A1: Frühe Quantenmechanik:

(a) Wie gross ist der Impuls und die Energie eines Photons für Licht der Wellenlänge λ? (0.5 points)

(b) Was ist der Abstand Δk von zwei benachbarten Zuständen im k-Raum von Photonen in einem Würfel mit Kantenlänge L? (0.5 points)

(c) Erklären Sie in einer einfachen Skizze und mit wenigen Worten den Fotoelektrischen Effekt. (0.5 points) Was ist die maximale Geschwindigkeit der emitierten Elektronen, wenn Photonen mit der Wellenlänge von 1 nm auf Platin (Austrittsarbeit $\Phi \approx 5.4\,\mathrm{eV}$) gestrahlt werden? Gesucht sind eine Formel und ein Zahlenwert. (1 point) Ist die maximale Geschwindigkeit der Elektronen grösser oder kleiner für das selbe Experiment mit Aluminium ($\Phi \approx 4.1\,\mathrm{eV}$)? (0.5 points)

A2: Freie Teilchen, Postulate der Quantenmechanik

(a) Was versteht man unter der Wahrscheinlichkeitsinterpretation? (0.5 points) Was unter dem Kollaps der Wellenfunktion bei einer Messung? Die Antworten sollten sehr kurz sein. (0.5 points)

(b) Ein Teilchen sei in einem Superpositionszustand aus zwei Impulseigenzuständen,

$$\Psi(x,t) = A\left(e^{i(k_1 x - \frac{E_1}{\hbar}t)} + e^{i(k_2 x - \frac{E_2}{\hbar}t)}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte zu einer festen Zeit t ist periodisch im Ort x. Was ist die Periode? (1 point)

(c) Warum verlangen wir, dass eine Observable $\hat{A}$ (Operator) selbstadjungiert (hermitisch) ist? (0.5 points) Was ist die Zeitabhängigkeit des Erwartungswerts von $\hat{A}$ wenn $\hat{A}$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ vertauscht? (0.5 points)

A3: Stückweise konstantes Potential

(a) Ein Teilchen bewegt sich in einem Potential gegeben durch

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \le 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x \le b \\ E_0 & \text{für } x > b \end{cases}$$

mit $E_0 > 0$. Skizzieren Sie das Potential und, ohne zu rechnen in derselben Skizze, die Grundzustandswellenfunktion für $0 < E < E_0$ für die Fälle i) E_0 sehr gross, ii) E_0 sehr klein und iii) E_0 irgendwo dazwischen. (1 point)

(b) Finden Sie passende Ansätze für die verschiedenen Teile der Wellenfunktion (0.5 points) und leiten Sie eine Bestimmungsgleichung (ohne sie zu lösen) aus den Anschlussbedingungen her, für die Wellenfunktion mit $0 < E < E_0$ und ohne die Normierungskonstante zu bestimmen. (2 points)

(c) Erraten Sie die Lösung für $E_0 \to \infty$ und vergleichen Sie dieses Resultat mit einem bekannten Problem. (0.5 points)

(d) Schreiben Sie einen Ausdruck auf für die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Grundzustand an einem Ort $x > b$ zu finden. Sie brauchen das Integral nicht zu lösen. Wie gross ist dieser Wert für $E_0 \to \infty$? (0.5 points)

(e) Schreiben Sie einen Ausdruck für den Erwartungswert der Position des Teilchens im Grundzustand auf, ohne das Integral zu lösen und geben Sie ohne Rechnung an, ob dieser Wert grösser oder kleiner wird mit grösserem E_0. (0.5 points)

(f) Diese Aufgabe ist unabhängig von den obigen Aufgaben! Ein freies Teilchen trifft von links auf eine rechteckige Tunnelbarriere mit einer Energie kleiner als die Barrierenhöhe. Zeichnen Sie qualitativ die Aufenthaltwahrscheinlichkeit des Teilchens in den verschiedenen Bereichen. (0.5 points) Wo gibt es Interferenzeffekte? (0.5 points)

