

7. Das magnetische Feld

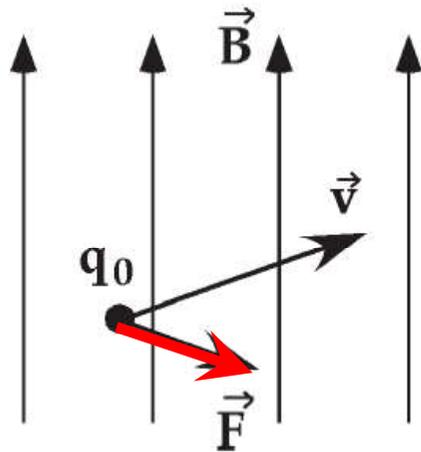
7.1 Phänomene des Magnetismus

- es existieren Stoffe, die aufeinander Kräfte ausüben, die nicht mit der Gravitationskraft oder der Coulombkraft erklärt werden können :
 - Kräfte zwischen Gesteinen (Magnetit)
 - starke anziehende und abstossende Kräfte zwischen bestimmten Übergangsmetallen (ferromagnetische Stoffe)
 - Kräfte zwischen ferromagnetischen Stoffen und der Erde (\Rightarrow Kompass, wurde von den Chinesen bereits im 10. Jahrhundert verwendet)
- Kräfte zwischen elektrischen Strömen und Kräfte zwischen elektrischem Strom und Metallen (entdeckt 1820 durch Oersted)

Exp: Stabmagnete auf Proki, Kompassnadeln

Das magnetische Induktionsfeld (kurz magnetisches Feld oder B-Feld genannt) kann man definieren, indem man, ähnlich wie beim E-Feld, von der Kraftwirkung ausgeht.

B - Feld

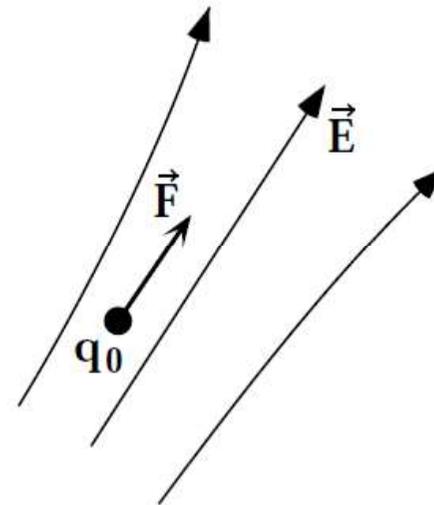


$$\vec{F}_L = q_0 \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

F_L : Lorentzkraft wirkt auf bewegte Ladung q_0

\vec{v} : Geschwindigkeit der Ladung q_0

E - Feld



$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$$

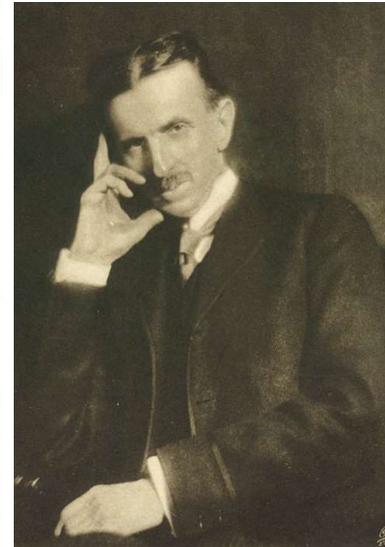
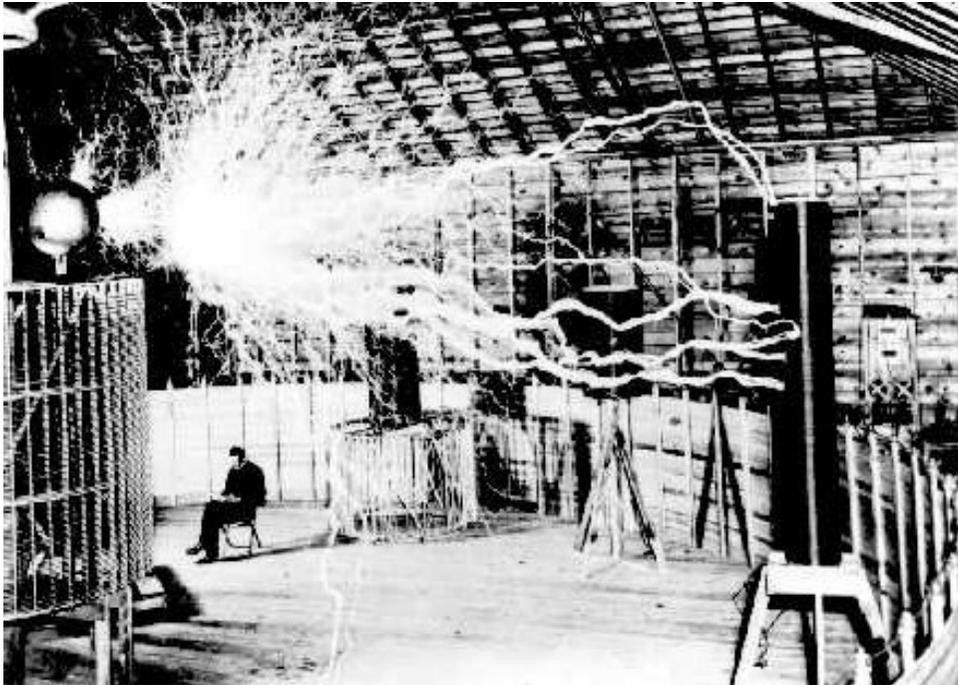
Definition des E-Feldes

\vec{F} Kraft auf (ruhende oder bewegte) Ladung q_0

Einheit des B-Feldes:

$$1 \frac{\text{Newton}}{\text{Ampère} \cdot \text{Meter}} = 1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}$$

(nach Nikola Tesla, 1856 - 1943 und
Gauss nach Carl Friedrich Gauss, 1777 - 1855)



Nikola Tesla



C.F. Gauss

Exp: Kathodenstrahlen und Magnet, Feldlinienbild des Hufeisenmagnetes, Lorentzschaukel

Beispiel:

maximale Kraft auf einen elektrischen Strom im B-Feld der Erde

$I = 1 \text{ A}$, $\ell = 1 \text{ m}$, $B = 0.2 \text{ Gauss}$

$$\vec{v} \perp \vec{B}$$

$$F_L = q \cdot v \cdot B$$

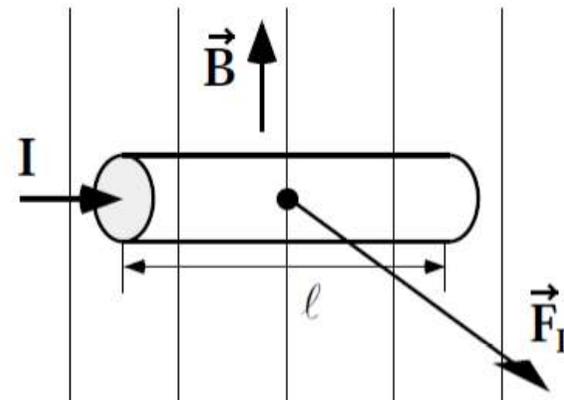
Kraft auf ein Längenelement $d\ell$

$$\begin{aligned} dF_L &= dq \cdot v_D \cdot B \\ &= e \cdot n \cdot A \cdot d\ell \frac{i}{e \cdot n} B \end{aligned}$$

$$dF_L = d\ell \cdot I \cdot B$$

oder für die Länge ℓ

$$F_L = \ell \cdot I \cdot B = 1 \cdot 1 \cdot 0.2 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$



v_D : Driftgeschwindigkeit der Ladungen (= i/en nach Abschnitt 6.2)

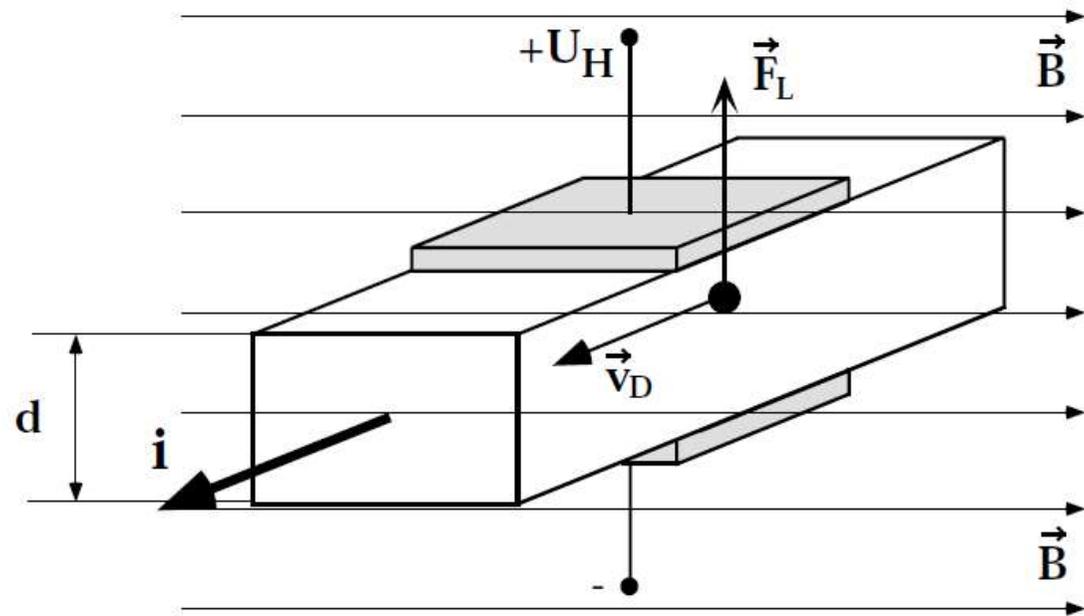
Hall-Effekt (E. H. Hall, 1879)

Ein Leiter wird von einer Stromdichte \mathbf{i} durchflossen. Senkrecht zur Flussrichtung ist ein homogenes \mathbf{B} -Feld vorhanden. Die Ladungsträger verspüren eine Lorentzkraft, die senkrecht zu \mathbf{i} und $\vec{\mathbf{B}}$ gerichtet ist.

$$\vec{\mathbf{F}}_L = e \vec{\mathbf{v}}_D \times \vec{\mathbf{B}} \quad \mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{i}}{e \cdot \mathbf{n}}$$

$$\mathbf{F}_L = \frac{\mathbf{i}}{n} \mathbf{B} \quad \vec{\mathbf{v}}_D \perp \vec{\mathbf{B}}$$

Durch die Lorentzkraft werden die Ladungsträger abgelenkt, was zu einer Aufladung auf eine Spannung U_H der senkrecht angebrachten Elektroden führt. Im stationären Gleichgewicht ist die Summe von Coulomb- und Lorentzkraft gleich Null:



$$-eE + \frac{i}{n} B = 0$$

$$E = \frac{U_H}{d}$$

$$U_H = \frac{1}{e \cdot n} d \cdot i \cdot B \quad \text{oder} \quad U_H = d \cdot v_D \cdot B$$

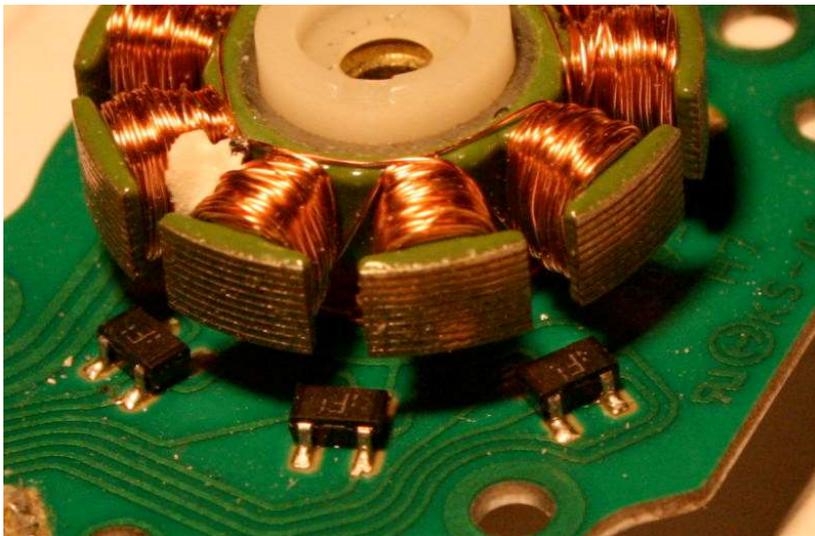
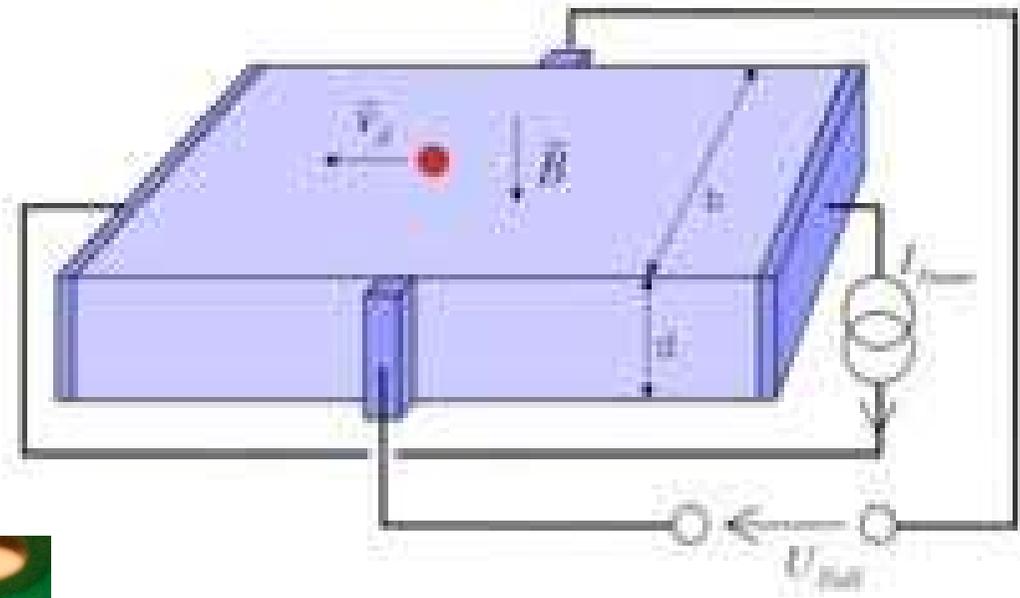
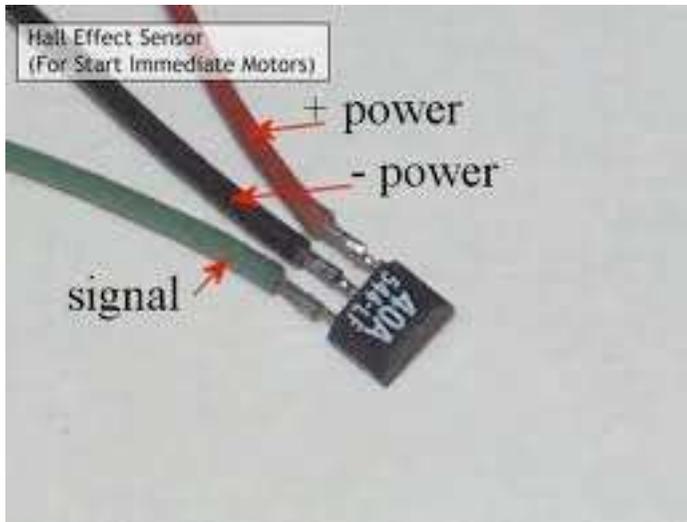
U_H wird als Hallspannung bezeichnet.

Die Hallspannung U_H kann somit angewendet werden, um entweder die Ladungsträgerkonzentration n oder die Driftgeschwindigkeit v_D zu bestimmen (z.B. Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Blut).

Anwendungen des Hall-Effektes:

- Messung des B-Feldes
- Bestimmung der Art der Ladungsträger (+/-)
- Bestimmung der Driftgeschwindigkeit v_D
- Bestimmung der Dichte n

Hall-Sensor



Positionsmessung
und Drehzahlregelung bei Motoren
(Bsp. CD-Drive-Motor)

Ladung auf Zyklotron - Kreisbahn

Eine Ladung, die senkrecht zu den B-Feldlinien in ein Magnetfeld eingeschossen wird, beschreibt eine Kreisbahn vom Radius r .

Die Zentripetalkraft F_z ist gleich der Lorentzkraft F_L :

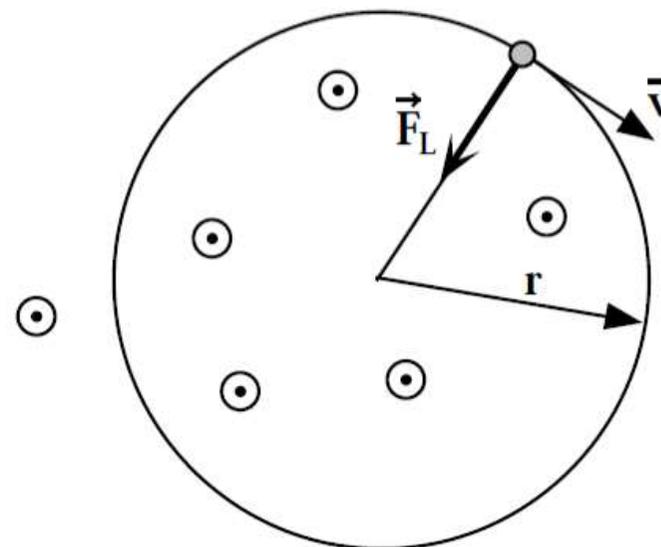
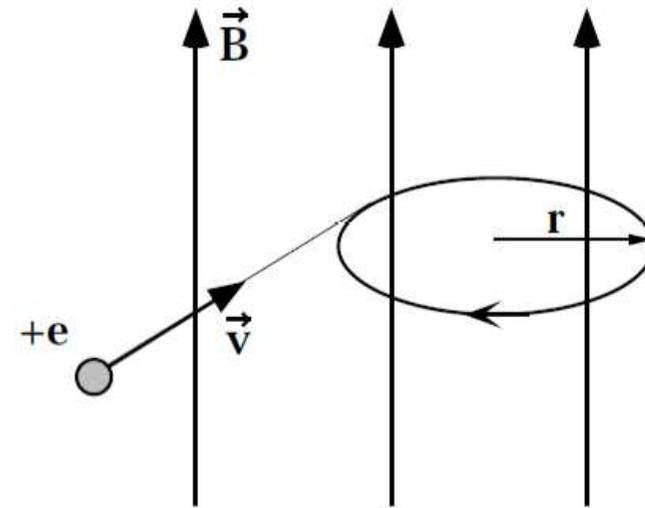
$$\vec{F}_L = e \vec{v} \times \vec{B}$$

$$m \omega^2 r = e v B \quad (\vec{v} \perp \vec{B})$$

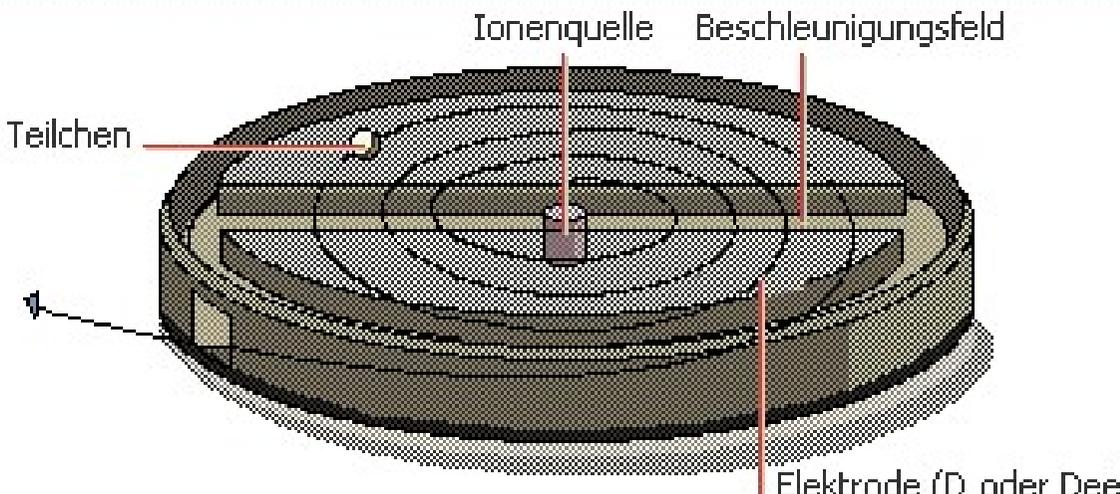
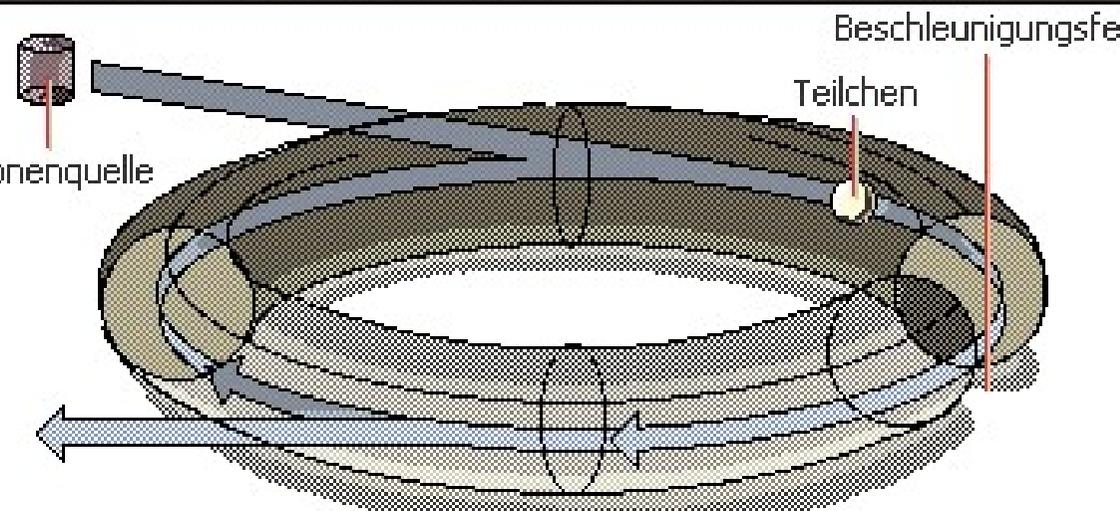
$$= e \omega r B$$

$$\omega = \frac{e B}{m}$$

ω heisst Zyklotronfrequenz



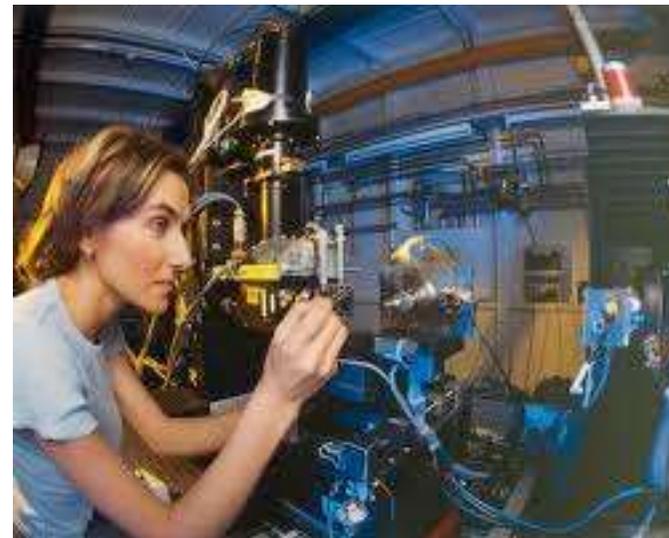
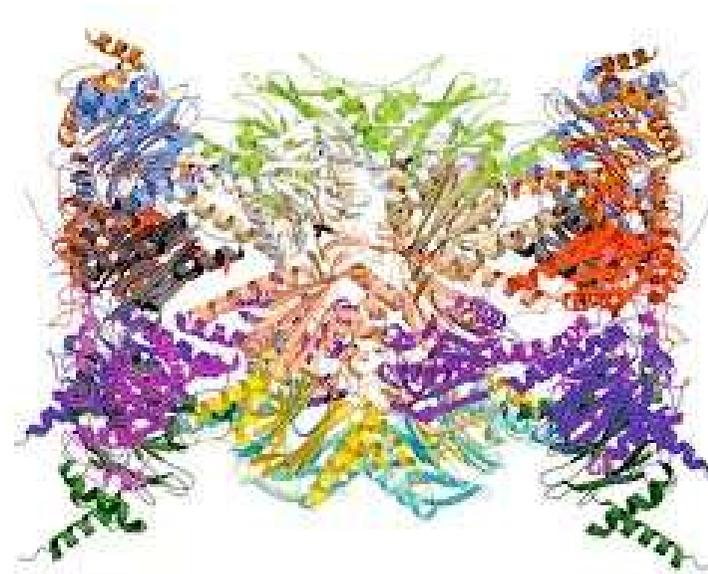
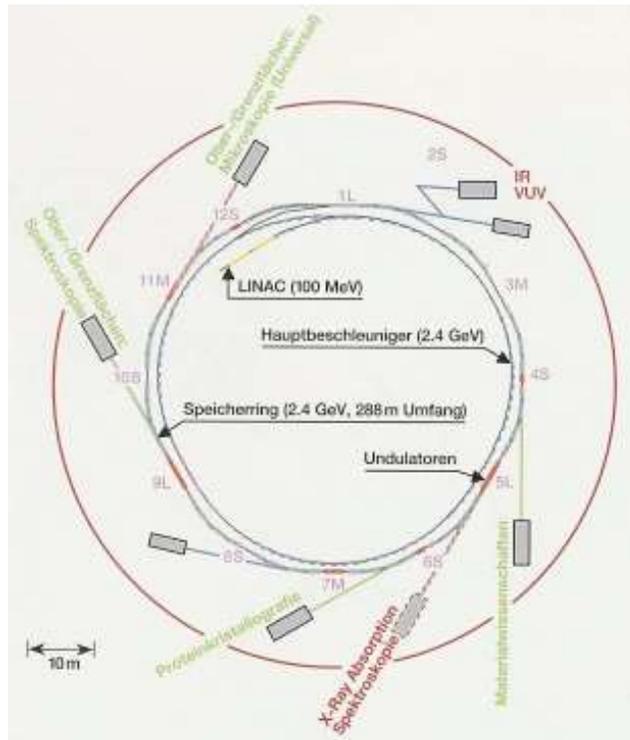
Zyklotron und Synchrotron

 <p>Ionenquelle Beschleunigungsfeld</p> <p>Teilchen</p> <p>Elektrode (D oder Dee)</p>	<p>In einem Zyklotron werden elektrisch geladene Teilchen auf einer spiralförmigen Bahn beschleunigt.</p>
 <p>Ionenquelle Beschleunigungsfeld</p> <p>Teilchen</p>	<p>In einem Synchrotron werden elektrisch geladene Teilchen mit Hilfe von Magnetfeldern auf einer exakten Kreisbahn gehalten.</p>

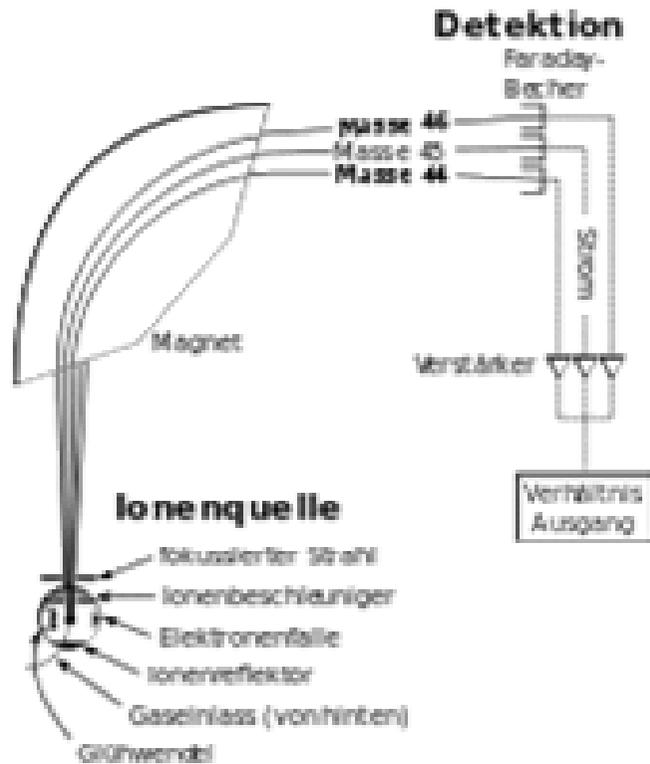
Synchrotron PSI Villigen



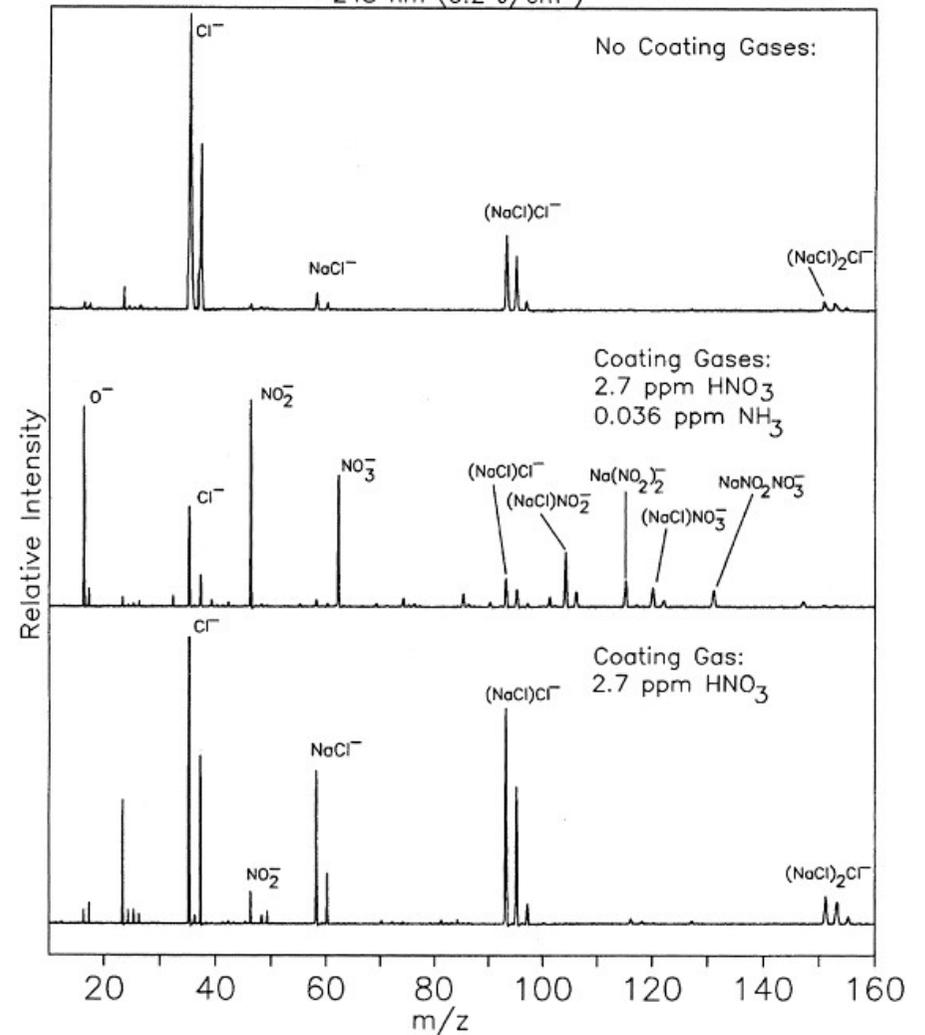
Synchrotron: Proteinanalyse



Massenspektrometrie

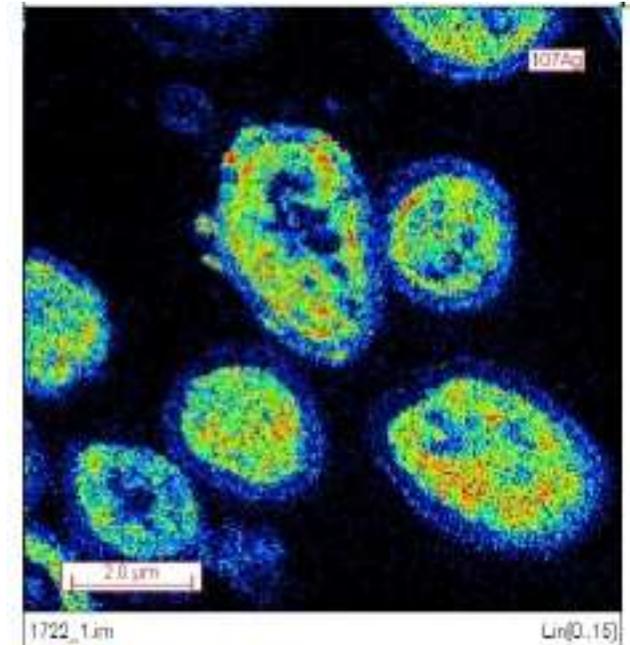


3.5 μm NaCl Particles With/Without Nitrate Coating
248 nm (0.2 J/cm^2)

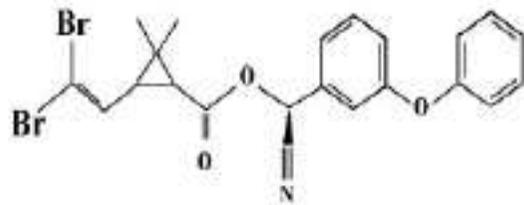


Scanning Ion Mass Spectroscopy (SIMS)

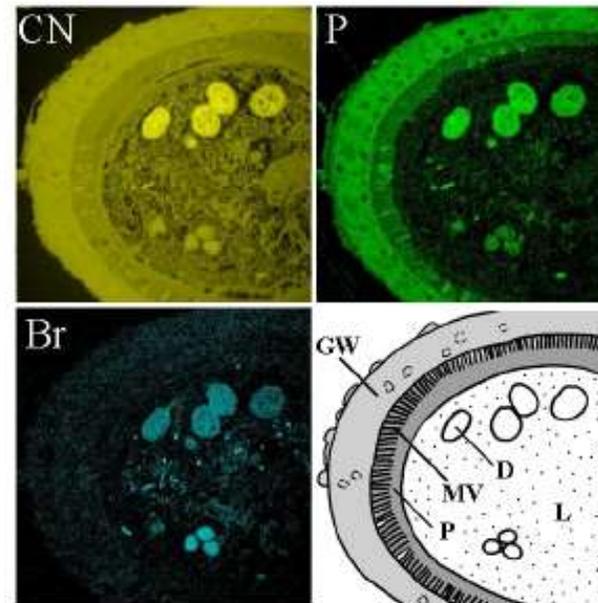
Ag^{107} -Verteilung in Hefezellen



Elementverteilung in biologischen Proben



deltamethrin

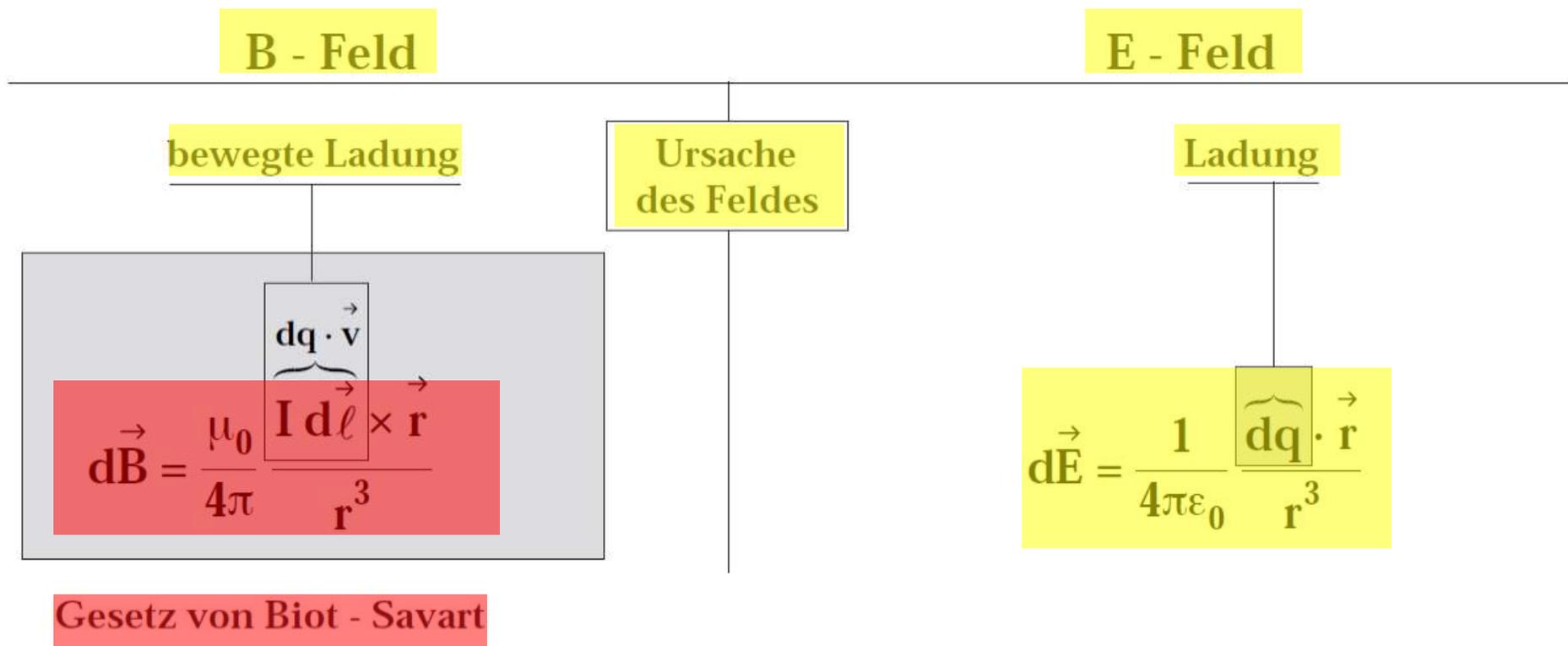


Gut from *Daphnia magna*
(exposed to 0.1 μM
deltamethrin for 48h)

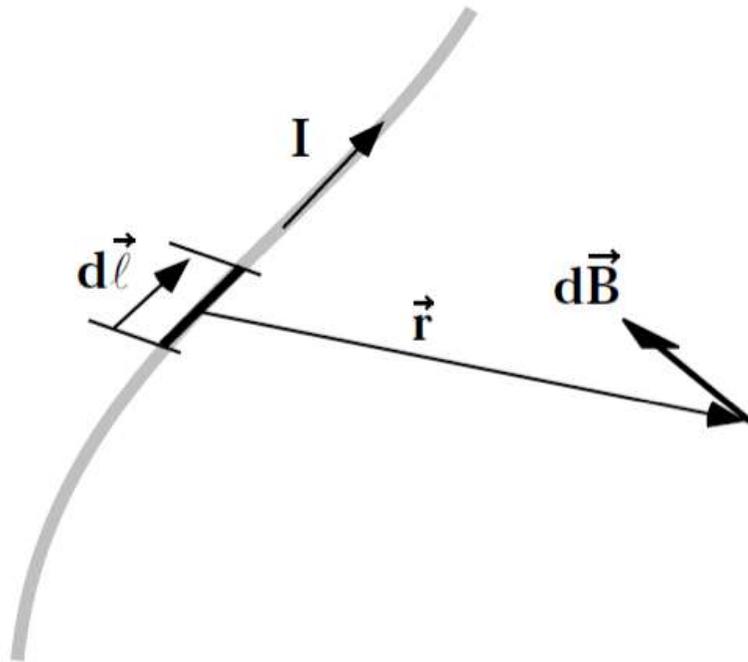
7.4 Das Gesetz von Biot - Savart

(Jean Baptiste Biot, 1774 - 1862 und Felix Savart , 1791 - 1841)

Das Gesetz von Biot-Savart ermöglicht die Berechnung des B-Feldes aus einer gegebenen Stromverteilung. Es ist ebenso fundamental wie das Coulombsche Gesetz für die Berechnung des E-Feldes.



