

Alfred X. Trautwein, Uwe Kreibitz, Jürgen Hüttermann  
**Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten**



Alfred X. Trautwein, Uwe Kreibig,  
Jürgen Hüttermann

# **Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten**

8., neu bearbeitete Auflage

DE GRUYTER

*Autoren*

**Prof. Dr. Alfred X. Trautwein**

Universität zu Lübeck  
Institut für Physik  
Ratzeburger Allee 160  
23562 Lübeck

**Prof. Dr. Uwe Kreibig**

Rheinisch-Westfälische Hochschule  
I. Physikalisches Institut  
Sommerfeldstr. 14  
52074 Aachen

**Prof. Dr. Jürgen Hüttermann**

Universität des Saarlandes  
Fachrichtung Biophysik  
Klinikum Bau 76  
66421 Homburg

1. Auflage 1977
2. Auflage 1978
3. Auflage 1983
4. Auflage 1987
5. Auflage 1999
6. Auflage 2004
7. Auflage 2008

Das Buch enthält 366 Abbildungen und 38 Tabellen.  
ISBN: 978-3-11-031619-3  
e-ISBN: 978-3-11-031682-7

**Library of Congress Cataloging-in-Publication data**

A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Der Verlag hat für die Wiedergabe aller in diesem Buch enthaltenen Informationen mit den Autoren große Mühe darauf verwandt, diese Angaben genau entsprechend dem Wissensstand bei Fertigstellung des Werkes abzdrukken. Trotz sorgfältiger Manuskriptherstellung und Korrektur des Satzes können Fehler nicht ganz ausgeschlossen werden. Autoren und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und keine daraus folgende oder sonstige Haftung, die auf irgendeine Art aus der Benutzung der in dem Werk enthaltenen Informationen oder Teilen davon entsteht.

Die Wiedergabe der Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen und dergleichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass solche Namen ohne weiteres von jedermann benutzt werden dürfen. Vielmehr handelt es sich häufig um gesetzlich geschützte, eingetragene Warenzeichen, auch wenn sie nicht eigens als solche gekennzeichnet sind.

© 2014 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston

Satz: Beltz, Bad Langensalza

Druck und Bindung: Hubert & Co., Göttingen

Einbandabbildung: Pasieka/Science Photo Library / Agentur Focus

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Printed in Germany

[www.degruyter.com](http://www.degruyter.com)

# Vorwort der 8. Auflage

---

In ihrem klassischen Rahmen befasste sich die Physik hauptsächlich mit Vorgängen in der unbelebten Natur. Heute erstreckt sie sich auf alle Gebiete der Naturwissenschaften und Technik. So ist sie auch zu einer der wesentlichen Basiswissenschaften in der Biologie und Medizin geworden. Dies beruht darauf, dass die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten, die man in der unbelebten Natur beobachten kann, auch für die lebenden Organismen gelten, sie sind aber in der unbelebten Natur meist sehr viel einfacher zu erkennen.

Die Physik stellt Methoden der Problemlösung bereit, indem komplexe Naturvorgänge durch ein System vereinfachter Modellprozesse ersetzt werden. Diese haben den Vorteil, mit mathematischen Hilfsmitteln in Form von physikalischen Gesetzen beschreibbar zu sein und damit quantitative Aussagen zu liefern.

Durch Zusammenwirken dieser Prozesse lassen sich dann im Prinzip beliebig komplexe Vorgänge simulieren. Physikalische Gesetze haben es so ermöglicht, in Biologie und Medizin über die einfache Beschreibung von Lebensvorgängen hinaus zu ihrem naturwissenschaftlich begründeten Verständnis zu engen. Es ist daher notwendig, dass sich Mediziner, Biologen und Pharmazeuten intensiv mit den physikalischen Grundlagen ihrer Wissenschaften beschäftigen. Erster Schritt dazu ist, an einfachen Modellen zu lernen, wie man mit physikalischen Methoden arbeitet. Daran schließt sich der schwere Weg an, in der Vielfalt und Komplexität der Vorgänge am lebenden Organismus physikalische Einzelprozesse auszumachen.

