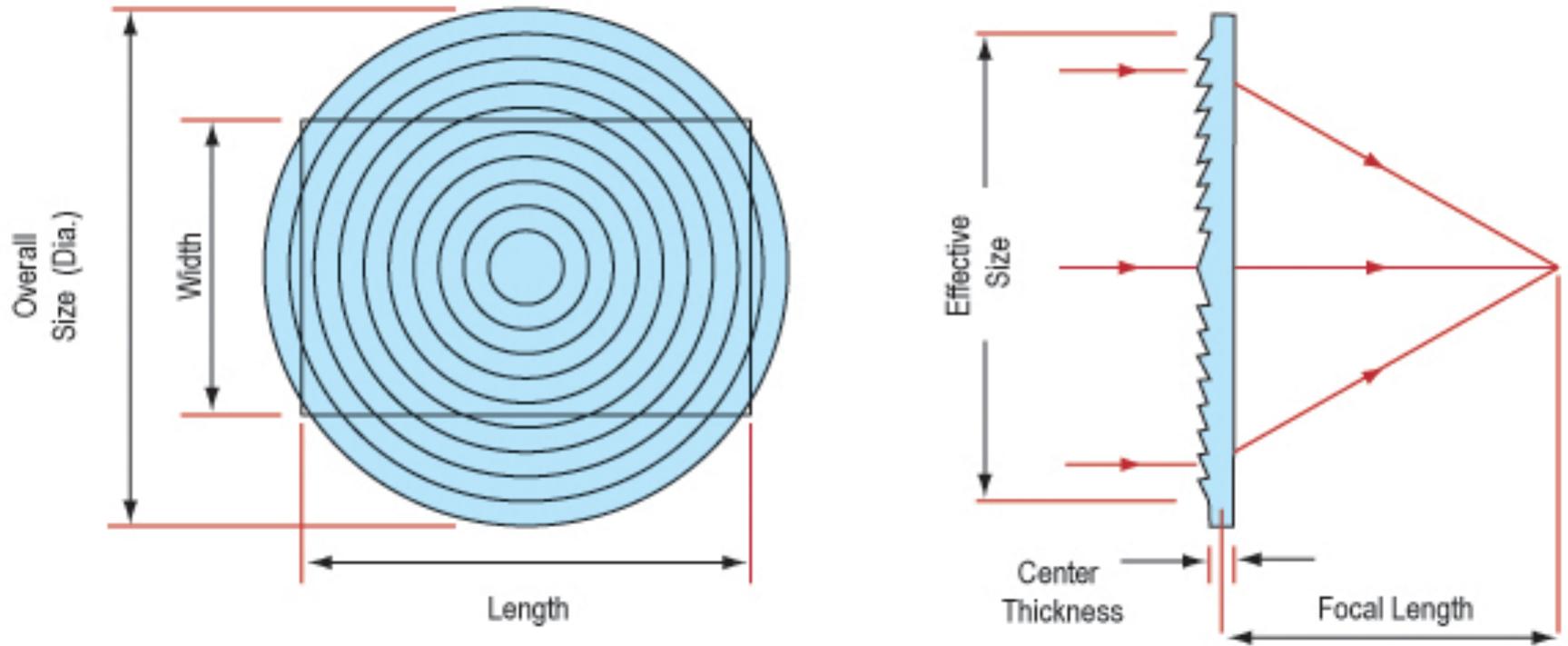
Mit Schirm:

Fresnelsche Zonen: Radius



Fresnelsche Linsen

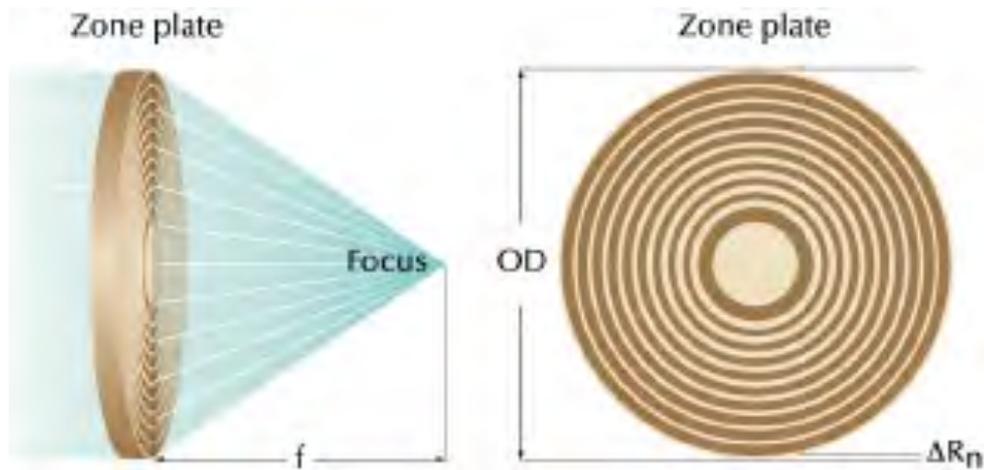
Aspherically Contoured Fresnel Lenses



Edmund Scientific

Anwendung für X-Ray Mikroskopie

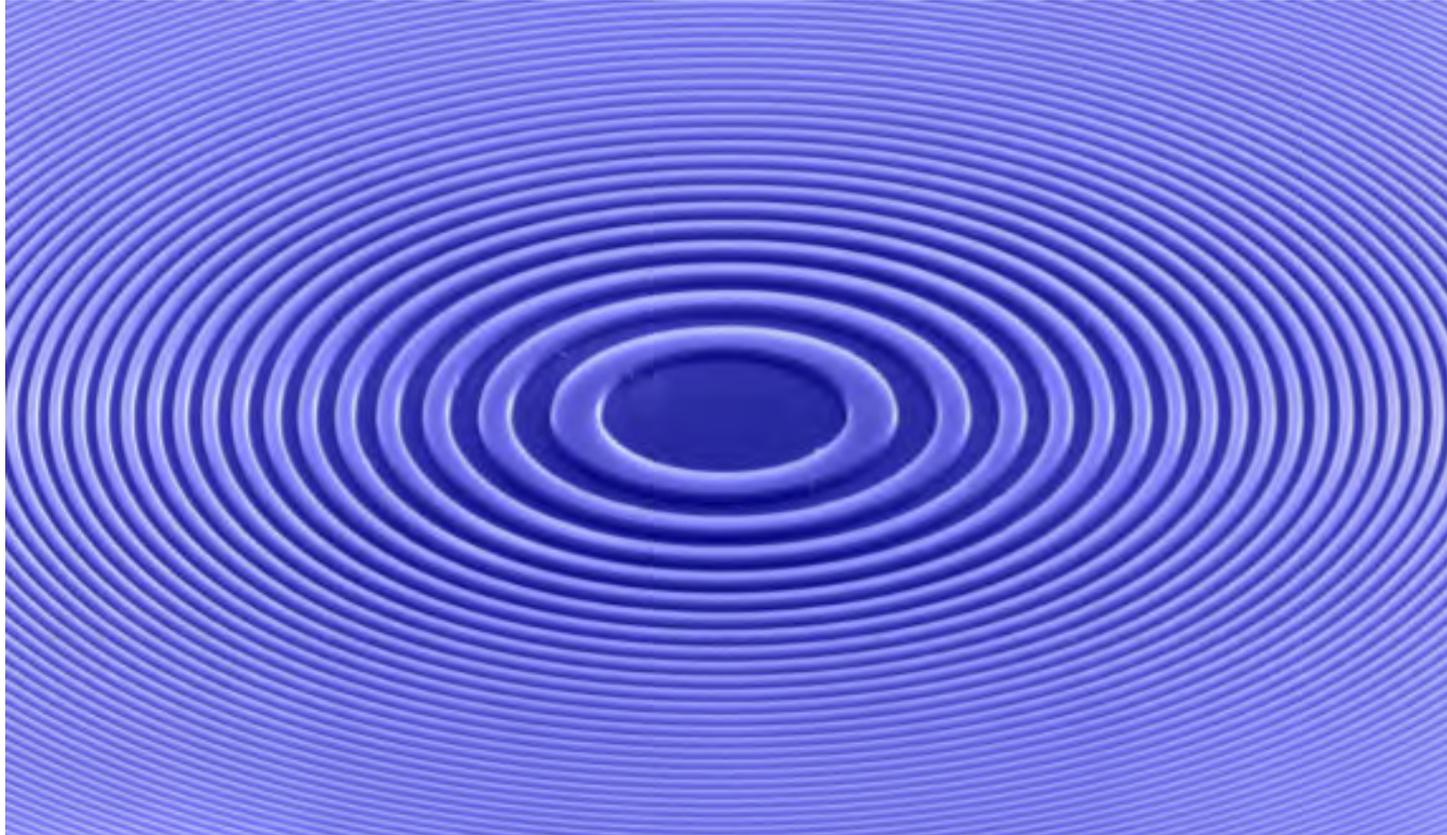
für x-rays, $n=1$, keine einfache optische Elemente
⇒ Fresnel Zonenplatten



