

## Physik III Atom- und Quantenphysik

### Kapitel 6: Elementare Lösungen der Schrödingergleichung

Prof. Dr. Christian Schönenberger  
[www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)

basierend auf der Vorlesung von  
Prof. Dr. Philipp Treutlein  
<http://atom.physik.unibas.ch>



# Postulate der QM

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



1. Der Zustand eines physikalischen Systems zur Zeit  $t$  wird durch einen normierten Vektor  $\Psi \in \mathcal{H}$  im Hilbertraum  $\mathcal{H}$  beschrieben.
2. Jeder beobachtbaren physikalischen Grösse (Observable) ist ein hermitischer (selbst-adjungierter) Operator  $\hat{A}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  zugeordnet.
3. Das Ergebnis einer Messung der Observablen ist **ein** Eigenwert des zugeordneten Operators  $\hat{A}$ . Dieser ist reell (da Messoperator hermitisch).
4. Die Wahrscheinlichkeit, im Zustand  $\Psi$  den Eigenwert  $a$  von  $\hat{A}$  zu messen ist

$$w_a = |c_a|^2 = \left| \langle \Phi_a | \Psi \rangle \right|^2$$

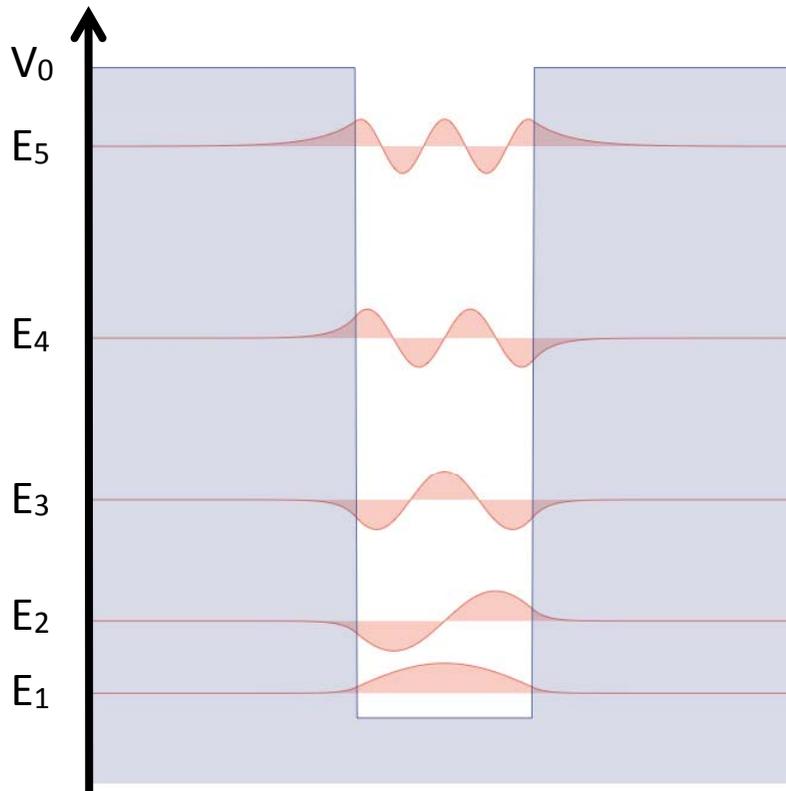
wobei  $\Phi_a$  der zu  $a$  gehörende Eigenzustand ist,  $\hat{A} \Phi_a = a \Phi_a$ .

5. Erhält man bei der Messung das Resultat  $a$ , so befindet sich das System *nach der Messung* im zu  $a$  gehörenden Eigenzustand,  $\Psi = \Phi_a$ .
6. Zwischen den Messungen wird die Zeitentwicklung des Zustands  $\Psi$  durch die Schrödingergleichung bestimmt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi, \quad \hat{H} \equiv \text{Hamiltonoperator}$$

# Endlich tiefer Potentialtopf

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



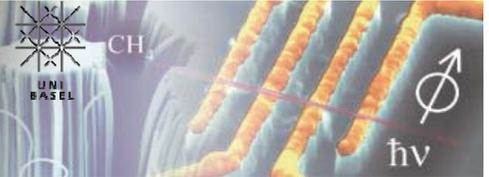
- oszillatorische Wellenfkt. im klassisch erlaubten Bereich  $\sim \sin(kx)$  bzw.  $\sim \cos(kx)$
- exponentiell gedämpfte Wellenfkt. im klassisch verbotenen Bereich  $\sim \exp(-k'x)$

- Zahl der gebundenen Zustände hängt von  $V_0$  ab
- immer mindestens ein symmetrischer gebundener Zustand
- für kleines  $V_0$  kein antisymmetrischer gebundener Zustand
- Wellenfunktion dringt in klassisch verbotenen Bereich ein (dort wo  $E < V(x)$ )