In diesem Buch haben wir uns bemüht, physikalische Begriffe und grundlegende Zusammenhänge an einfachen Modellen einzuführen. Dadurch bleibt auch ihre mathematische For-

mulierung überschaubar. Vor dieser sind wir nicht ausgewichen; Physik ist, wie jede Naturwissenschaft, eine quantitative Wissenschaft. Sie begnügt sich nicht damit, festzustellen, dass etwas geschieht, sondern untersucht, warum es in einem bestimmten Ausmaß geschieht. Grundlage des Verständnisses ist daher ein eindeutiges, mathematisch formulierbares Begriffssystem. Dabei dient die Mathematik als nützliches Werkzeug für quantitative Beschreibungen. Dieses Begriffssystem nimmt besonders im ersten Abschnitt, der Mechanik, einen großen Raum ein. Wir sind der Überzeugung, dass auch der, der die Physik nur als Hilfswissenschaft benötigt, in der Lage sein muss, einfache Probleme und Fragestellungen, die in seinem Fachgebiet auftreten, selbst durchzurechnen. Ein wesentliches Anliegen war es uns, Grundlagen durch Beispiele aus dem medizinisch-biologischen Bereich zu veranschaulichen. Sie sollen darauf hinweisen, in welchen unterschiedlichen Gebieten allgemeine physikalische Gesetzmäßigkeiten realisiert sind. Zur Prüfung seines Verständnisses sollte der Leser sich dann versuchen, andere Beispiele zu finden. Er wird rasch merken, wie viel Freude es machen kann, sich über die Physik klar zu werden, die hinter Vorgängen des täglichen Lebens wie Radfahren, Kochen, Singen, Tanzen, Fußballspielen, Filmen, Musizieren oder hinter technischen Geräten wie CD-Spieler, Kühlschrank oder Magnetschwebbahn steht.

Das alles sind Beispiele, die im vorliegenden Buch nicht behandelt werden, deren Erklärung aber in den besprochenen Gesetzmäßigkeiten enthalten ist.

Trotz unterschiedlicher Gegenargumente haben wir uns entschlossen, im Wesentlichen die übliche Gliederung der Physik in Mechanik, Wärmelehre, Elektrizitätslehre, Optik

und Kernphysik beizubehalten. Moderne Erkenntnisse der Quantenphysik und der Relativitätstheorie haben wir in den laufenden Text aufgenommen und nicht in spezielle Kapitel verbannt, als handle es sich dabei um eine andere Physik.

Die Stoffauswahl ist darauf abgestimmt, vornehmlich den Studierenden der Fächer Medizin, Biologie und Pharmazie sowie anderer Fachrichtungen mit biophysikalischen Aspekten Grundlagenkenntnisse in Physik zu vermitteln. Der Inhalt ist mit Absicht umfangreicher gestaltet als für Prüfungen minimal erforderlich. Unser Anliegen ist, das Buch auch für die Zeit nach dem Studium und nach den Prüfungen als Nachschlagewerk nützlich zu machen.

Zahlreiche Textverweise innerhalb des Buches sollen auch demjenigen Leser den Einstieg in die einzelnen Kapitel ermöglichen, der das Buch nicht kontinuierlich durchliest, sondern zum Nachschlagen verschiedenen Auflagen und bei der Fehlersuche wendet. Enggedrucktes ist nicht gleichbedeutend mit Entbehrlichem, vielmehr sollen damit Zusatzinformationen vom laufenden Text abgesetzt werden.

Die zahlreichen Abbildungen sind einfach gehalten, damit sie leicht verständlich sind. Als zusätzliche Hilfe sind die Strichzeichnungen zweifarbig gestaltet. Die Sammlung von Aufgaben mit Lösungen ist den einzelnen Kapiteln inhaltlich zugeordnet. Auf den ersten Blick mögen einige der Aufgaben umfangreich und schwierig erscheinen. Wir stel-

len sie jedoch nicht als Prüfungs- sondern als Übungsaufgaben und haben besonderen Wert auf ausführliche Lösungsbeschreibungen gelegt.

Die vorliegende 8. Auflage entstand nach erneuter eingehender Überarbeitung des gesamten Textes. Wie schon in der 7. Auflage wurde er durch eine Vielzahl aktueller, zumeist medizinbezogener Informationen ergänzt.

Das, was man sich als Gerüst an grundlegendem Wissen zur Vorbereitung auf die medizinische oder pharmazeutische Vorprüfung mindestens aneignen sollte, ist im Text durch Blauton hervorgehoben. Bei der Auswahl der Buchstaben für physikalische Größen (kursive Typen) und Einheiten (geradstehende Typen) sind wir im Allgemeinen den Vorschlägen von IUPAP (International Union for Pure and Applied Physics) bzw. dem SI-Einheitensystem gefolgt.