gold zones of a Fresnel zone plate objective



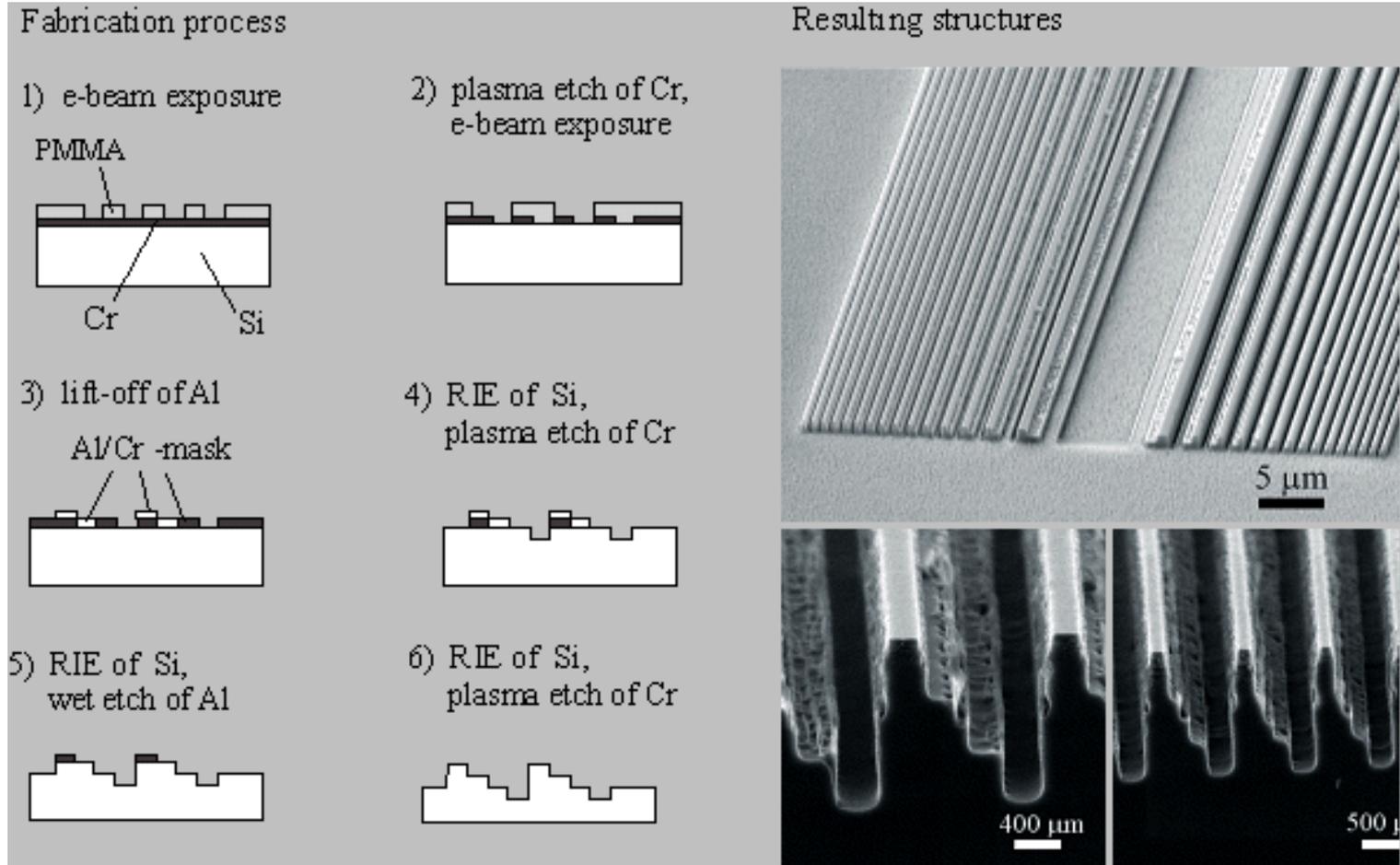
Anwendung für X-Ray Mikroskopie



Fresnel zone plate made of a single crystal silicon membrane substrate .
Line widths down to 30 nm have been achieved.