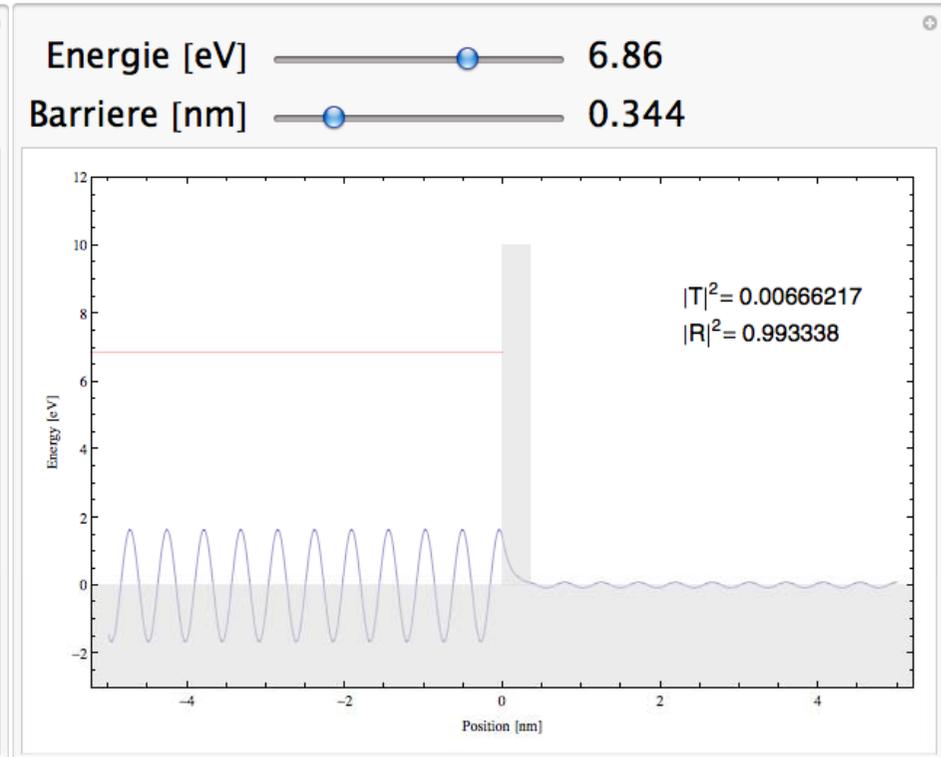
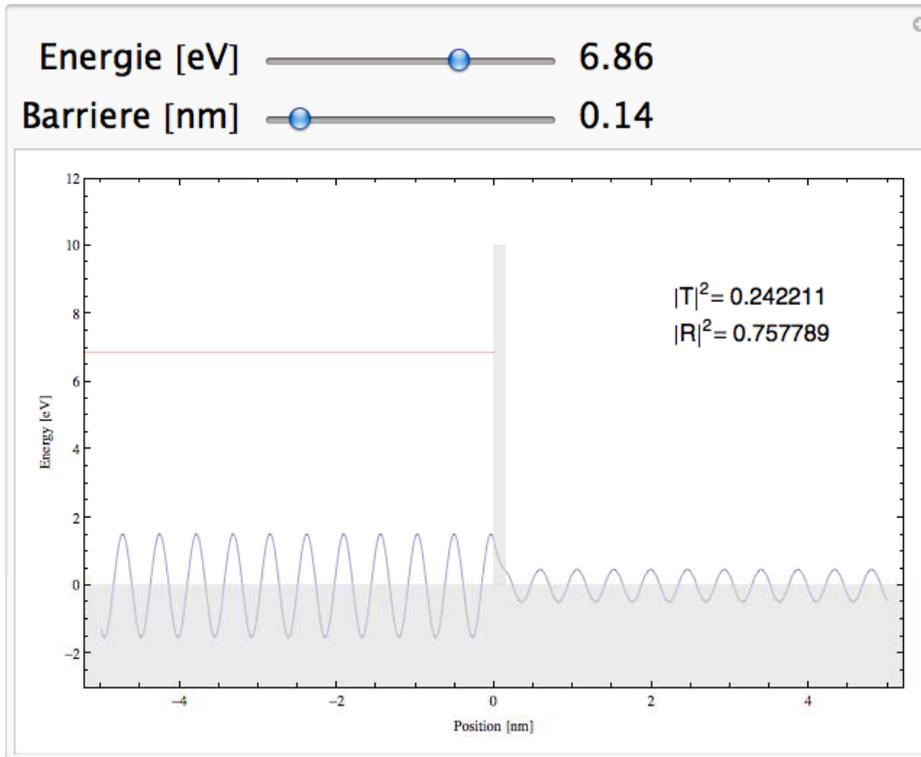
$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

# Potentialbarriere / Tunnelbarriere



Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)

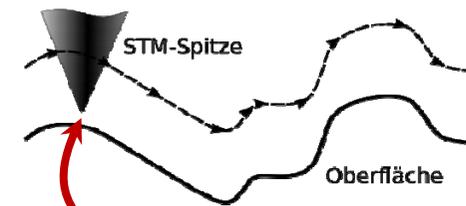
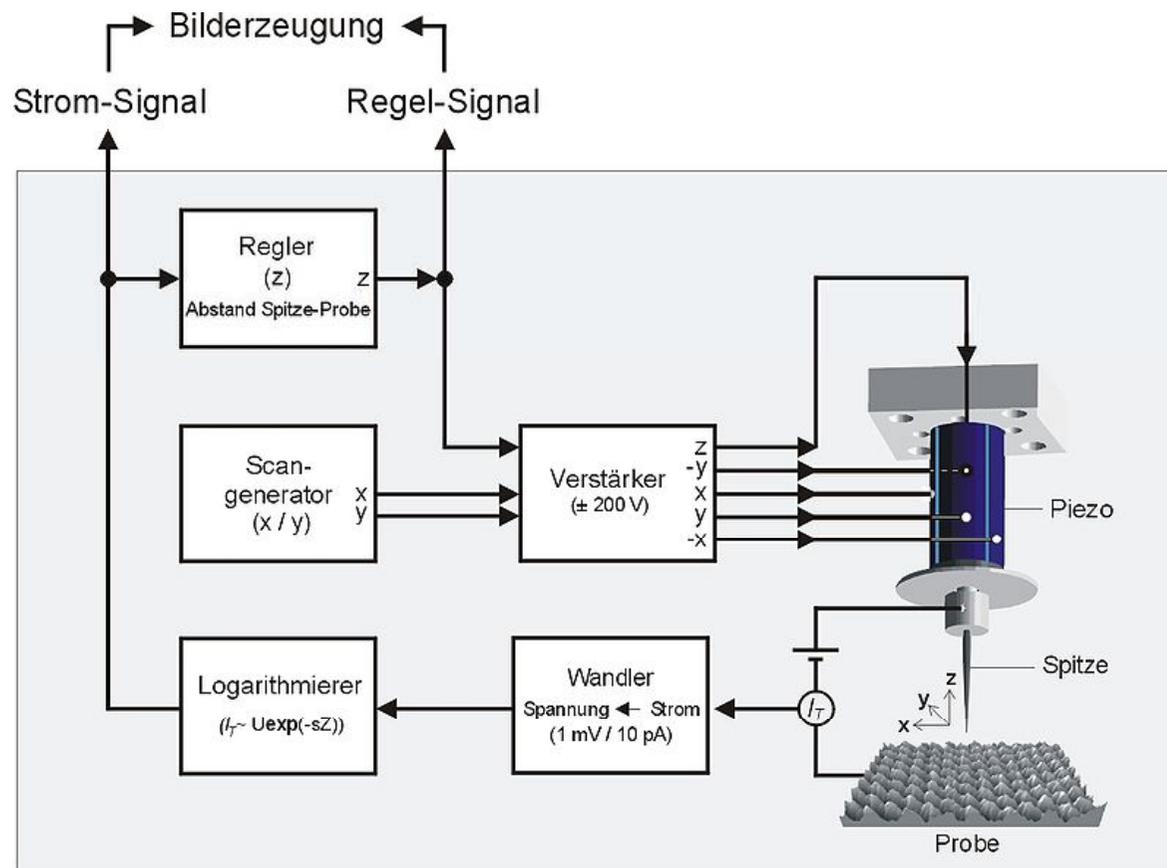