All denen, die uns bei der Edition der verschiedenen Auflagen geholfen haben, möchten wir danken. Ein besonderer Dank gilt unserem verstorbenen ehemaligen Mitautor, Herrn Professor Erich Oberhausen. Er hat die ersten vier Auflagen des Buches mitgestaltet und war noch maßgeblich an der Vorbereitung der fünften Auflage beteiligt, deren Erscheinen er dann aber leider nicht mehr erleben durfte.

Januar 2014

Alfred X. Trautwein, Uwe Kreibitz,  
Jürgen Hüttermann

# Inhalt

---

Einleitung	1
Mechanik	3
<b>1. Raum und Zeit</b>	<b>3</b>
1.1 Physikalische Größen und Einheiten	3
1.1.1 Länge als Beispiel	3
1.1.2 Basiseinheiten des internationalen Einheitensystems	4
1.1.3 Längenmessung	7
1.1.4 Zeitmessung	9
1.1.5 Winkelmaße	10
1.2 Bewegungen im Raum	11
1.2.1 Geschwindigkeit	11
1.2.2 Beschleunigung	13
1.2.3 Kreisbewegung	14
1.2.4 Berechnung des Weges aus Geschwindigkeit und Beschleunigung	16
<b>2. Masse und Kraft</b>	<b>18</b>
2.1 Die träge Masse	18
2.2 Wirkung von Kräften	19
2.2.1 Newton'sche Axiome	19
2.2.2 Verschiedene Arten von Kräften	20
2.2.2.1 Gravitation	20
2.2.2.2 Trägheitskraft	22
2.2.2.3 Zentrifugal- und Zentripetalkraft	22
2.2.3 Statisches und dynamisches Gleichgewicht von Kräften	23
2.2.4 Schwerelosigkeit	23
2.2.5 Dynamometer (Kraft einer gespannten Feder)	24
2.2.6 Druck (Kraft auf eine Fläche)	24
2.2.7 Drehmoment	24
2.2.7.1 Trägheitsmoment	25
2.2.7.2 Kräftepaar	25
2.2.7.3 Hebel	26
2.2.7.4 Schwerpunkt	27
2.2.7.5 Die Hebelwaage	28
2.2.7.6 Stabiles, indifferentes und labiles Gleichgewicht; Standfestigkeit	28
2.2.8 Impuls und Drehimpuls	29
2.2.9 Reibung	30
<b>3. Arbeit, Energie, Leistung</b>	<b>32</b>
3.1 Ein Beispiel für den Begriff <i>Arbeit</i>	32
3.2 Energieformen	33
3.3 Leistung, Wirkung	36
<b>4. Erhaltungssätze</b>	<b>37</b>
4.1 Energieerhaltungssatz	37
4.2 Impulserhaltungssatz	38
4.3 Der Stoß als Beispiel für Energie- und Impulserhaltung	39
4.4 Drehimpulserhaltungssatz	40
<b>5. Mechanische Eigenschaften von Stoffen</b>	<b>41</b>
5.1 Wechselwirkungen zwischen Atomen und Molekülen	42
5.1.1 Bindungsarten	42
5.1.2 Molekulares Bild der Aggregatzustände	44
5.2 Makroskopische mechanische Eigenschaften von Festkörpern	47
5.2.1 Homogene Körper	47
5.2.2 Verformung von festen Körpern unter dem Einfluss von Kräften	48
5.3 Makroskopische mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten	51
5.3.1 Grenzflächen	51
5.3.2 Hydrostatik	54
5.3.2.1 Kapillarität	54
5.3.2.2 Druck in Flüssigkeiten	56
5.3.3 Hydrodynamik	61
5.3.3.1 Die Kontinuitätsgleichung	61

5.3.3.2	Zähe Flüssigkeiten	63	5.3.3.2.4	Strömungsgesetze und Blutkreislauf	69
5.3.3.2.1	Viskosität	63	5.4	Nanotechnologie	71
5.3.3.2.2	Laminare Strömung	65			
5.3.3.2.3	Turbulente Strömung	68			