Gesetz von Biot - Savart

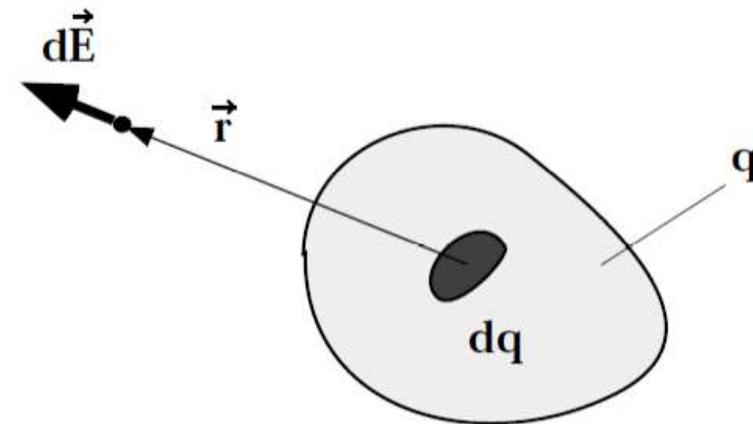


μ_0 : magnetische Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}$$

nicht vektorielle Schreibweise:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$



Exp: Feldlinienbild des geraden Leiters

Anwendungen des Gesetzes von Biot - Savart

B-Feld eines Stromes durch einen geraden Leiter

Die B-Feldlinien bilden konzentrische Kreise um den Leiter, denn nach Biot-Savart ist

$$d\vec{B} \perp \vec{r} \text{ und } d\vec{B} \perp d\vec{\ell}.$$

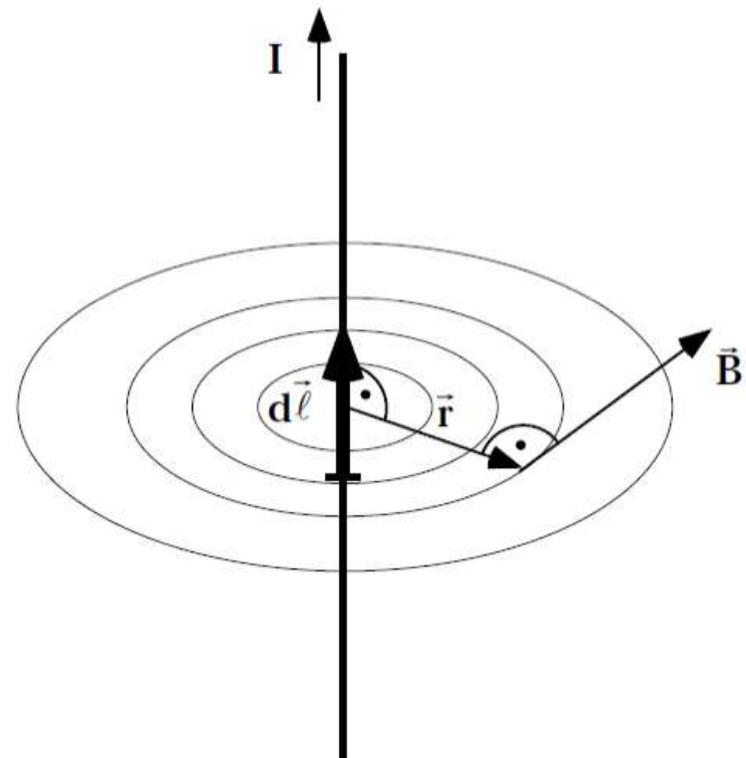
Für den Betrag von \vec{B} gilt

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell \cdot \sin \alpha}{r'^2}$$

$$\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha) = \frac{r}{r'}$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{(r^2 + \ell^2)^{1/2}}$$

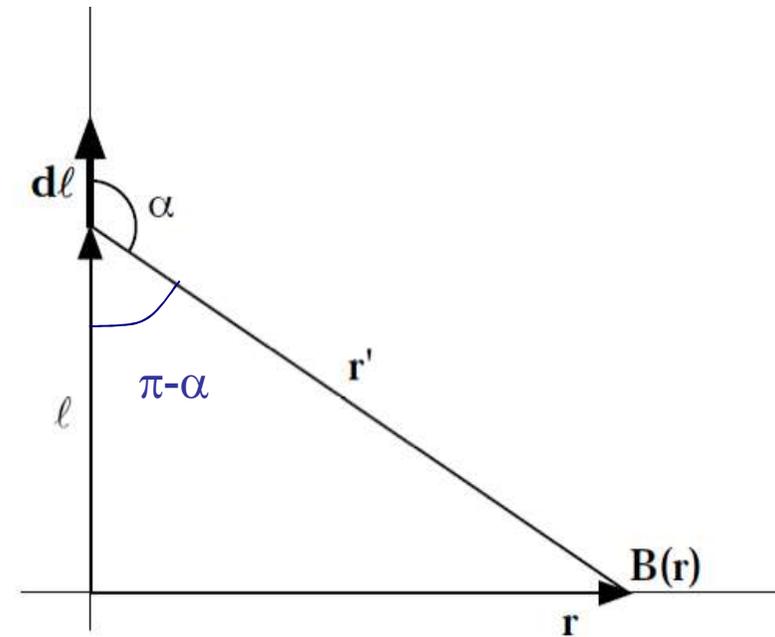
$$\int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r d\ell}{(r^2 + \ell^2)^{3/2}}$$



$$B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \frac{\ell}{(r^2 + \ell^2)^{1/2}} \Bigg|_{\ell=-\infty}^{\ell=\infty}$$

$$B(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

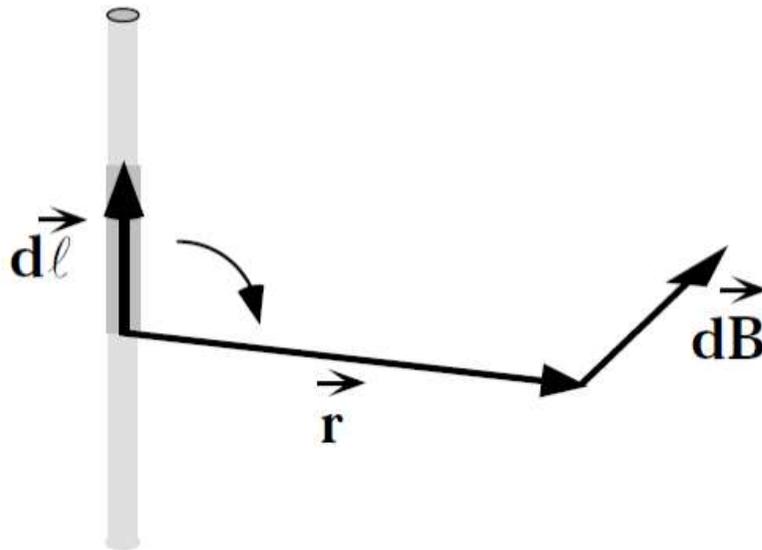
B-Feld des (unendlich ausgedehnten) geraden Leiters, der vom Strom I durchflossen wird.



Exp: Feldstärke in Umgebung eines geraden Leiters mit Hallsonde messen

Die Richtung des B-Feldes ergibt sich nach der Korkenzieherregel:

$d\vec{\ell}$ in Richtung \vec{r} drehen - Verschiebungsrichtung liefert \vec{B} Richtung

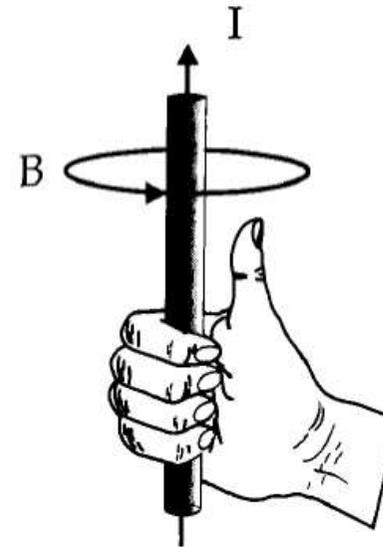


Exp: Korkenzieher

'rechte - Hand - Regel'

Daumen in Richtung I

Finger deuten in Richtung \vec{B}

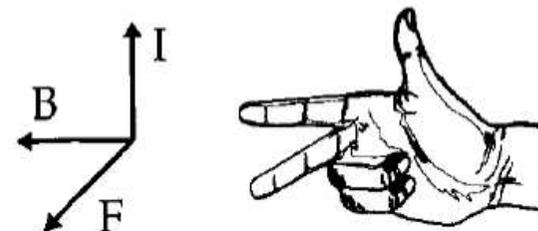


oder

Daumen in Richtung I

Zeigefinger in Richtung \vec{B}

Kraft zeigt in Richtung Mittelfinger.



B-Feld verursacht durch I
in Leiter ① im Abstand r

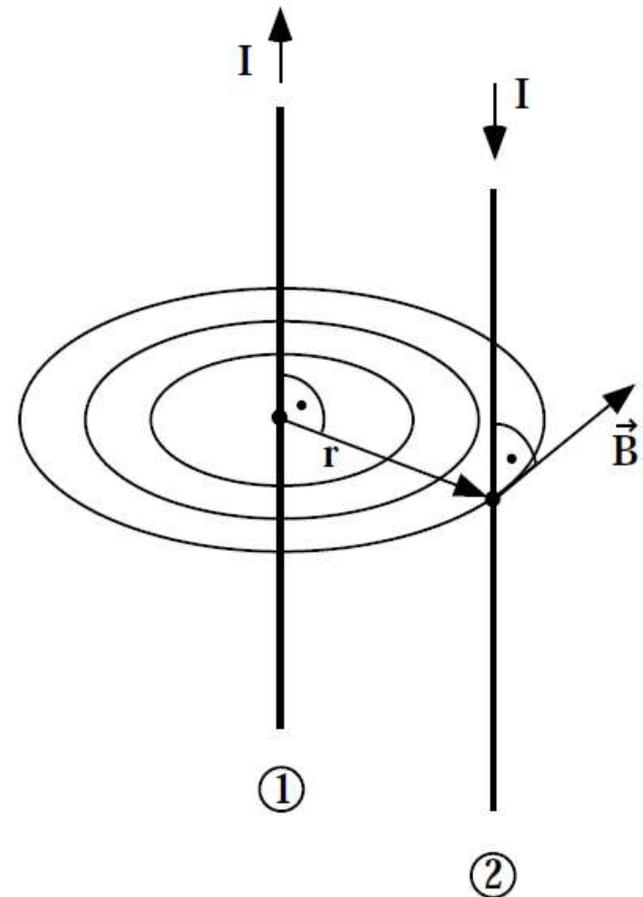
$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

$$\frac{F}{\ell} = I \cdot B \quad (\text{Lorentzkraft, Abschnitt 7.2})$$

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{r}$$

Die Kraft ist abstossend für antiparallele
Ströme und anziehend für parallele Ströme.

Auf der Kraftwirkung zwischen zwei parallelen
Strömen beruht die Definition des Ampère (Basiseinheit im SI-System):



Das Ampère ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der durch zwei parallele unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.

$$\frac{F}{\ell} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}}{2\pi} \frac{1\text{A}^2}{1\text{m}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{A} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m} \quad \left(1\text{T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A m}}\right)$$

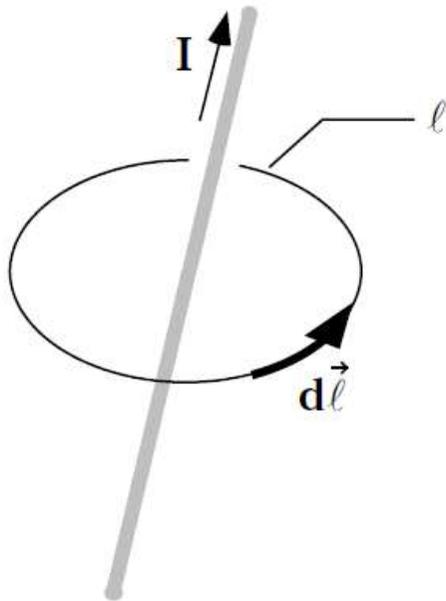
Exp: Kräfte zwischen parallelen Strömen

7.5 Das Ampèresche Gesetz

In der Elektrostatik haben wir den Satz von Gauss kennengelernt, der es uns ermöglichte, in gewissen Fällen des E-Feld auf einfache Art zu berechnen. Ebenso fundamental ist das Ampèresche Gesetz, das uns die Berechnung des B-Feldes in gewissen Fällen ermöglicht.

Ampèresches Gesetz

$$\oint_{\ell} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

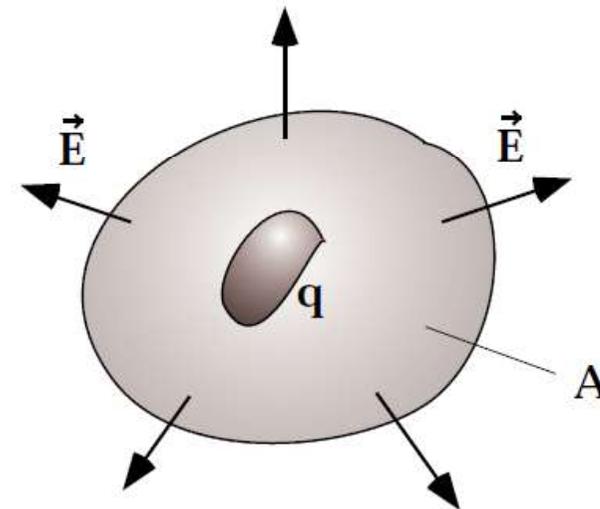


$\oint_{\ell} \vec{B} d\vec{\ell}$: Integral längs des geschlossenen Weges ℓ

I : gesamter Strom, der durch die geschlossene Wegschleufe ℓ hindurchtritt

Satz von Gauss

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} q$$



Beispiele:**B-Feld eines geraden Leiters**

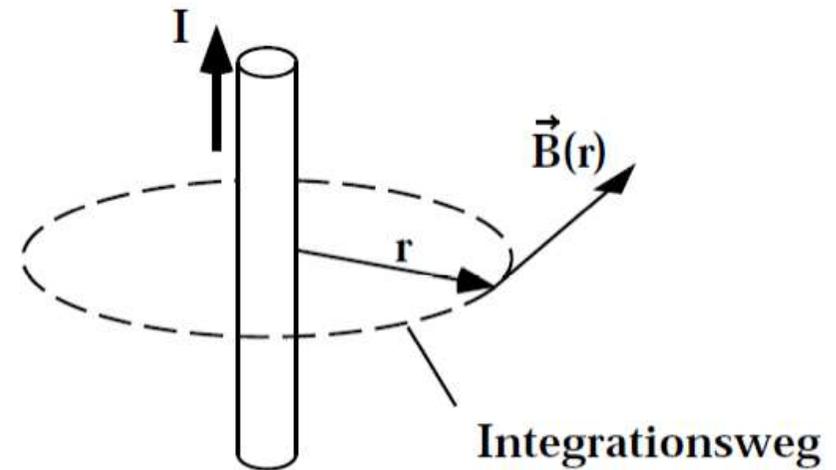
Anwendung des Ampèreschen Gesetzes:

Wir nehmen an, dass für einen bestimmten Abstand r , B konstant ist

$$\oint \vec{B} \, d\vec{\ell} = \oint B \, dr = \mu_0 I$$

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Dasselbe Resultat hat uns auch das Gesetz von Biot - Savart geliefert.

B-Feld im Innern einer langen Spule

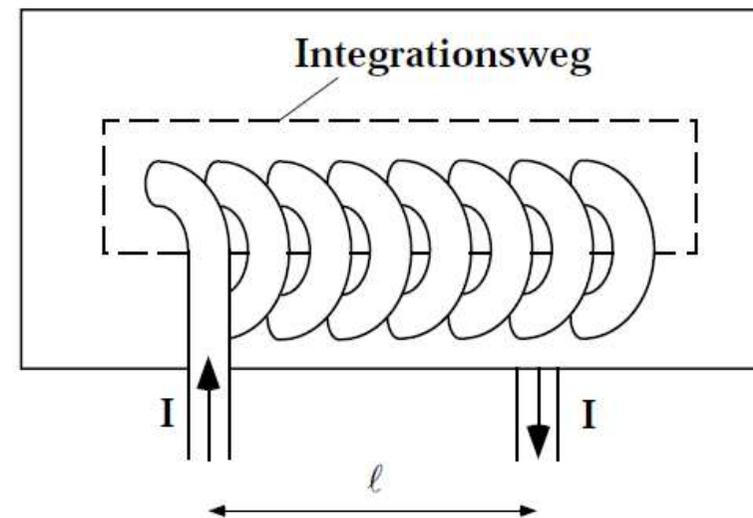
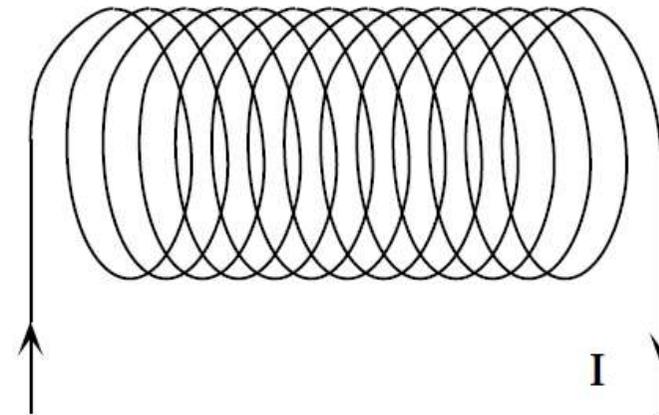
$$\oint \vec{B} \, d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{tot}}$$

$$B \cdot \ell = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

Das B-Feld ausserhalb der Spule werde vernachlässigt ($B \approx 0$)

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\ell}$$

N: Anzahl Windungen



Exp: Feldlinienbilder Kreisstrom, Spule, perm. Magnet
Feldstärke der Spule mit Hallsonde

Magnetic Resonance Imaging MRI



B=1.5-7T

MRI-Magnet

$B=1.5T$

$I=230A$

$L=2m$

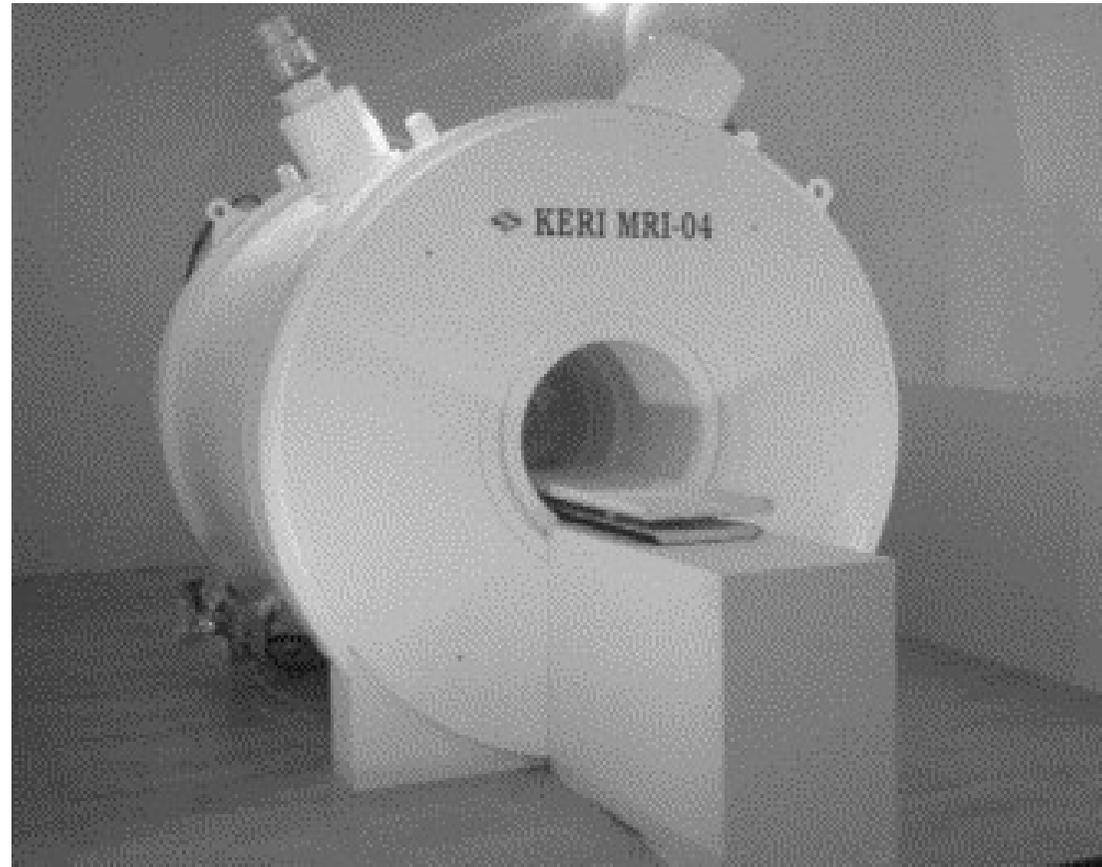
$d=80cm$

Feldhomogenität:

10ppm

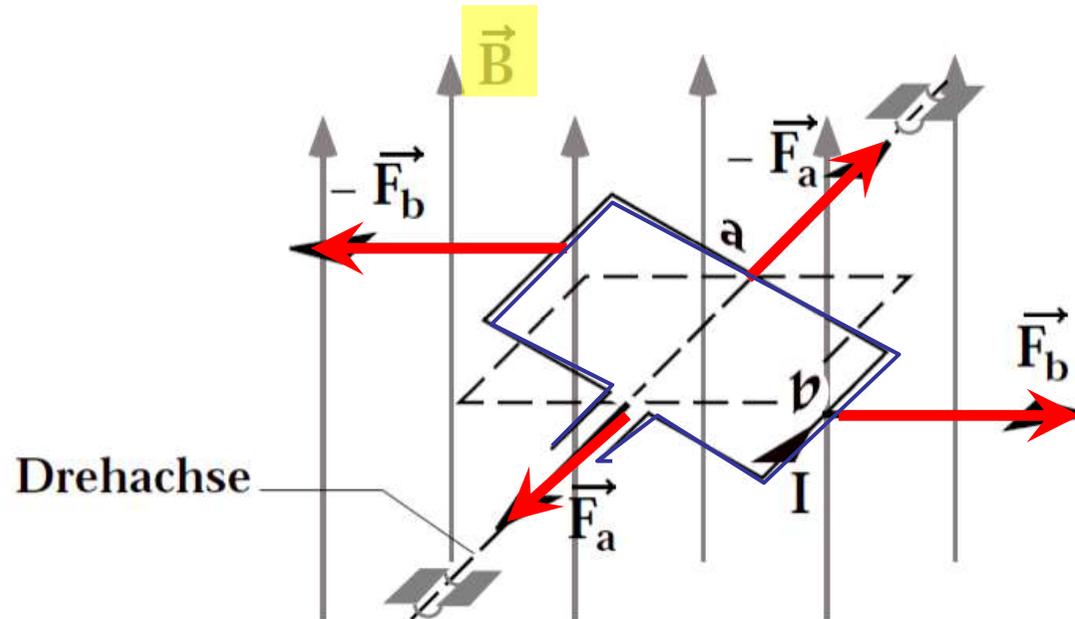
Flüssig-Helium-Tank: 2300Liter

NbTi



7.6 Der magnetische Dipol

Drehmoment auf eine Stromschleife im B - Feld



Kräfte \vec{F}_a und $-\vec{F}_a$ in Richtung der Drehachse heben sich auf und bewirken kein Drehmoment.

$$|\vec{F}_b| = b \cdot I \cdot B$$

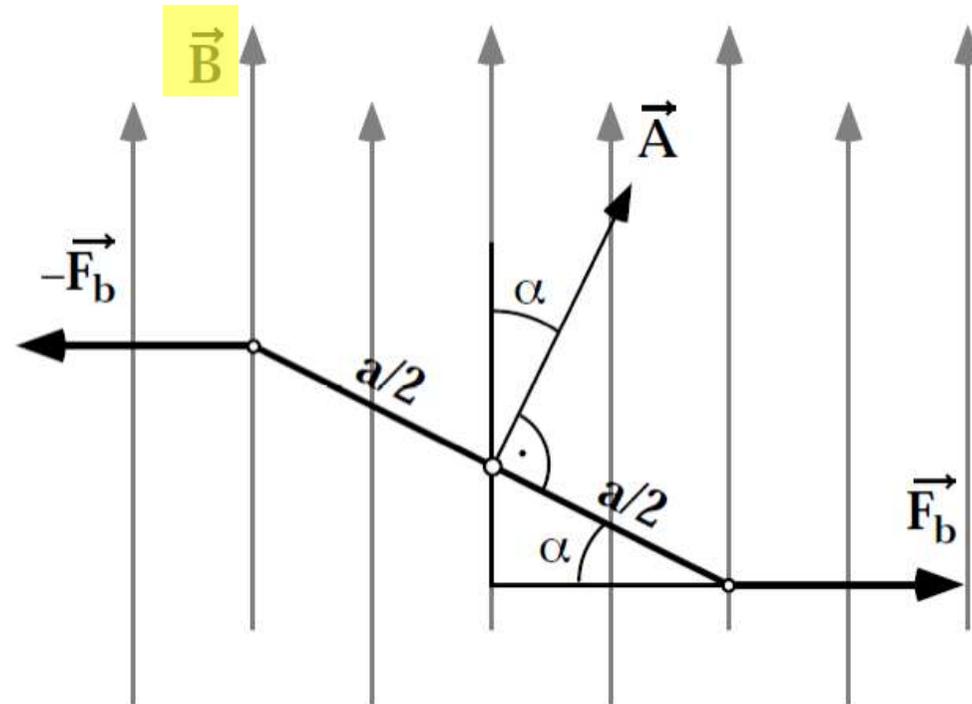
Drehmoment durch Kräfte \vec{F}_b und $-\vec{F}_b$

$$|\vec{M}| = 2 \frac{a}{2} \cdot F_b \sin \alpha$$

$$|\vec{M}| = a \cdot b \cdot I \cdot B \sin \alpha$$

oder vektoriell

$$\vec{M} = I \vec{A} \times \vec{B}$$



Exp: Dipol im B-Feld
Anzeiginstrumente
Elektromotor (Leybold)

Definition:

Der **magnetische Dipol \vec{m}** einer Stromschleife ist gegeben durch:

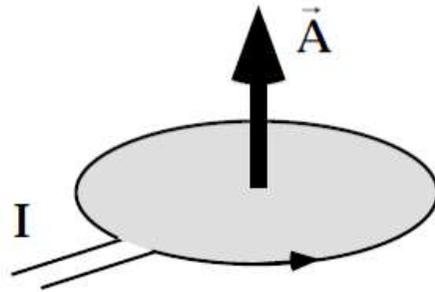
$$\vec{m} = I \vec{A}$$

Damit ergibt sich für das Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Analogie zwischen magnetischem (\vec{m}) und elektrischem (\vec{p}) Dipol:

magnetischer Dipol

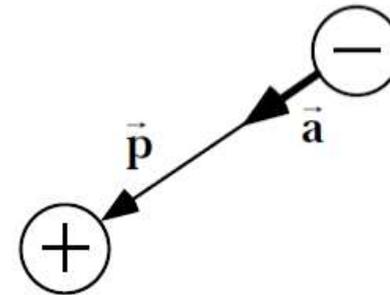


$$\vec{m} = I \cdot \vec{A}$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Drehmoment auf \vec{m}
im B-Feld

elektrischer Dipol

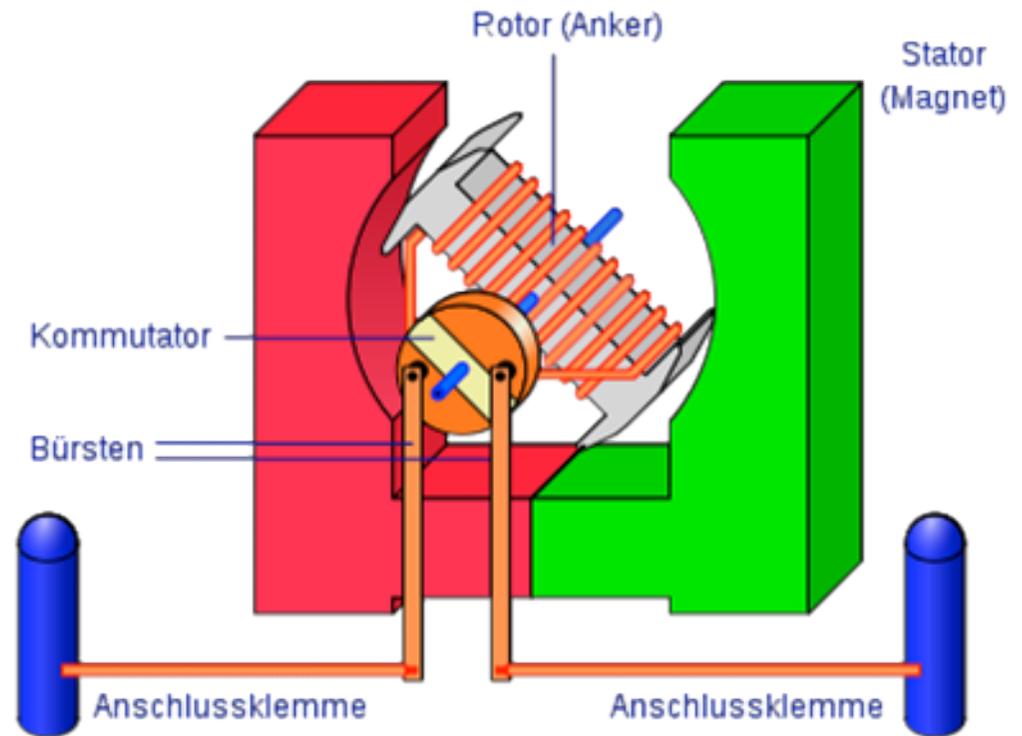
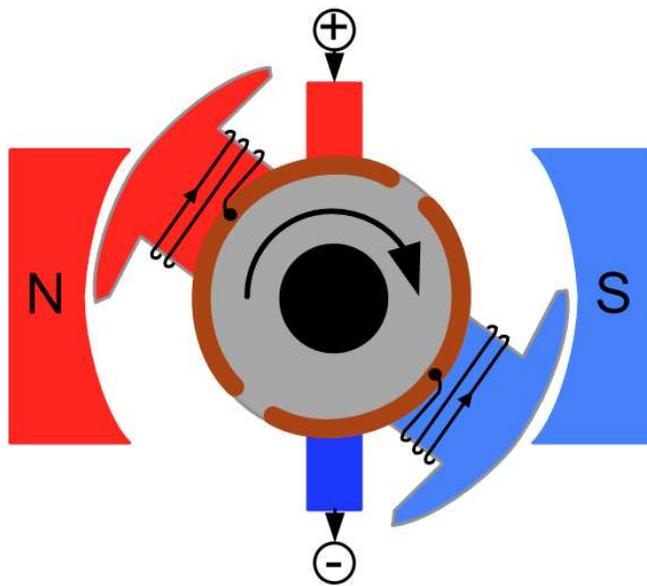


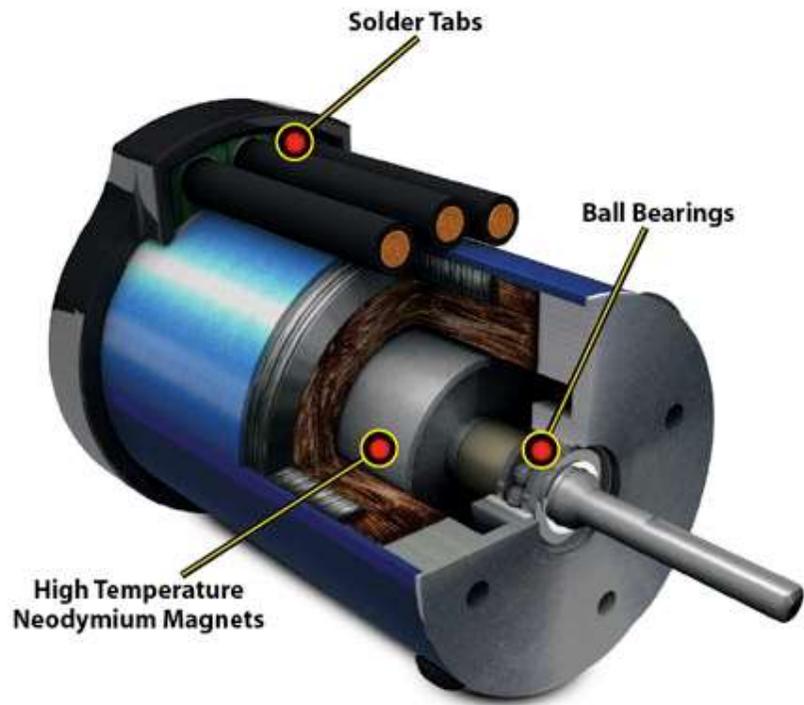
$$\vec{p} = q \cdot \vec{a}$$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Drehmoment auf \vec{p}
im E-Feld

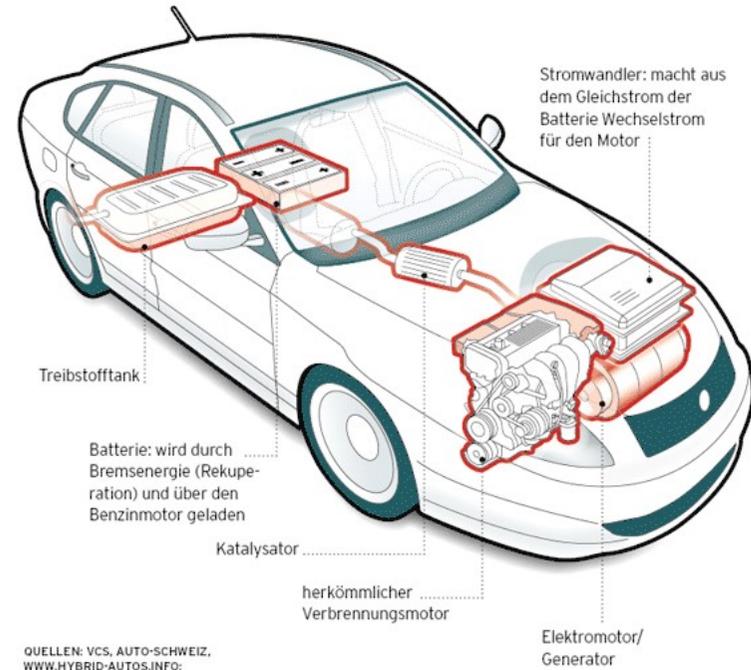
Gleichstrommotor







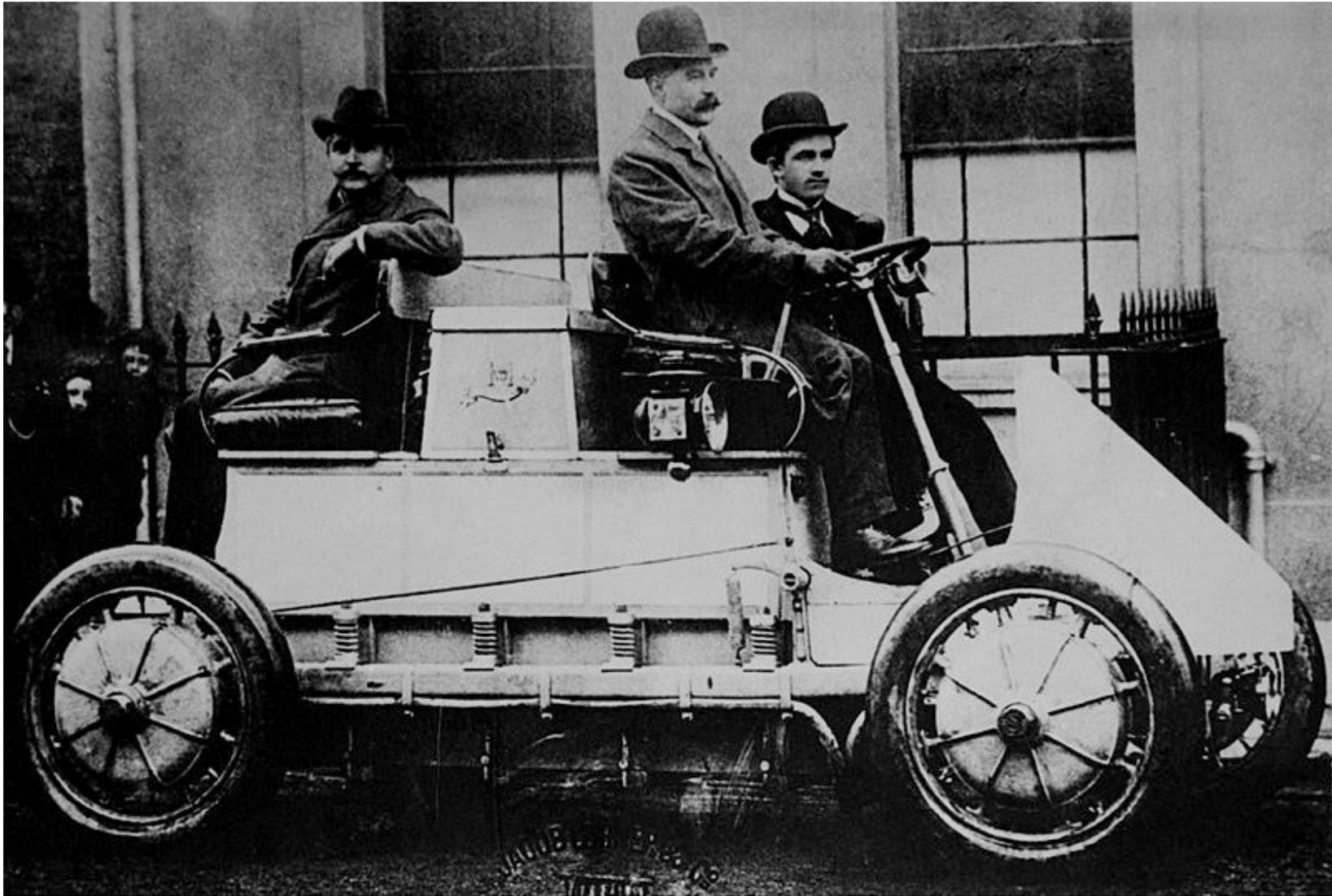
Tesla



Hybrid

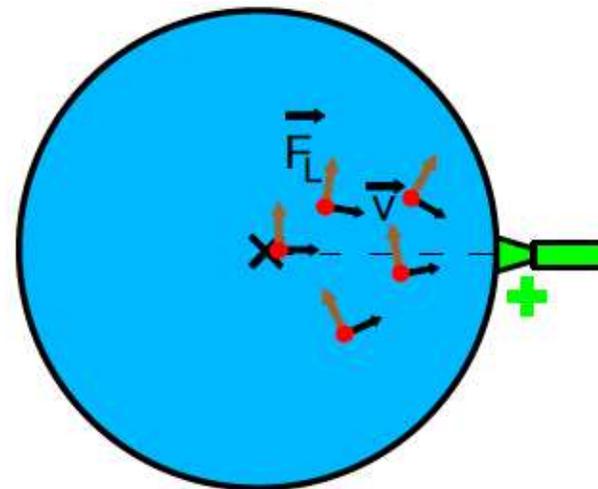
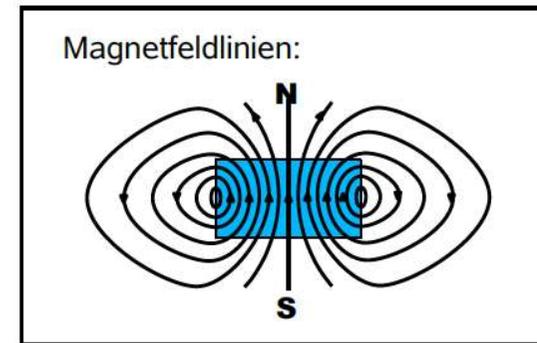
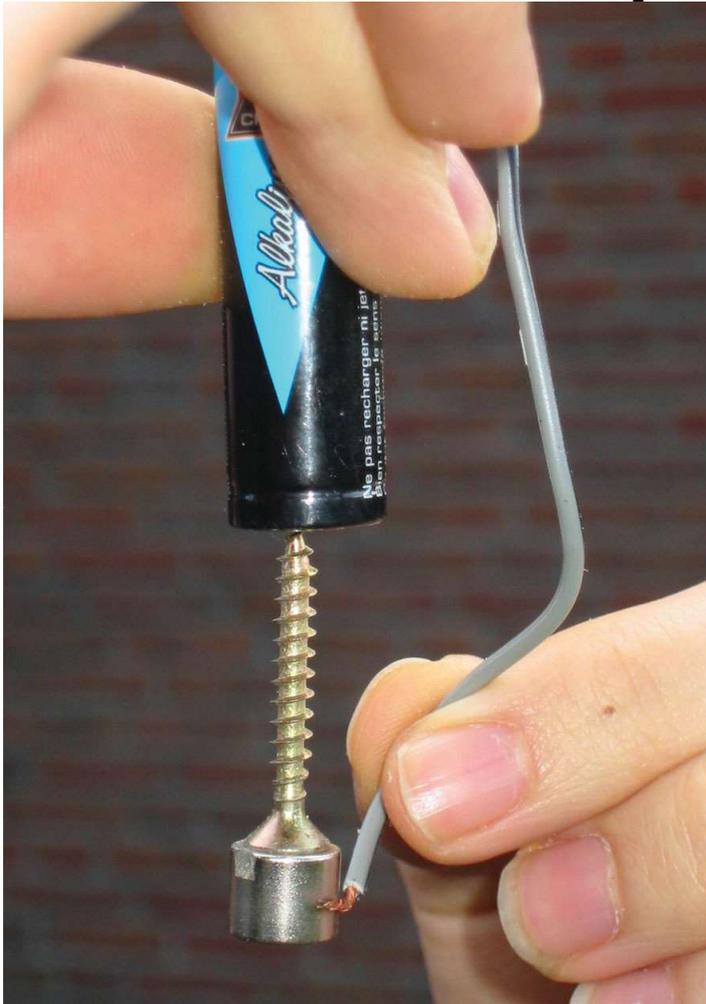
Active Wheel





Elektroauto (4-Rad Antrieb) Lohner-Porsche 1900!