# Rastertunnelmikroskop

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)

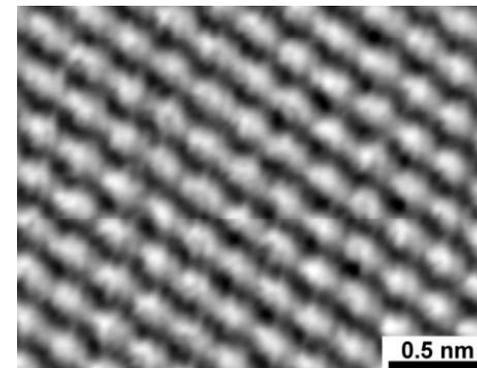


## Scanning Tunneling Microscope (STM)



**Tunnelstrom**

( $e^-$  tunneln durch Vakuum zwischen Spitze und Oberfläche)



Einzelne C-Atome auf Graphitoberfläche

# Erstes Rastertunnelmikroskop

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)

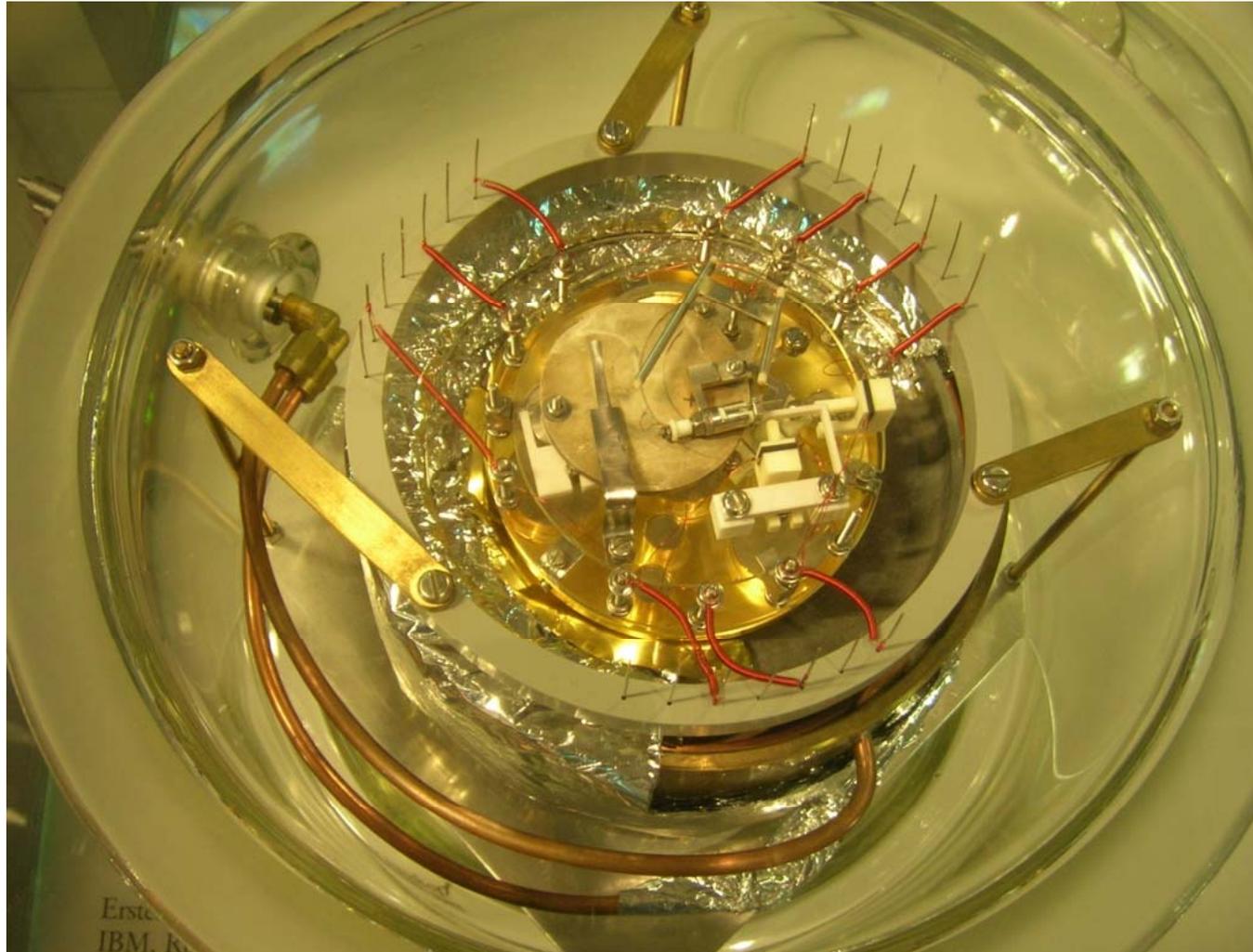


CH

UNI  
BASEL



$\hbar v$

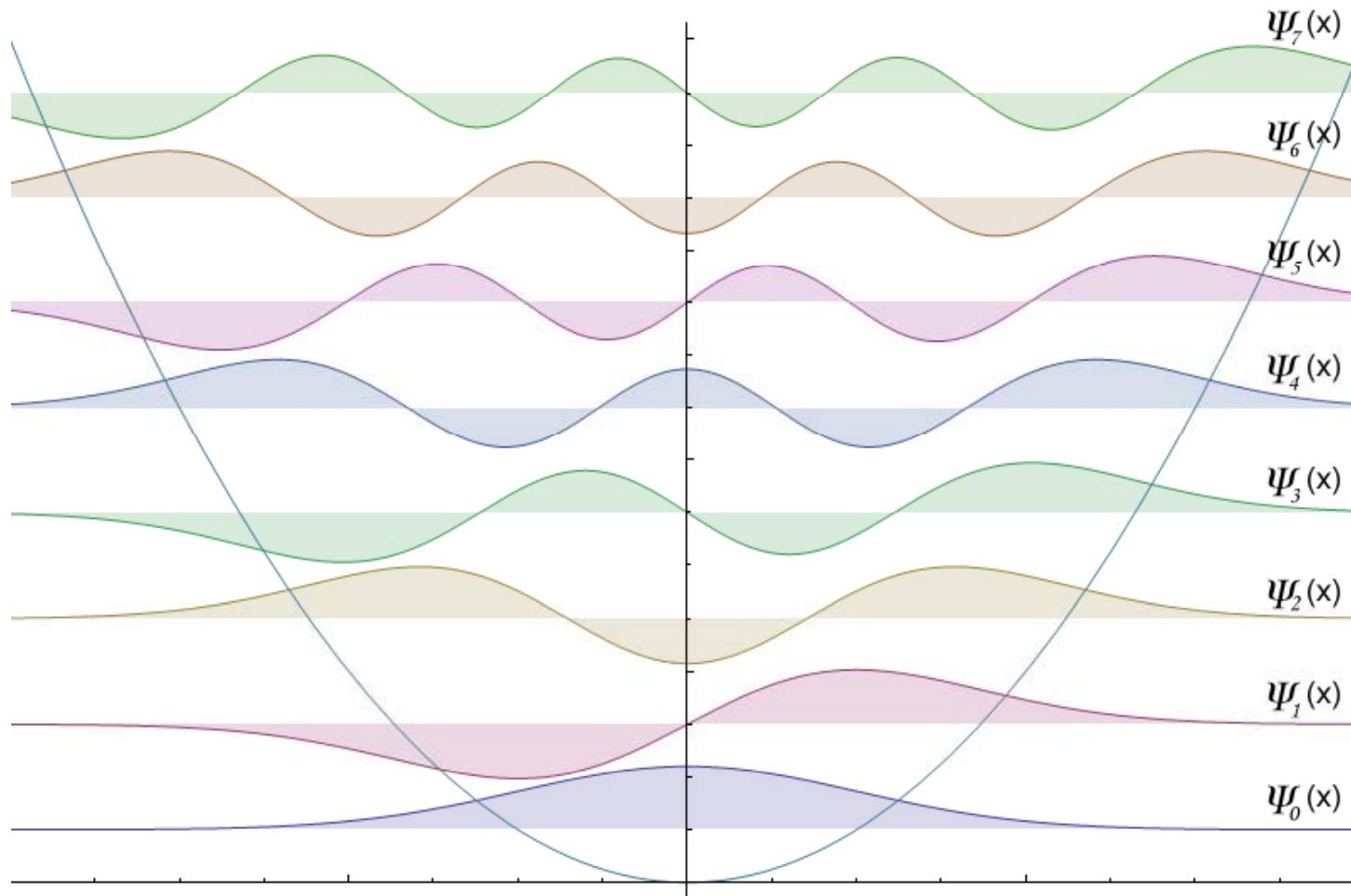


Gerd Binnig, Heinrich Rohrer,  
Christoph Gerber (Uni Basel)

1982