## Mechanische Schwingungen und Wellen

75

<b>6.</b>	<b>Schwingungen</b>	75	<b>7.</b>	<b>Wellen Teil I: Mechanische und Akustische Wellen</b>	89
6.1	Pendel als mechanisches schwingungsfähiges System	76	7.1	Ausbreitung von Schwingungen in Wellenfeldern	89
6.2	Differentialgleichung der ungedämpften Schwingung	77	7.2	Beschreibung von Wellenfeldern	91
6.3	Gedämpfte Schwingungen	79	7.3	Akustik	93
6.4	Erzwungene Schwingungen	81	7.4	Der Doppler-Effekt	99
6.5	Anharmonische Schwingungen	83	7.5	Gedämpfte Wellen	101
6.5.1	Überlagerung von harmonischen Schwingungen	83	7.6	Anharmonische Wellen: Schallwellen als Beispiel	102
6.5.2	Zerlegung anharmonischer Schwingungen in harmonische Teilschwingungen	84	7.7	Überlagerung von Wellen, Interferenz	106
6.5.3	Schwebung	85	7.8	Das Huygens'sche Prinzip	107
6.6	Gekoppelte Pendel	85	7.9	Wellen an der Grenzfläche zwischen verschiedenen Medien	109
6.6.1	Zwei gekoppelte Pendel	85	7.10	Stehende Wellen	110
6.6.2	Übergang von der Pendelkette zu Eigenschwingungen ausgedehnter Körper	87	7.11	Schallempfindungen: Akustik der Musik	113
			7.12	Stimme und Gehör beim Menschen	115
			7.13	Ultraschall	117

## Wärmelehre

123

<b>8.</b>	<b>Wärme und Temperatur</b>	123	9.2	Zustandsänderungen	129
8.1	Einleitung	123	9.3	Adiabatische Zustandsgleichungen	130
8.2	Wärmeenergie/Wärmemenge	123	9.4	Zustandsgleichung von Gasgemischen	130
8.3	Wärmekapazität	124	<b>10.</b>	<b>Kinetische Gastheorie</b>	131
8.4	Temperaturskalen	125	10.1	Gasdruck	121
8.5	Temperatur-Messgeräte	126	10.2	Kinetische Energie und Temperatur	132
8.5.1	Ausdehnungsthermometer	126	10.3	Freiheitsgrade und Gleichverteilungssatz	132
8.5.2	Thermoelement	127	10.4	Geschwindigkeitsverteilung	133
8.5.3	Widerstandsthermometer	128	10.5	Volumenarbeit	135
8.5.4	Digitalthermometer	128	10.6	Wärmekapazität von Gasen	135
<b>9.</b>	<b>Ideale Gase</b>	129			
9.1	Zustandsgrößen, Zustandsgleichung	129			

<b>11.</b>	<b>Reale Gase, Van der Waals'sche Zustandsgleichung</b> _____	136	13.3	Stoffgemische	146
<b>12.</b>	<b>Hauptsätze der Wärmelehre</b> ____	138	13.3.1	Gehaltsangaben von Lösungen	146
12.1	Innere Energie	138	13.3.2	Echte Lösung, kolloidales System, grobe Dispersion	147
12.2	Der 1. Hauptsatz der Wärmelehre	139	13.3.3	Henry-Dalton'sches Gesetz	148
12.3	Reversible und irreversible Prozesse	139	13.3.4	Hydratation, Solvatation	148
12.4	Entropie	141	13.3.5	Diffusion	148
12.5	Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre	142	13.3.6	Osmose	149
12.6	Energiebilanz beim lebenden Organismus	143	13.3.7	Phasenübergänge	151
<b>13.</b>	<b>Thermodynamische Eigenschaften von Stoffen</b> _____	144	13.3.7.1	Umwandlungswärmen	151
13.1	Thermische Ausdehnung	144	13.3.7.2	Lösungswärmen	152
13.2	Wärmeübergang, Wärmetransport	144	13.3.7.3	Reaktionswärmen	153
			13.3.7.4	Dampfdruck	153
			13.3.7.5	Dampfdruckerniedrigung, Siedepunkterhöhung und Gefrierpunkterniedrigung	155
			13.3.7.6	Koexistenz von Phasen, Phasengleichgewichte	156