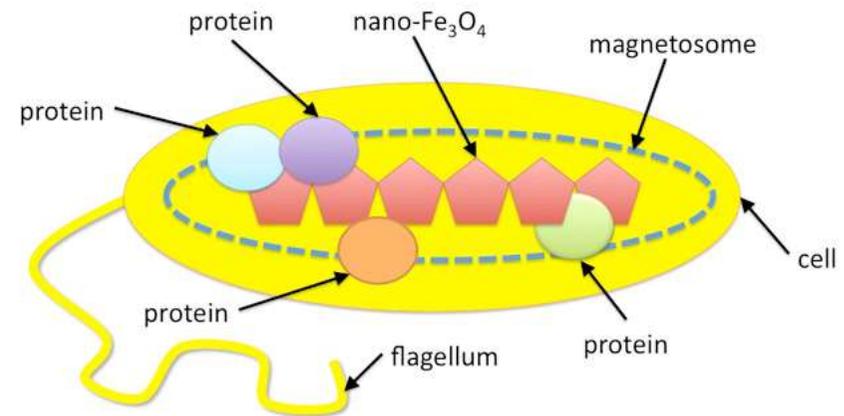
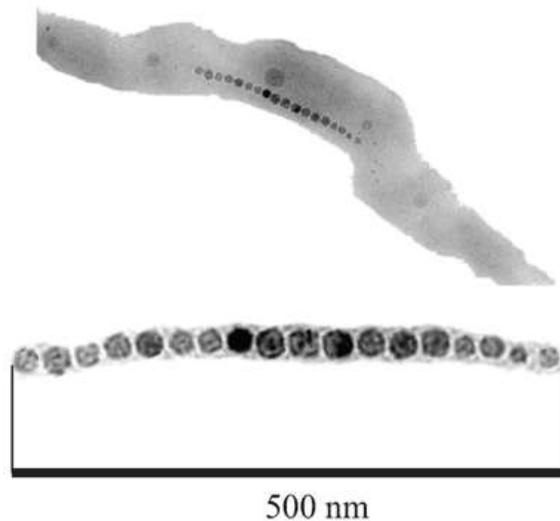
Unipolarmotor



Lorentzkraft bewirkt Ablenkung der Elektronen und damit Drehmoment

Magnetotactic Bacteria

Magnetisches Moment = 10^{-16} Am²



Magnetospirillum gryphiswaldense bacteria

U. Gysin et al. Nanotechnology **22**, 285715 (2011)

15-20 Ferrit-Nanopartikel (42nm) sind zu einer kleinen Magnethadel aufgereiht => Bakterien können sich im Magnetfeld orientieren

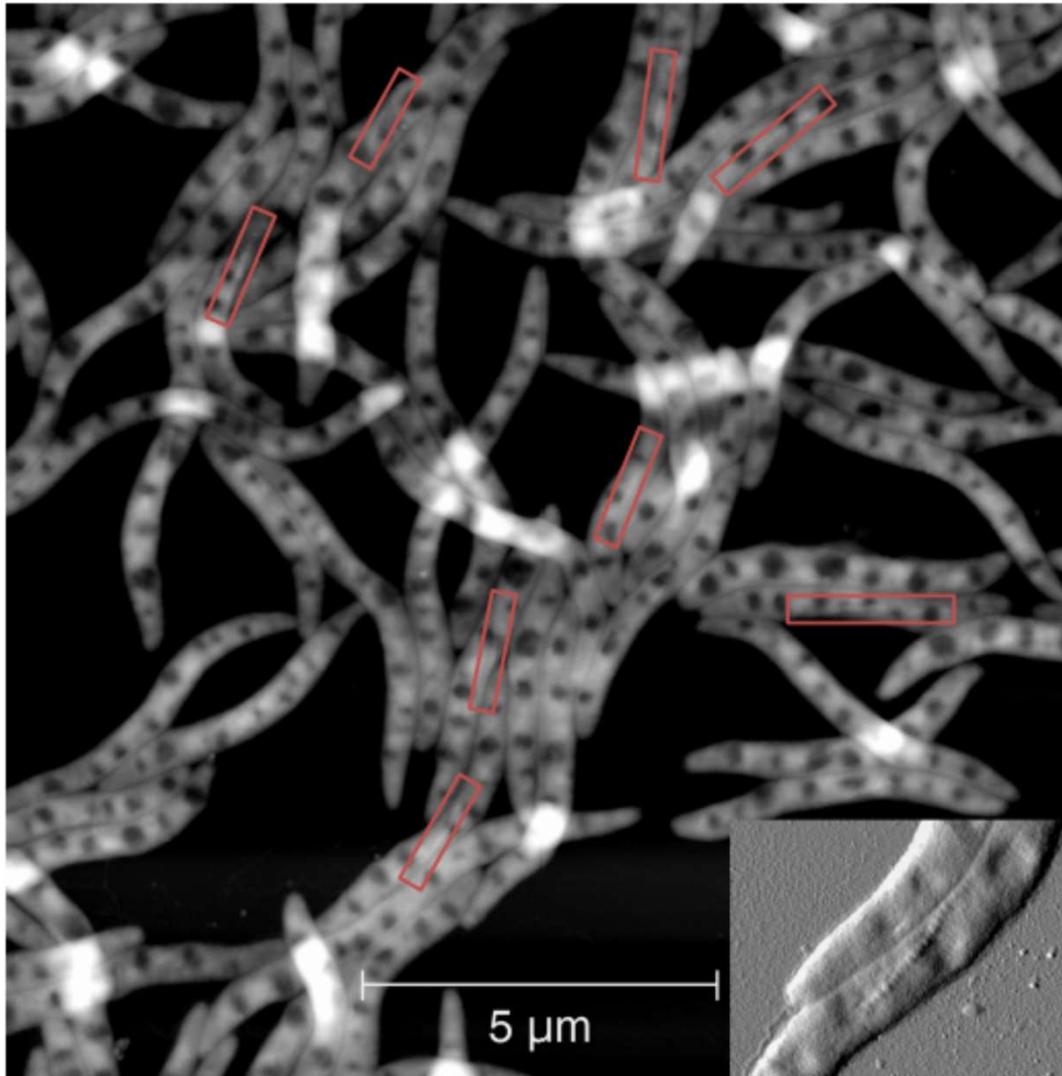
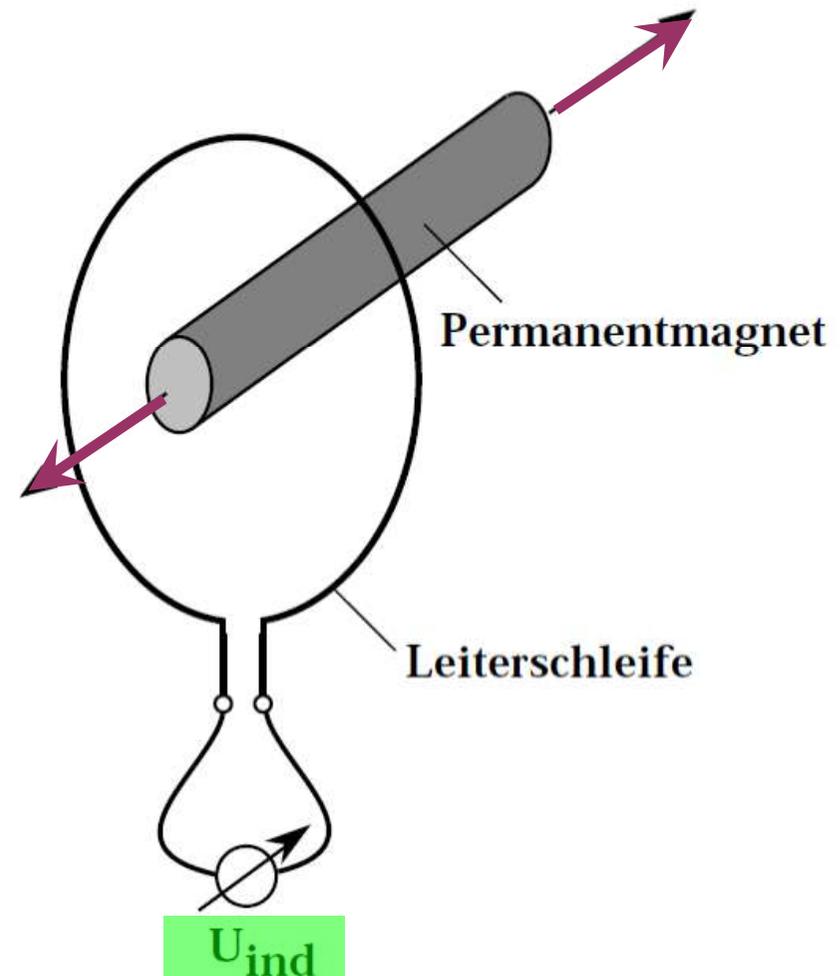


Figure 3.9: AM-AFM topography and amplitude image (inset) of the chemically treated bacteria. Some of the magnetosome chains are indicated by the red rectangles in the topography image. The amplification inset shows an amplitude image of an entire intact magnetosome chain.

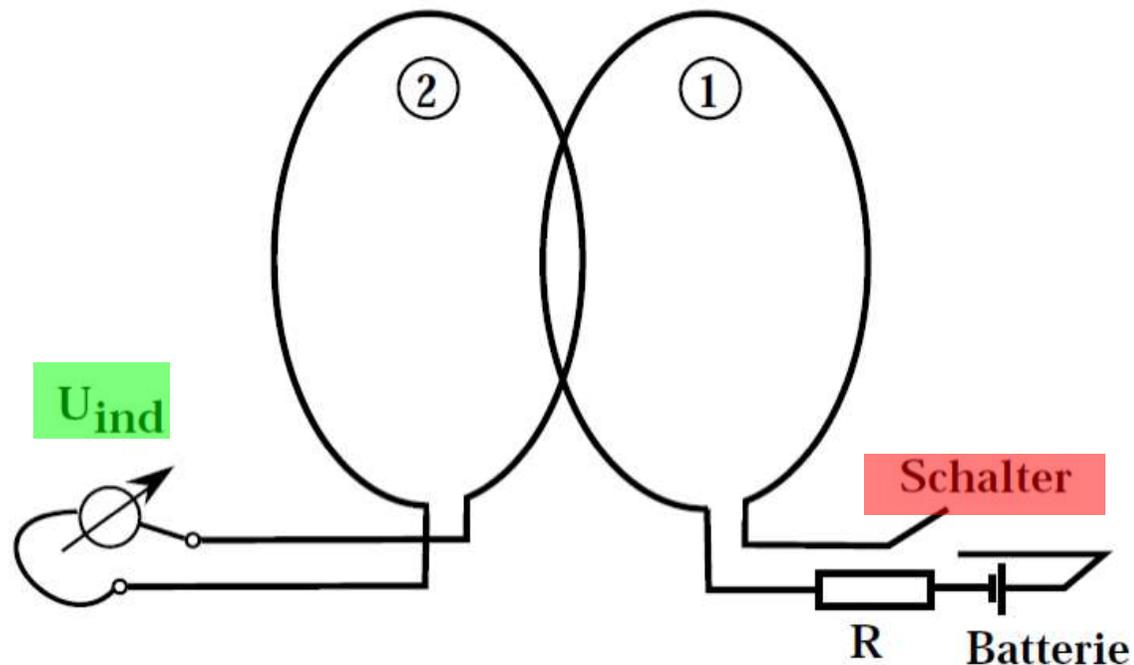
8.1 Induktionsphänomene

a) Beim Bewegen des Permanentmagneten zeigt das Voltmeter in der Leiterschleife einen Ausschlag. Die in der Leiterschleife entstehende elektrische Spannung bezeichnen wir als induzierte Spannung oder

Induktionsspannung U_{ind} .



b) Wird der Schalter im Stromkreis 1 geschlossen oder geöffnet, so wird kurzzeitig im Stromkreis 2 eine Spannung U_{ind} induziert.



Exp: Spule und Permanentmagnet $N=1,4$, 100
Kippspule (Strom on/off), Windungen verändern, kleine Spule kippen

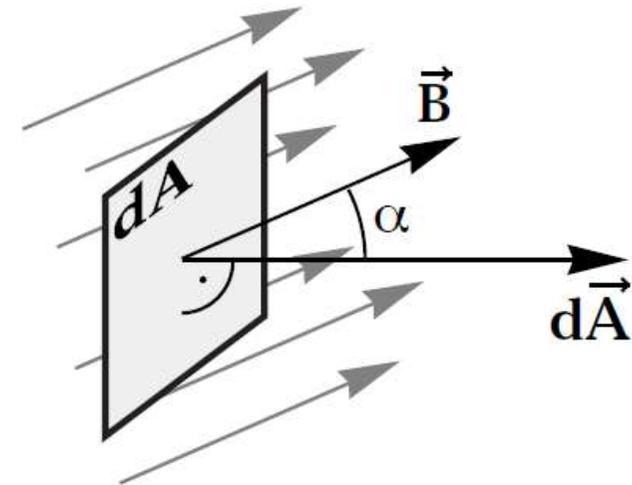
Die Experimente zeigen, dass die in einem Stromkreis induzierte Spannung mit der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ durch den Stromkreis zusammenhängt.

Definition des **magnetischen Flusses**

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \, dA \cos \alpha$$

Falls \vec{B} über eine Ebene A konstant ist und $\vec{B} \perp A$, dann gilt **$\Phi = B \cdot A$**

Einheit des magnetischen Flusses Φ : **$1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ Weber} = 1 \text{ Wb}$**



8.2 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Für die induzierte Spannung in einem Stromkreis gilt dann

$$U_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \dot{\Phi}$$

Induktionsgesetz von Faraday, 1831

(Michael Faraday, 1791 - 1867)

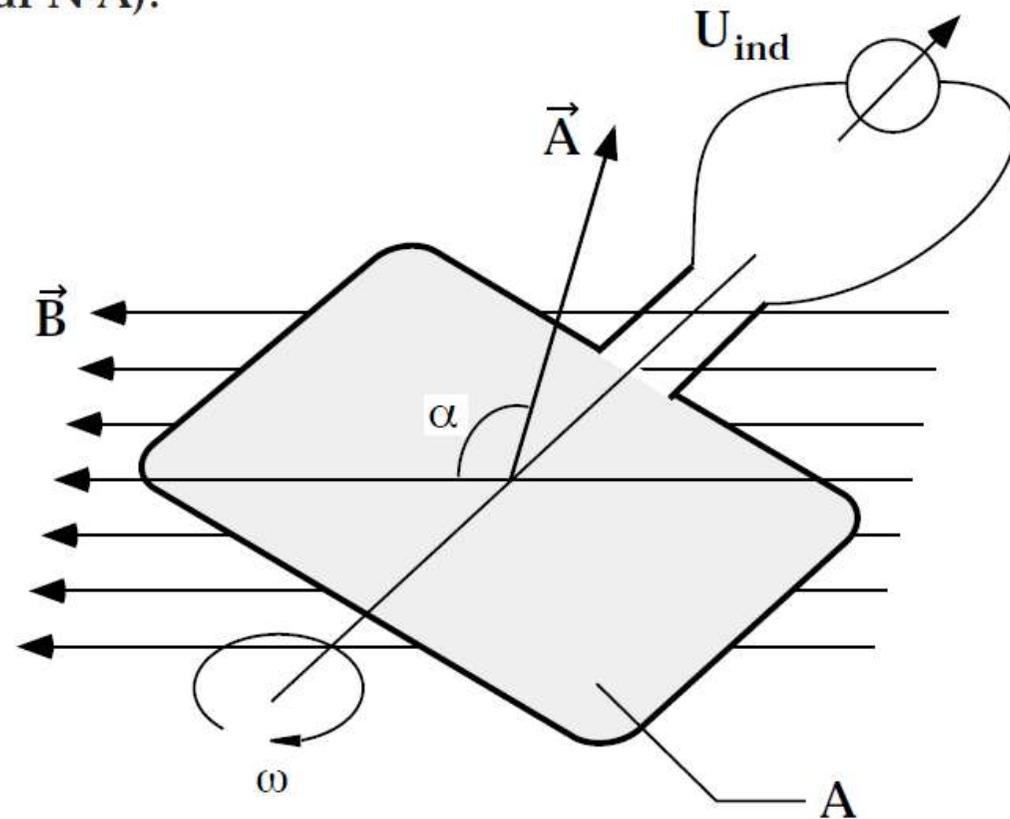
Die Entstehung einer Induktionsspannung U_{ind} kann man sich auch erklären durch die Wirkung der Lorentzkraft auf die Ladungsträger in der Leiterschleife, wenn diese relativ zu einem B-Feld bewegt wird.

Exp: U_{ind} durch Verformen der Spule ($\Rightarrow \phi$ ändern)

- Wird an Stelle einer einfachen Leiterschleife eine Spule mit **N Windungen** verwendet, so erhöht sich U_{ind} auf das N-fache (Serieschaltung von N Spannungsquellen oder Vergrößerung der Fläche A auf $N \cdot A$).

$$U_{\text{ind}} = -N \dot{\Phi}$$

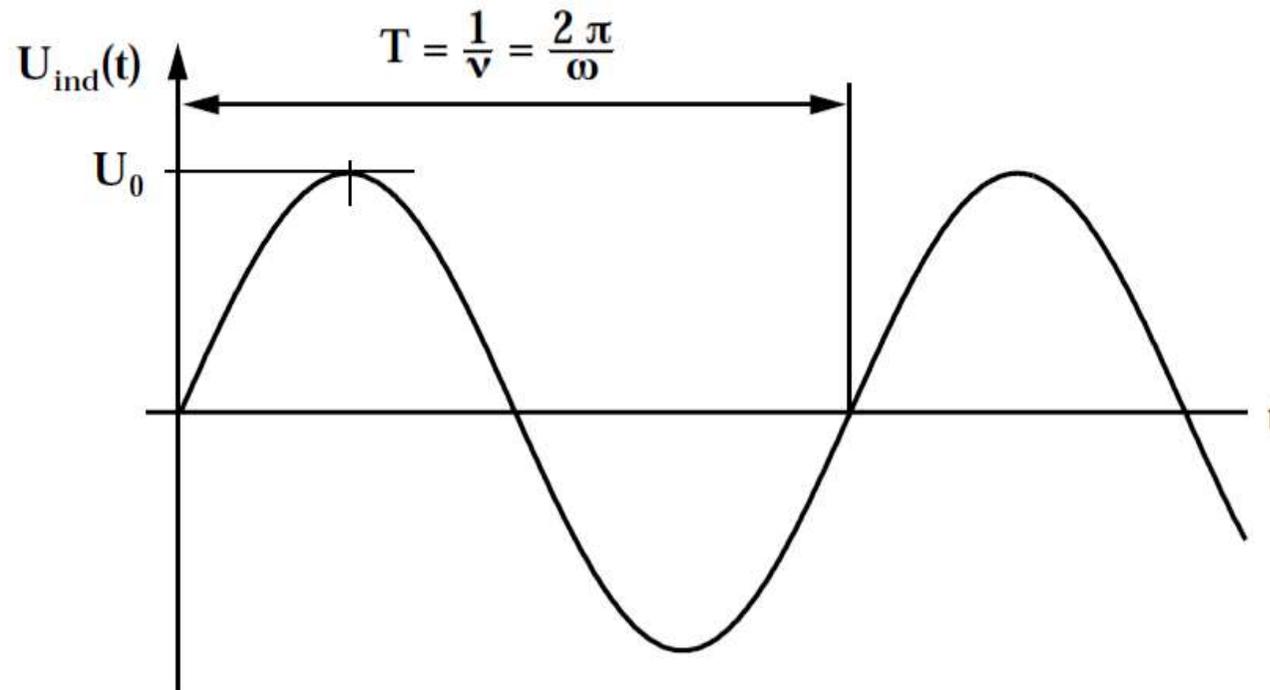
- Falls wir eine Leiterschleife betrachten, die in einem B-Feld mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit **ω rotiert**, so erhalten wir für die Induktionsspannung U_{ind}



$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \cdot A \frac{d(\cos \alpha)}{dt} = -B \cdot A \frac{d(\cos \omega t)}{dt}$$

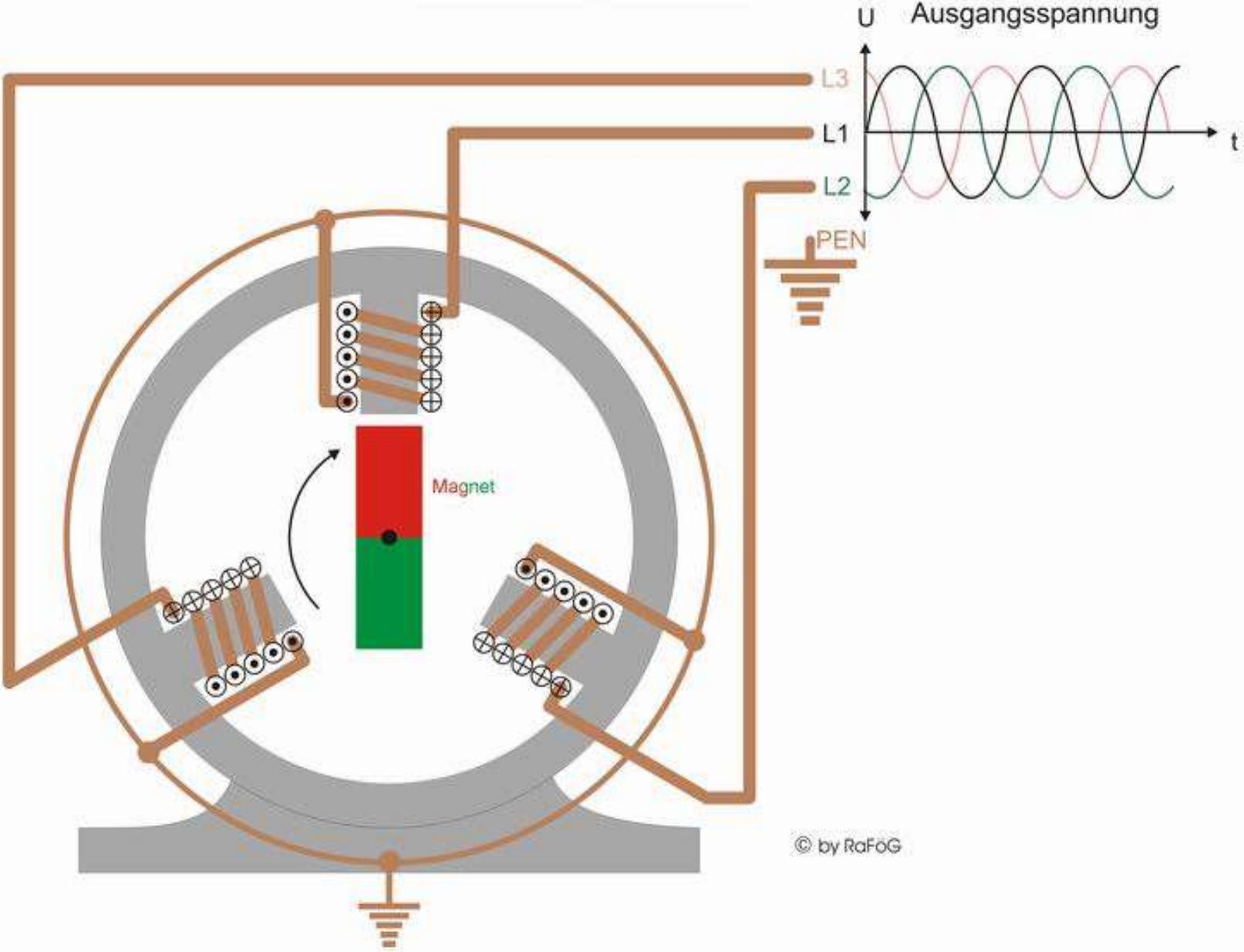
$$U_{\text{ind}} = +B A \omega \sin \omega t = U_0 \sin \omega t$$

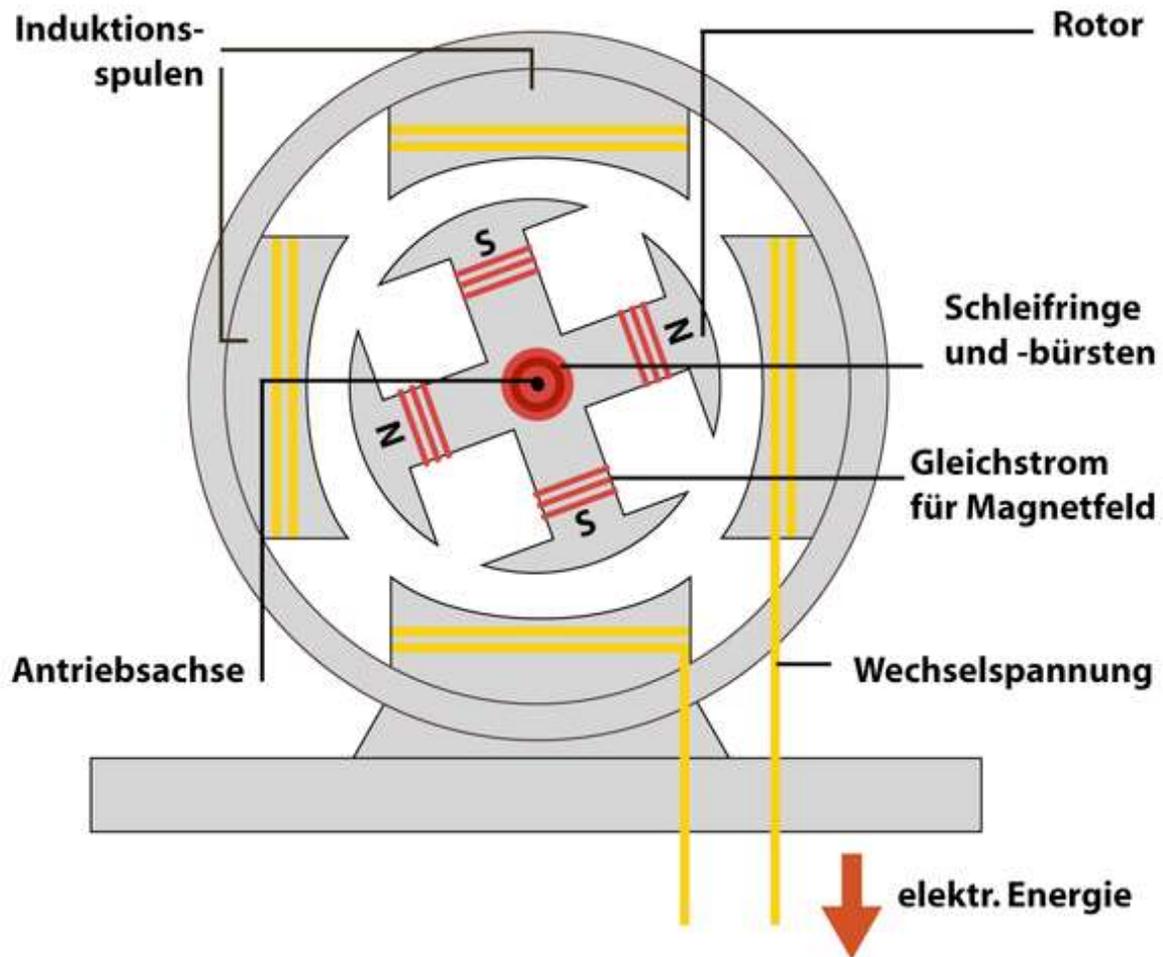
Eine zeitlich sich ändernde Spannung, die wir durch Sinus- oder Cosinusfunktionen beschreiben können, bezeichnen wir als (harmonische) Wechselspannungen. Diese haben in der Elektrotechnik eine wichtige Bedeutung (siehe Kapitel 13 ff).



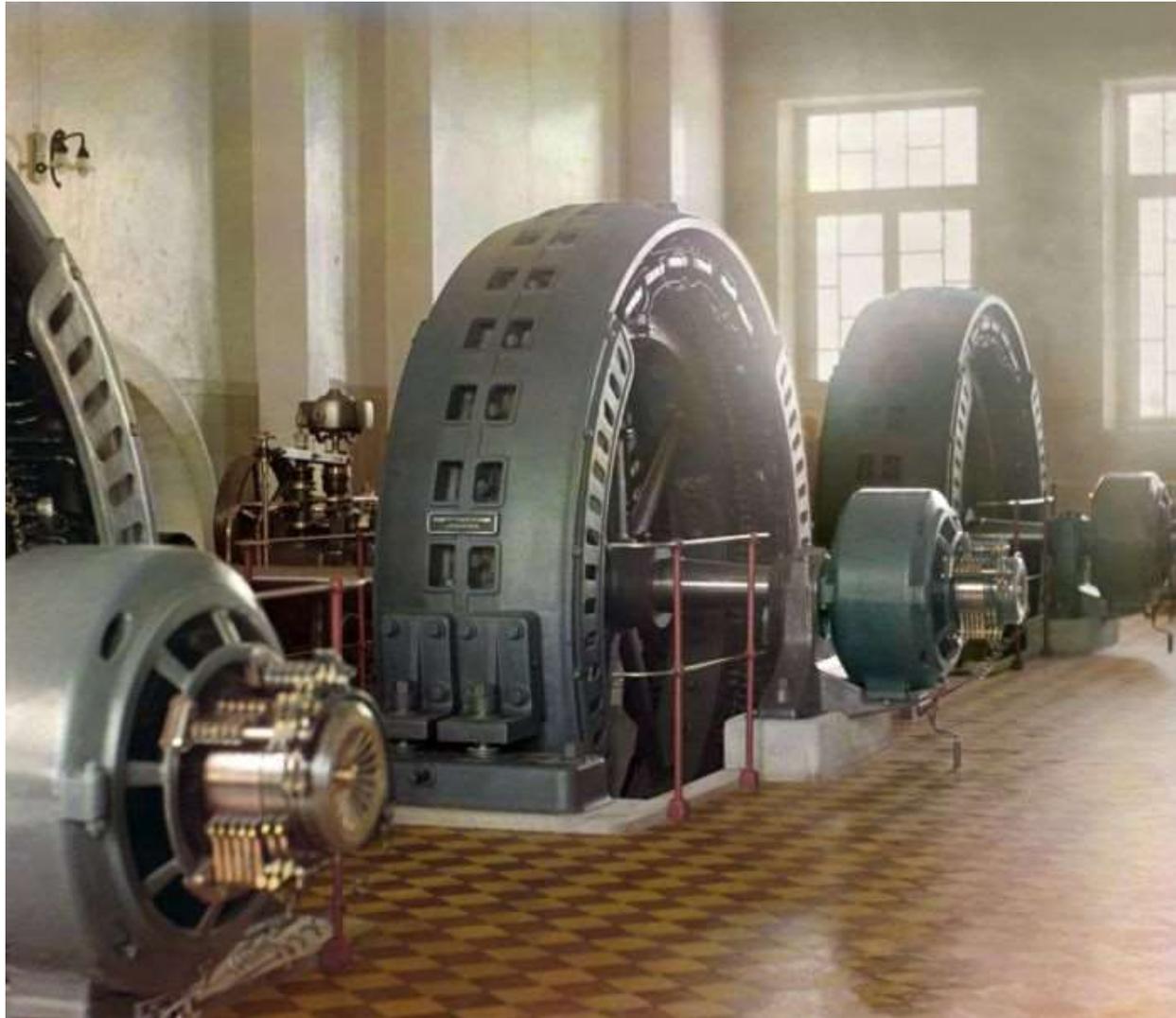
Exp: Wechselspannungsgenerator ($U \propto \omega$)

Drehstromgenerator





Wechselstromgenerator



z.B. Birsfelden



Mittlere Stromjahresproduktion: 208 Millionen kWh (Basel braucht ca. 1500 Mio kWh)

Leistung: 42 MW

Nebenprodukt vom : Nahwärmeverbund mit Abwärme der Generatoren

12.5 Mio kWh mit Wärmepumpen

Generator



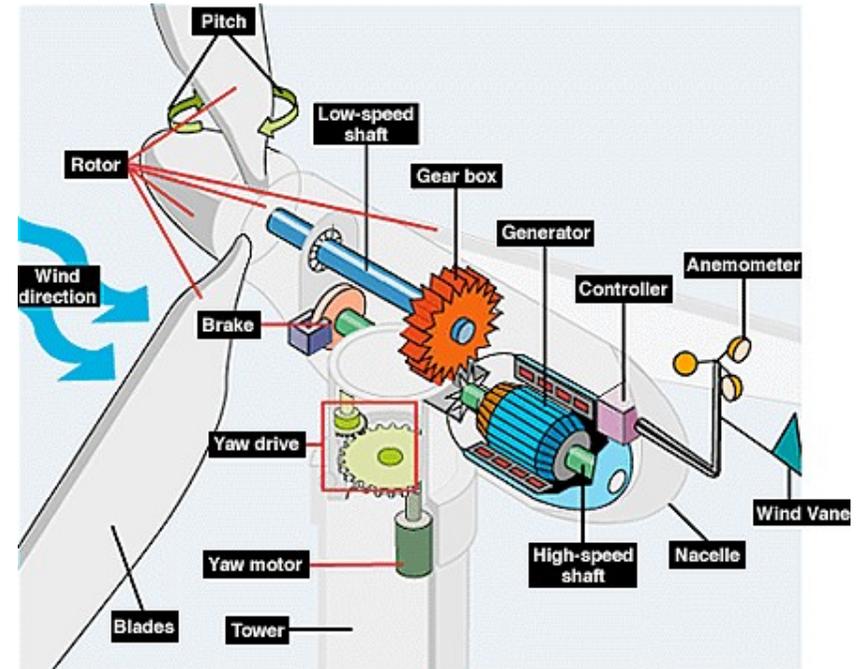
1-6kW

Kleinwindkraftwerk



2-6kW

Off-shore Windturbine



P=5MW

8.3 Die Lenzsche Regel

Nach Heinrich Friedrich Lenz (1804 - 1865) ist die Induktionsspannung so gerichtet, dass der daraus resultierende Induktionsstrom ein B-Feld erzeugt, das der Feldänderung, die U_{ind} erzeugt, entgegenwirkt.