# Harmonischer Oszillator

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



Wellenfunktionen (wikipedia)

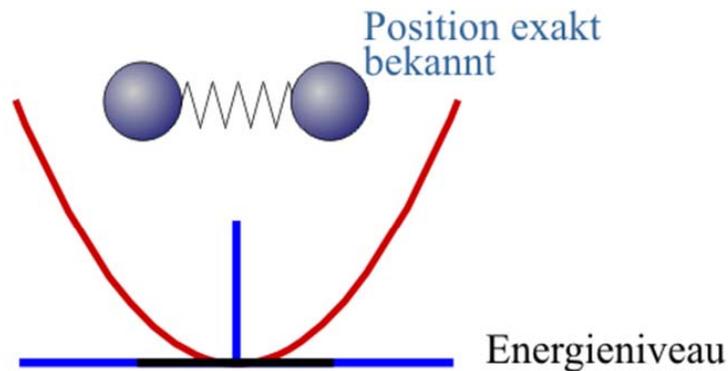
# Harmonischer Oszillator

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



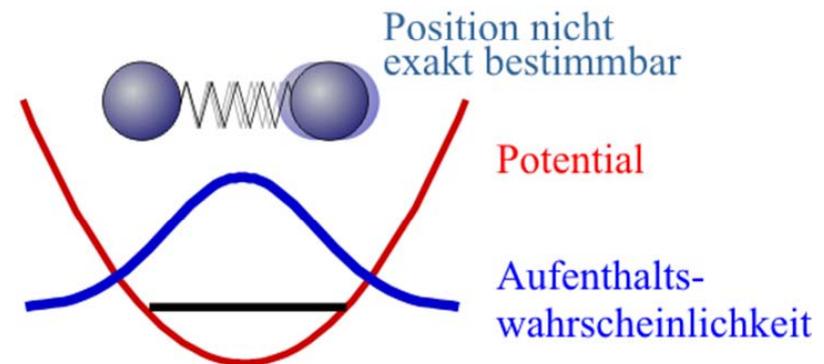
## Grundzustand:

### klassischer Oszillator:



im klassischen Fall sitzt das Teilchen *genau* im Potentialminimum

### quantenmechanischer Oszillator:

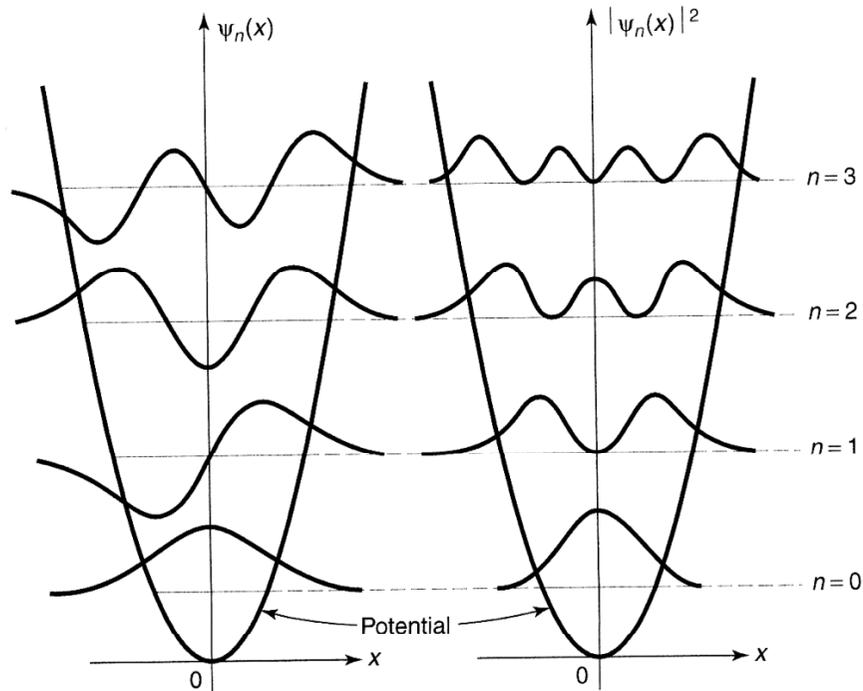


im quantenmechanischen Fall sitzt das Teilchen im Mittel auch im Potentialminimum, seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist aber ausgeschmiert