## Elektrizitätslehre

159

<b>14.</b>	<b>Elektrische und magnetische Größen</b> _____	159	14.7	Elektrostatisches Feld	170
14.1	Vorbemerkung	159	14.7.1	Kraftwirkung auf eine Ladung im Feld	170
14.2	Ladung	159	14.7.2	Arbeit und Energie im elektrischen Feld	172
14.2.1	Ladungsmenge	159	14.7.3	Kondensator und Kapazität	173
14.2.2	Kraft zwischen elektrischen Ladungen	160	14.7.4	Kräfte auf einen Dipol im Feld	174
14.3	Spannung	161	14.7.5	Materie im Feld	175
14.3.1	Definition der Spannung	161	14.7.6	Energieinhalt des elektrischen Feldes	178
14.3.2	Spannungsquellen	162	14.7.7	Piezo- und Pyroelektrizität	178
14.4	Strom	163	14.8	Magnetfeld	178
14.5	Widerstand, Leitwert	165	14.8.1	Feldstärke und magnetische Induktion	179
14.5.1	Leiter, Nichtleiter	165	14.8.2	Kräfte auf einen magnetischen Dipol	182
14.5.2	Spezifischer Widerstand, spezifische Leitfähigkeit	165	14.8.3	Lorentz-Kraft	182
14.5.3	Strom-Spannungs-Kennlinie von Leitern	166	14.8.4	Induktionsvorgänge	184
14.6	Netzwerke	167	14.8.5	Selbstinduktion	185
14.6.1	Schaltbilder	167	14.8.6	Energieinhalt des magnetischen Feldes	186
14.6.2	Innenwiderstand einer Spannungsquelle	168	14.8.7	Lenz'sche Regel	186
14.6.3	Kirchhoff'sche Gesetze des elektrischen Stromes	169	14.8.8	Magnetfelder des menschlichen Körpers	187

14.9	Zeitabhängige Spannungen und Ströme 188	15.1.1	Entstehung von Spannungen an Grenzflächen 204
14.9.1	Ein- und Ausschaltvorgänge 188	15.1.2	Summenpotentiale 207
14.9.1.1	Einschalt- und Ausschaltvorgang beim Kondensator 188	15.2	Mechanismen der Stromleitung 208
14.9.1.2	Ein- und Ausschaltvorgang bei der Spule 190	15.2.1	Stromleitung im Vakuum 209
14.9.2	Sinusförmige Wechselspannungen und Wechselströme 190	15.2.2	Stromleitung in Gasen 210
14.9.3	Dreiphasen-Spannung, Drehstrom 192	15.2.3	Stromleitung in Elektrolyten 212
14.9.4	Nicht-sinusförmige Wechselspannungen, Spannungsimpulse 193	15.2.4	Stromleitung in Festkörpern 217
14.9.5	Wechselstrom-Kreise 193	15.3	Halbleiterelektronik 221
14.9.5.1	Kapazitiver Widerstand 193	15.3.1	Halbleiterdiode 221
14.9.5.2	Induktiver Widerstand 194	15.3.2	Transistor 222
14.9.5.3	Wechselstromkreise mit Ohm'schem, kapazitivem und induktivem Widerstand 195	15.3.3	Feldeffekt-Transistor 223
14.9.6	Resonanz-Schwingkreise 196	15.3.4	Digitalelektronik 223
14.9.7	Elektromagnetische Wellen 198	<b>16.</b>	<b>Elektrische Geräte</b> _____ 226
14.9.7.1	Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen 201	16.1	Messgeräte 226
14.9.7.2	Ausbreitungsrichtung elektromagnetischer Wellen 201	16.1.1	Das Drehspul-Messwerk 227
14.9.7.3	Maxwell'sche Gleichungen 201	16.1.2	Das Digital-Messgerät 228
14.9.8	Leistung des elektrischen Stroms 202	16.1.3	Messung von Strom und Spannung 229
<b>15.</b>	<b>Mikroskopische elektrische Vorgänge</b> _____ 204	16.1.4	Elektronenstrahl-Oszilloskop (Oszillograph) und Bildschirm 232
15.1	Biologische Potentiale 204	16.1.5	Analoge Ladungsmessung 236
		16.1.6	Messung von Ohm'schen Widerständen 236
		16.1.7	Rauschen 237
		16.2	Technische elektrische Geräte 238
		16.2.1	Dynamo-Maschine 238
		16.2.2	Elektro-Motor 239
		16.2.3	Transformator 239
		16.2.4	Sender und Empfänger 241