C. David et al., PSI

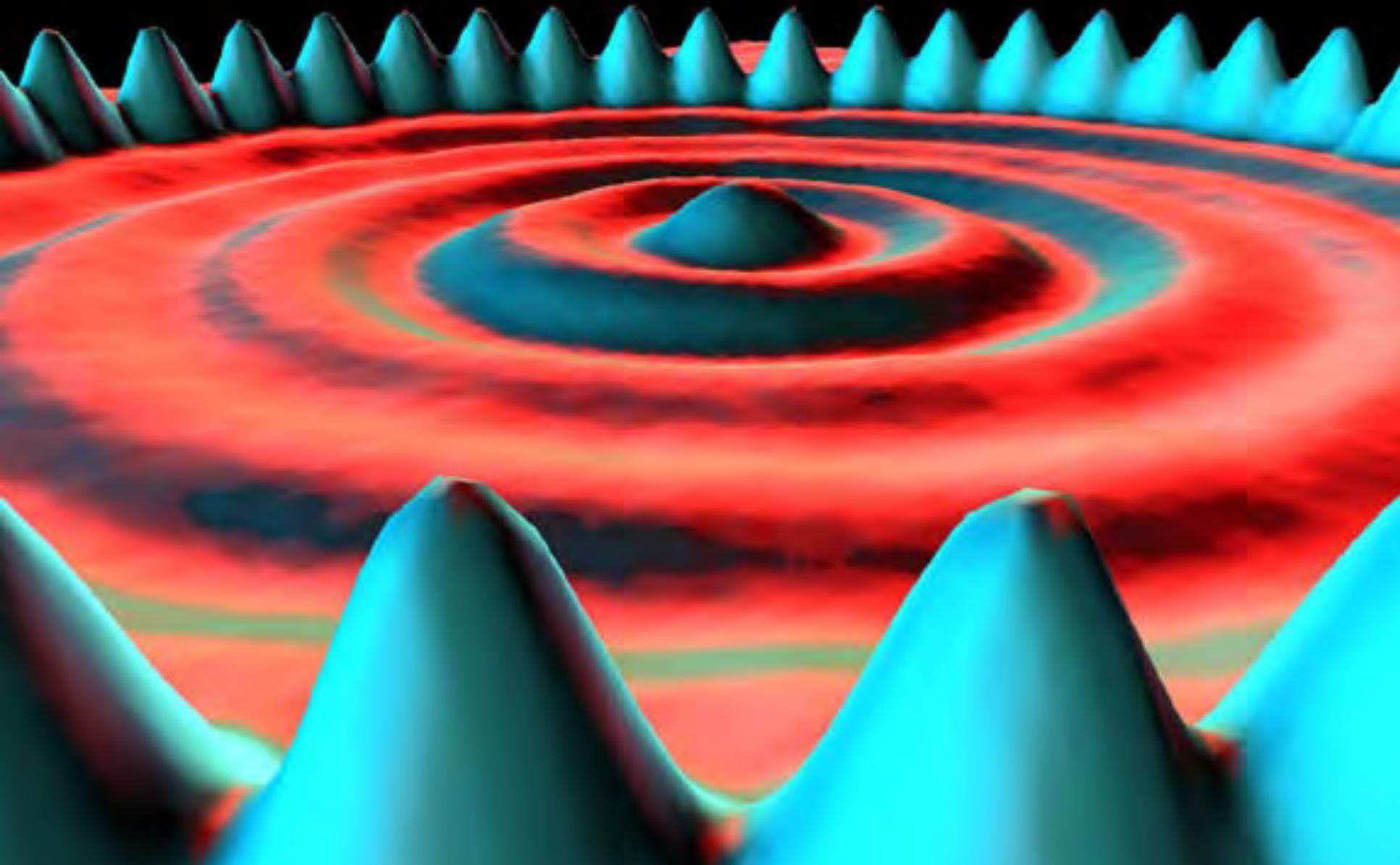
Anwendung für X-Ray Mikroskopie



In order to increase the efficiency, the design of conventional, binary zone plates can be changed using a multilevel profile for