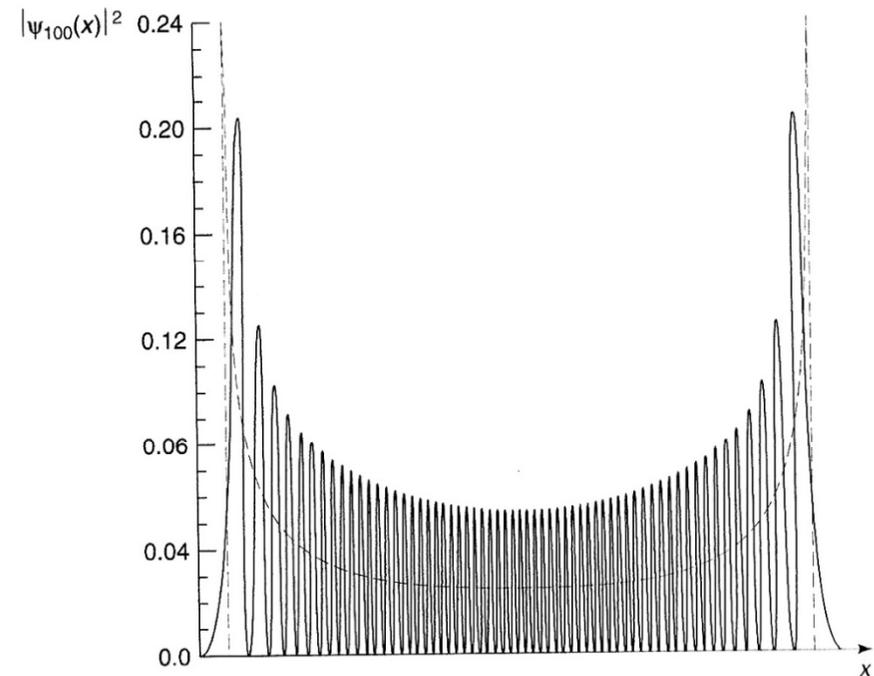
Für alle Energieeigenzustänge gilt  $\langle x \rangle = 0$

# Harmonischer Oszillator

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



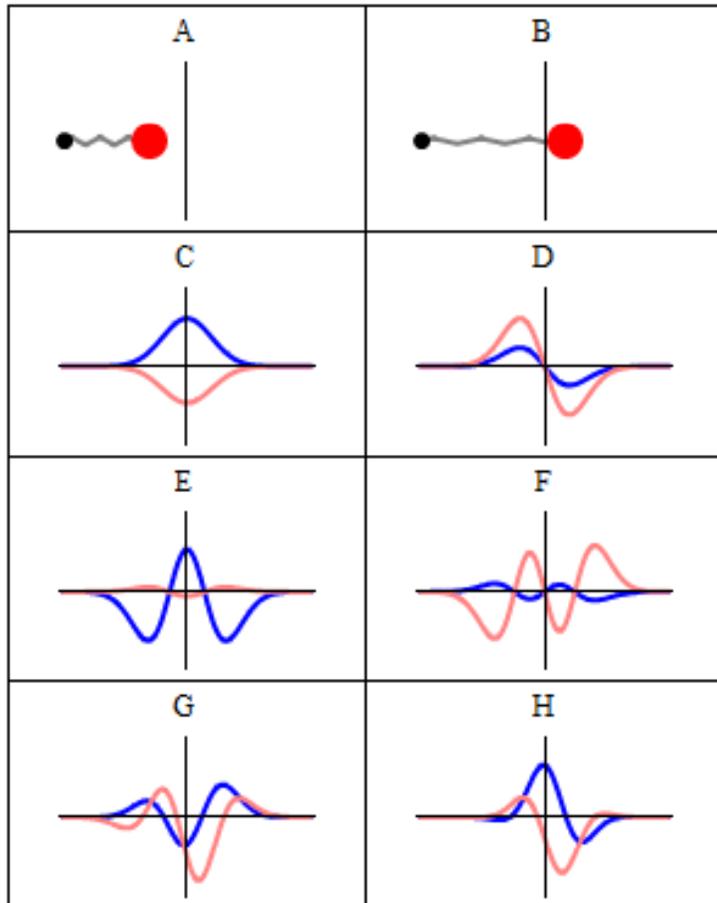
Stationäre Zustände  $\psi_n(x)$  und Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\psi_n(x)|^2$



$|\psi_{100}(x)|^2$  und klassische Verteilungsfunktion gleicher Amplitude

# Harmonischer Oszillator

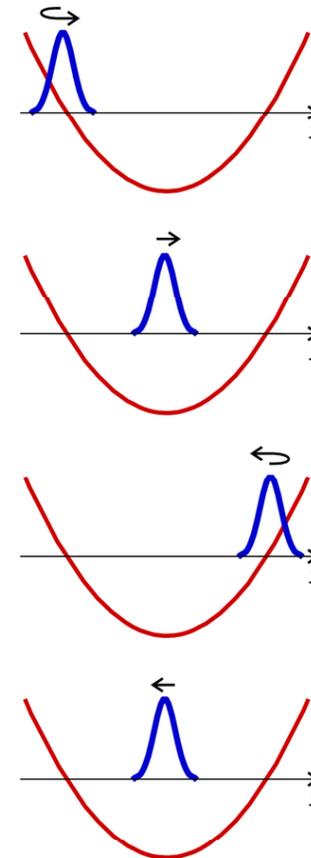
Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