Das Minuszeichen im Induktionsgesetz ist auf diesen Sachverhalt zurückzuführen.

Induktionsgesetz

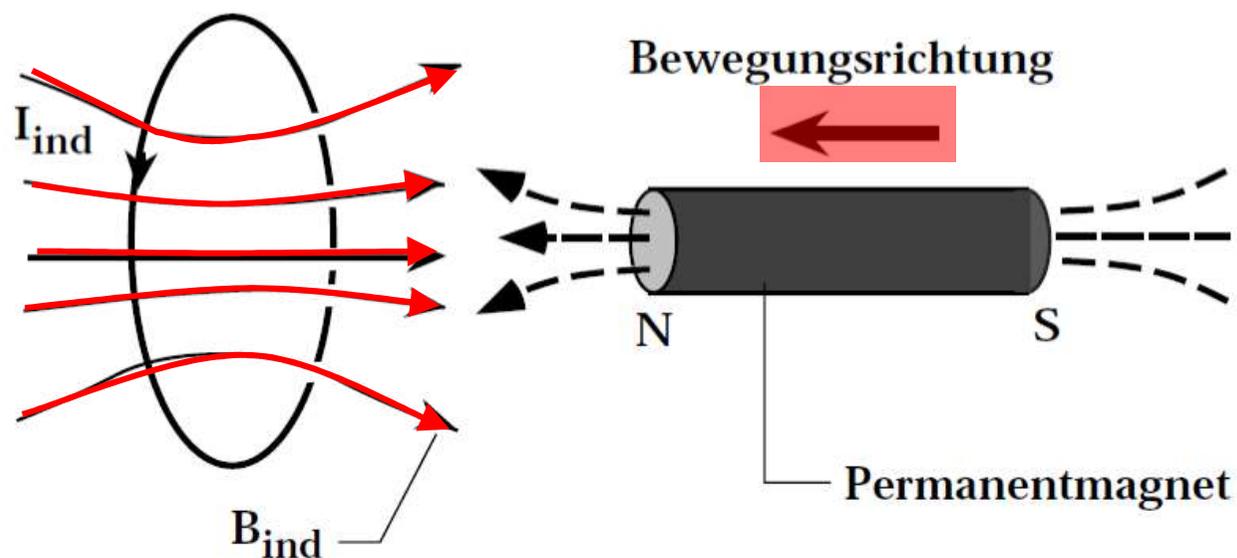
$$U_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \dot{\Phi}$$

Lenz'sche Regel:

Eine induzierte Spannung wirkt immer der sie verursachenden Änderung des Flusses entgegen.

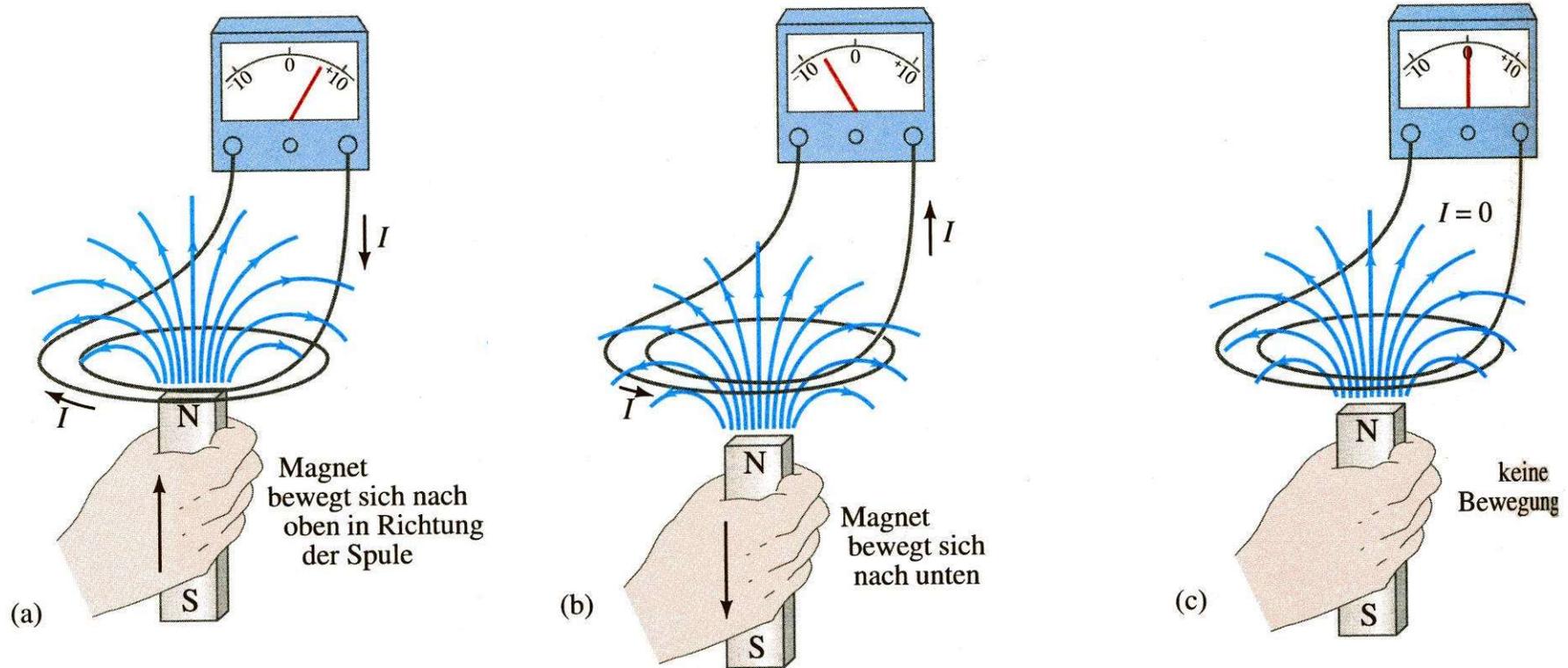


Beispiel:



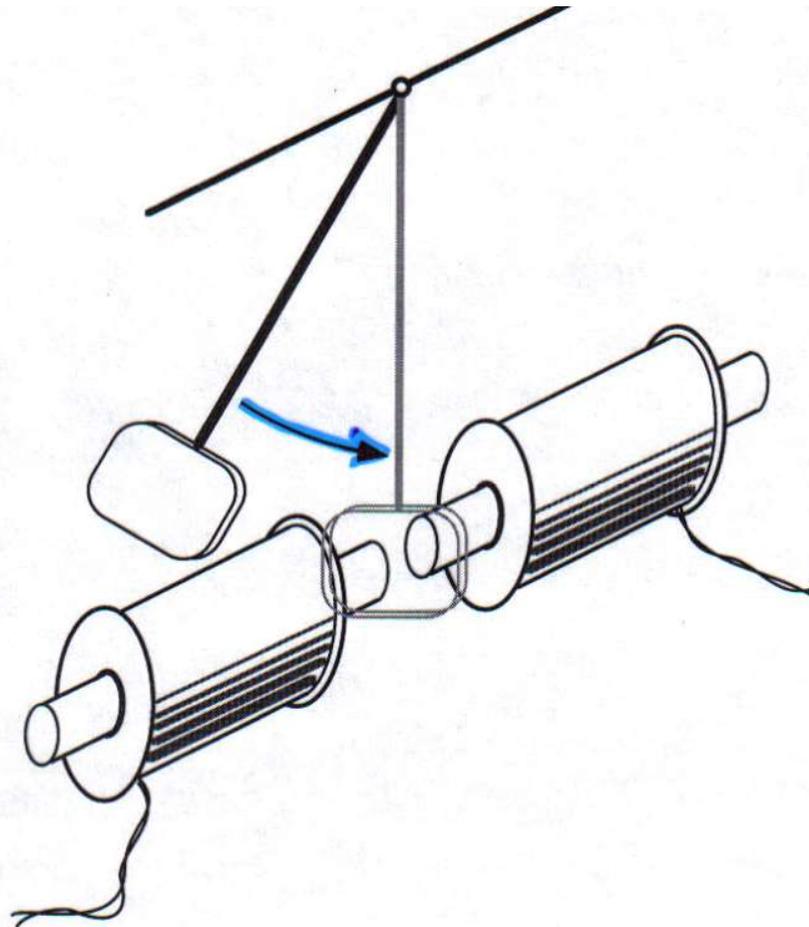
Wird der Permanentmagnet nach links bewegt, so nimmt das B-Feld am Ort der Leiter-schleife zu. Der induzierte Strom I_{ind} ist nun so gerichtet, dass er ein B-Feld aufbaut, das der Feldzunahme durch den Permanentmagneten entgegenwirkt. Da sich die beiden B-Felder abstoßen, wirkt der Bewegung des Permanentmagneten eine Kraft entgegen.

Beispiel zur Lenz'schen Regel

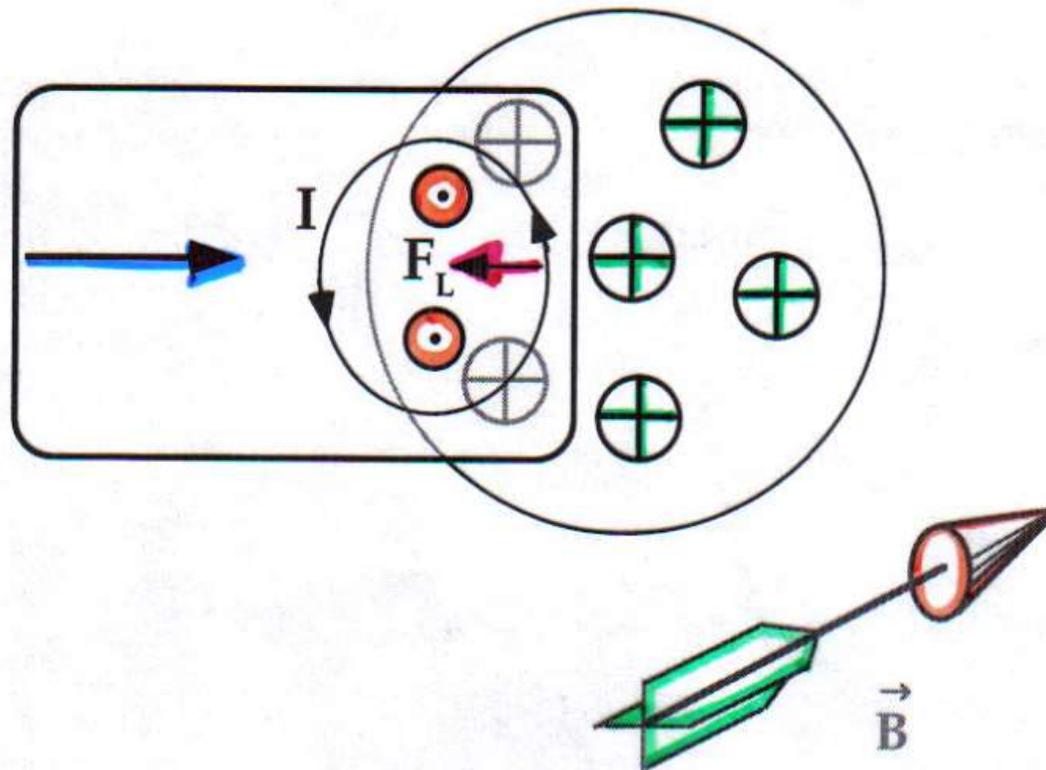


Exp: Waltenhofsches Pendel
Elihu-Thomson

Waltenhofen 'sches Pendel (Wirbelstrombremse)



Waltenhofen 'sches Pendel



Wirbelstromdämpfung



Fitness-Gerät mit Wirbelstrombremse

Wirbelstrombremse
(auch für Lastwagen, Bahnen...)



©OMICRON Vakuumphysik GmbH, 1998

Antivibrations-Dämpfungstisch
für hochauflösendes STM/AFM

Wirbelstrombremse für den ICE 3

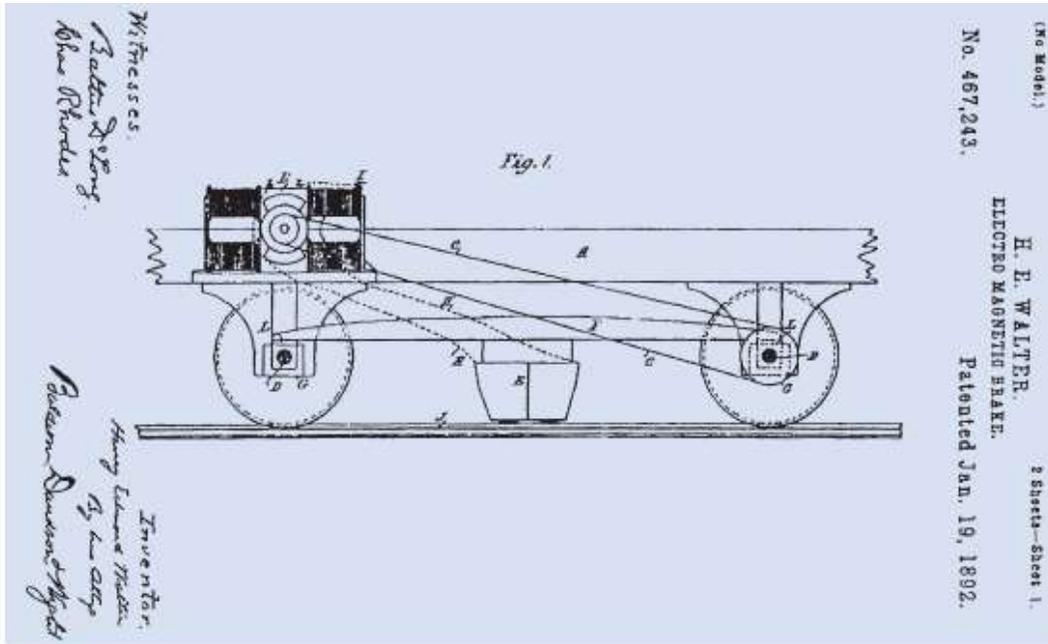


Bild 1: Skizze der LWB aus der Patentschrift von 1892

Bild 2: Verteilung der Bremsausrüstung im Halbzug ICE 3

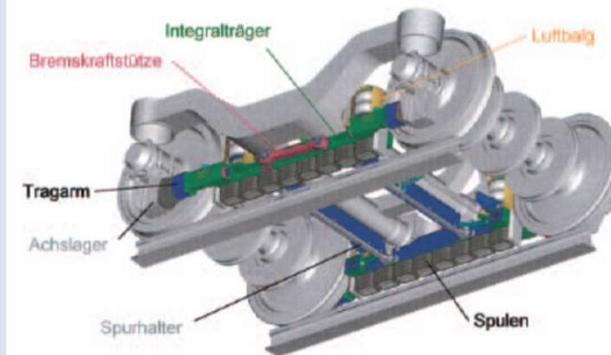


Bild 3: Bauteile der LWB im Drehgestell



Endwagen (EW 8)
4 angetriebene Achsen
elektrische Bremse
Radbremsscheiben

Trafowagen (TW 7)
4 Laufachsen
Wirbelstrombremse
Wellenbremsscheiben

Stromrichterwagen (SW 6)
4 angetriebene Achsen
elektrische Bremse
Radbremsscheiben

Mittelwagen (MW 5)
4 Laufachsen
Wirbelstrombremse
Wellenbremsscheiben

8.4 Die Selbstinduktion

Wie wir in Abschnitt 8.1 gesehen haben, kann durch eine erste Spule (oder Leiter-schleufe) in einer zweiten Spule eine Spannung U_{ind} induziert werden. Die Feld-änderung wird jedoch auch von der ersten Spule wahrgenommen und führt zu einer Selbstinduktion. Diese hängt neben der **Leitergeometrie** von der zeitlichen Strom-änderung $\frac{dI}{dt}$ ab, da diese proportional zu $\frac{d\Phi}{dt}$ ist.

Definition der **Induktivität L (oder Selbstinduktion)**:

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt} = -L\dot{I}$$

Einheit von L: $1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ Henry} = 1 \text{ Hy}$

Berechnung der Induktivität einer langen, dünnen Spule

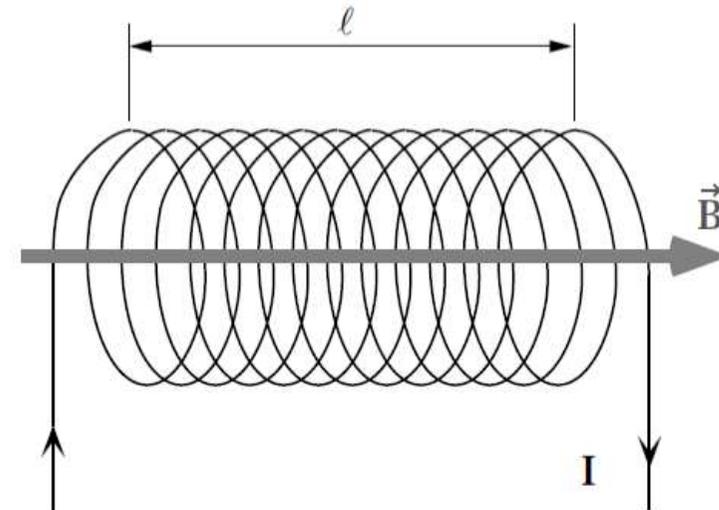
B-Feld im Spuleninnern (nach Abschnitt 7.5)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{N \cdot \mathbf{I}}{\ell}$$

$$\Phi = \mu_0 \frac{N \cdot \mathbf{I} \cdot A}{\ell} \quad (= \mathbf{B} \cdot A)$$

$$U_{\text{ind}} = -N \dot{\Phi} = -\mu_0 \frac{N^2 \dot{\mathbf{I}} A}{\ell} = -L \dot{\mathbf{I}}$$

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$$



N: Anzahl Windungen

Induktivität der langen, dünnen Spule (ohne Eisenkern)

9. Energie des B-Feldes

Um ein B-Feld in einer Spule aufzubauen ist Arbeit notwendig.

Wir nehmen an, dass wir an einer Spule mit der Induktivität L den Strom von 0 auf I_{\max} erhöhen. Dabei muss gegen die Selbstinduktionsspannung U_{ind} Arbeit verrichtet werden

$$dW = -U_{\text{ind}} I dt = +L \frac{dI}{dt} I dt = L I dI$$

$$W = L \int_0^{I_{\max}} I dI = \frac{1}{2} L I_{\max}^2$$

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}$$

andererseits ist

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \quad \text{und} \quad I = \frac{B \cdot \ell}{\mu_0 N}$$

eingesetzt

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\cancel{N^2} A}{\ell} \frac{B^2 \cdot \ell^2}{\mu_0^2 \cancel{N^2}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \underbrace{A \ell}_{\text{Volumen } V}$$

$$\frac{W}{V} = \frac{E_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Energiedichte des B-Feldes

Exp: Zündspule

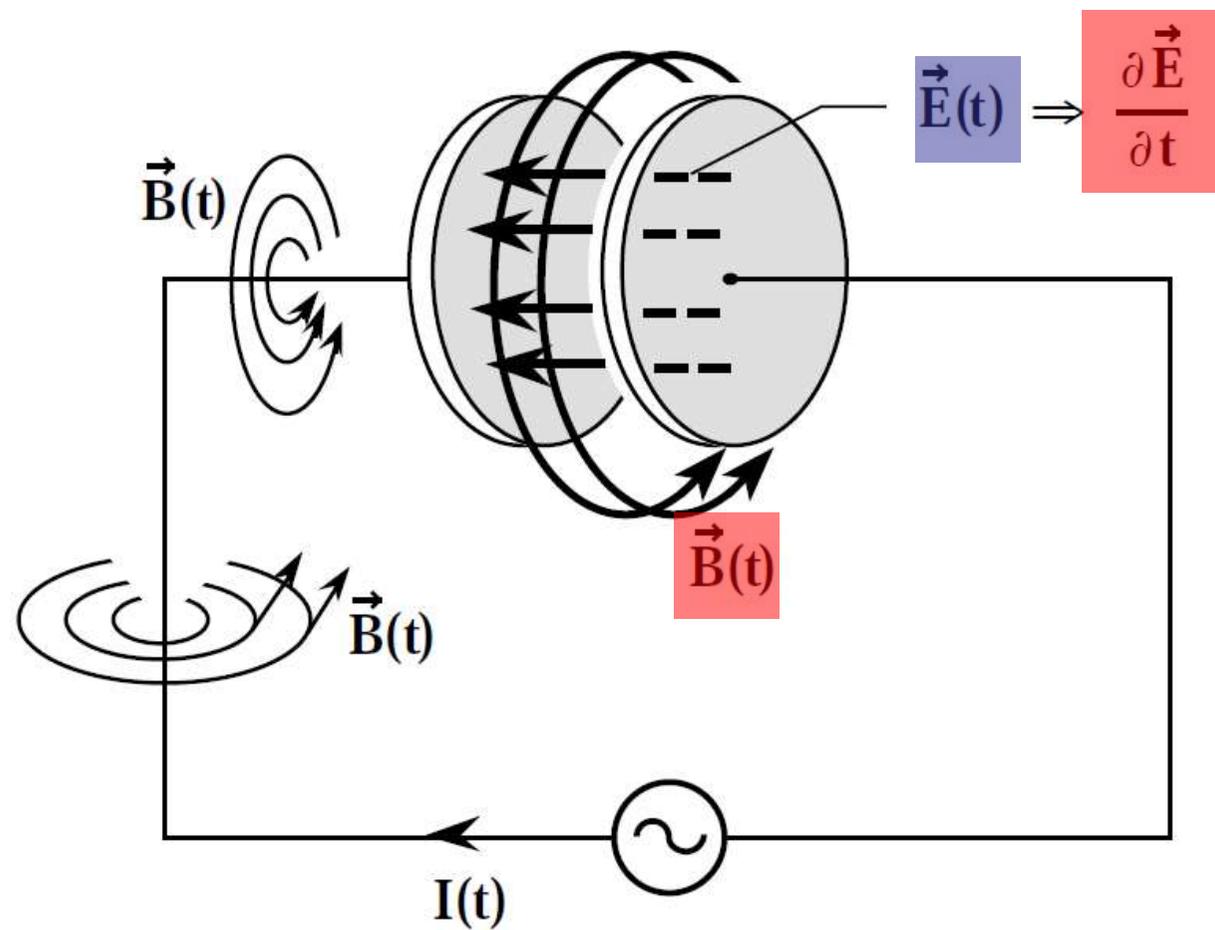
10. Maxwell'scher Verschiebungsstrom und Maxwell'sche Gleichungen

10.1 Maxwell'scher Verschiebungsstrom

In Kapitel 6 haben wir gesehen, dass ein stromdurchflossener Leiter von einem \vec{B} -Wirbelfeld umgeben ist.

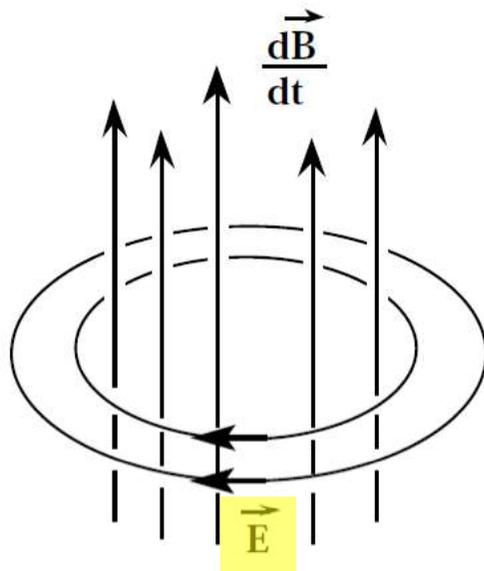
Man kann zeigen, dass auch ein zeitlich sich änderndes \vec{E} -Feld von einem \vec{B} -Feld umgeben ist.

Beispiel: Kondensator in Wechselstromkreis

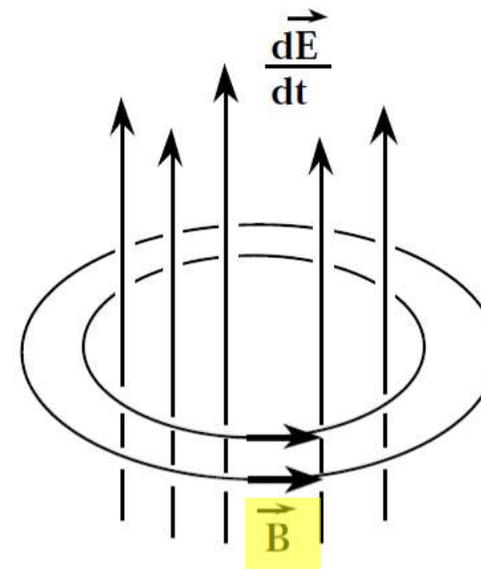


Beim Induktionsgesetz (Kap. 8) haben wir gesehen, wie ein zeitabhängiges B-Feld ($\frac{d\vec{B}}{dt}$) eine Induktionsspannung in einer Leiterschleife erzeugen kann ($U_{\text{ind}} = \oint \vec{E} d\vec{s}$).

Analog zu diesem Phänomen erzeugt also ein zeitlich änderndes E-Feld ($\frac{d\vec{E}}{dt}$) ein magnetisches Wirbelfeld ($\oint \vec{B} d\vec{s}$).



Induktion erzeugt
E-Wirbelfeld



Verschiebungsstrom erzeugt
B-Wirbelfeld

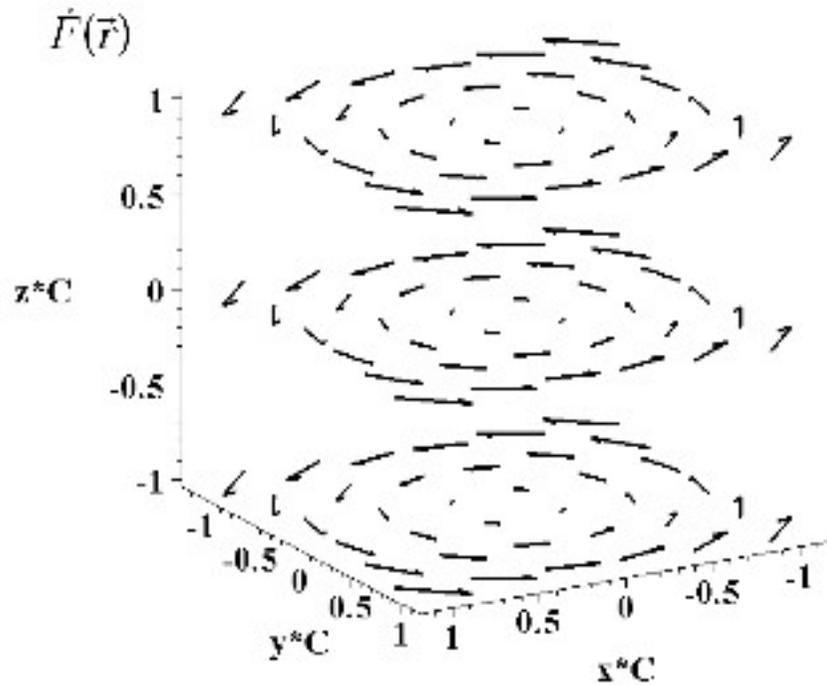
10.2 Maxwell'sche Gleichungen

310-3

(im Vakuum, $\mu = 1, \varepsilon = 1$)

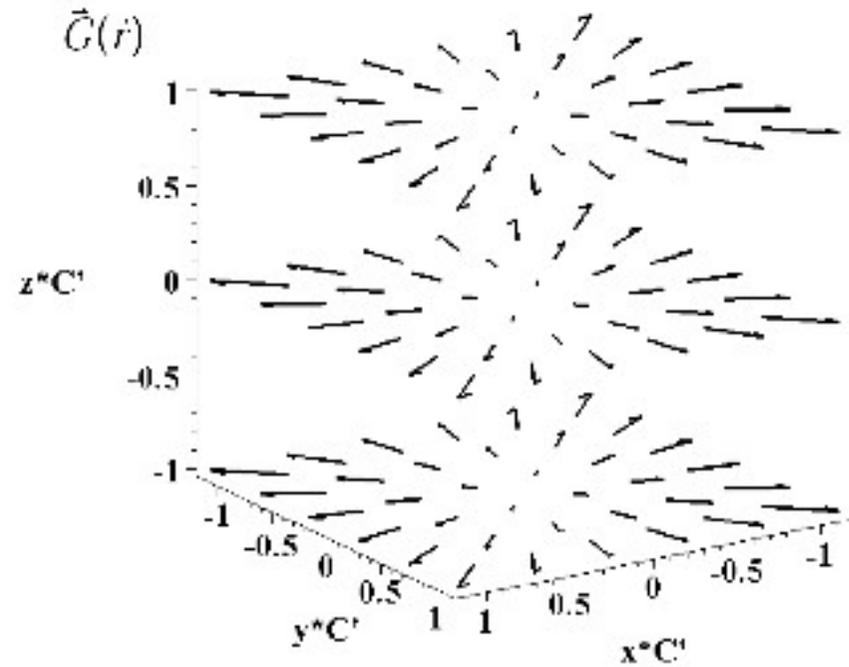
Bedeutung	differentielle Form	Integralform
Quellenfreiheit des B-Feldes	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\oint_A \vec{B} \, d\vec{A} = 0$ B-Feldlinien sind geschlossen
elektrische Ladungen sind Quellen des E-Feldes	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$	$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$ Satz von Gauss
Faradaysches Induktionsgesetz zeitlich ändernde B-Felder erzeugen E-Felder	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_s \vec{E} \, d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$ Induktionsgesetz $dU = -\vec{E} \, d\vec{s}$
Ampèresches Gesetz mit Maxwell'scher Ergänzung (Maxwell'schem Verschiebungsstrom)	$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{i}$	$\frac{1}{\mu_0} \oint_s \vec{B} \, d\vec{s} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{E} \, d\vec{A} + I$ = I + Maxw. Verschiebungsstrom

Wirbel- und Quellenfelder



$$\operatorname{div}(\vec{Z}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\vec{Z}) \neq 0$$



$$\operatorname{div}(\vec{Z}) \neq 0$$

$$\operatorname{rot}(\vec{Z}) = 0$$

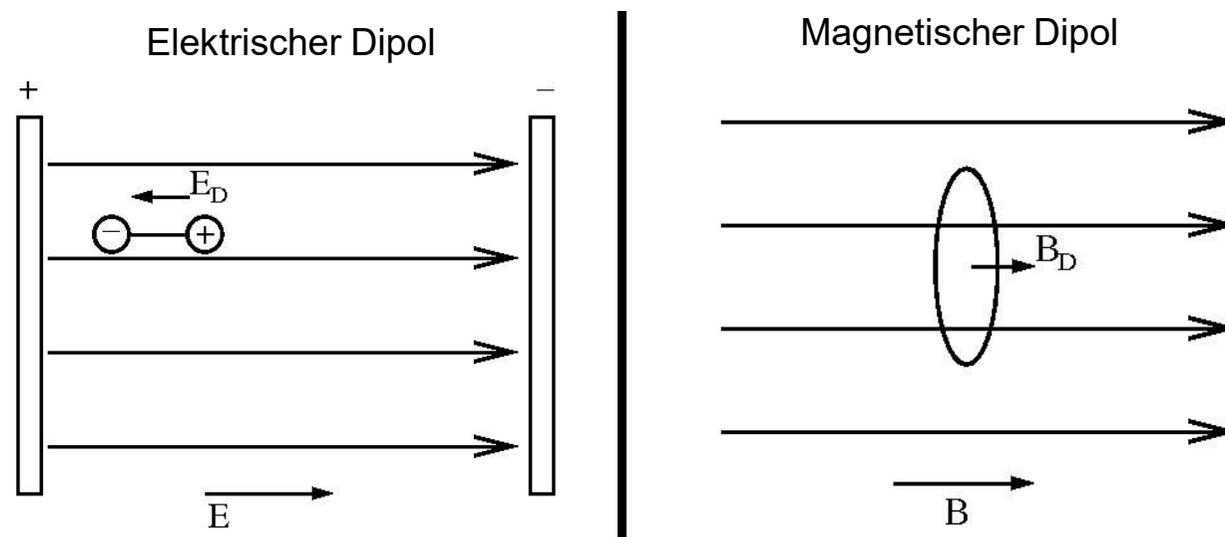
11. Materie und B-Feld

11.1 Die relative Permeabilität

Die bisher behandelten Phänomene des B-Feldes gelten nur im Vakuum. Die Anwesenheit von Materie (Gase, Flüssigkeiten oder Festkörper) kann die B-Felder stark verändern. Je nach Art der Änderung und deren Temperaturabhängigkeit unterscheidet man zwischen **ferromagnetischen, paramagnetischen und diamagnetischen** Stoffen.

Für das unterschiedliche Verhalten der Materie ist die unterschiedliche Elektronenstruktur verantwortlich. Die Elektronen können auf Grund ihrer Bewegung um den Atomkern magnetische Dipolmomente besitzen, die in einem äusseren Feld ausgerichtet werden können.

Bei einigen Stoffen kompensieren sich die Dipolmomente zu Null. In diesen Fällen können durch ein äusseres Feld magnetische Dipole induziert werden.