the grating structures of the zone plate.

J. Gobrecht et al., PSI, H.-P. Herzig et al., Uni. Neuchâtel

Interferenz



Michelson Interferometer

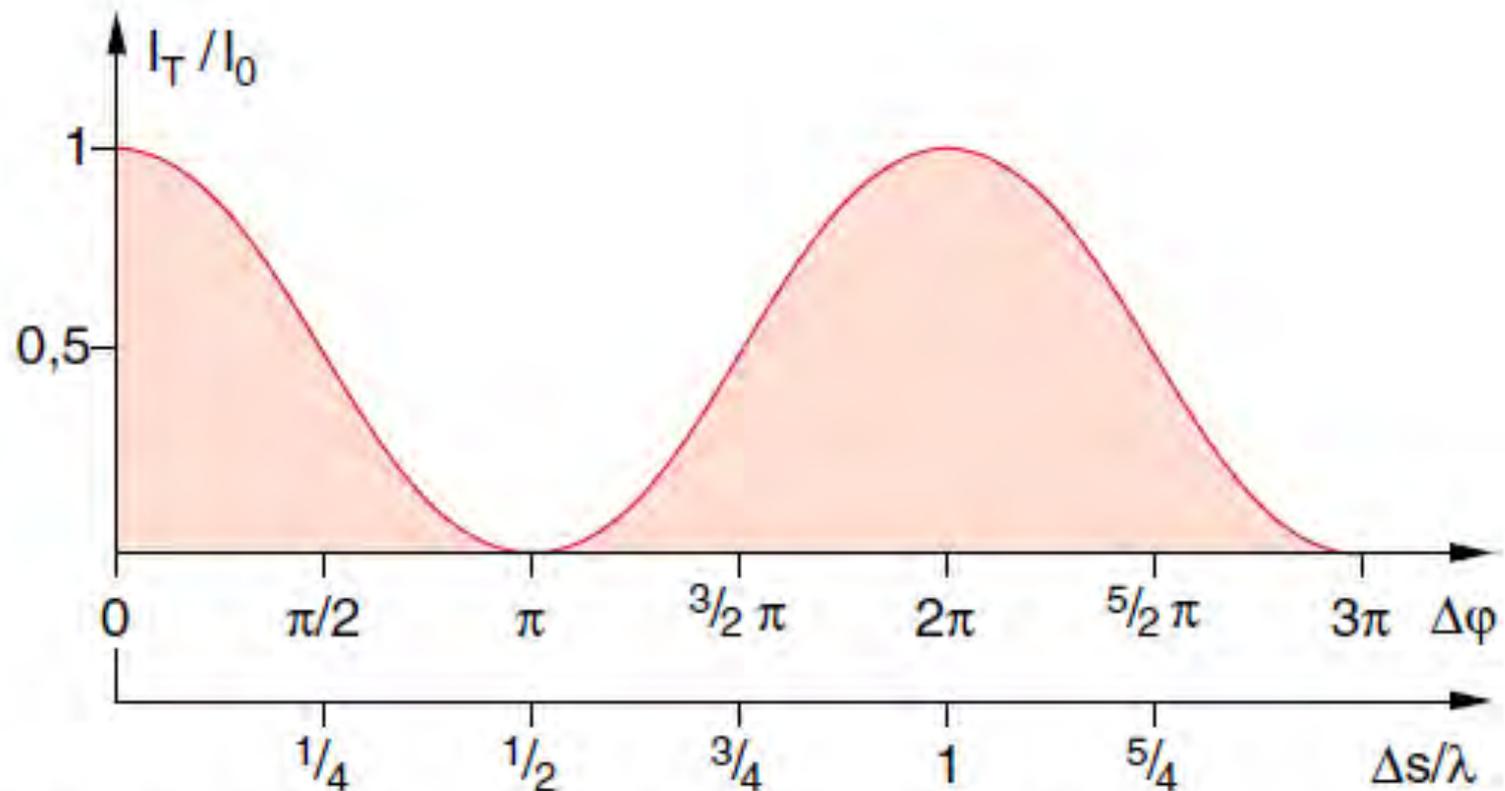
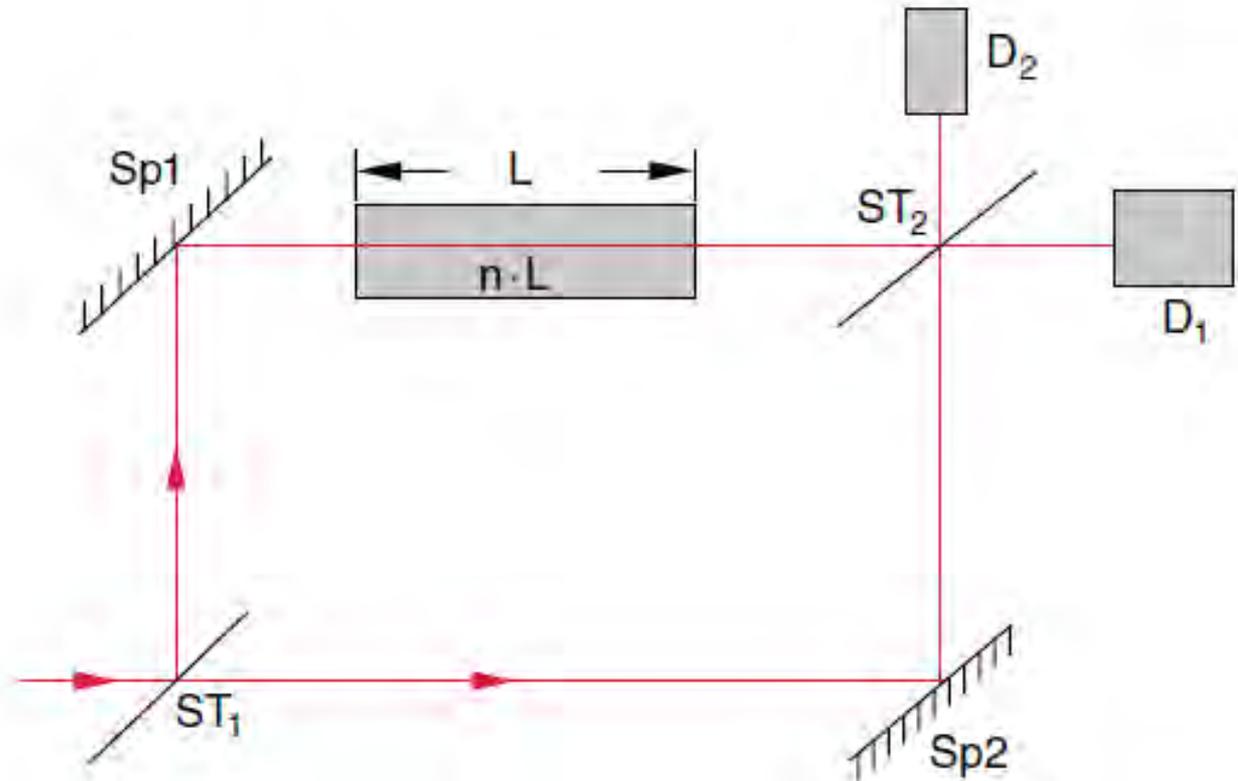