klassisch

C,D,E,F =  
Energieeigen-  
zustände

Superpositions-  
zustand

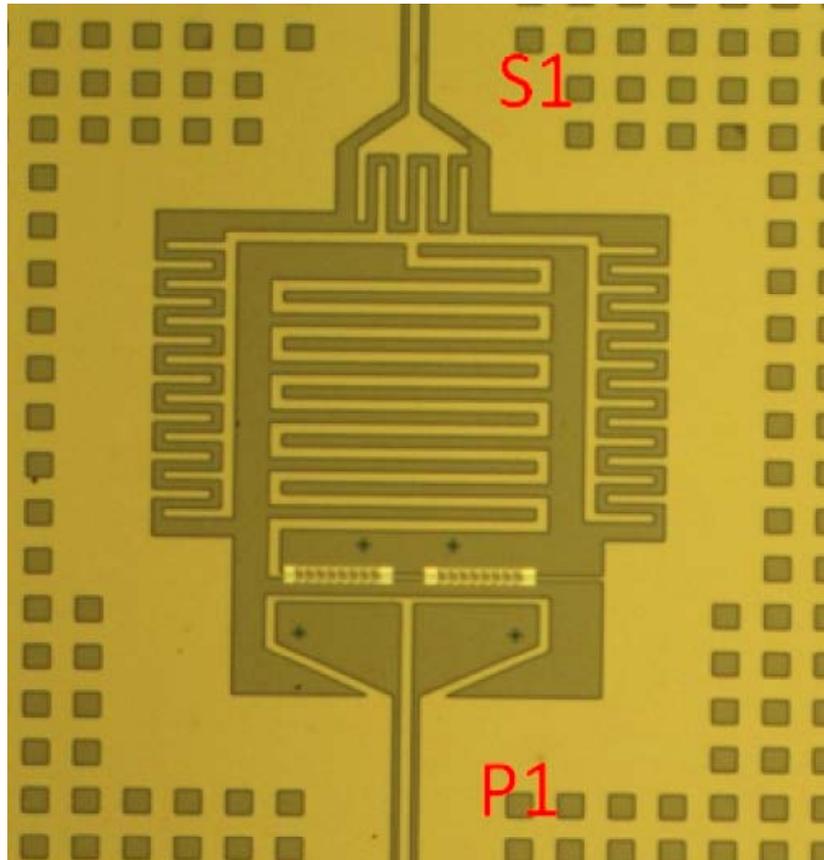


Bewegung eines sog. kohärenten Zustands: ein Wellenpaket, bei dem sich der Schwerpunkt harmonisch hin und her bewegt so wie wir uns das bei einem Oszillator gewohnt sind

Quelle: wikipedia

# Harmonischer Oszillator

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)

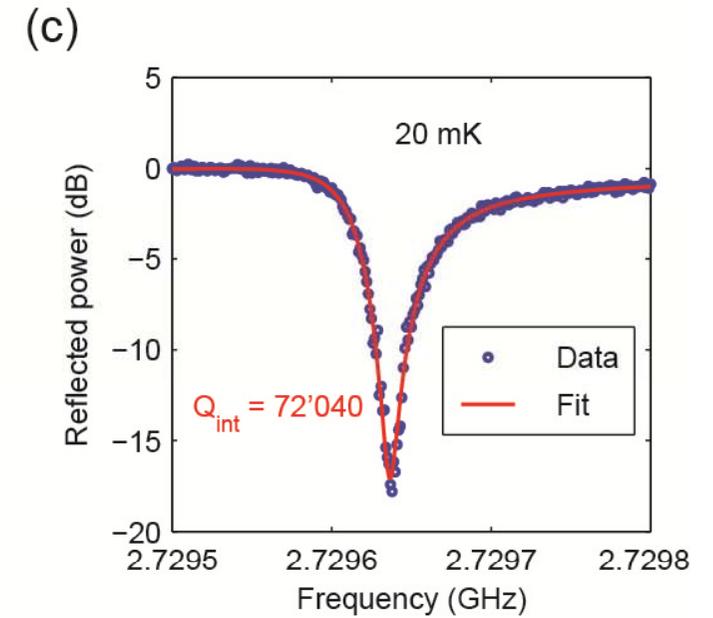
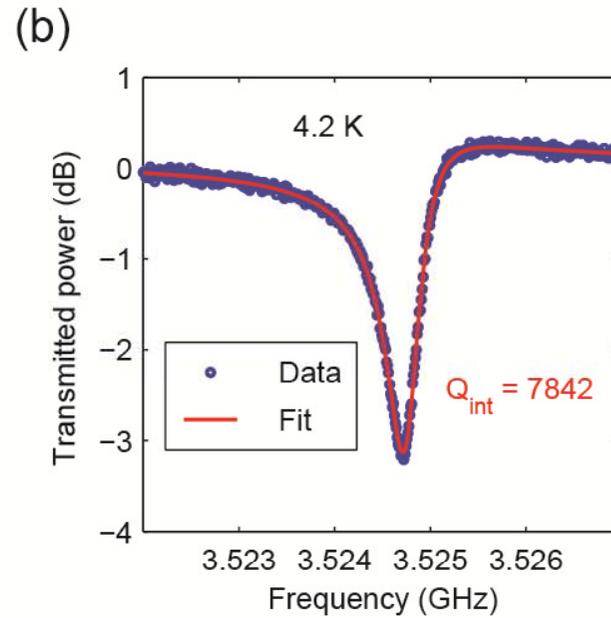
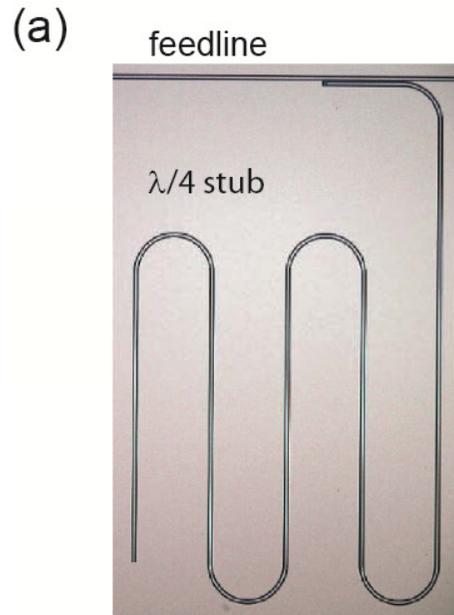


an LC circuit (used as a parametric amplifier). S1 is the signal side and P1 is the parametric drive side.

Saclay group, Paris

# Harmonischer Oszillator

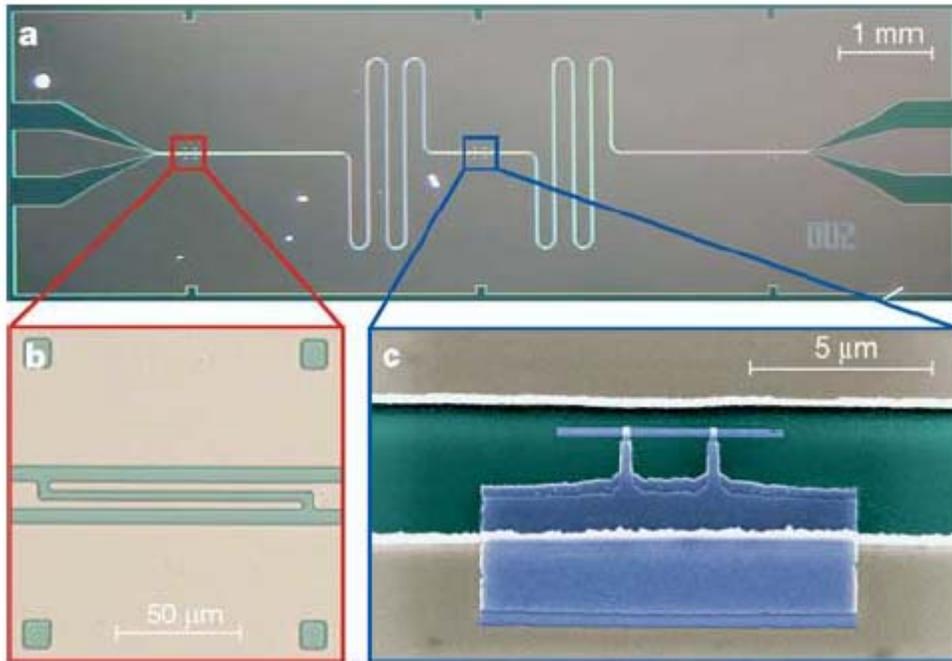
Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