Exp: Geld in Magnetfeld

Diamagnetische Stoffe (griech. dia; dt. entgegengesetzt)

311-1

In diamagnetischen Stoffen werden magnetische **Dipole induziert**. Die induzierten Dipole **schwächen** das äussere Feld ab. Die induzierten Dipole sind voll ausgerichtet und der Effekt ist **temperaturunabhängig**. Das resultierende Feld B_m kann beschrieben werden durch

$$B_m = \mu B_0$$

$\mu < 1$ für Diamagnetika

μ ist die relative Permeabilität

B_0 ist das äussere Feld

Exp: Graphit

Beispiele: Zn, Pb, Cu, Au, Edelgase, H₂, Benzol, NaCl, Bi, Sb, Ag, H₂O, N₂

Paramagnetische Stoffe (griech. para; dt. gleichgerichtet)

besitzen **permanente magnetische Dipole**, die sich im äusseren Feld ausrichten und dieses verstärken. Die magnetischen Dipole sind wegen der Temperaturbewegung nur teilweise ausgerichtet (d.h. es besteht eine **starke Temperaturabhängigkeit** für das resultierende B_m -Feld)

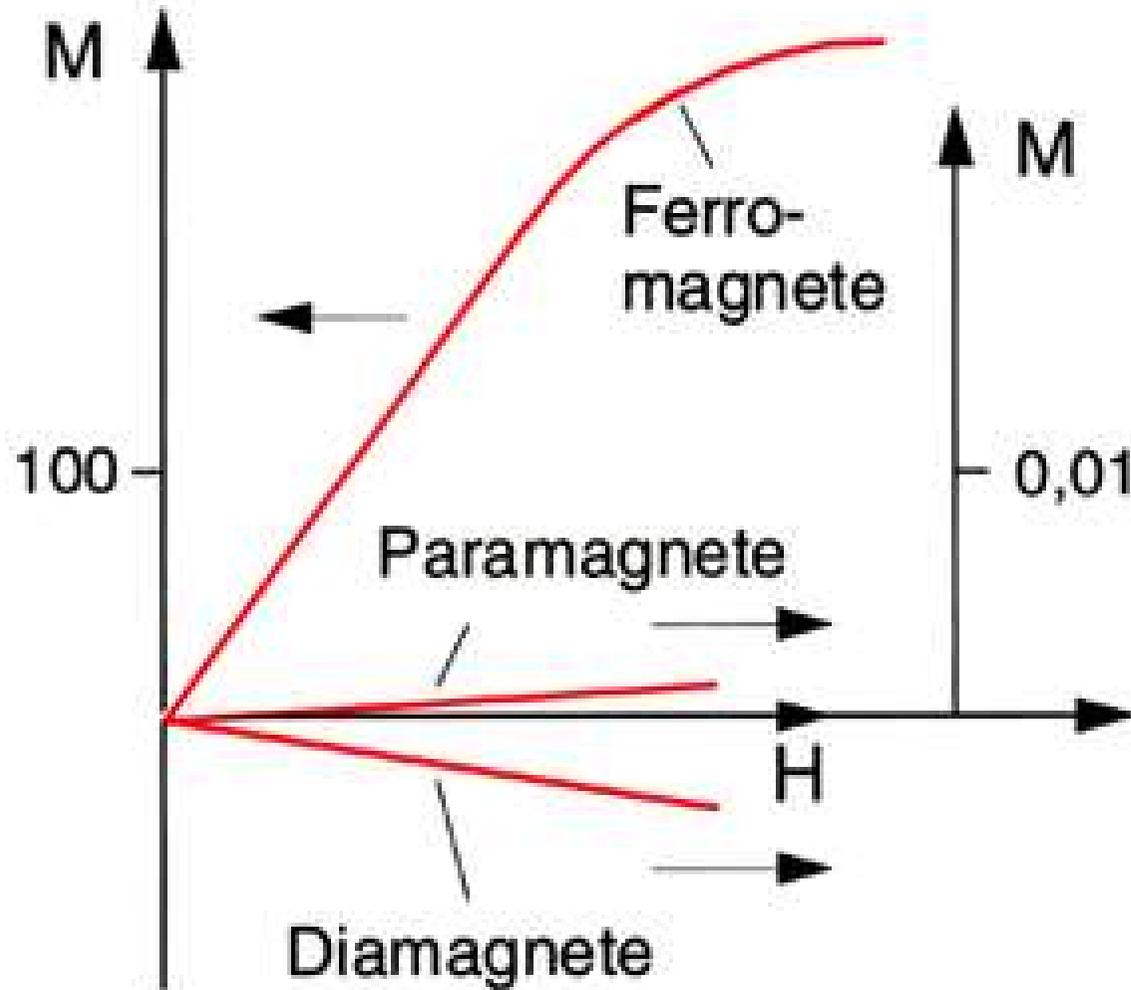
$$B_m = \mu B_0$$

$\mu > 1$ für Paramagnetika

Beispiele: Mn, Cr, Al, Pt, O₂

Exp: Flüssig O₂

Dia- Para- und Ferromagnetismus



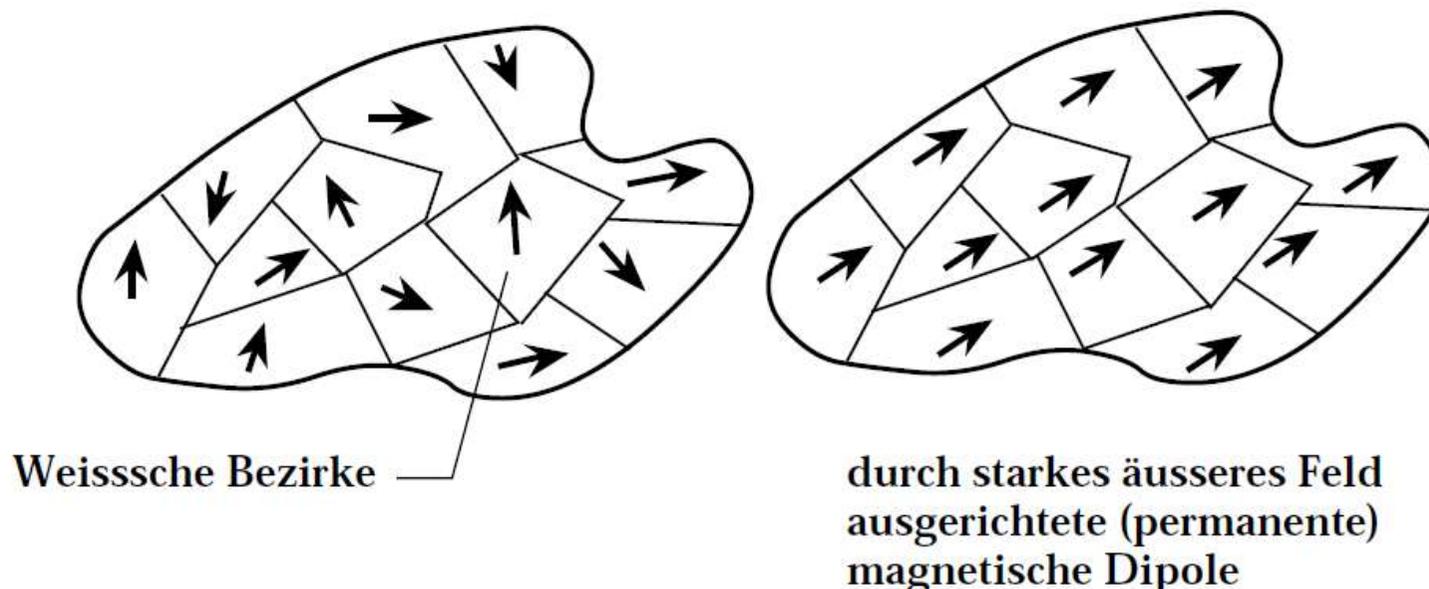
Ferromagnetische Stoffe

Durch einen **kollektiven Effekt der Valenzelektronen** können Festkörper magnetische Dipole besitzen, die ein äusseres B-Feld verstärken können. Nach dem Abschalten des äusseren Feldes können die ausgerichteten magnetischen Domänen ihre Ausrichtung beibehalten, so dass ein permanentes B-Feld vorhanden ist.

$$B_m = \mu B_0$$

$\mu \gg 1$ für Ferromagnetika

Beispiele: Fe, Co, Ni, Gd, MnAs



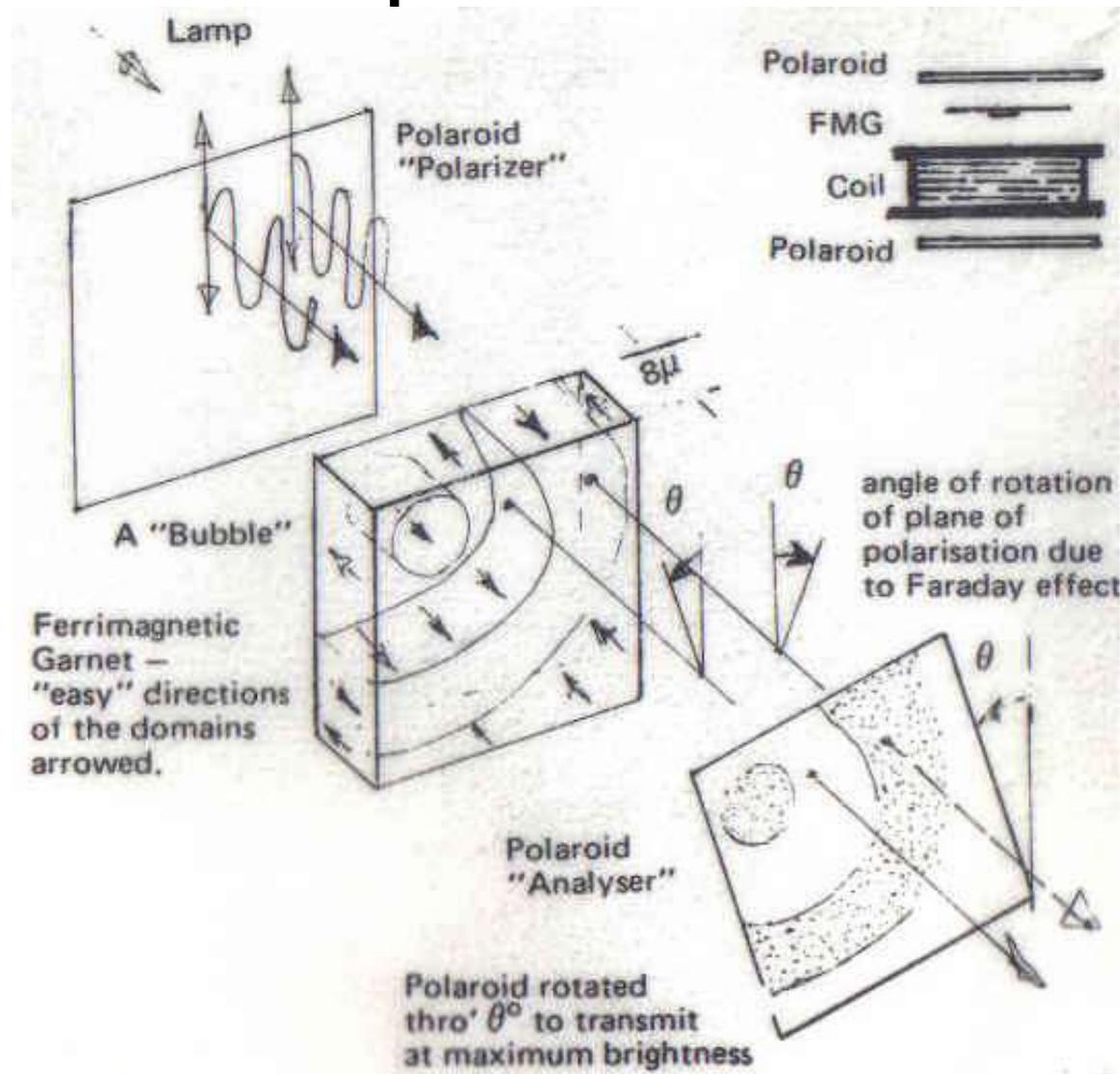
Exp: Weiss'sche Bezirke (Proxi, Mikroskop $\text{Bi}_{0.6}\text{Tm}_{2.4}\text{Ga}_{1.15}\text{Fe}_{3.85}\text{O}_{12}$)
Barkhausen (Akustik)

Garnets

1970 wurden Garnets entdeckt. (z.B. $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$)

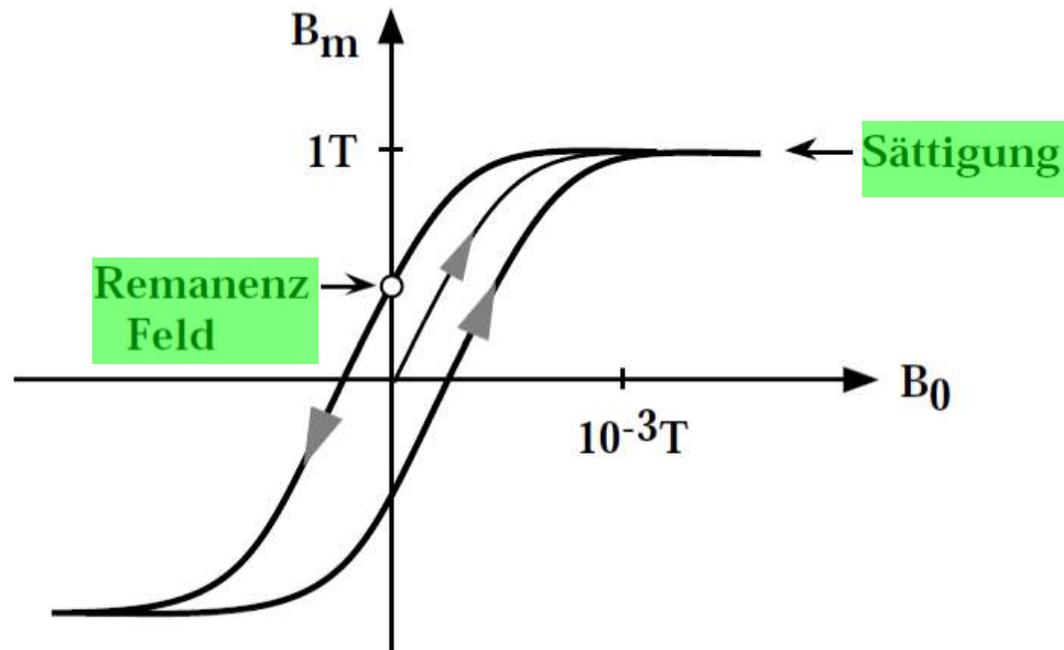


Beobachtung der Magnetisierung mittels polarisiertem Licht



μ hängt vom äusseren Feld ab.

311-2



Die Magnetisierung der Ferromagnete zeigt eine **Hysterese**.

Exp.: Hystereseschleife

Curie-Temperatur (Materialkonstante):

Temperatur, bei der magnetische Ausrichtung von Ferromagneten aufbricht.

Erklärung: Bei höheren Temperaturen ist die thermische Bewegungsenergie höher.

Exp.: Curie-Temperatur Fe vs. Ni

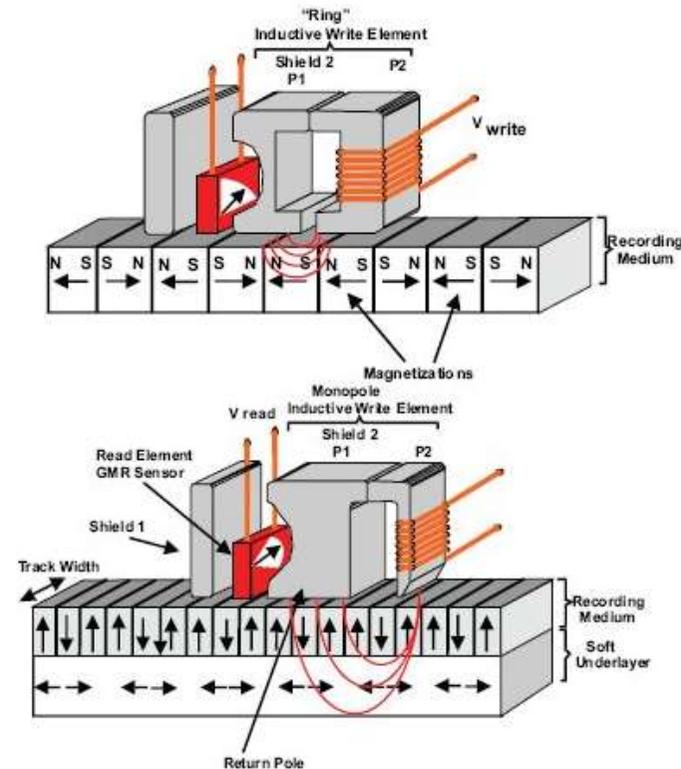
Beispiele von Ferromagneten

Ferritkerne, Trafokerne



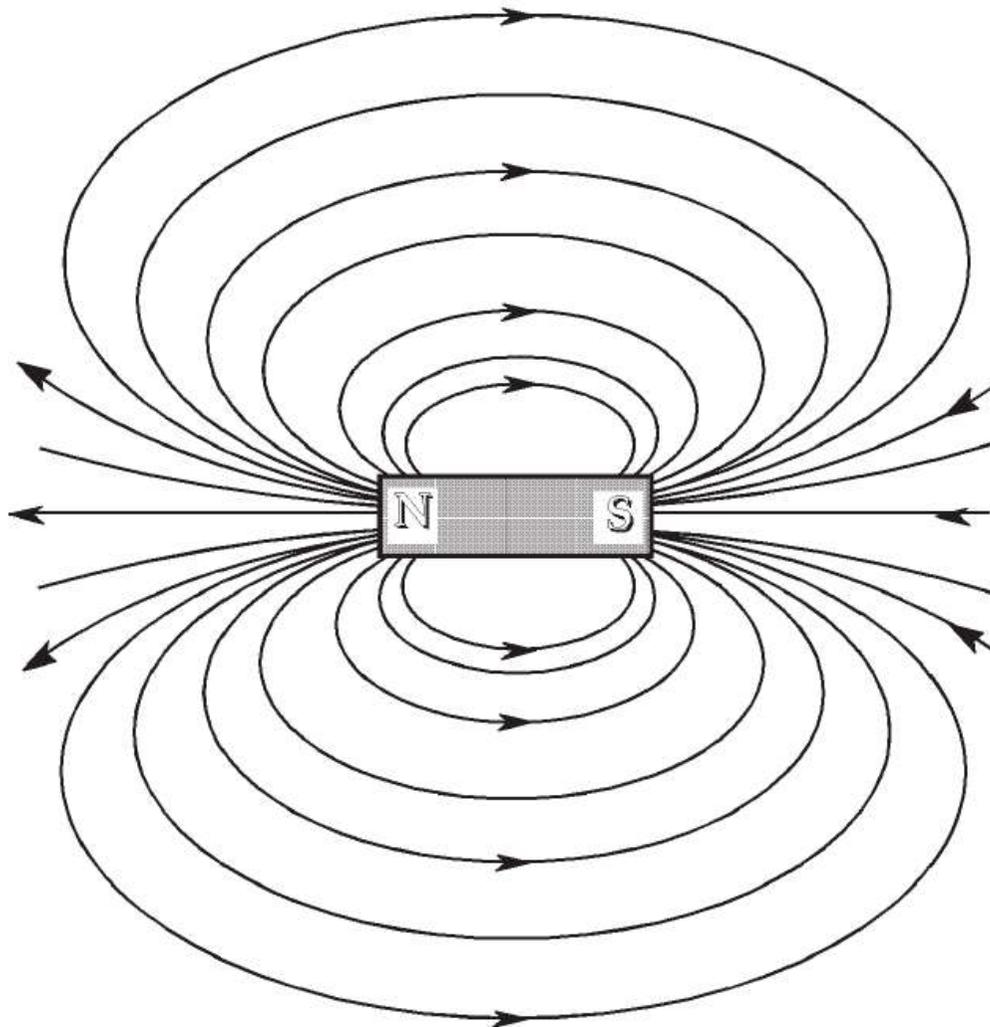
möglichst weichmagnetisch
um Energieverlust gering zu halten

Hard Disk



um Informationsverlust gering zu halten:
hartmagnetisches Material: z.B. CoCr

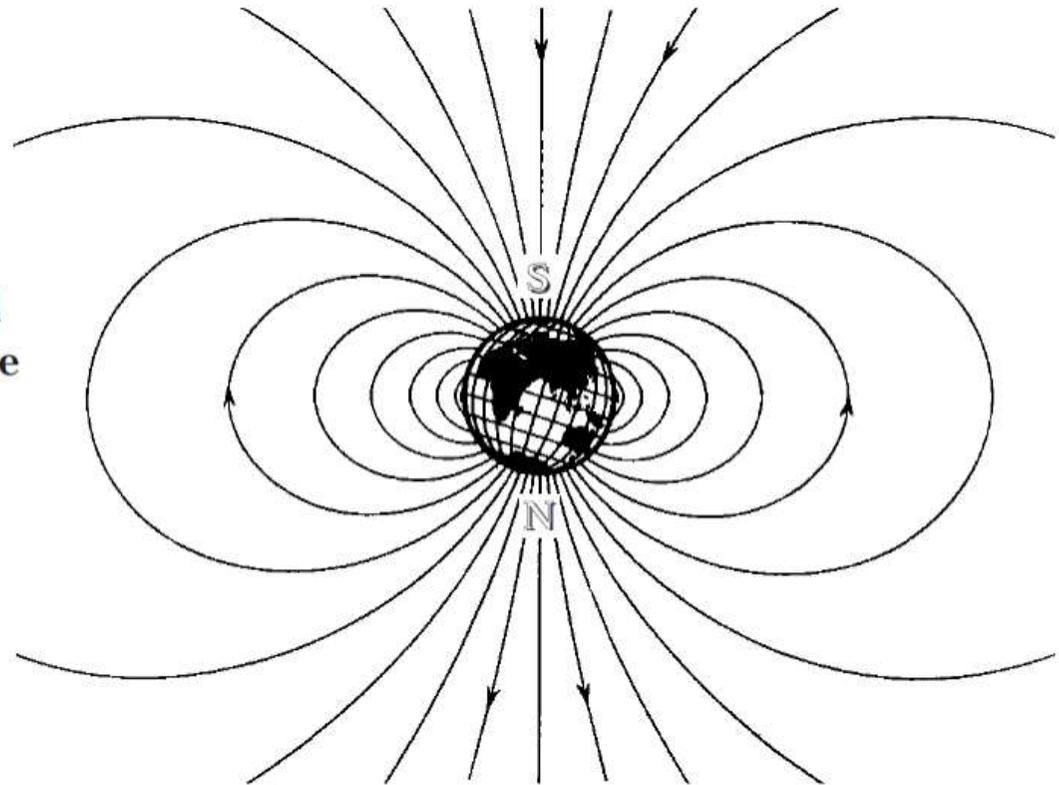
Permanentmagnete



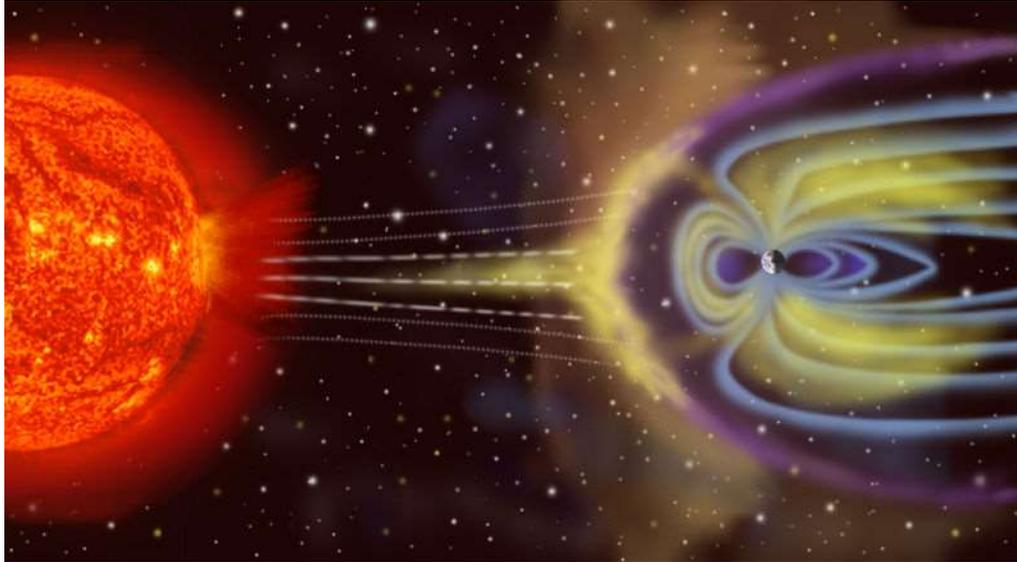
Permanentmagnete sind von einem B-Feld umgeben. Man definiert den magnetischen Nord- und Südpol nach der Richtung der B-Vektoren: die Feldlinien treten am N-Pol aus dem Magneten aus und treten am S-Pol wieder ein. Auch hier stellen die B-Feldlinien geschlossene Kurven dar.

Magnetfeld der Erde

Schematischer Verlauf des B-Feldes der Erde. Die magnetische Süd-Nord Achse ist gegen die Erdrotationsachse um etwa 15° geneigt.



Bedeutung des Magnetfeldes für Lebewesen

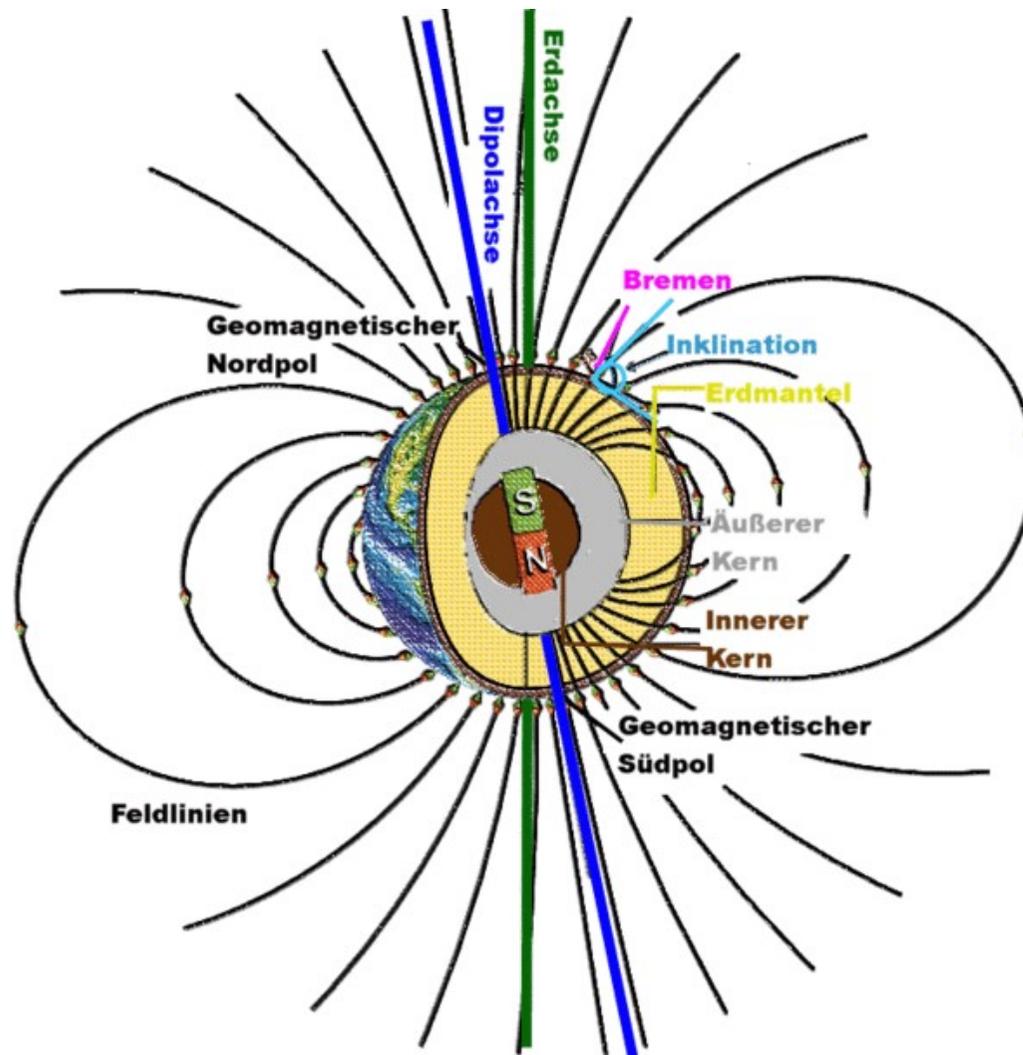


- Hochenergetische Teilchen von der Sonne oder dem Weltall fliegen auf die Erde zu!
- Teilchen werden durch B-Feld abgefangen und zu den Polen geleitet.

=> Polarlichter



Magnetfeld der Erde



Pol wandert



Polsprung ca. alle 250 '000 Jahre

Letzter Polsprung: 780 '000 Jahre (ist überfällig)

Momentan nimmt das Magnetfeld ab; Polsprung erwartet ca. im Jahr 3000-4000

11.2 Berechnung von B-Feldern und Induktion in Anwesenheit von Materie mit der relativen Permeabilität μ

Die bisher behandelten Gesetze, die das B-Feld enthalten, erfahren eine Korrektur beim Übergang vom Vakuum zum materieerfüllten Raum.

	Vakuum	Anwesenheit eines Stoffes mit relativer Permeabilität μ
B-Feld des unendlich langen geraden Leiters	$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$	$B(r) = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$
B-Feld der langen, dünnen Spule	$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}$	$B = \mu_0 \mu \frac{NI}{\ell}$
Induktivität einer Spule	$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell}$	$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 A}{\ell}$
Energiedichte des B-Feldes	$\frac{E_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$	$\frac{E_{\text{magn}}}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu}$

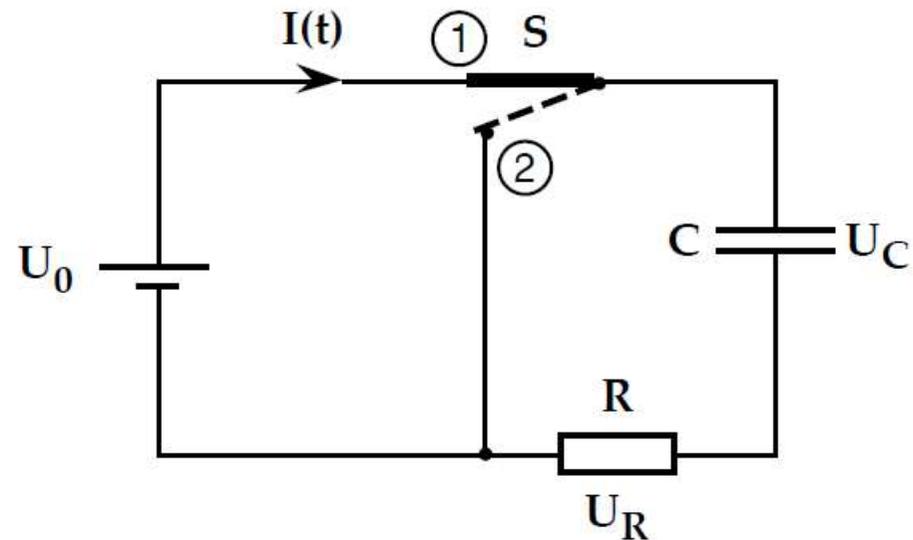
12. Ein- und Ausschaltvorgänge

12.1 RC-Schaltungen

In Stellung 1 des Schalters S wird der Kondensator C aufgeladen.

Wird der Schalter auf Stellung 2 umgelegt, so wird der Kondensator C entladen.

Gesucht: $I(t)$, $U_C(t)$



RC - Ladevorgang

Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter S in Stellung 1 gebracht. Nach der Kirchhoffschen Maschenregel muss gelten

$$U_0 - U_C - U_R = 0$$

$$U_0 - \frac{1}{C}Q - RI = 0 \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$\dot{Q} + RC\dot{I} = 0 \quad \left| \dot{Q} = I \right.$$

$$I + RC\dot{I} = 0$$

diese Differentialgleichung wird erfüllt von

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t} \quad \text{denn} \quad \dot{I}(t) = -\alpha I_0 e^{-\alpha t}$$

eingesetzt

$$I_0 e^{-\alpha t} - RC\alpha I_0 e^{-\alpha t} = 0 \quad \text{ist erfüllt mit} \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

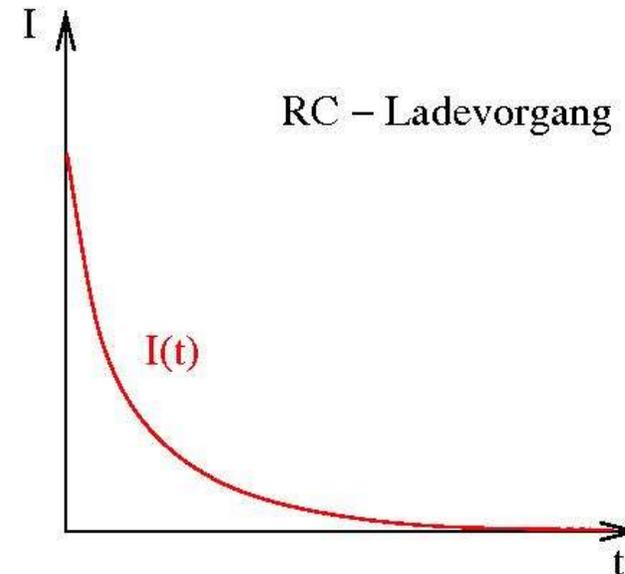
zur Zeit $t = 0$:

$$I(0) = I_0$$

$$U_0 - I_0 R = 0 \quad (\text{da } Q = 0)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R}$$

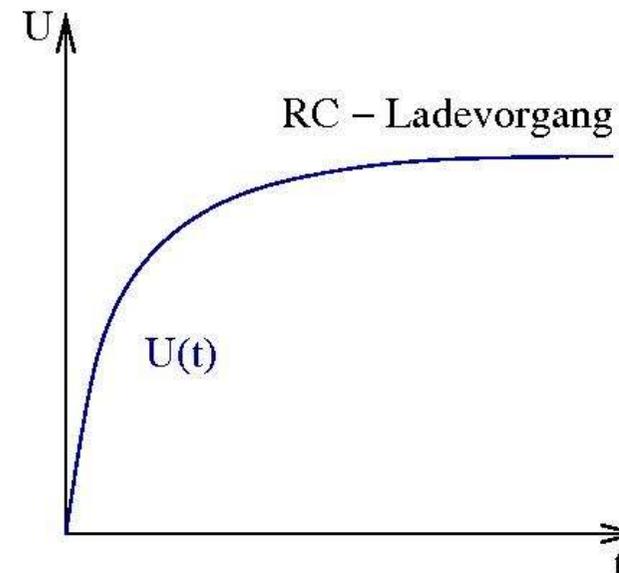
$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC}$$



Für die Spannung $U_C(t)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_C(t) &= U_0 - U_R \\ &= U_0 - RI(t) \end{aligned}$$

$$U_C(t) = U_0 (1 - e^{-t/RC})$$



Die Grösse $RC = \tau$ heisst **Zeitkonstante des RC-Gliedes**

Beispiel: $R = 10^6 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F} \rightarrow \tau = RC = 1 \text{ s}$

RC - Entladevorgang

analog erhält man den Strom- und Spannungsverlauf für den Entladevorgang.

$$-U_C - U_R = 0$$

$$I + R C \dot{I} = 0$$

wird erfüllt von

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

zur Zeit $t = 0$:

$$U_C(0) = U_0$$

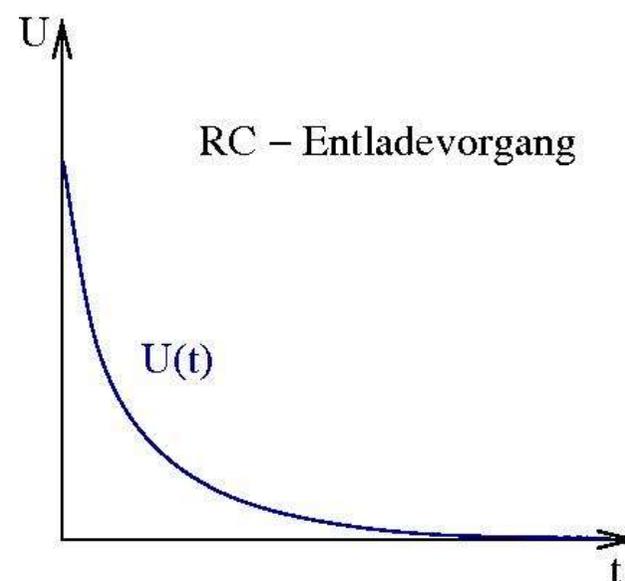
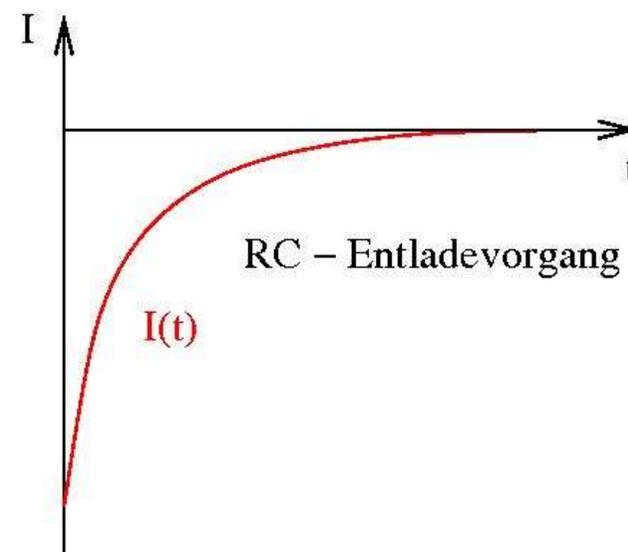
$$= -U_R(0) = -R I(0) = -R I_0$$

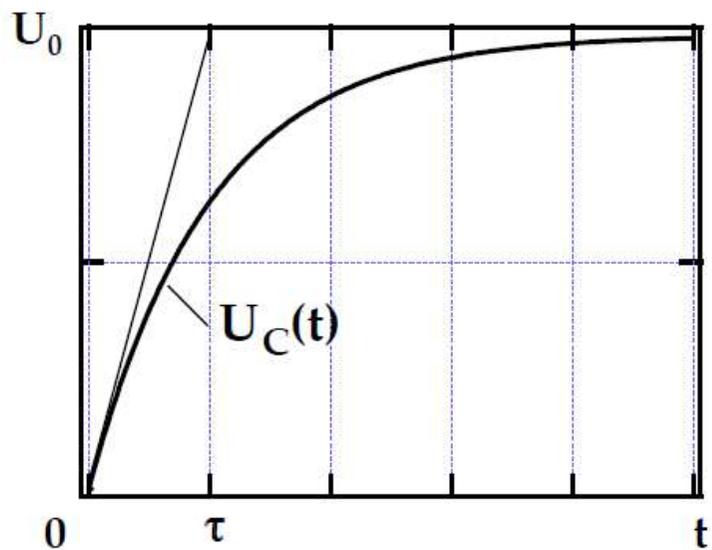
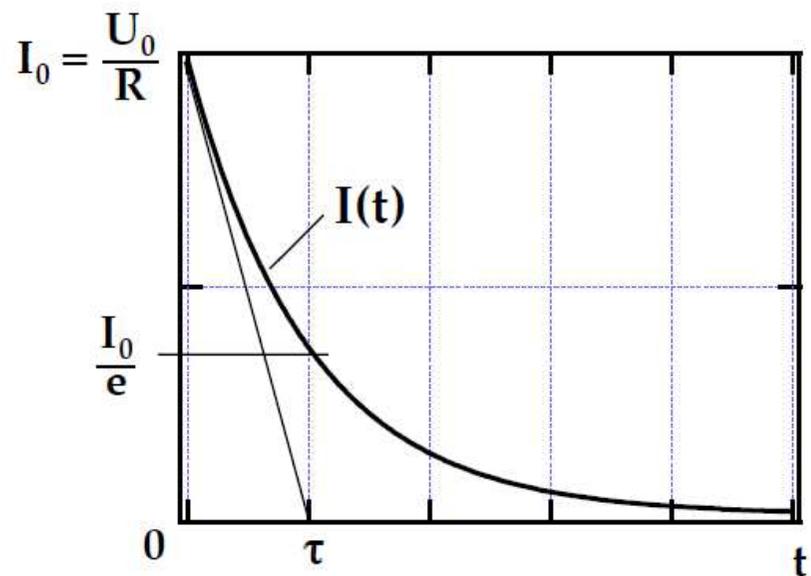
$$I_0 = -\frac{U_0}{R}$$

$$I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

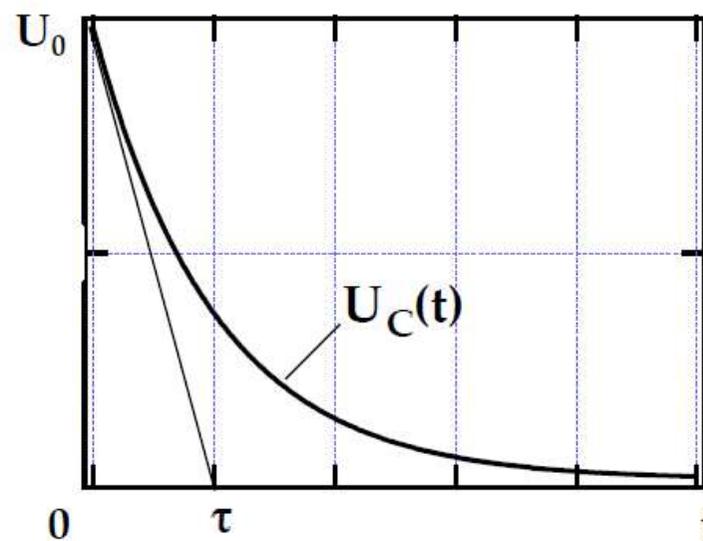
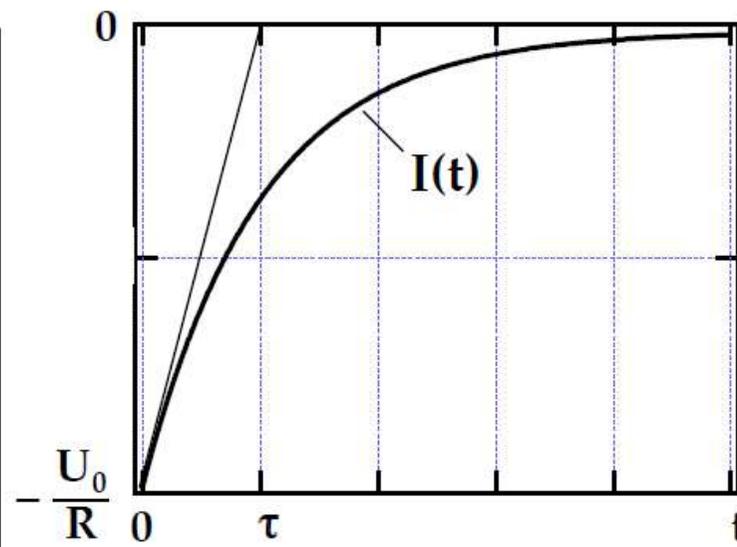
$$U_C = -U_R = -R I(t)$$

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$





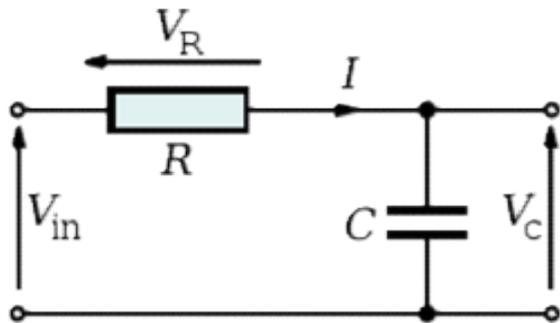
Einschalten



Ausschalten

Exp: C Laden und Entladen

Beispiele von RC-Filtern



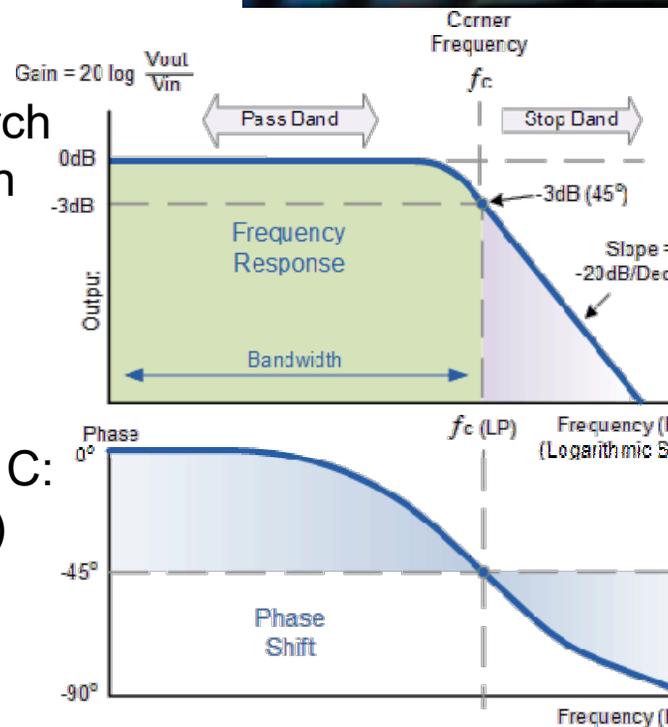
Lässt tiefe Frequenzen durch und filtert hohe Frequenzen

⇒ Tiefpass-Filter (Bass)

Analog:

Durch Vertauschen R und C:

⇒ Hochpass-Filter (Treble)

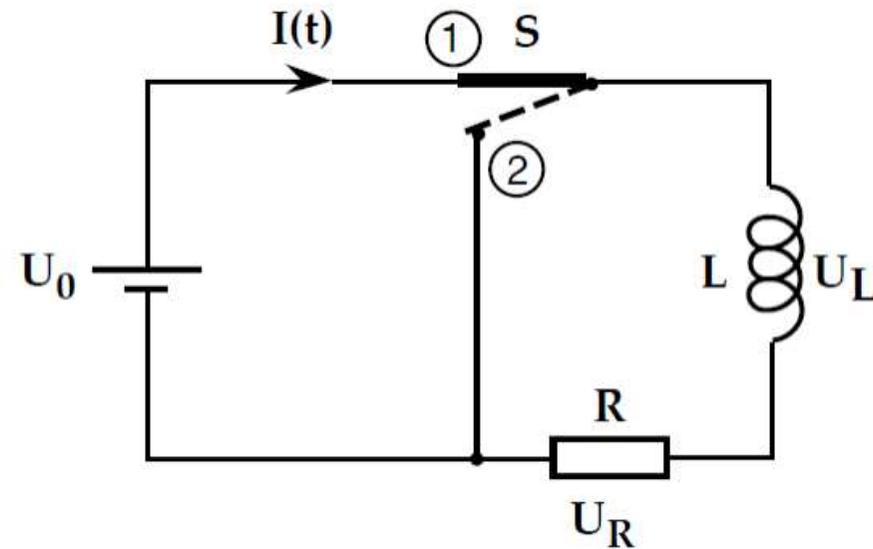


12.2 RL-Schaltungen

Beim Umlegen des Schalter S in Stellung 1 wird ein B-Feld in der Spule L aufgebaut.