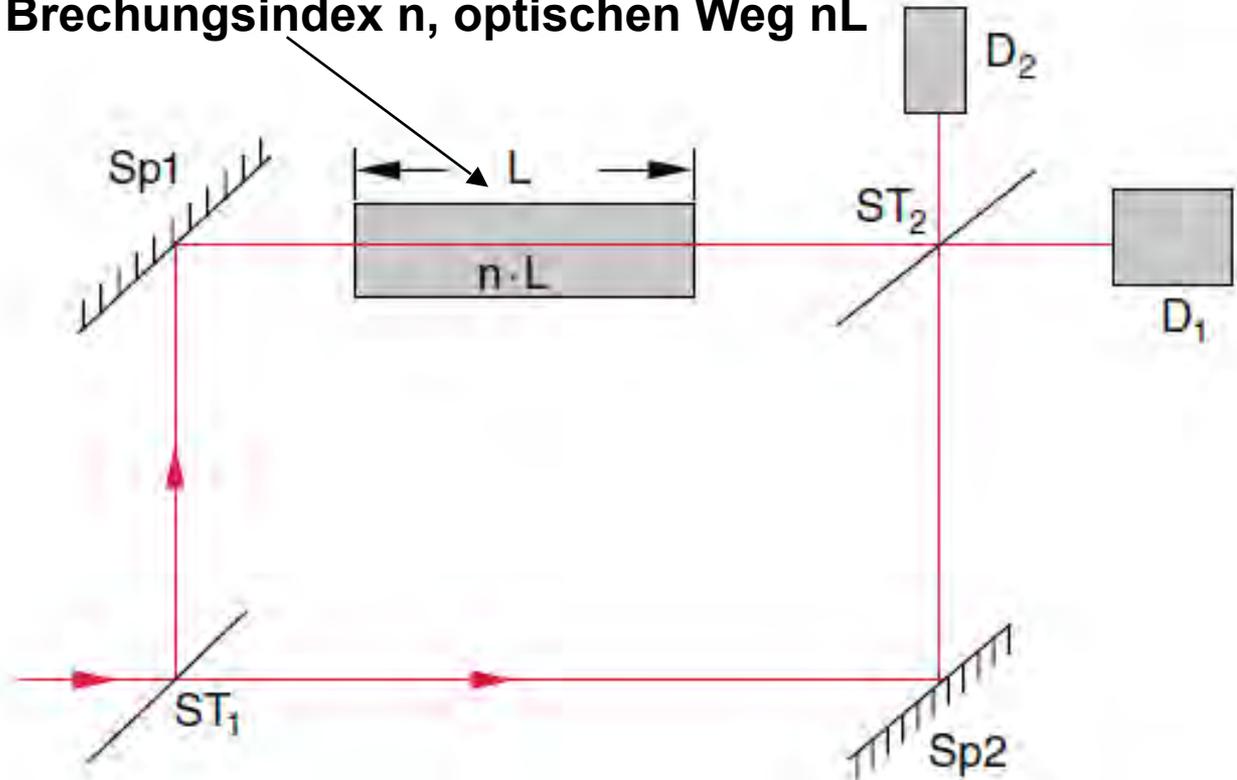
Abb. 10.11. Transmission des Michelson-Interferometers als Funktion des Wegunterschiedes $\Delta s/\lambda$ in Einheiten der Wellenlänge λ bei monochromatischer einfallender ebener Welle