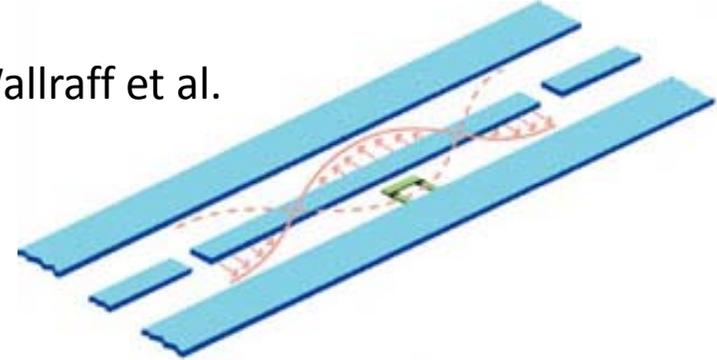
Schönenberger lab

# Harmonischer Oszillator

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)

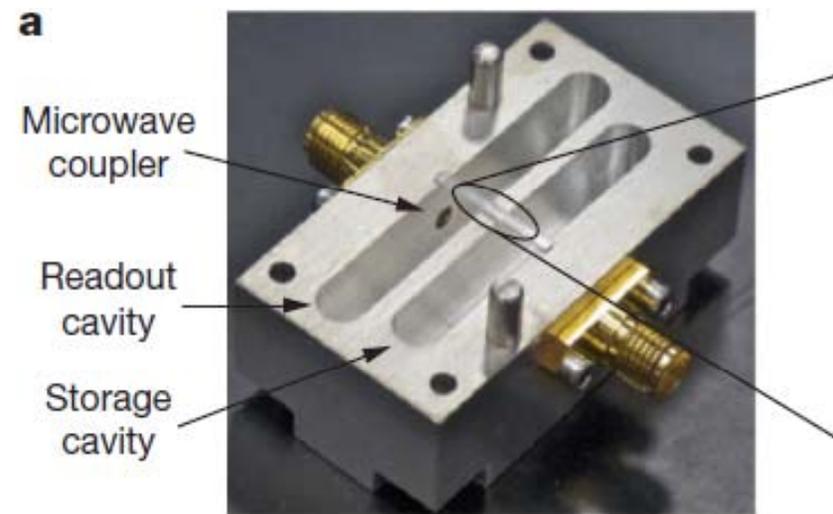


Wallraff et al.



transmission line resonator

3D cavity resonator  
(actually here two coupled ones)  
Schoelkopf et al.

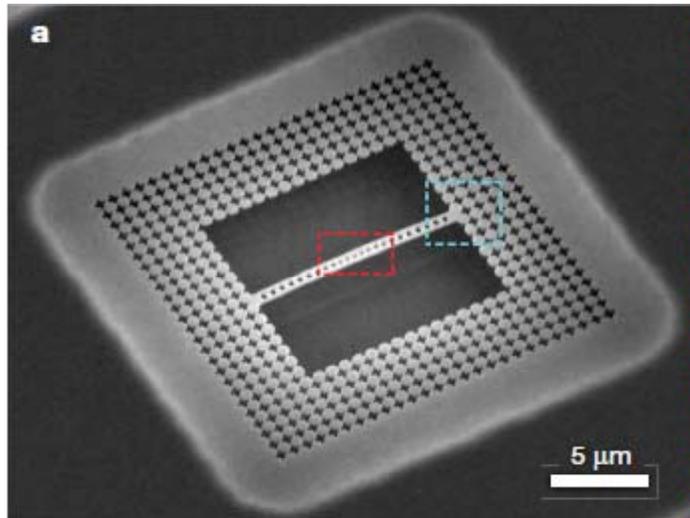


# Harmonischer Oszillator

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)

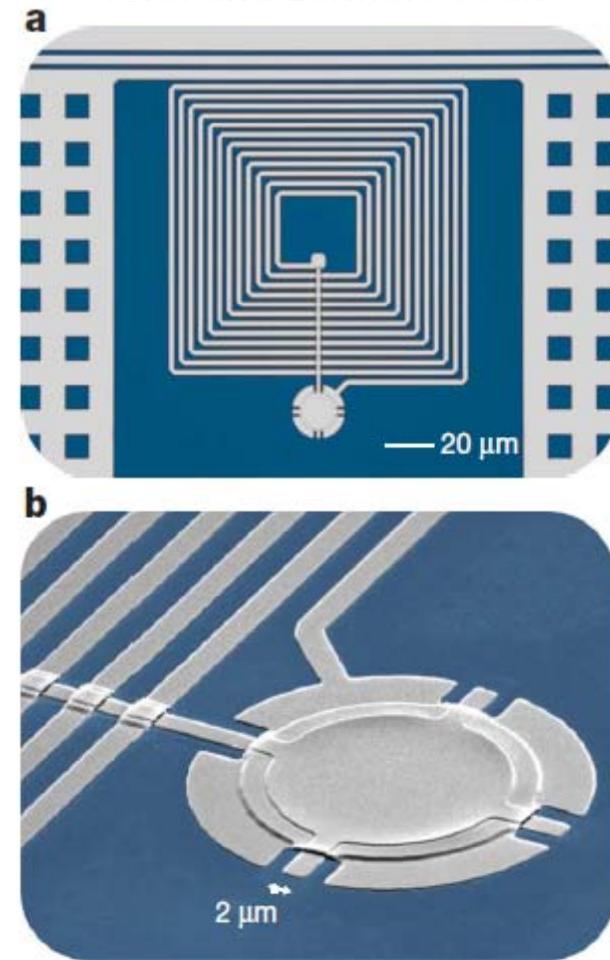


Aspelmeyer et al.



mechanical beam is at the same time an optical cavity. Hence, one can drive and cool the beam with light

Tefel and Lehnert et al.