Wird der Schalter in Stellung 2 gebracht, dann sinkt der Strom auf Null.

Gesucht : $I(t)$, $U_L(t)$



analog zum RC-Fall erhält man für den

RL - Einschaltvorgang

$$U_0 + U_L - U_R = 0$$

$$U_0 - L\dot{I} - RI = 0$$

wird erfüllt von der Gleichung

$$I(t) = I_0 (1 - e^{-\alpha t})$$

mit

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{R}{L}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$U_L(t) = U_0 - RI(t)$$

$$U_L(t) = U_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$\frac{L}{R} = \tau$ ist die Zeitkonstante des RL Gliedes

RL - Ausschaltvorgang

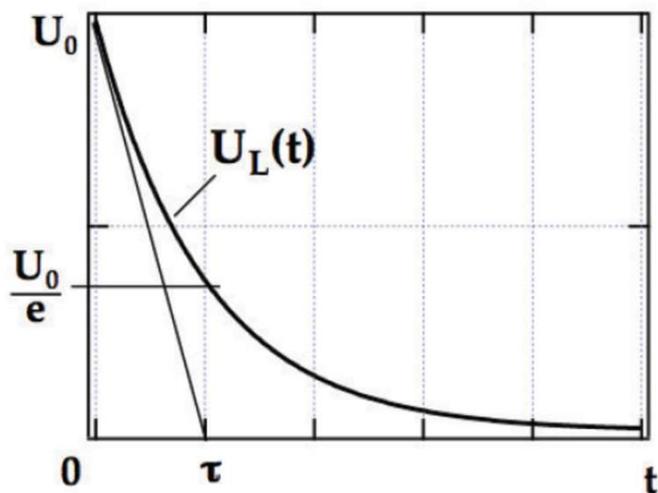
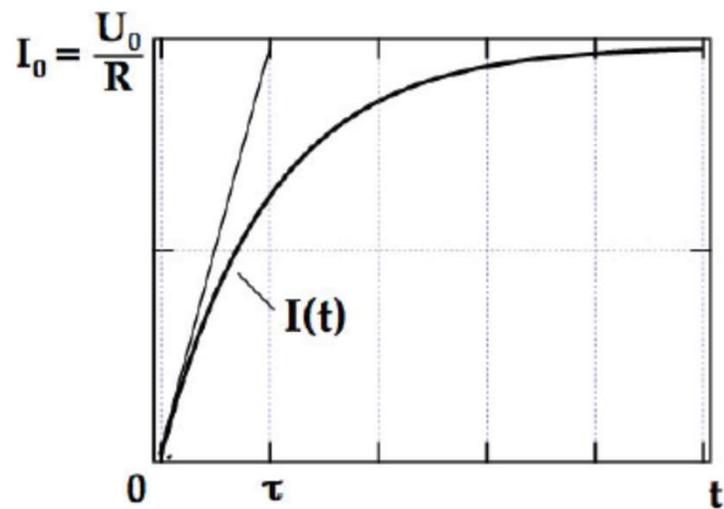
$$-L\dot{I} - RI = 0$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

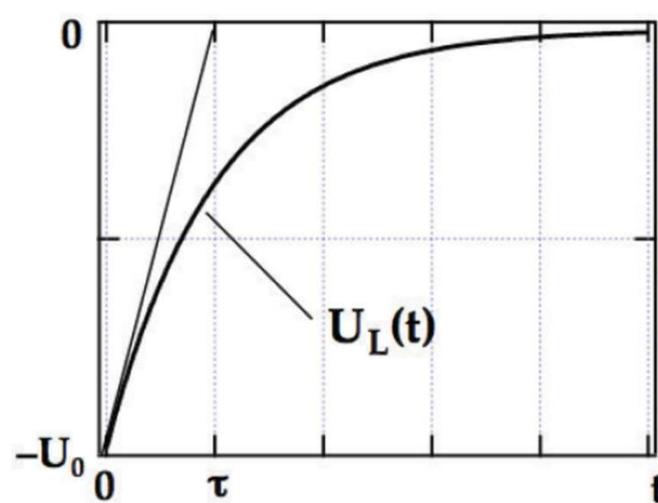
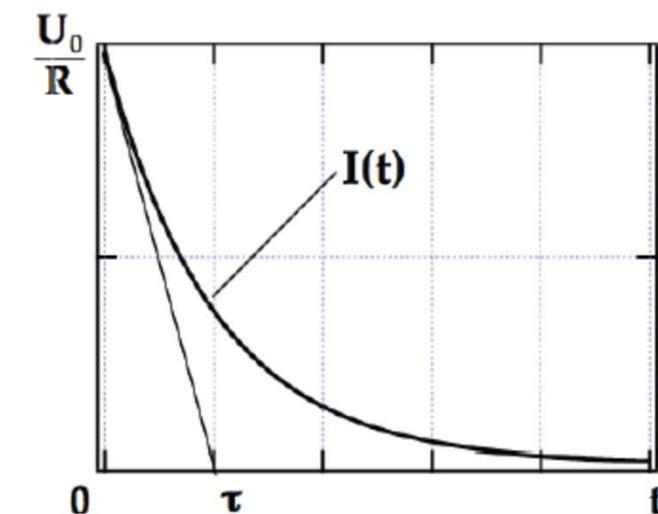
$$U_L(t) = -RI(t)$$

$$U_L(t) = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$U_L(t) = -U_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

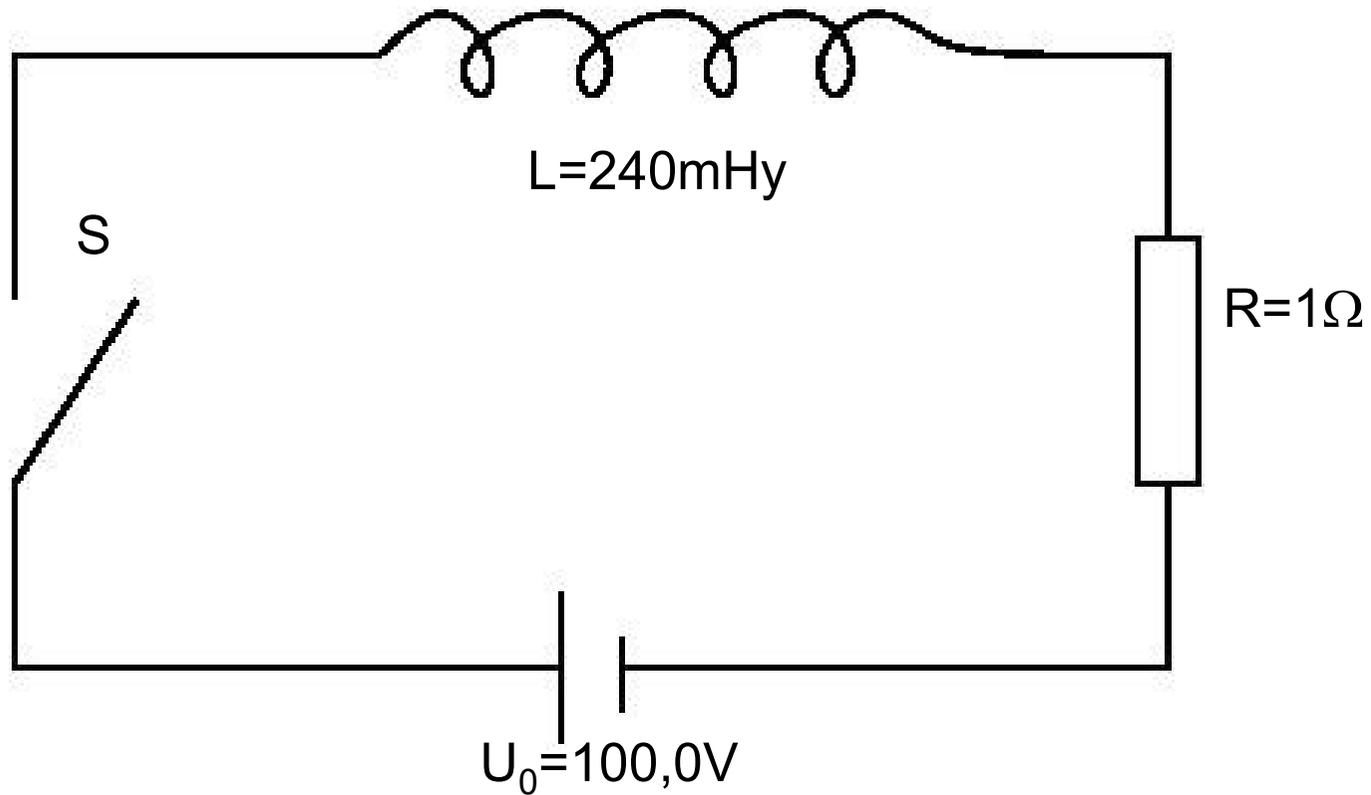


Einschalten



Ausschalten

Beispiel RL-Schaltkreis



13. Wechselspannungen und Wechselströme

13.1 Darstellung von harmonischen Wechselspannungen und -strömen

Analog zu den harmonischen Schwingungen können wir harmonische Wechselspannungen und Wechselströme durch Sinus- und Cosinusfunktionen darstellen.

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi_0')$$

U_0, I_0 : Amplituden oder Spitzenwerte

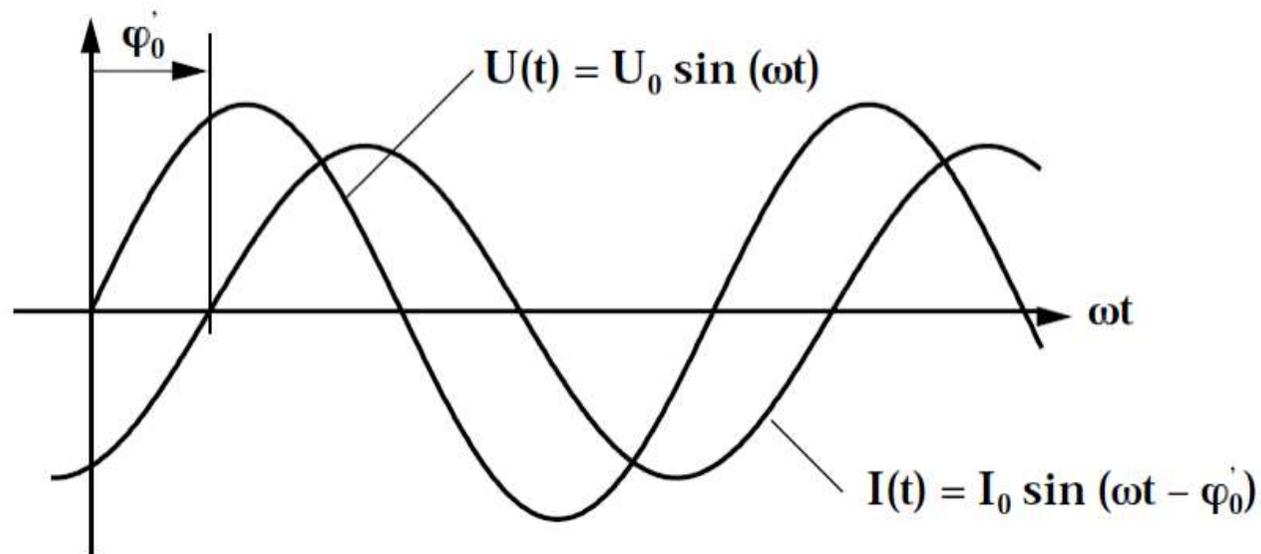
ω : Kreisfrequenz

φ_0, φ_0' : Phasenwinkel

Exp: rotierende Glühlampe

1Hz / 10Hz / 100Hz auf Drehspulinstrument und Oszilloskop

In nachfolgender Figur wurde als Beispiel $\varphi_0 = 0$ gewählt, und φ_0' besitzt einen positiven Wert.



Spannung eilt dem Strom um φ_0 voraus!

13.2 Die Leistung im Wechselstromkreis

An einem elektrischen Verbraucher betragen Spannung und Strom

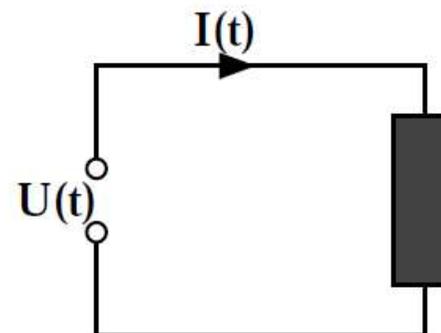
$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi_0)$$

Die momentane Leistung beträgt

$$P(t) = U(t) \cdot I(t)$$

$$P(t) = U_0 I_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi_0)$$



Der zeitliche Mittelwert der Leistung berechnet sich nach

$$P(t) = U_0 I_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi_0)$$

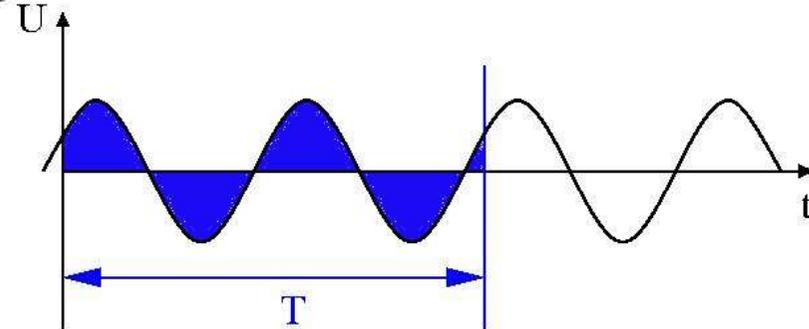
$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} U_0 I_0 \frac{1}{T} \int_0^T [\cos \varphi_0 - \cos(2\omega t - \varphi_0)] dt$$

$$= \frac{1}{2} U_0 I_0 \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \cos \varphi_0 dt - \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t - \varphi_0) dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2} U_0 I_0 \frac{1}{T} \cos(\varphi_0) T$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$



$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi_0$$

Zeitlicher Mittelwert der elektrischen Leistung

Falls $\varphi_0 = 0$, d.h. wenn Spannung und Strom 'in Phase' sind, gilt:

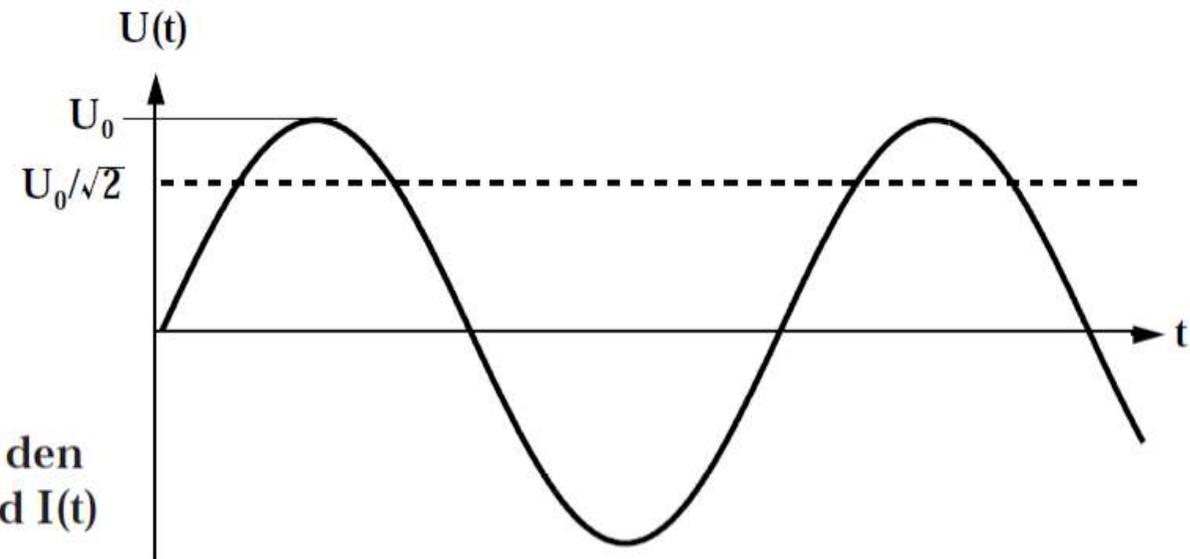
$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0$$

Wir definieren **Effektivwerte** für harmonische Wechselspannungen und -ströme:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Die Effektivwerte sind gleich den rms-Mittelwerten von $U(t)$ und $I(t)$



$$\sqrt{U^2(t)} = \left[\frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \sin^2(\omega t) dt \right]^{1/2} = U_0 \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt \right]^{1/2}$$

$$= U_0 \left[\frac{1}{T} \int_0^T (1 - \cos^2 \omega t) dt \right]^{1/2}$$

$$\sqrt{U^2(t)} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}}$$

Falls Spannung und Strom 'in Phase' sind können wir die elektrische Leistung auch berechnen nach

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

Spannung und Strom sind 'in Phase'
oder falls zwischen $U(t)$ und $I(t)$ eine Phasenverschiebung φ vorliegt

$$\bar{P} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi$$

Exp: Effektivwert, Scheitelwert

13.3 Das technische Spannungsnetz

Einphasen Haushaltsnetz

Spannung

$$U_{\text{eff}} = 230 \text{ V (früher 220V)}$$

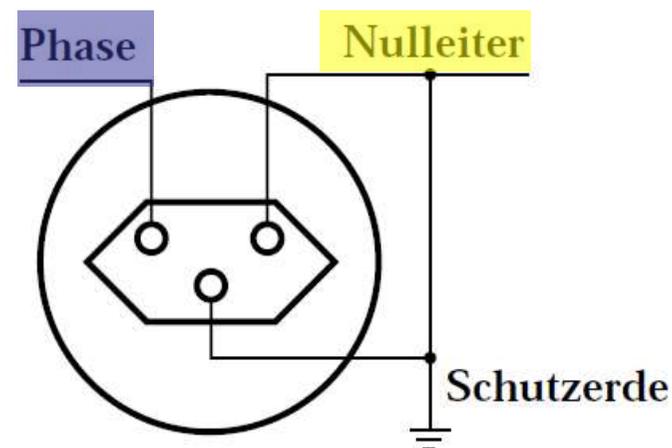
$$U_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}} = 325 \text{ V}$$

$$\nu = 50 \text{ Hz}$$

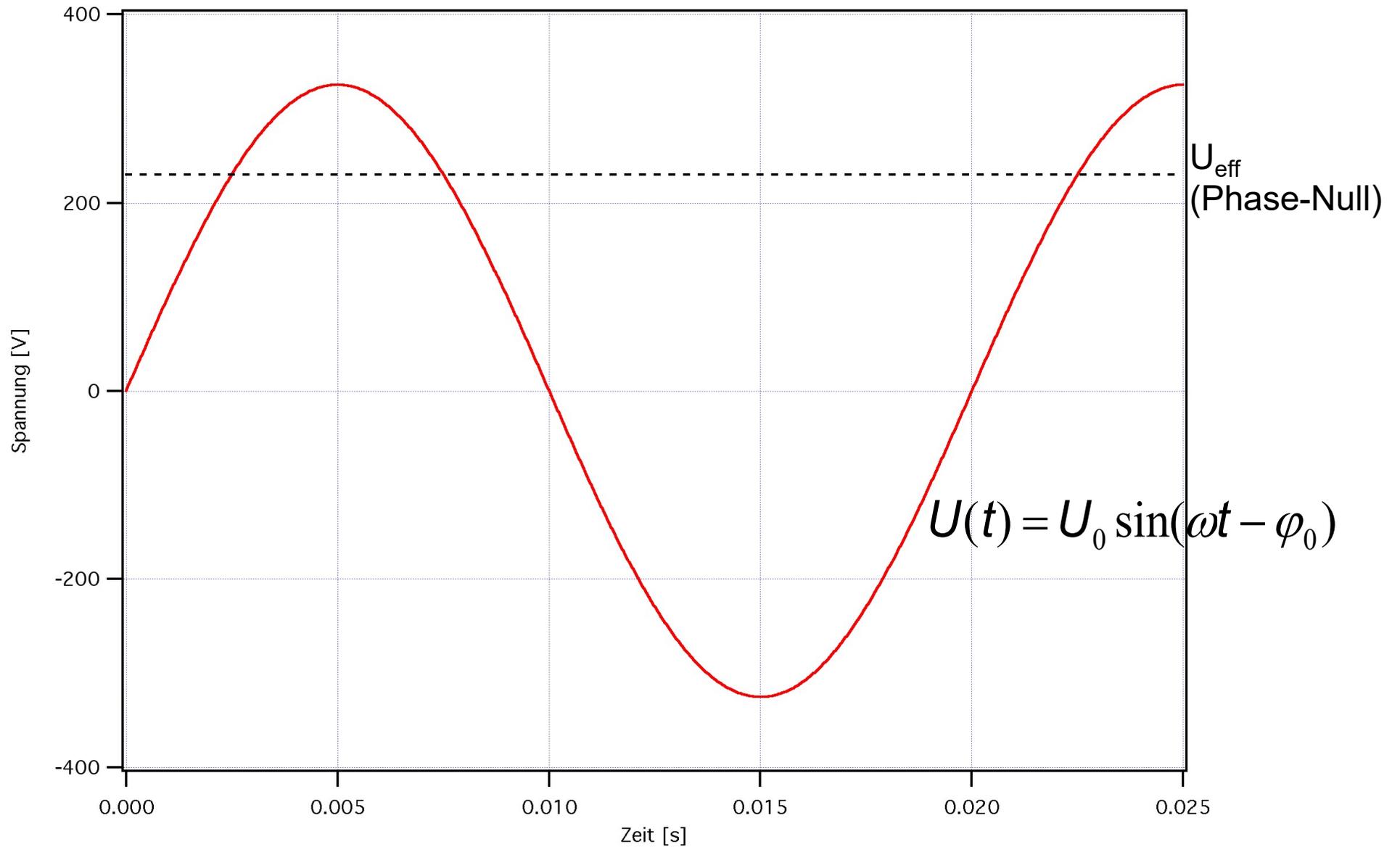
Spannung zwischen Phase und Nulleiter :

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

Spannung zwischen Nulleiter und Schutzterde : 0 V



Anmerkung: Phase und Nulleiter können auch vertauscht angeordnet sein.



Technisches Spannungsnetz

$U_{\text{eff}} = 230\text{V}$ (Phase gegen Nullleiter gemessen)

$U_0 = 325\text{V}$

Frequenz = 50Hz

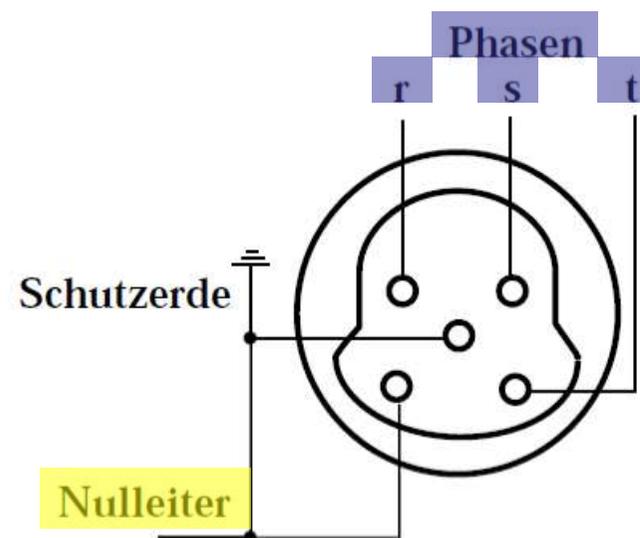
Dreiphasennetz

Die technische Spannungsversorgung ist durch ein Dreiphasennetz realisiert. Eine Dreiphasenspannungsversorgung umfasst drei spannungsführende Leiter (r, s und t), einen Nulleiter und eine Schutz Erde.

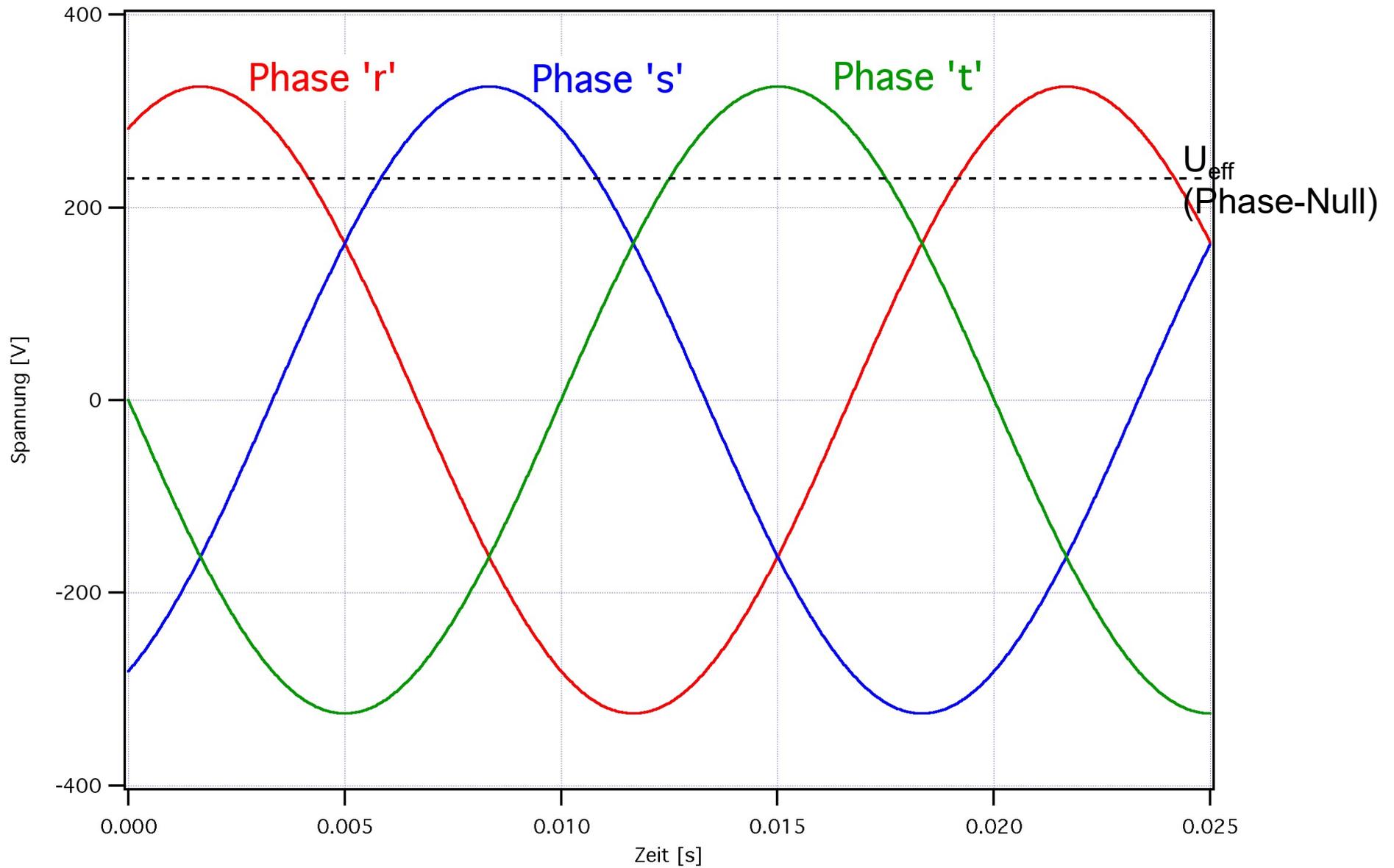
$$r: U_r = U_0 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$s: U_s = U_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$t: U_t = U_0 \sin (\omega t - \pi)$$



zwischen den drei spannungsführenden Leitern besteht also eine Phasenverschiebung von $\frac{2\pi}{3}$.



Drei Phasen um 120° verschoben:

$\Delta U_{rs, \text{eff}} = 398\text{V}$ (z.B. Phase r gegen Phase s gemessen)

$\Delta U_{rs, 0} = 563\text{V}$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Spannung zwischen zwei Phasen:

$$U_r - U_s = U_0 \left[\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$= U_0 \cdot 2 \cos(\omega t) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

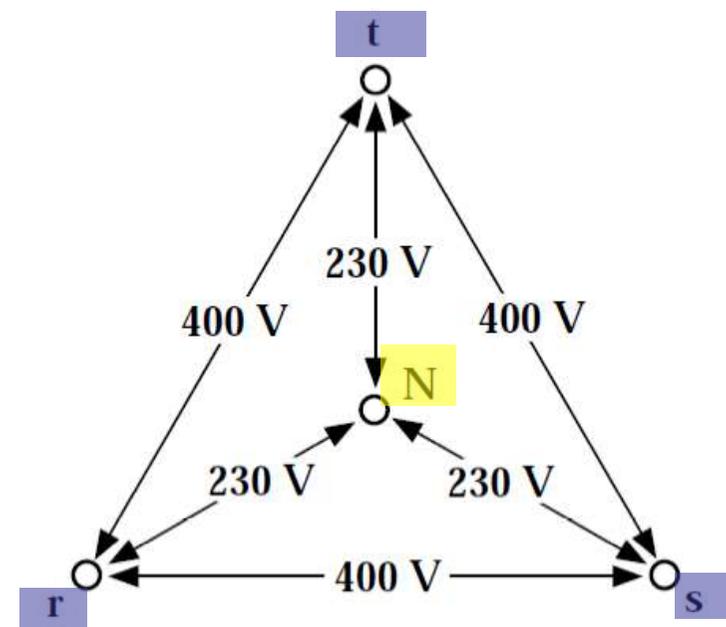
$$U_r - U_s = \Delta U_{rs} = \sqrt{3} U_0 \cos \omega t$$

Spitzenwert: $\Delta U_{rs,0} = \sqrt{3} \cdot 325 \text{ V} = 563 \text{ V}$

Effektivwert: $\Delta U_{rs,\text{eff}} = \frac{\Delta U_{rs,0}}{\sqrt{2}} = 398 \text{ V}$

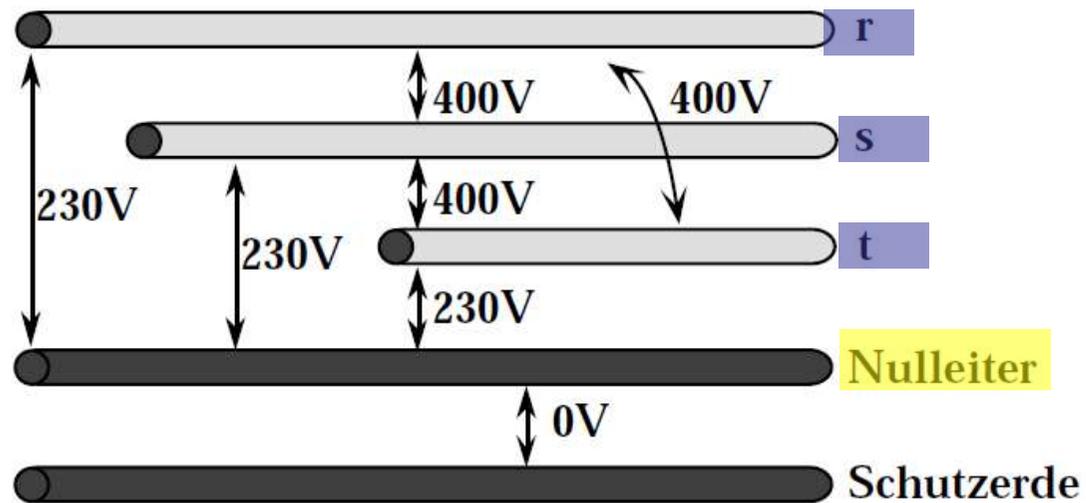
nominale Effektivwerte:

Einphasennetz: $U = 230 \text{ V}$
 Dreiphasennetz: $U = 400 \text{ V}$



Darstellung der Effektivwerte der Spannungen im Dreieck

Die Effektivwerte zwischen den verschiedenen Phasen und zwischen den Phasen und dem Nulleiter betragen also:



Exp: Haushaltnetz und Dreiphasennetz
Drehstrommotor

13.4 RLC - Schaltungen im Wechselstromkreis

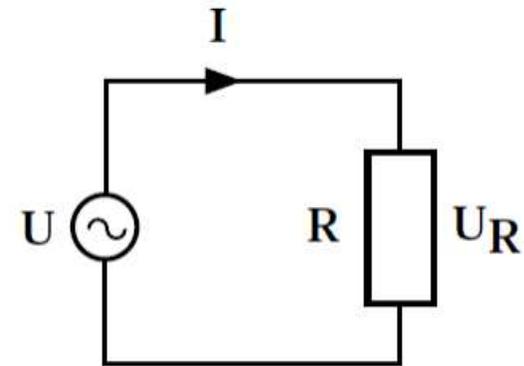
Ohmscher Widerstand

$$U = U_0 \cos \omega t$$

$$U - U_R = 0$$

$$U = U_R$$

$$I = \frac{1}{R} U_R = \frac{U_0}{R} \cos \omega t$$

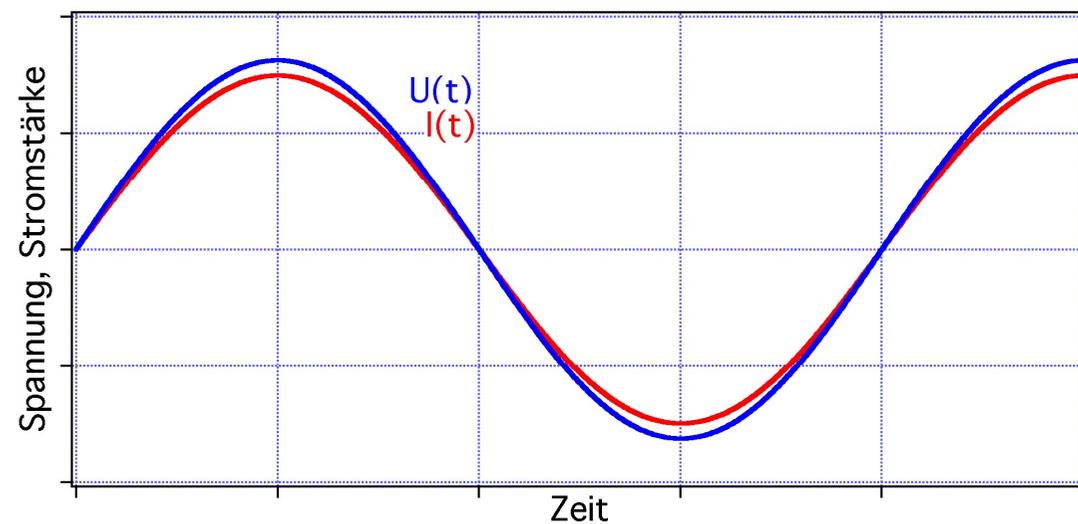


$$I = I_0 \cos \omega t$$

$$U_R = U_0 \cos \omega t$$

Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom $\varphi = 0$

Exp: Phasenlagen auf KO
 $Z_R(\omega)$



$$U = U_0 \cos \omega t$$

$$U - U_C = 0$$

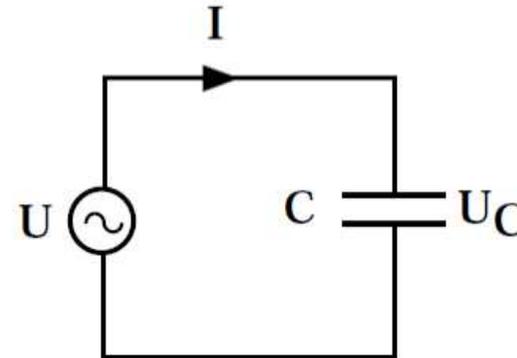
$$\dot{U} = \frac{1}{C} \dot{Q} = \frac{1}{C} I$$

$$-\omega U_0 \sin \omega t = \frac{1}{C} I$$

$$I = -\omega C U_0 \sin \omega t$$

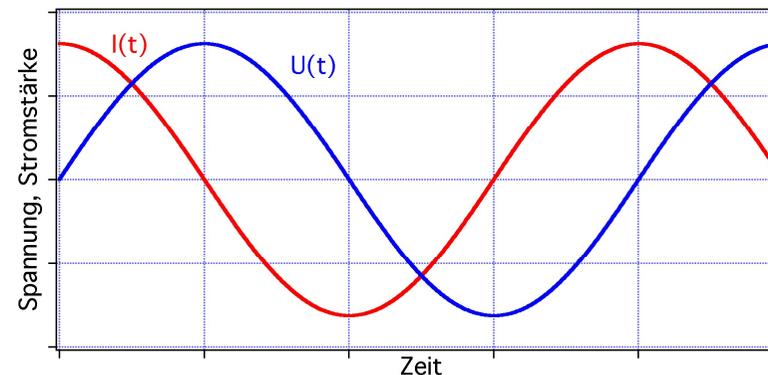
$$I = \frac{U_0}{1/\omega C} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$U = U_0 \cos \omega t$$



Zwischen Spannung und Strom beträgt die Phasenverschiebung $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

die Strommaxima eilen den Spannungsmaxima um $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ voraus.