Mach-Zehnder Interferometer



Mach-Zehnder Interferometer

Medium mit Brechungsindex n , optischen Weg nL



z.B: **Messung der Brechungsindex von einem Gas.** Druck variieren ($\Rightarrow \Delta n$) und Interferenz

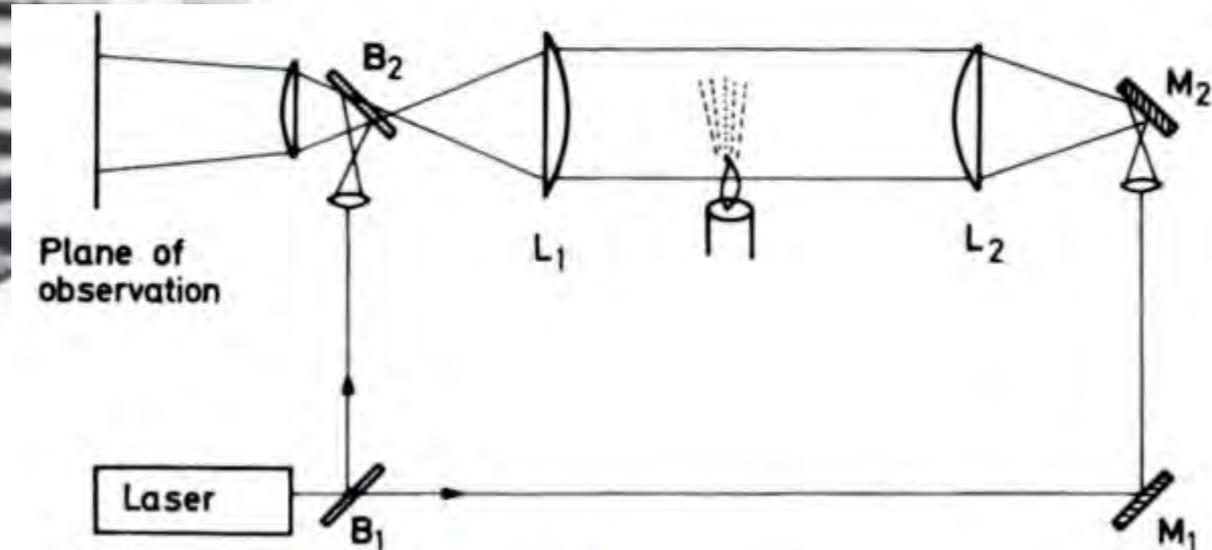
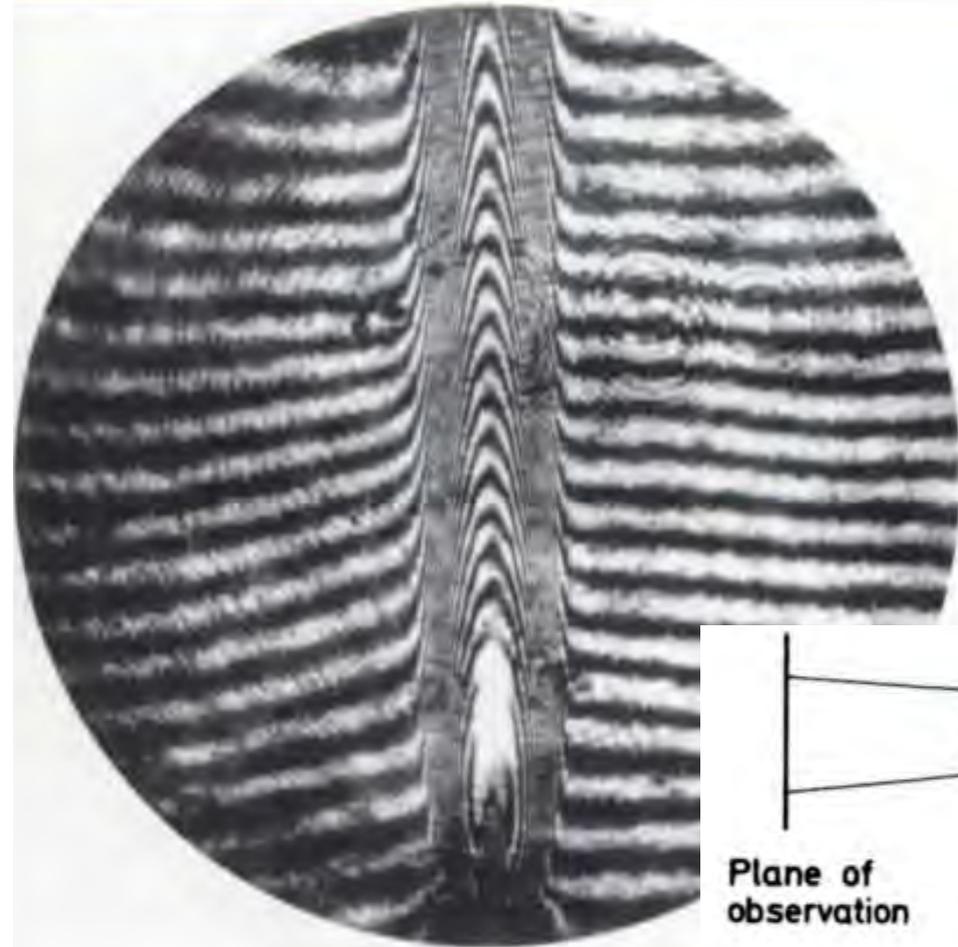
Maxima messen.