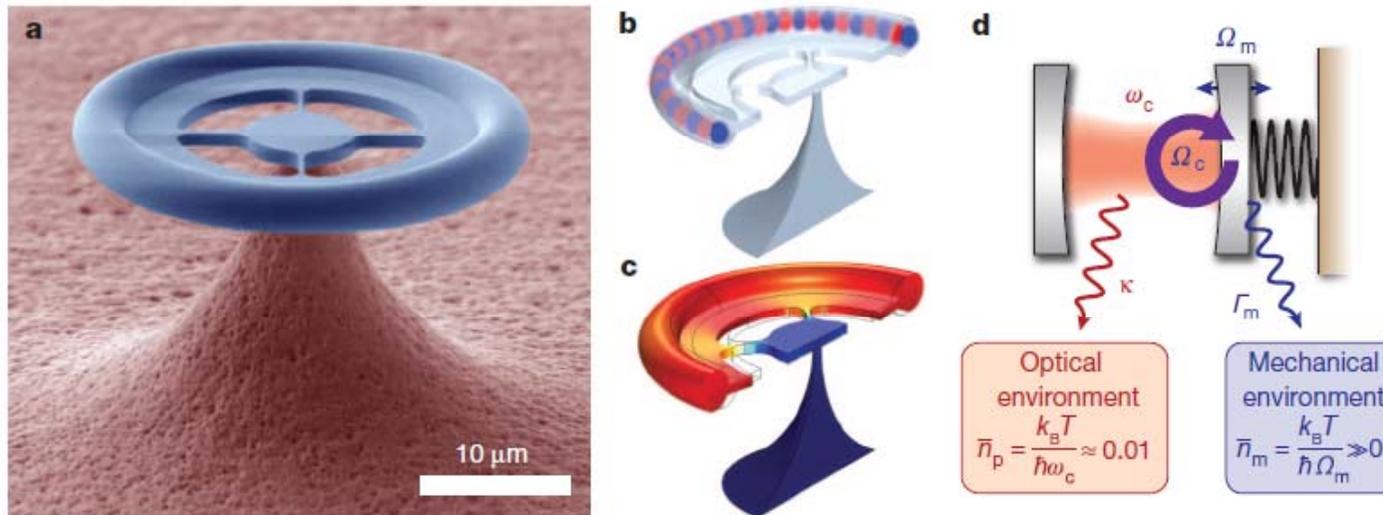
mechanical drum coupled to an LC circuit

# Harmonischer Oszillator

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



Kippenberg et al.



**Figure 1 | Optomechanical microresonators.** a, False-colour scanning electron micrograph of a spoke-anchored toroidal resonator 31  $\mu\text{m}$  in diameter used for the optomechanical experiments reported in this work. b, Sketch of an optical whispering gallery mode in the microresonator (colours indicate optical phase). c, Simulated displacement (exaggerated for clarity) of the fundamental radial breathing mode of the structure. d, Equivalent optomechanical Fabry–

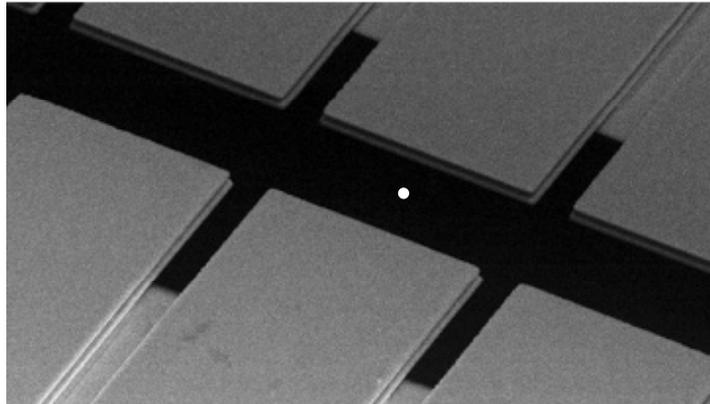
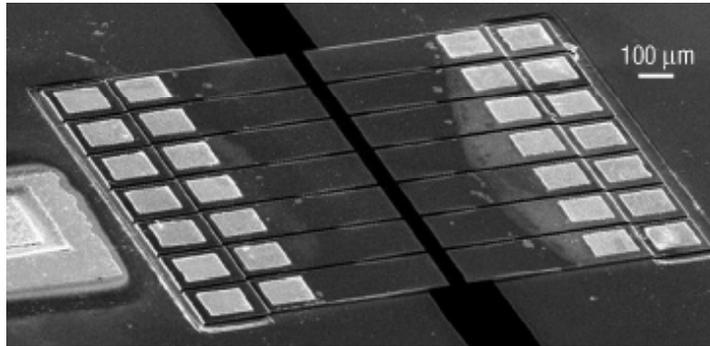
Pérot cavity: quantum-coherent coupling is achieved when the enhanced coupling rate  $\Omega_c$  is comparable to or exceeds the optical and mechanical decoherence rates ( $\kappa, \Gamma_m \bar{n}_m$ ). Owing to the large asymmetry between mechanical and optical frequencies, the occupancies of the two environments are widely different.

# Harmonischer Oszillator

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



CH

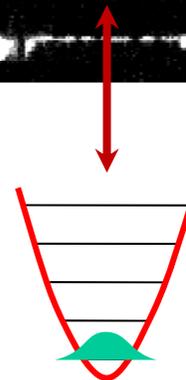
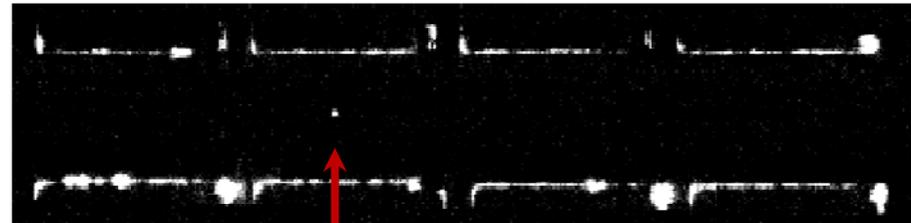


Miniaturisierte Ionenfalle auf Chip

## Einzelnes Ion in Ionenfalle

(C. Monroe et al., JQI)

Abbildung des Ions auf CCD-Kamera



# Harmonischer Oszillator

Schönenberger group [www.nanoelectronics.ch](http://www.nanoelectronics.ch)



Ultrakalte neutrale Atome in  
Magnetfallen auf einem Atomchip  
Treutlein Gruppe, Uni Basel