Exp: Phasenlagen auf KO
 $Z_C(\omega)$

$1/\omega C$ interpretieren wir als **Wechselstrom-Widerstand**. Wir bezeichnen diese Grösse als **Impedanz Z**

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

„Impedanz“ = $\frac{\text{Spannungsamplitude}}{\text{Stromamplitude}}$

$$U = U_0 \cos \omega t$$

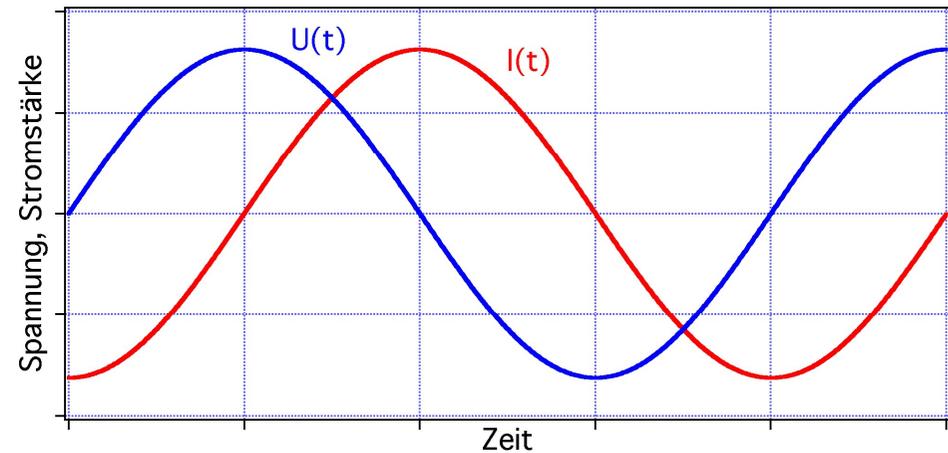
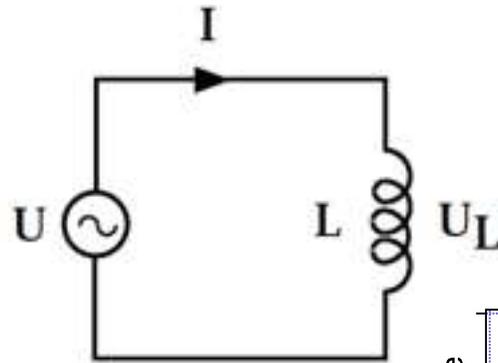
$$U + U_L = 0$$

$$U = +L \frac{dI}{dt}$$

$$\int U dt = L \int dI$$

$$\frac{1}{\omega} U_0 \sin \omega t = L \cdot I$$

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t$$



Phasenverschiebung des Stroms $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$U = U_0 \cos \omega t$$

$$Z_L = \omega L$$

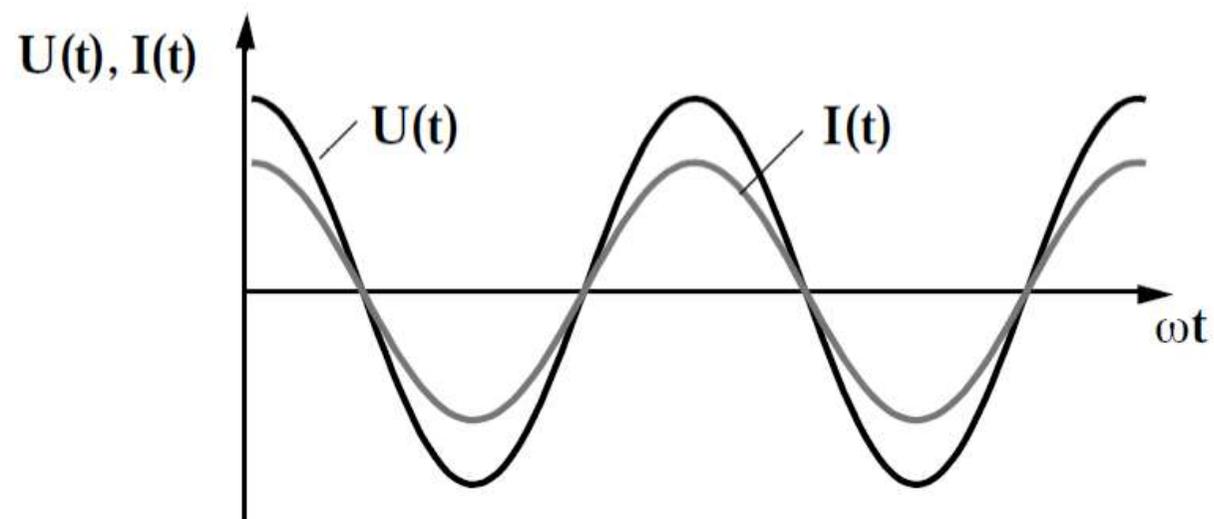
Impedanz der Induktivität

Exp: Phasenlage auf KO
 $Z_L(\omega)$

Phasenlagen im rein Ohmschen, kapazitiven und induktiven Stromkreis

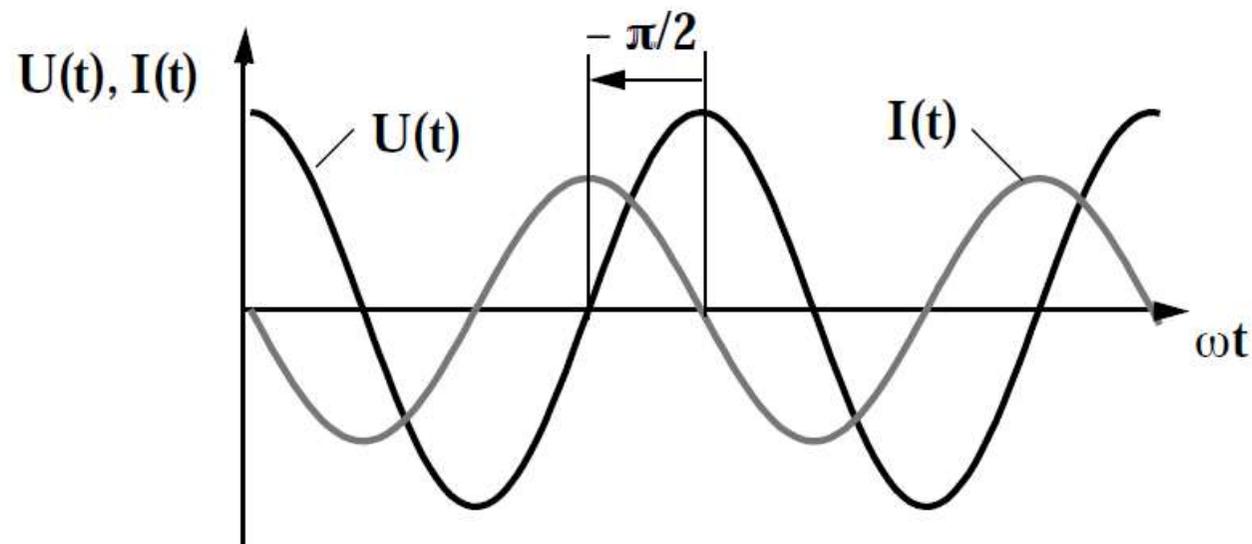
Ohmscher
Widerstand

$$Z_R = R$$



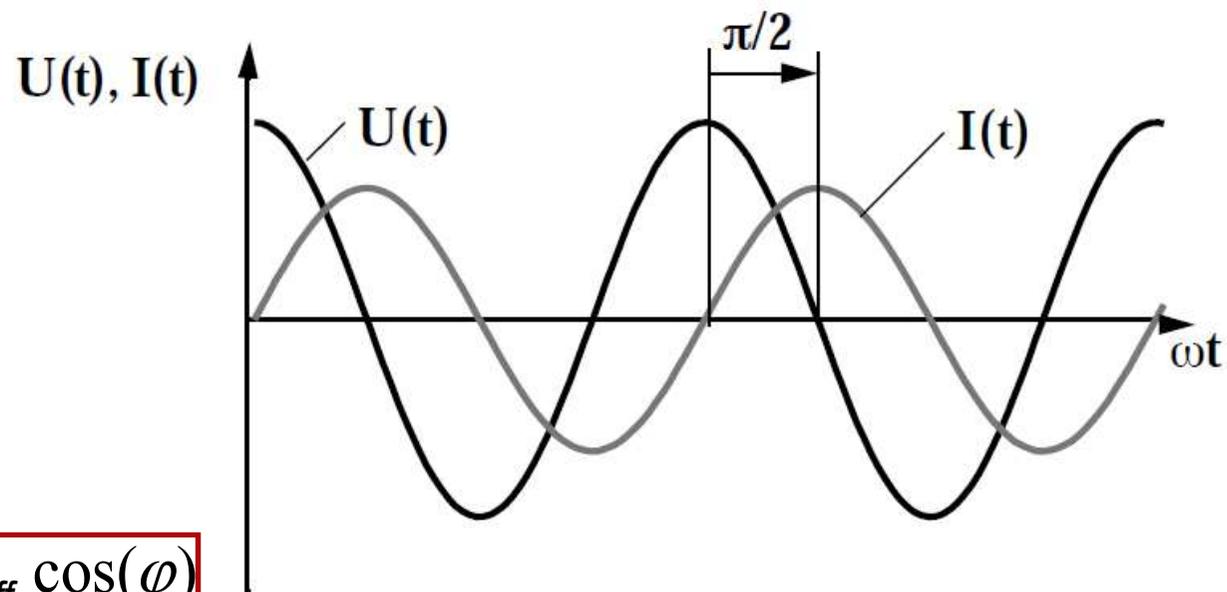
Kapazität

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$



Induktivität

$$Z_L = \omega L$$



Leistung: $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$

Für Stromstärken gilt: „Der Farad fährt voraus. Der Henry hinkt hintendrein.“

RLC - Kreise

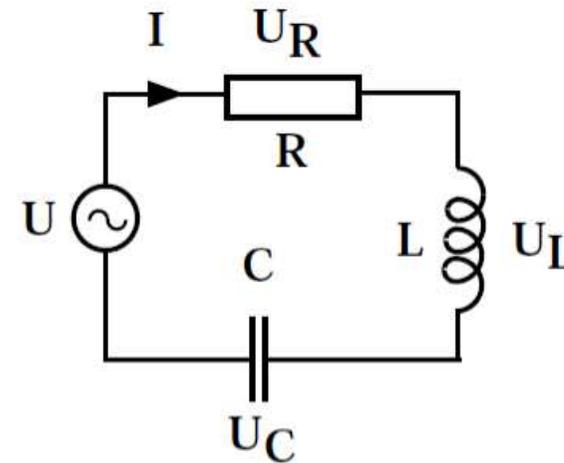
$$U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$U - U_R - U_C + U_L = 0$$

Die Impedanz der gesamten RLC Serieschaltung beträgt

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



die Phasenverschiebung φ zwischen dem Strom $I(t)$ und der Spannung $U(t)$ wird durch die Größen R , L , C und ω bestimmt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

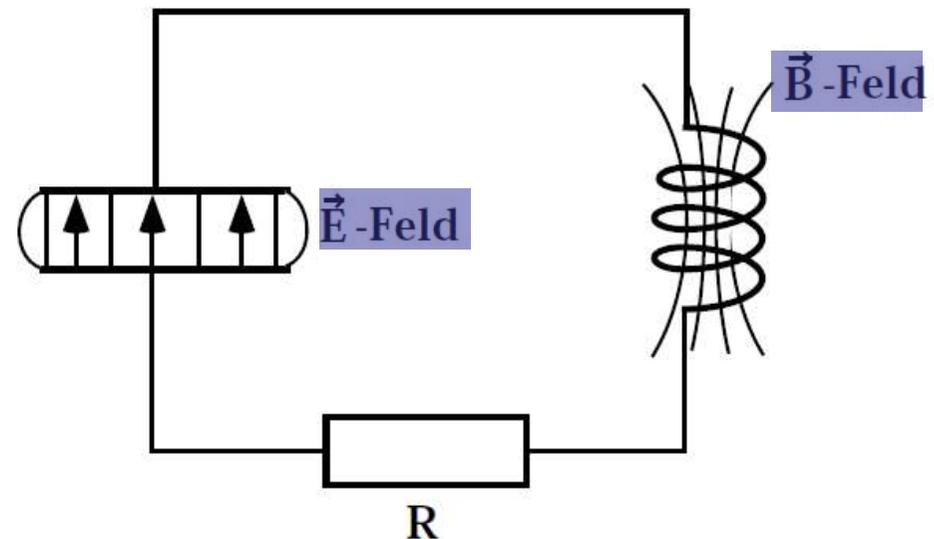
(ohne Beweis)

RCL-Schaltungen stellen Schwingkreise dar.

RLC - Schaltungen stellen Schwingkreise dar. Wie bei mechanischen Schwingungen findet auch hier ein Energieaustausch zwischen zwei verschiedenen Energieformen, der Feldenergie des E- und B-Feldes, statt.

Der Ohmsche Widerstand R ist für die Dämpfung des Systems verantwortlich.

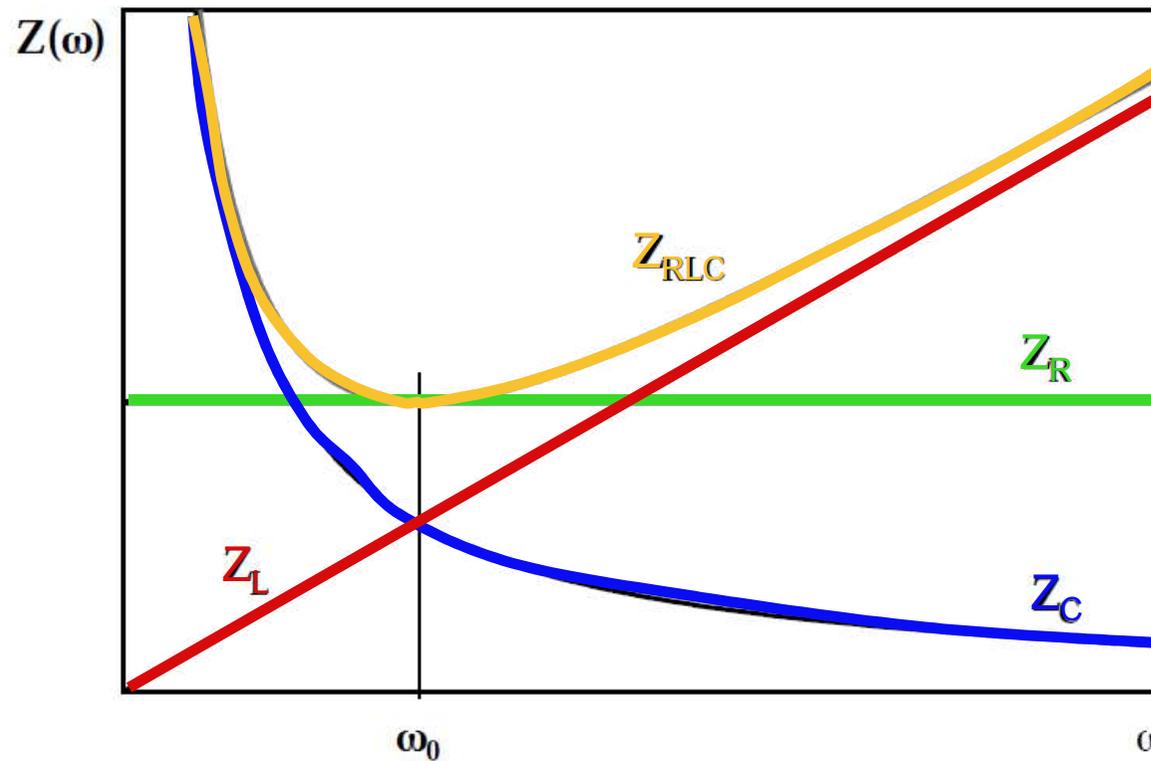
Falls wir eine äussere Spannungsquelle anschliessen (siehe Figur oben), erhalten wir eine erzwungene Schwingung und wir können ein Resonanzverhalten bekommen.



Energie des elektrischen Feldes:
$$E_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 V$$

Energie des Magnetfeldes:
$$E_{mag} = \frac{1}{2} \frac{B^2 V}{\mu_0 \mu}$$

Graphische Darstellung der Impedanzen Z_R , Z_C und Z_L in Abhängigkeit von ω



$$Z_R = R$$

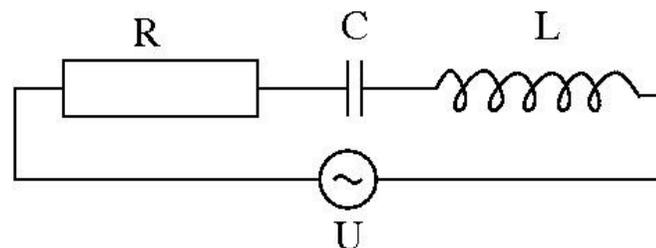
$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$Z_L = \omega L$$

$$Z_{RLC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

ω_0 : Resonanzfrequenz des ungedämpften Oszillators

Exp: $Z_{RLC}(\omega)$



An der Stelle ω_0 (der Resonanzfrequenz des ungedämpften Oszillators) gilt:

$$Z_C = Z_L$$

$$\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

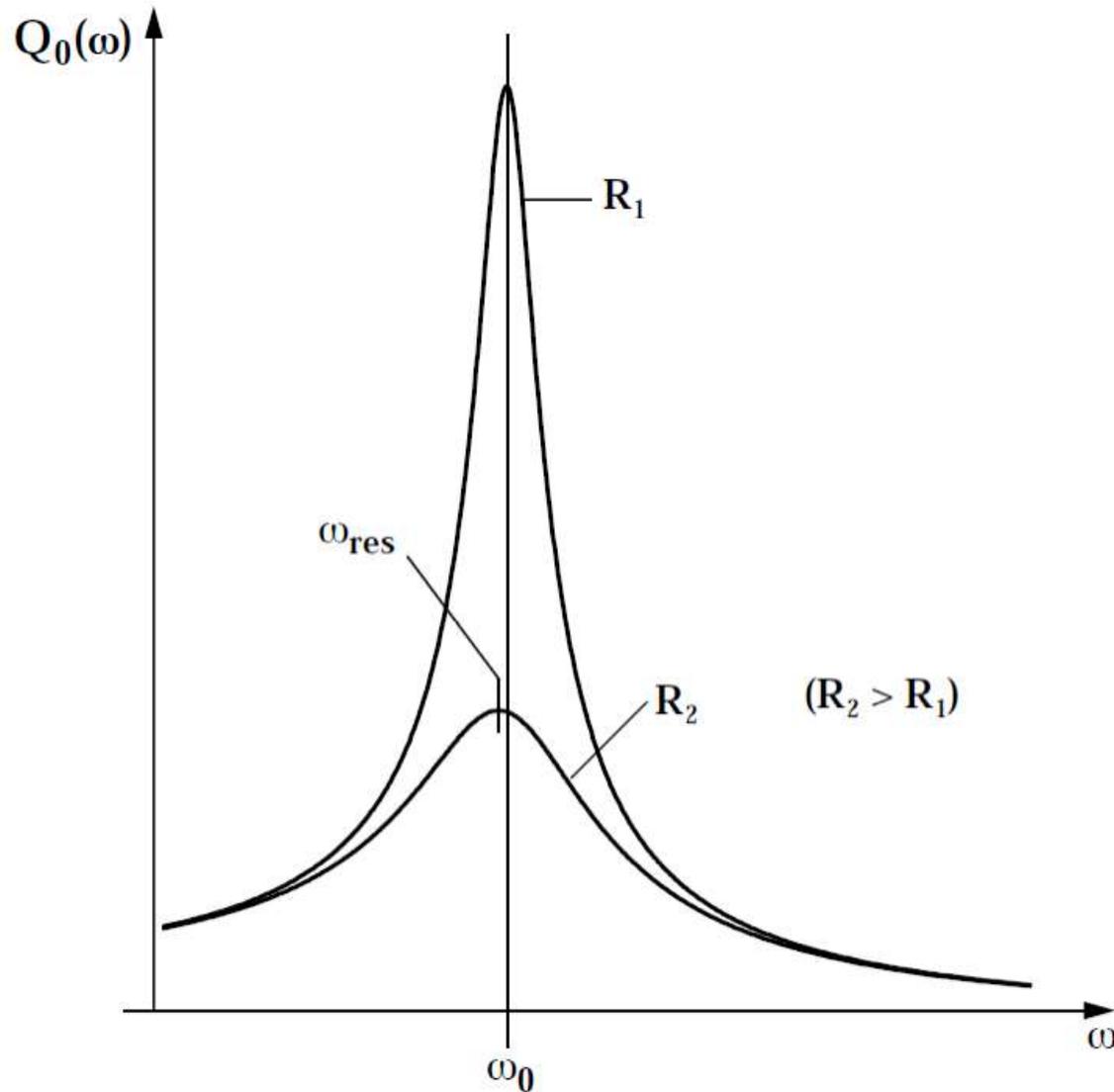
Für die Resonanzfrequenz ω_{res} gilt

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

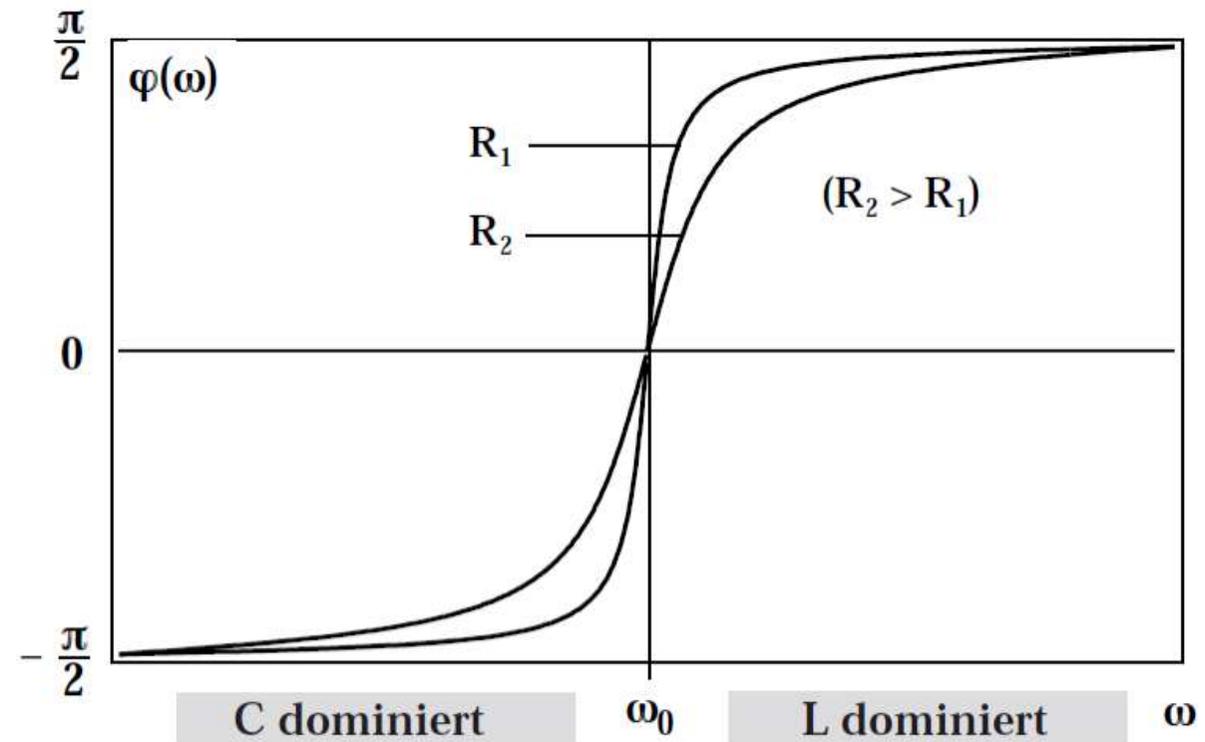
(ohne Beweis)

Bei kleiner Dämpfung gilt

$$\omega_{\text{res}} \cong \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Resonanzkurven $Q_0(\omega)$ für zwei verschiedene Dämpfungen R_1 und R_2 . An Stelle der Stromamplitude ist hier die Amplitude Q_0 der Ladungszillationen $Q(t)$ aufgetragen.



Phasenverschiebungen $\varphi(\omega)$ zwischen dem Strom $I(t)$ und der Spannung $U(t)$ für zwei verschiedene Dämpfungen

Die Analogie zwischen der erzwungenen Schwingung eines Federpendels (Mechanik Kap. 8.3) und dem RLC - Schwingkreis beruht auf der Analogie der beiden Differentialgleichungen.

mechanisches Pendel	RLC - Schwingkreis
$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Dx = F_0 \cos \omega t$	$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 \cos \omega t$
Masse m	Induktivität L
Direktionskonstante D	reziproke Kapazität $1/C$
Reibung α	ohmscher Widerstand R
Auslenkung x	Ladung Q
Geschwindigkeit \dot{x}	Strom \dot{Q}
potentielle Energie $\frac{1}{2} D x^2$	elektrostatische Energie $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$
kinetische Energie $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	magnetische Energie $\frac{1}{2} L I^2$
Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{\alpha}{2m}$	$\delta = \frac{R}{2L}$

Lösung der Differentialgleichung
mit $F_0 = 0$ (gedämpfte Schwingung):

$$x = x_0 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

mit $U_0 = 0$:

$$Q = Q_0 e^{-\delta t} \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung (Resonanzfrequenz)

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\alpha^2}{4 m^2}}$$

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4 L^2}}$$

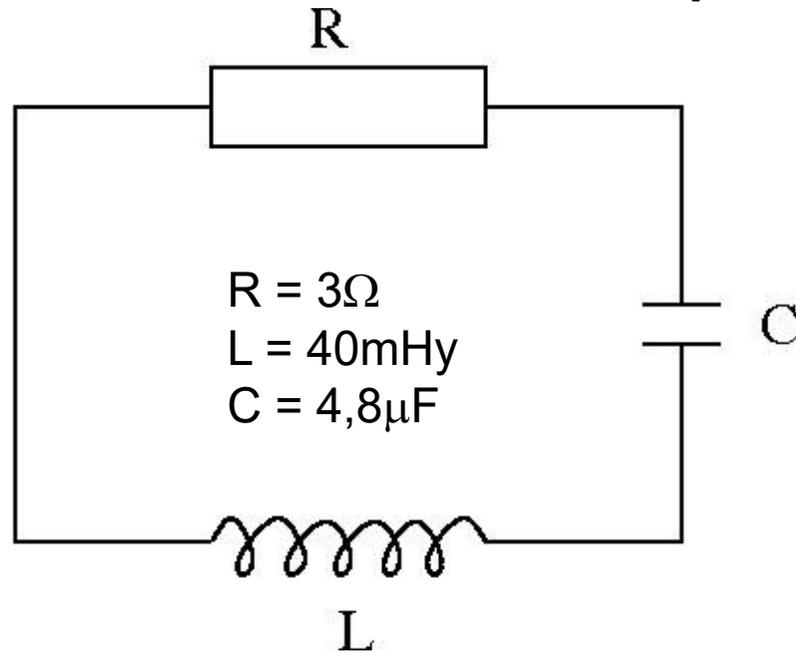
$$\omega_{\text{res}}^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

ω_{res} : Resonanzfrequenz

ω_0 : Eigenfrequenz

δ : Dämpfung

Beispiel RLC-Kreis



Resonanzfrequenz $\nu_{res} = ?$

$$\nu_{res} = \frac{\omega_{res}}{2\pi}$$

$$\nu_{res} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$\nu_{res} = 363\text{Hz}$$

Wann ist $Q(t = ?) = \frac{1}{2} Q_0$?

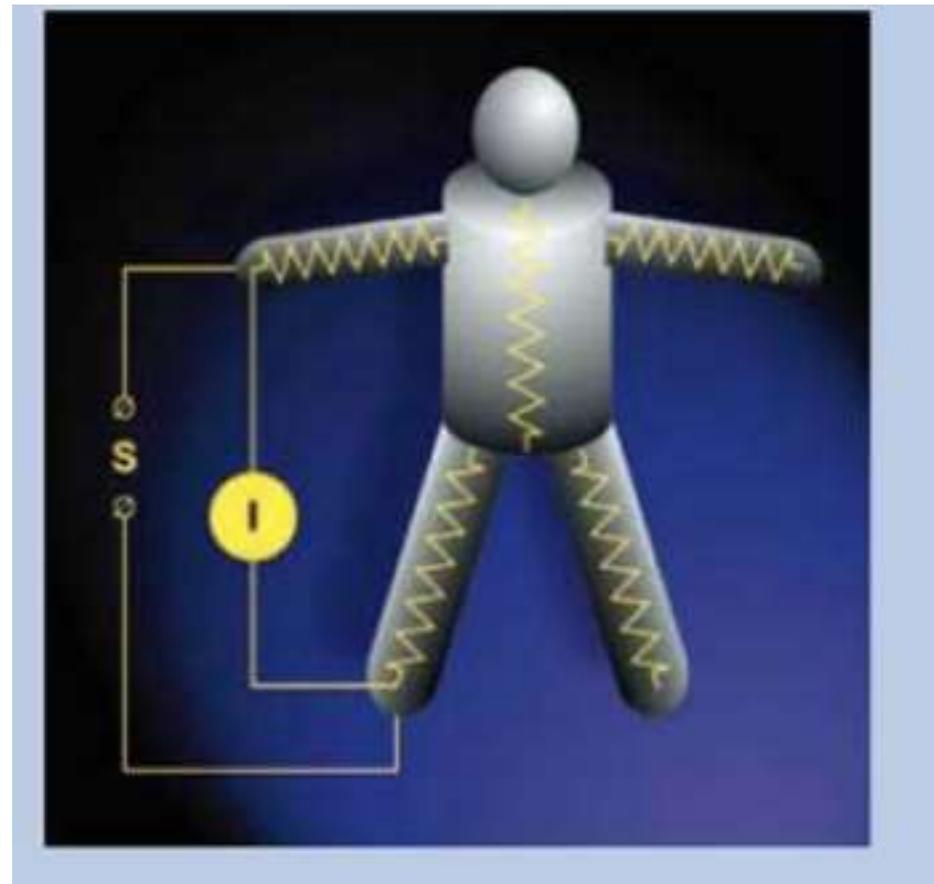
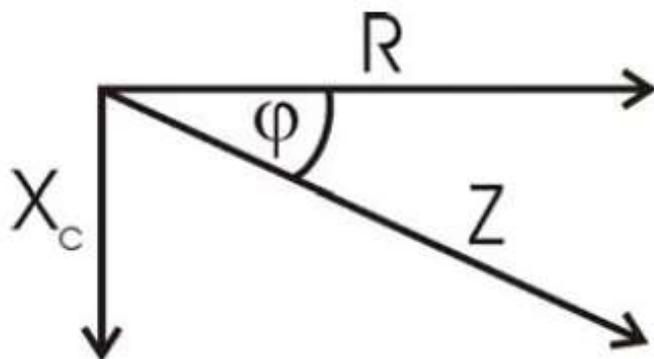
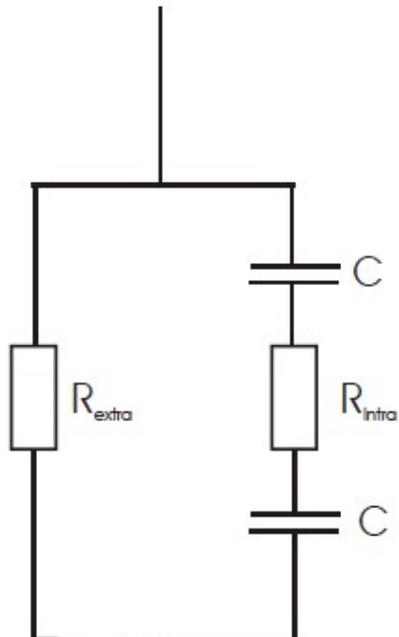
$$Q(t) = Q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} Q_0$$

$$Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} Q_0$$

$$e^{-\frac{R}{2L}t} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{2L}{R} \ln(2) = 0.02\text{sec}$$

Impedanzmessung beim Mensch: R hängt von Fettanteil ab



$f=50\text{kHz}$

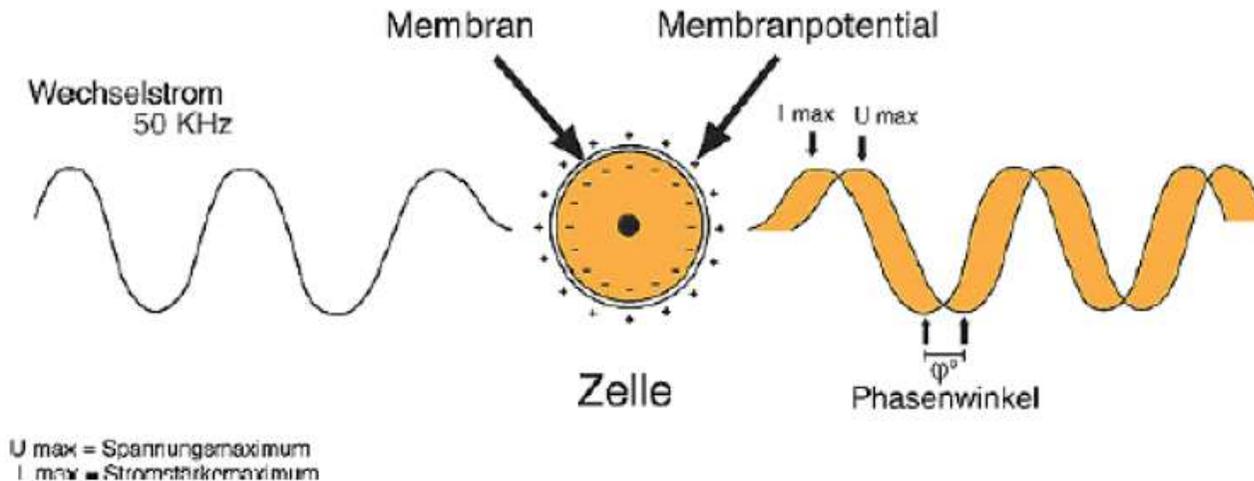
Phasenwinkel

<i>Frauen</i>	<i>Männer</i>	<i>Beurteilung von Ernährungs- und Trainingszustand</i>
<i>> 7,5</i>	<i>> 7,9</i>	<i>Meist nur im Leistungssport und bei Bodybuilding.</i>
<i>6,5 - 7,5</i>	<i>7,0 - 7,9</i>	<i>„Sehr gut“.</i>
<i>6,0 - 6,4</i>	<i>6,5 - 6,9</i>	<i>„Gut“.</i>
<i>5,5 - 5,9</i>	<i>6,0 - 6,4</i>	<i>„Befriedigend“.</i>
<i>5,0 - 5,4</i>	<i>5,5 - 5,9</i>	<i>„Ausreichend“.</i>
<i>4,0 - 4,9</i>	<i>4,5 - 5,4</i>	<i>„Mangelhaft“.</i>
<i>< 4,0</i>	<i>< 4,5</i>	<i>„Ungenügend“.</i>
<i>< 2,0</i>	<i>< 2,5</i>	<i>Nur bei Inaktivitätsatrophie mit Muskelschwund</i>

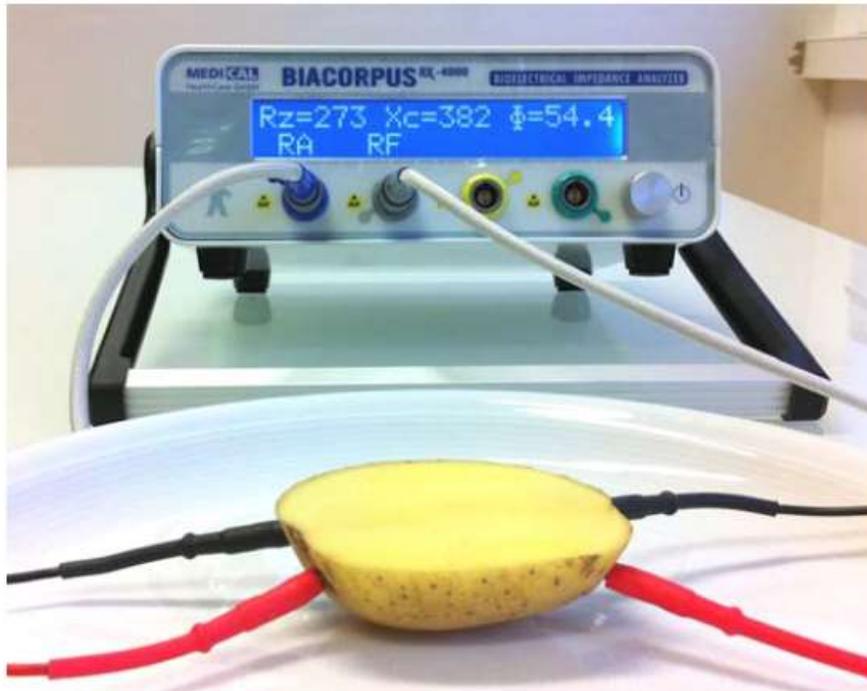
*Tabelle G1 Vorschlag zur Beurteilung und Einteilung der Phasenwinkel-Werte
(gilt nur für Messungen mit BIANOSTIC-Spezialelektroden für Impedanzmessungen)*

Beurteilung des Gesundheitszustandes

Intakte Zelle mit hoher Membranintegrität oder hohe Zelldichte – hoher Phasenwinkel



Beispiel Kartoffel: frisch PA = ca. 54°



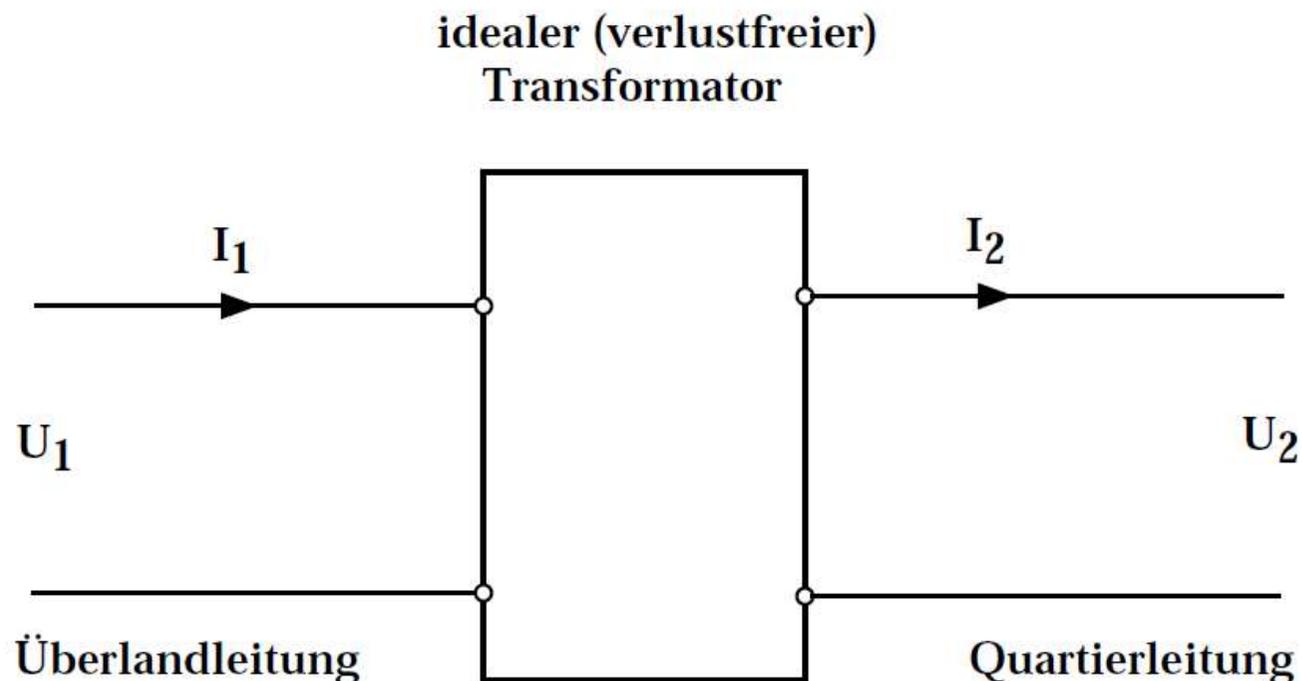
vs. gekocht PA= 5,4° da Zellstrukturen zerstört!