Mach-Zehnder Interferometer

Interferogram

density profile in the convection zone of a candle flame

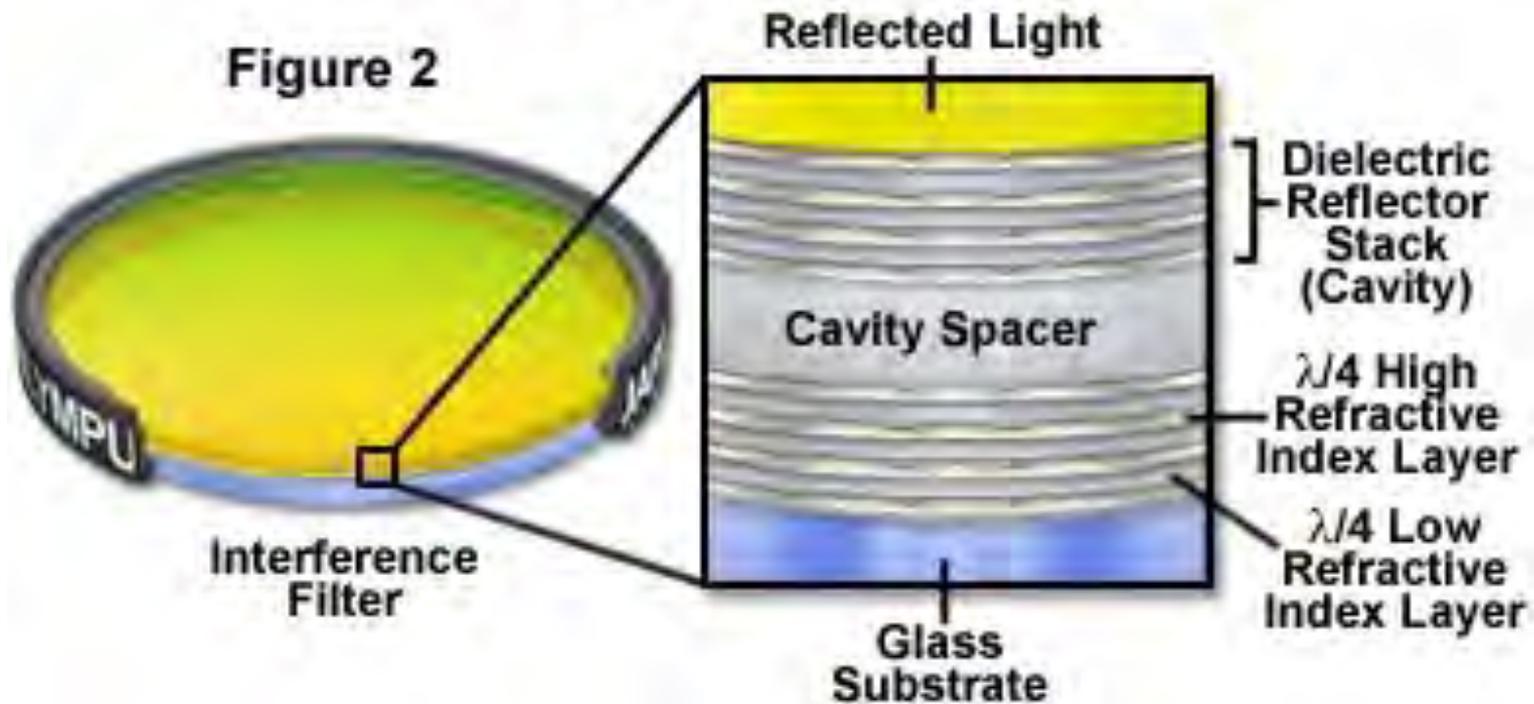
$$n=n(T)$$



Interferenzfilter

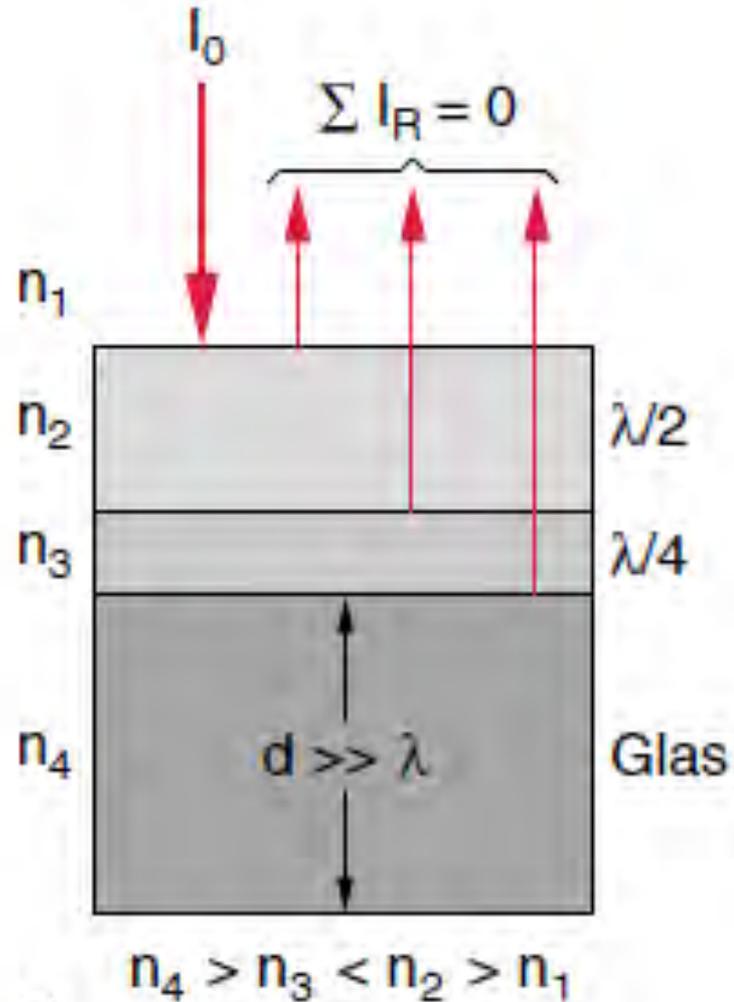
Anatomy of an Interference Filter

Figure 2



Antireflexbeschichtung

Zweifachschicht



Antireflexbeschichtung

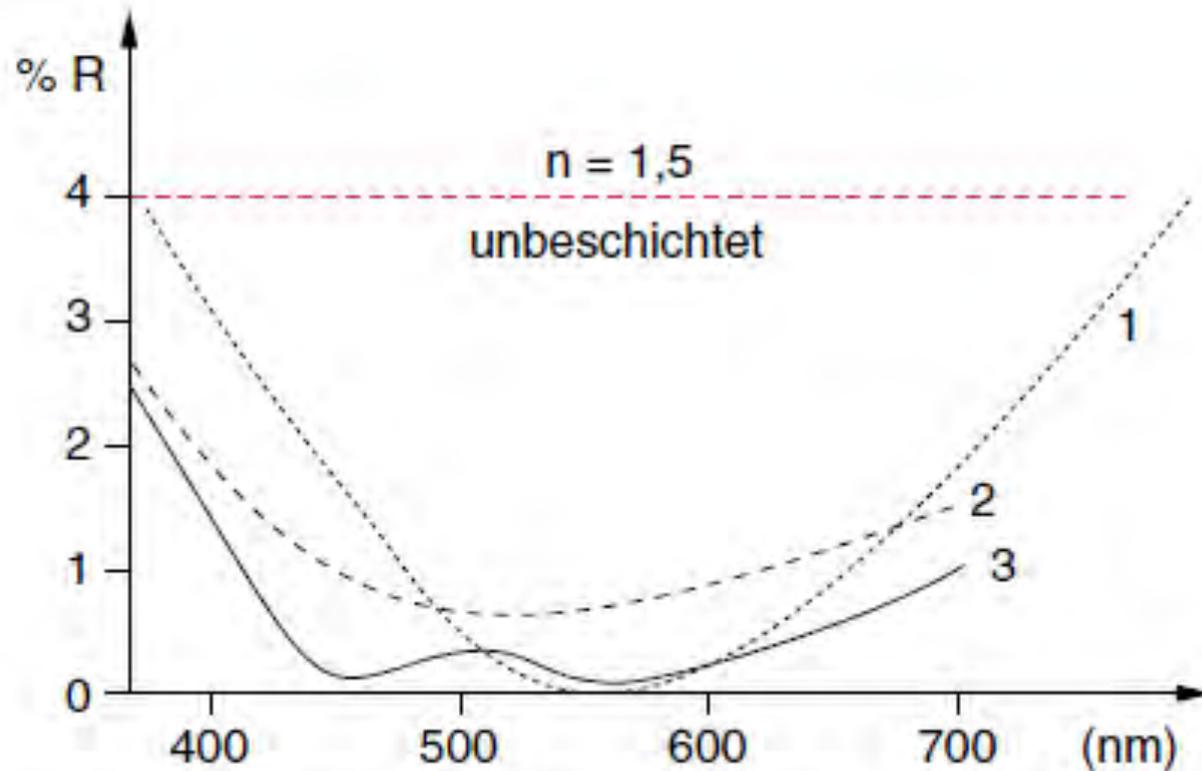


Abb. 10.31. Restreflexion bei einer einfachen Antireflexschicht (Kurve 1) im Vergleich mit unbeschichtetem Glas mit $n_2 = 1,5$. Die Kurve 2 wird durch einen Zweischichten-Breitband-Antireflexbelag erreicht, 3 durch einen Dreischichtenbelag