A4: Harmonisches Potential

(a) Was sind die Energieeigenwerte von einem Teilchen in einem harmonischen Potential ("harmonischer Oszillator") in einer Dimension, $V(x) = 0.5m\omega^2x^2$? (0.5 points) Wie viele Nullstellen hat die Grundzustandswellenfunktion und wie viele der erste angeregte Zustand? (0.5 points)

(b) Was sind die Energieeigenwerte von einem Teilchen in einem harmonischen Potential ("harmonischer Oszillator") in zwei Dimensionen mit $V(x, y) = 0.5m\omega^2(x^2 + y^2)$ und was ist die Entartung der tiefsten 3 Energien? (Dieses Problem braucht keine langen Rechnungen) (1 point)

(c) Ein 1-dimensionaler harmonischer Oszillator ist zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$\psi(t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_0 + \Phi_1) ,$$

mit Φ_n dem n-ten Eigenzustand des Problems. Berechnen Sie i) $\psi(t)$, (1 point) ii) $\langle E(t)\rangle$ (1.5 points) und iii) $\langle x(t)\rangle$. (1.5 points) Hinweise: Im letzten Problem sind Leiteroperatoren von Vorteil und $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-)$.

A5: $1/r$-Potential und Schalenstruktur der Atome

(a) Zeichnen Sie ein Energiediagramm für ein d-Orbital (ohne Elektronenspin) in einem Magnetfeld von i) $B = 0$ und ii) für ein grosses Feld. (0.5 points) Geben Sie jeweils die Entartung der Zustände an (ohne Elektronenspin) (0.5 points)

(b) Gegeben seien die Eigenzustände ϕ_{nlm} des Wasserstoffatom-Problems. Welches sind die Indizes des Grundzustands und was ist dessen Energie (ohne Rechnung)? (0.5 points) Wie heissen die Zahlen n, l und m? (0.5 points)

(c) Gegeben sei der Zustand $\frac{1}{\sqrt{3}} (\phi_{110} + \phi_{220} + \phi_{21-1})$. Schreiben Sie im folgenden Ihre Antwort zuerst als Skalarprodukt, bevor Sie eine Zahl hinschreiben. i) Was ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Messung den Zustand ϕ_{110} zu bekommen? (0.5 points) Wie gross ist der Erwartungswert für ii) die Energie (1 point), iii) das Quadrat des Drehimpulses (1 point) und iv) der z-Komponente des Drehimpulses? (0.5 points). In wieviele Energieniveaus wird dieser Zustand in einem Magnetfeld aufgespalten (ohne Spin)? (0.5 points)

(d) Die Zustände in einem Atom mit Spin-Bahnkopplung werden oft mit einer speziellen Notation gekennzeichnet. Was bedeutet $2^2P_{3/2}$ (0.5 points) und was ist der Unterschied zu $2^2P_{1/2}$? (0.5 points)

(e) Das C-Atom hat 6 Elektronen. Wie verteilen diese sich auf die Orbitale im Grundzustand? (0.5 points)

A6: Spin 1/2 Wir betrachten ein Spin-1/2 Teilchen und beschreiben dessen Zustand in der Basis $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$. Den Zustand $|\Psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$ schreibt man dann als Vektor $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Die Pauli Matrizen lauten

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) Der Spin sei im Zustand $\chi = N \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ präpariert. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N. (0.5 points) Was ist die Wahrscheinlichkeit, den Zustand $|\uparrow\rangle$ zu messen? (0.5 points)

(b) Was ist der Erwartungswert für die z-Komponente des magnetischen Moments $\vec{\mu}$ in diesem Zustand (wir nehmen den g-Faktor $g = 2$)? (1 point)

(c) Was ist der Eigenzustand vom Spinoperator $s_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ zum Eigenwert $\hbar/2$? Lösen Sie dazu die Eigenwertgleichung explizit. (1 point)

(d) Berechnen Sie die Standardabweichung der z-Komponente des Drehimpulses, $\Delta s = \sqrt{\langle s_z^2\rangle - \langle s_z\rangle^2}$, für den Zustand von oben. (2 points)