13.5 Der Transformator

Ein wesentlicher Grund für die Verwendung von Wechselspannung im technischen Bereich liegt einerseits in der Erzeugung der elektrischen Spannung durch Generatoren, die direkt eine (harmonische) Wechselspannung liefern und andererseits in der einfachen Möglichkeit der Spannungstransformation mit einem Transformator.

Beispiel :



U_1, U_2, I_1, I_2 : Wechselspannungen und -Ströme

Technische Überlandleitungen

$$U_1 = 12800 \text{ V} \quad I_1 = 100 \text{ A} \quad P_1 = U_1 I_1$$
$$P_1 = 1.28 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$U_2 = 400 \text{ V} \quad I_2 = 3200 \text{ A} \quad P_2 = 1.28 \cdot 10^6 \text{ W}$$

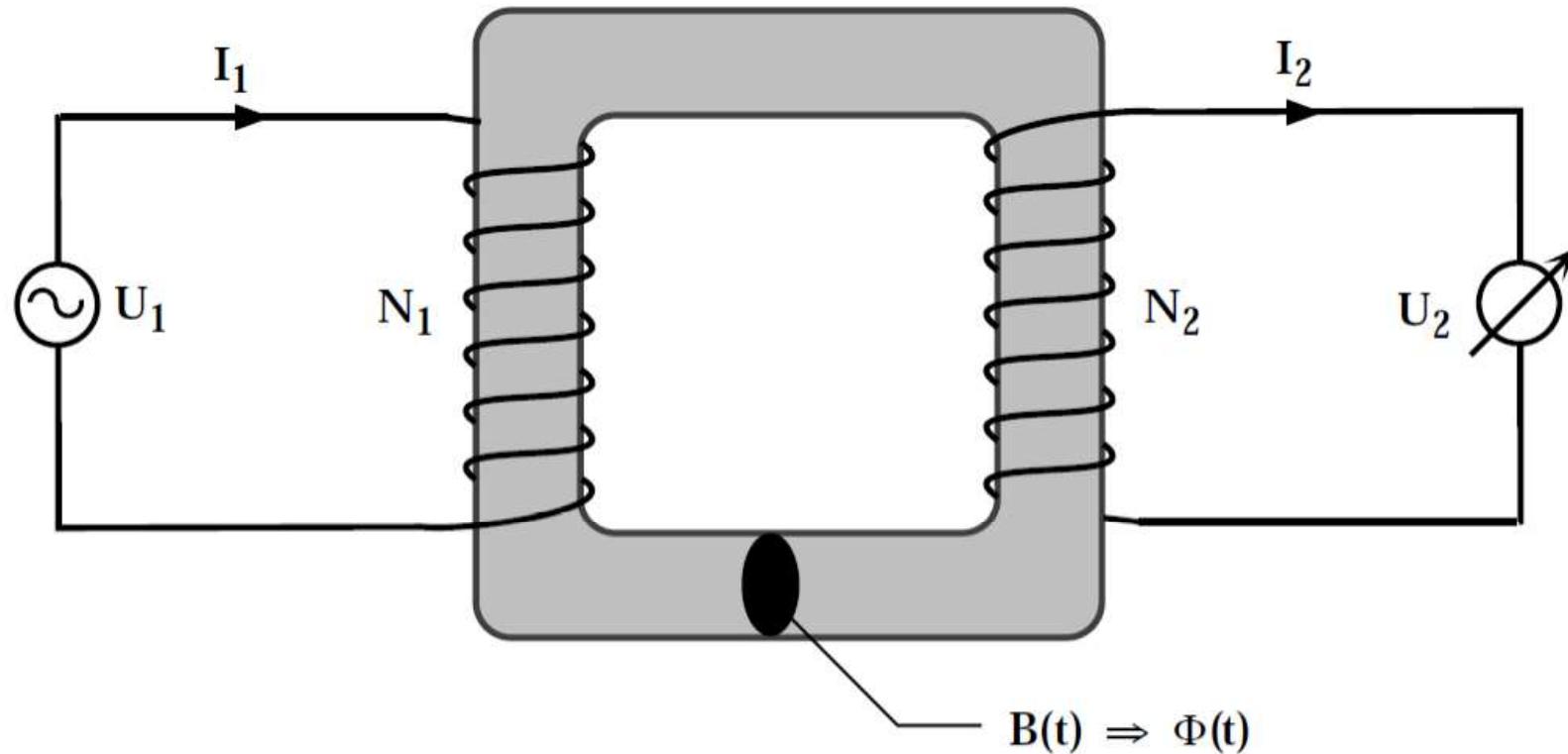
verlustfreier Transformator

In diesem Fall wird die Primärspannung U_1 um einen Faktor $1/32$ 'herunter - transformiert'

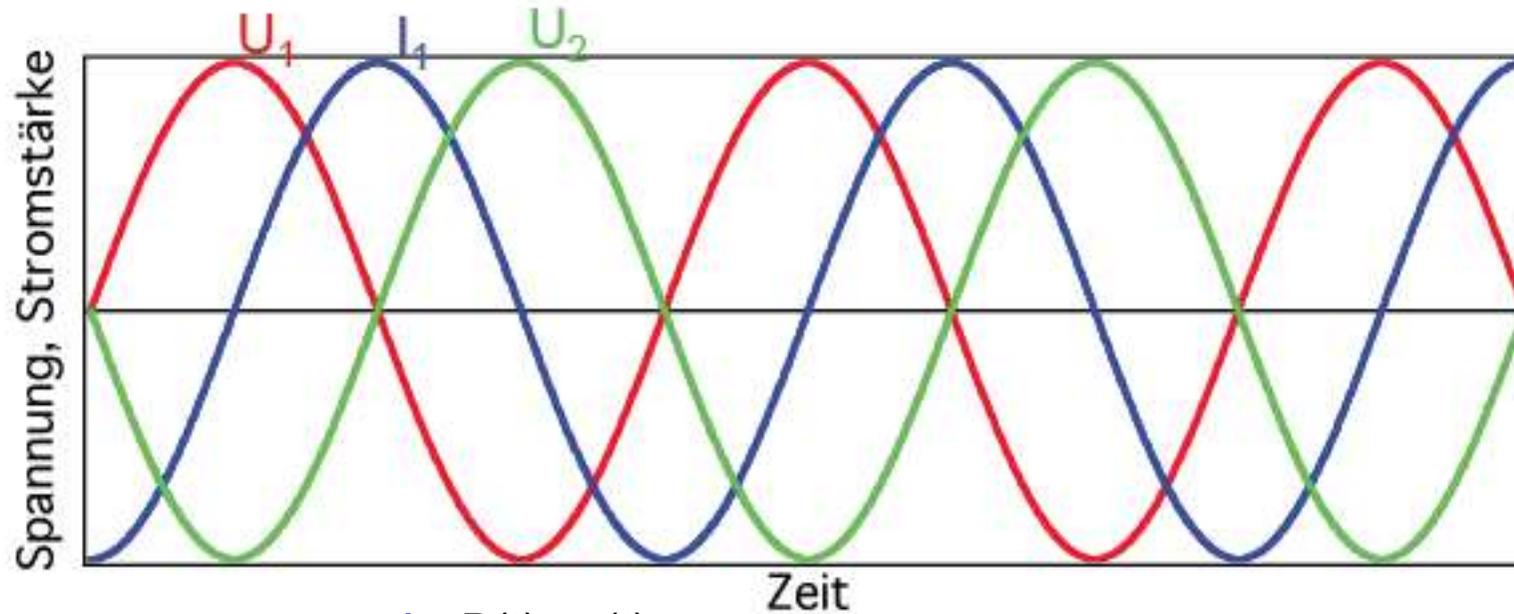
Warum hohe Spannungen?

 Verlust wächst mit I^2 bei vorgegebenem Leitungswiderstand!





U_1 bewirkt einen Strom I_1 , dessen Phase gegenüber der Spannung um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ verschoben ist. Der entstehende magnetische Fluss Φ ist in Phase mit I_1 . Die Flussänderung $\dot{\Phi}$ erzeugt in der Sekundärspule eine Induktionsspannung, welche wiederum eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ gegenüber $\Phi(t)$ aufweist. Das führt dazu, dass U_1 und U_2 eine Phasenverschiebung von π aufweisen.



$$I_1 \sim B(t) \sim \Phi(t)$$

$$-\dot{\Phi} \sim U_2$$

Falls der Fluss Φ im ganzen Eisenkern konstant ist, gilt für die Induktionsspannung in jeder Spulenwindung auf der Primär- und Sekundärseite:

$$U' = -\dot{\Phi}$$

$$|U_1| = N_1 |U'|$$

$$|U_2| = N_2 |U'|$$

Daraus ergibt sich das Übersetzungsverhältnis

$$\frac{|U_1|}{|U_2|} = \frac{N_1}{N_2}$$

Übersetzungsverhältnis des idealen, unbelasteten Transformators

U_1 und U_2 sind um $\varphi = \pi$ phasenverschoben.

Ferner gilt für die Leistung auf der Primär- und Sekundärseite beim idealen Transformator:

$$P_1 = P_2$$

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

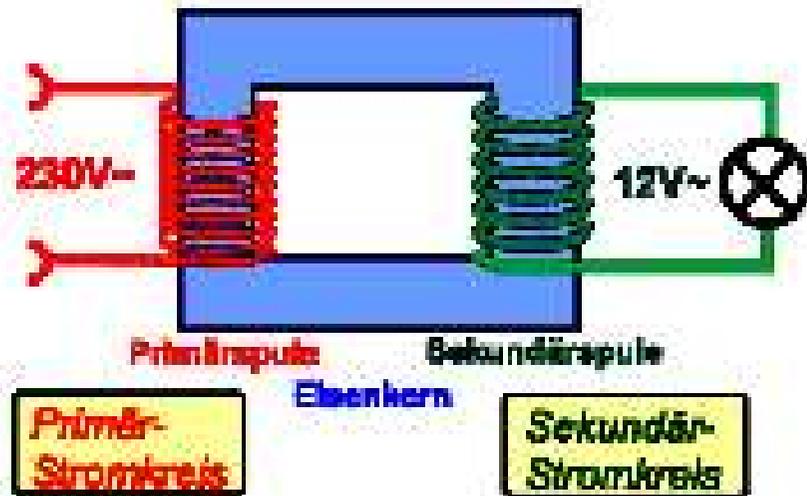
$$U_1 I_1 = \frac{U_1}{N_1/N_2} \cdot I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

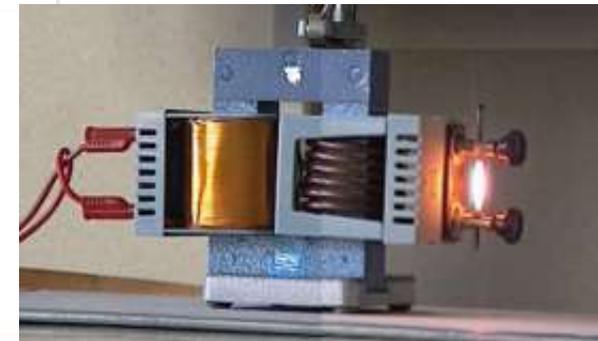
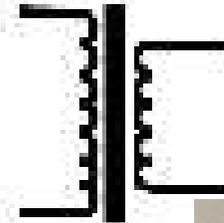
Exp: idealer Trafo, Funkenhörner, Schweißtrafo

Transformator

Beispiel eines Transformators:



Beispielsymbol:

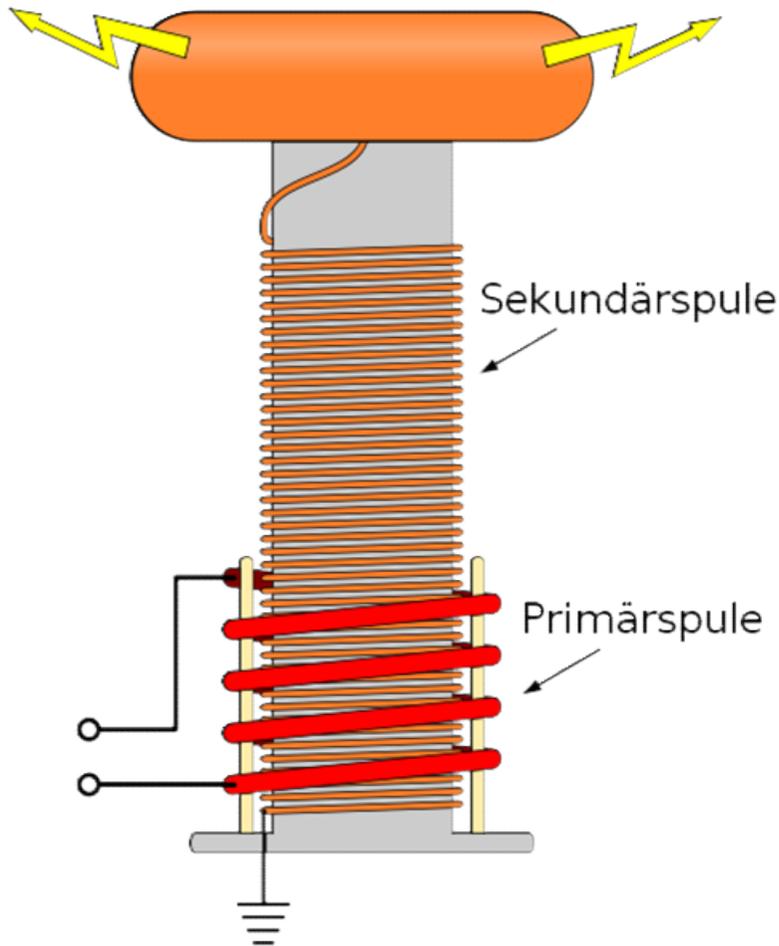


Spannungsverhältnisse am Transformator:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{\text{Spannung}_1}{\text{Spannung}_2} = \frac{\text{Windungszahl}_1}{\text{Windungszahl}_2}$$

Tesla-Transformator



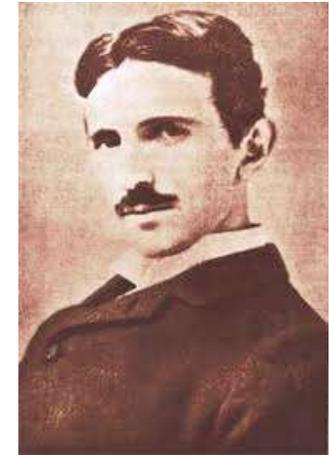
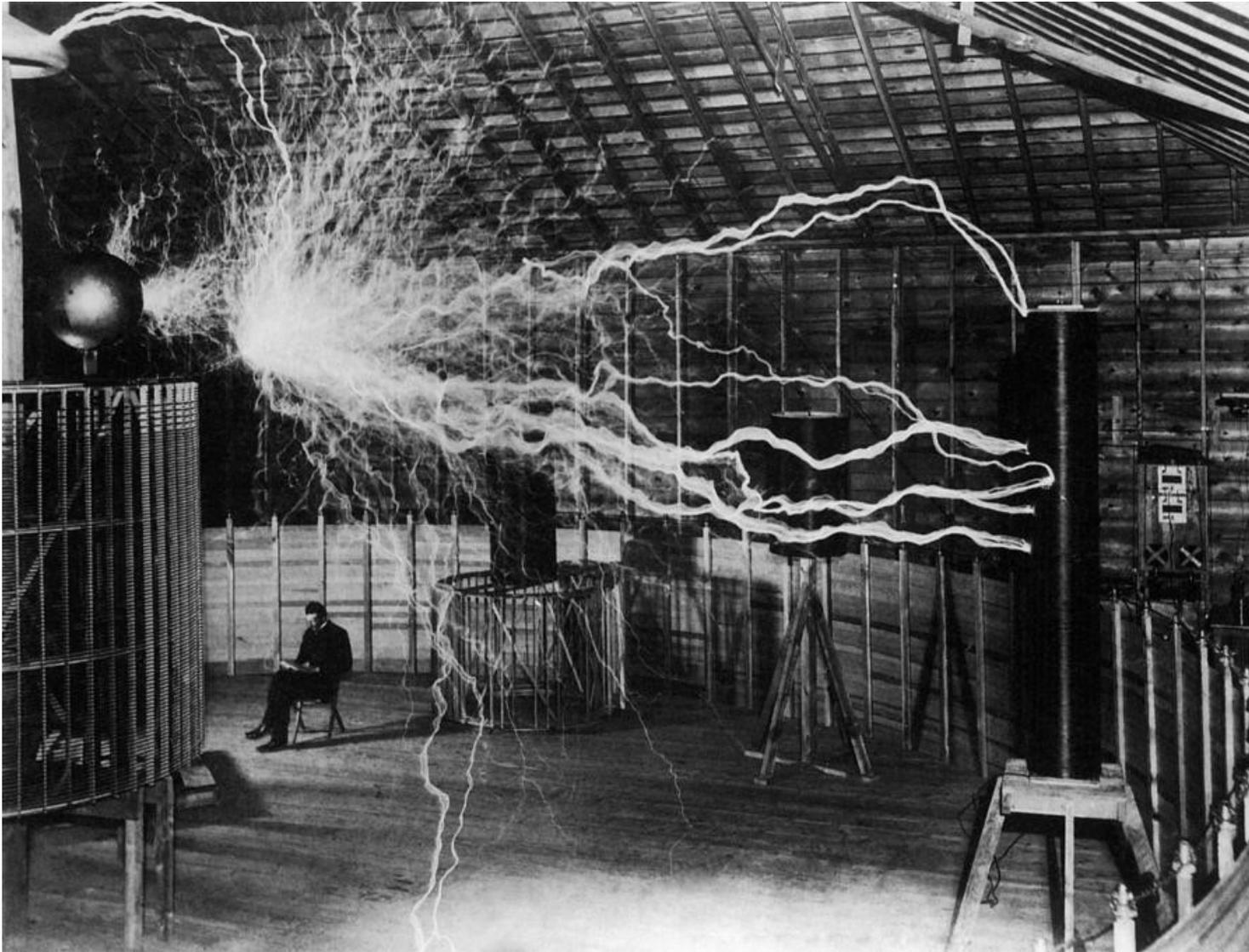
$$N_2/N_1=1180/8=142!$$

=> Wechselspannung von
über 100kV und Frequenzen im
Bereich von 10-100kHz

Zusätzliche Spannungserhöhung:

Resonanzschwingkreis
mit Resonanzüberhöhung
z.B. $Q=10$

Nikola Tesla 1856-1943



14. Gefahren elektrischer Ströme für den Menschen

Eine direkte Gefahr für den Menschen stellen Gleichströme oder niederfrequente Ströme dar, die durch den Körper hindurch fließen. Die häufigsten Strompfade führen von einer Hand über den Rumpf zur anderen Hand oder von einer Hand über den Rumpf zu den Füßen.

Typische Widerstandswerte (bei trockener Haut)

Vorleungsexperiment: $R_{\text{Hand-Hand}} \approx \dots 10\text{k}\Omega$
 $R_{\text{Hand-Füsse}} \approx \dots$

Bei einer Spannung von $U = 220\text{ V}$ würde das zu den Strömen führen

$I_{\text{Hand-Hand}} \approx \dots 22\text{mA}$
 $I_{\text{Hand-Füsse}} \approx \dots$

Die Wirkungen elektrischer Ströme auf den Menschen lassen sich etwa wie folgt grob klassifizieren

Exp: Widerstand Hand-Hand (trocken/nass) typisch $10\text{k}\Omega$

Strom I	Wirkung
< 5mA	keine Wirkung
≈ 5 - 7 mA	Kribbeln
≈ 20 mA	Schmerzhaft, Lösungshemmung (spannungsführende Leitung kann nicht mehr losgelassen werden)
≈ 30 mA	Atmung gestört, Blutdrucksteigerung, Herzunregelmässigkeit
≈ 80 - 200 mA	Bewusstlosigkeit, Herzflimmern
> 200 mA	Herzstillstand, Atmung setzt aus

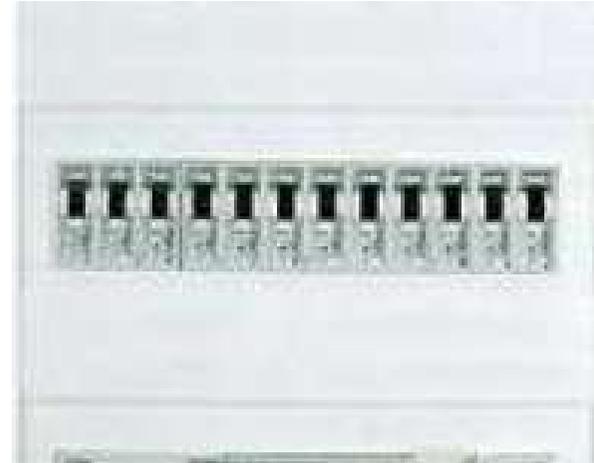
Häufigste Todesfälle für $80 < I < 200\text{mA}$

Sprunghaftes Zucken des Herzens → Unterbruch des Bluttransports. Hilfe evtl. durch kontrollierten Elektroschock.

**Für $I > 200 \text{ mA}$ bei Herzstillstand
Hilfe durch Herzmassage**

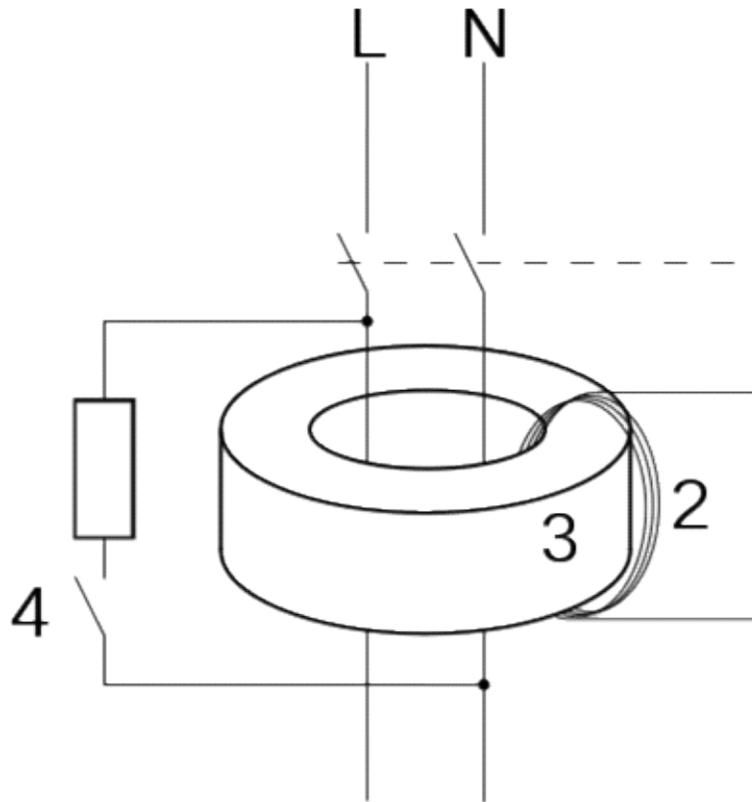
Die Zeit der Einwirkung spielt natürlich auch eine entscheidende Rolle!

Sicherungen



Normale Sicherungen begrenzen den Stromfluss (3A, 10A, 60A) schützen aber nicht vor Unfällen!

FI-Schalter



Fehlerstromschutzschalter:
Schaltet wenn Strom auf der Phase und

0.03A Fehlerstrom (zwischen Nulleiter und Phase) während 0.1sec
Genügen um FI-Schalter auszulösen ⇒ Ergibt besseren Schutz

Hautwiderstand, Feuchtigkeit

Typische Widerstandswerte
(trockene Haut)

$R(\text{Hand-Hand}) \approx 20\text{k}\Omega$

$R(\text{Hand-Füße}) \approx 200\text{k}\Omega$

⇒ Nur eine Hand in Kontakt bringen
(nicht beide Hände)

⇒ Bei einer Spannung von $U=230\text{V}$

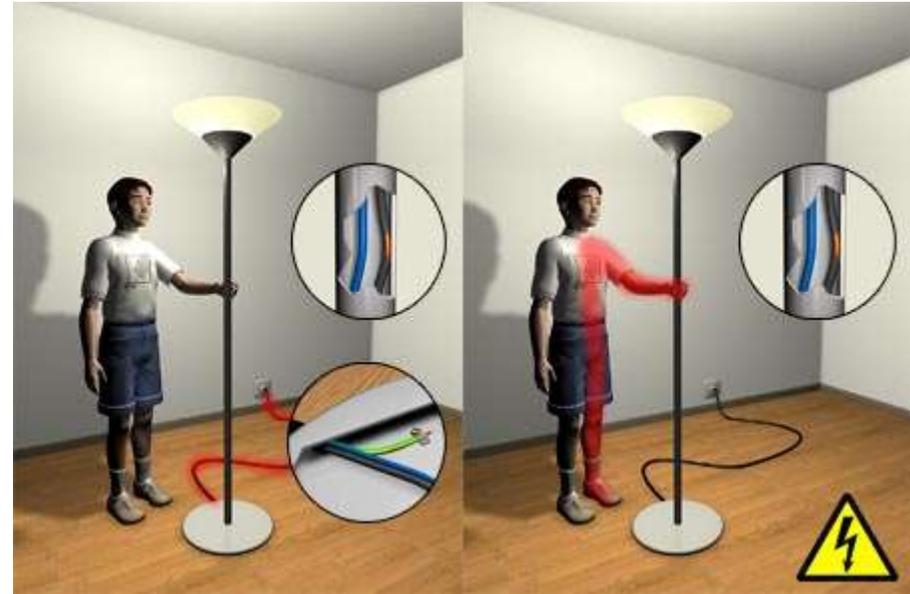
⇒ $I(\text{Hand-Hand}) = U / R \approx 10\text{mA}$

⇒ $I(\text{Hand-Füße}) \approx 1\text{mA}$

⇒ Bei Feuchtigkeit oder Regen werden Widerstände stark verringert

⇒ Körperwiderstand von $3\text{k}\Omega$

⇒ $I(\text{Körper}) \approx 70\text{mA}$



Welche Spannung ist gefährlich?

Bei trockener Haut ist der Kontaktwiderstand 20kOhm

D.h. mit 50V erhält man einen Strom von:

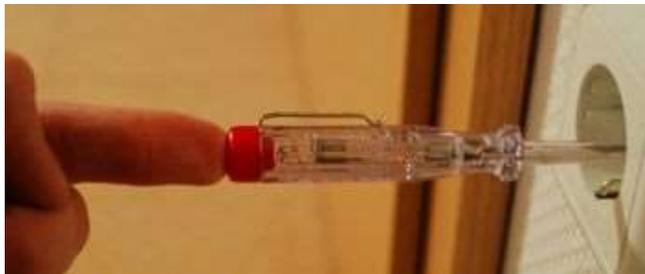
$U=RI \Rightarrow I = U/R=50V / 20kOhm = 2.5mA$
was noch ungefährlich ist

Aber: Feuchtigkeit kann den Hautwiderstand deutlich verringern.
 $\Rightarrow 3kOhm$ Körperwiderstand $\Rightarrow 8mA$ (Grenze von 30mA)

Ungefährlich:

Phasenprüfer 500kOhm ergibt 0,5mA bei 230V

Viehhüter (5000V; aber nur kurze Pulse: 0.1ms)



Defibrillator

Kondensator auf 4000V wird kurzzeitig 3-40ms über das Herz entladen.

Es wird eine Energie von 200 bis 400 Joule deponiert, wobei kurzzeitig bis 50A fließen können.



Felder und Grenzwerte

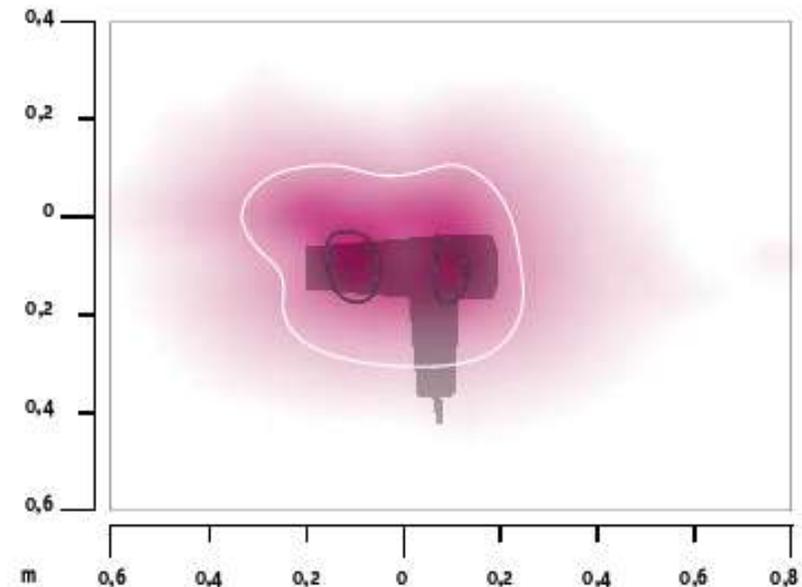
GSM-900	41V/m	4V/m*
GSM-1800	58V/m	6V/m*
UMTS	61V/m	6V/m*
Hochspannungsleitung 50Hz	5kV/m 100MikroTesla 100 μ T	1 μ T*
16 2/3 Hz	10kV/m 300MikroTesla 300 μ T	1 μ T*

*Orte mit empfindlicher Nutzung
(Wohnbereiche, Kinderspielplätze)

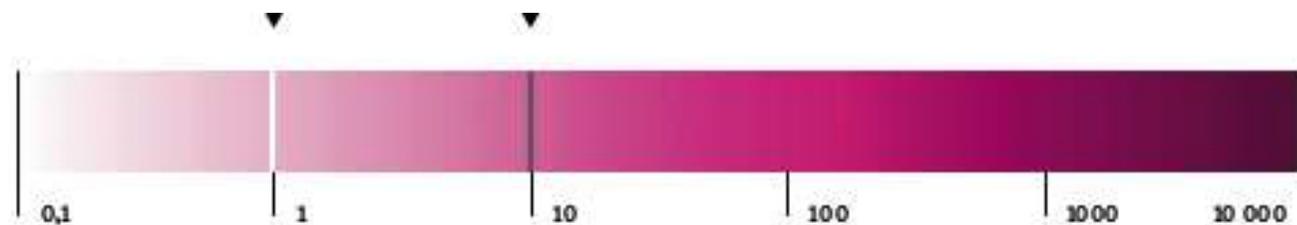


Magnetfelder im Haushalt

Gerät	Magnetfeld (μT)		
	in 3 cm Abstand	in 30 cm Abstand	in 1 m Abstand
Haarföhn	6 – 2000	0,01 – 7	0,01 – 0,3
Elektrorasierer	15 – 1500	0,08 – 9	0,01 – 0,3
Bohrmaschine	400 – 800	2 – 3,5	0,08 – 0,2
Elektrosäge	250 – 1000	1 – 25	0,01 – 1
Staubsauger	200 – 800	2 – 20	0,1 – 2
Waschmaschine	0,08 – 50	0,15 – 3	0,01 – 0,15
Wäschetrockner	0,3 – 8	0,1 – 2	0,02 – 0,1
Bügeleisen	8 – 30	0,1 – 0,3	0,01 – 0,03



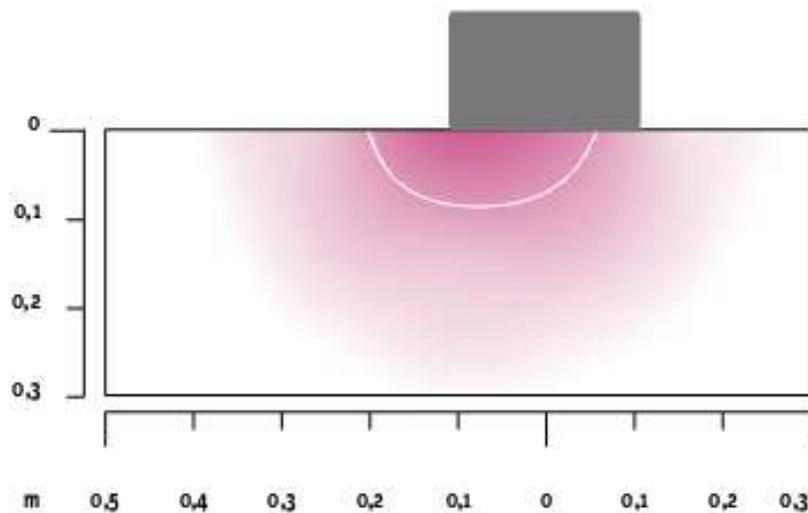
Haarföhn



Skala der magnetischen Flussdichte in Mikrottesla (μT).

Magnetfelder im Haushalt

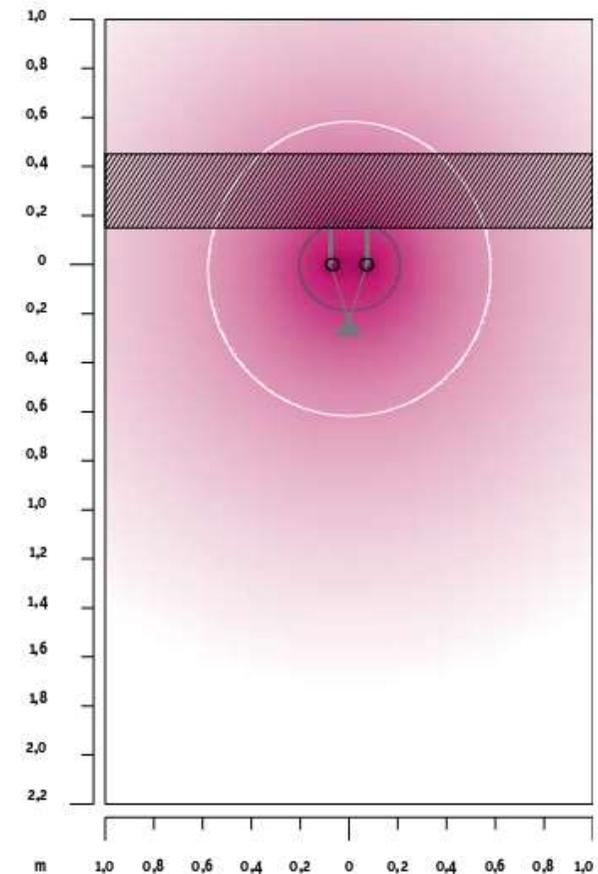
Gerät	Magnetfeld (μT)		
	in 3 cm Abstand	in 30 cm Abstand	in 1 m Abstand
Radiowecker	3-60	0,1-1	0,01-0,02
Elektrische Heizdecke	bis 30		
Fernsehapparat	2,5-50	0,04-2	0,01-0,15
Bildschirm TCO		0,2 (50 cm)	
Elektrische Fussbodenheizung		0,1-8	
Heizofen	10-180	0,15-5	0,01-0,25



Radiowecker

Magnetfelder im Haushalt

Gerät	Magnetfeld (μT)		
	in 3 cm Abstand	in 30 cm Abstand	in 1 m Abstand
Glühlampe (60 W)	0,1–0,2		
Energiesparlampe 15 W (mit elektronischem Vorschaltgerät)	1	0,1	
Halogen-Schreibtischlampe	25–80	0,5–2	bis 0,15
Niedervolt-Halogenbeleuchtung			bis 0,3



Halogen-Lampe