## Optik

245

<b>17.</b>	<b>Optische Strahlung</b> _____ 245	17.8	Absorption von Licht in Atomen und Molekülen 258
17.1	Einleitung 245	17.9	Emission und Absorption glühender Stoffe 259
17.2	Licht-Messgrößen 246	17.10	Temperaturstrahlung und Temperaturgleichgewicht 260
17.3	Strahlungsquellen 249	17.10.1	Thermische Emission und Absorption 261
17.4	Bohr'sches Atommodell 249	17.10.2	Strahlungsgesetze 263
17.5	Emission von Licht aus Atomen 252	17.11	Fluoreszenz, Phosphoreszenz, Lumineszenz 265
17.6	Kohärenz, spontane und induzierte Emission 255		
17.7	Das Emissionsspektrum der Atome 256		

17.12	LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) 268	19.3.2	Abbildung durch Spiegel 310
17.12.1	Funktionsweise und Eigenschaften 268	19.3.3	Brechung 311
17.12.2	Laser in der Medizin 272	19.3.4	Intensitäten von gebrochenem und reflektiertem Strahl 312
<b>18.</b>	<b>Wellen Teil II: Wellenoptik</b> _____ 275	19.3.5	Zerlegung von Licht in seine Spektralfarben mit Hilfe des Prismas 313
18.1	Interferenz von Wellen 275	19.3.6	Totalreflexion 313
18.1.1	Interferenzfähigkeit 275	19.3.7	Optoelektronik 315
18.1.2	Anwendung der Interferenz: Die Interferometrie 278	19.4	Abbildung mit Linsen 316
18.1.3	Holografie 280	19.4.1	Abbildung durch brechende Flächen 316
18.2	Beugung elektromagnetischer Wellen 281	19.4.2	Die Abbildungsgleichung für eine brechende Fläche 318
18.2.1	Beugung an Spalten 281	19.4.3	Spezialfälle der Abbildungsgleichung 319
18.2.2	Das Beugungsgitter 284	19.4.4	Die Abbildungsgleichung für eine Linse 319
18.2.3	Beugung an kreisförmigen Blenden (Beugungsunschärfe) 286	19.4.5	Klassifizierung von Linsen 320
18.2.4	Beugung von Röntgen-Strahlen 287	19.4.6	Die Abbildungsgleichung für ein System aus zwei Linsen 321
18.3	Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Materie 288	19.4.7	Kardinalelemente von dicken Linsen und Linsensystemen 322
18.3.1	Der Brechungsindex und das Brechungsgesetz 288	19.4.8	Konstruktion von Strahlengängen 323
18.3.2	Das Absorptionsgesetz 290	19.4.9	Optische Vergrößerung 325
18.3.3	Der Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion 293	19.4.10	Die Schärfentiefe (Tiefenschärfe) 325
18.3.4	Dichroismus und Doppelbrechung 293	19.4.11	Abbildungsfehler 326
18.3.5	Spannungsdoppelbrechung 294	19.5	Das Auge 328
18.4	Spektralanalyse 295	19.5.1	Optische Abbildung im Auge 328
18.4.1	Lambert-Beer'sches Gesetz 296	19.5.2	Fehlsichtigkeit 330
18.4.2	Extinktion kolloidaler Systeme 297	19.5.3	Empfindlichkeit 331
18.5	Polarisation elektromagnetischer Wellen 298	19.5.4	Bildverarbeitung 332
18.5.1	Polarisationszustand 298	19.5.5	Farbsehen 334
18.5.2	Erzeugung und Untersuchung von linear polarisiertem Licht 300	19.5.6	Vergrößerung bei Betrachtung mit dem Auge 336
18.5.3	Optische Aktivität und Faraday-Effekt 303	<b>20.</b>	<b>Einige abbildende und spektroskopische Instrumente</b> _____ 337
18.6	Materiewellen 303	20.1	Lupe 337
<b>19.</b>	<b>Geometrische Optik</b> _____ 306	20.2	Projektions-Apparate 337
19.1	Lichtausbreitung 307	20.3	Lichtmikroskop 338
19.2	Optische Symbole, Strahlengänge und Bilder 308	20.4	Elektronenmikroskop 345
19.3	Reflexion und Brechung in der Geometrischen Optik 309	20.5	Raster-Sonden-Mikroskopie 349
19.3.1	Reflexion 309	20.6	Fernrohr 350
		20.6.1	Adaptive Optik 351
		20.7	Photometer 352
		20.8	Strahlungsmessgeräte 355
		20.9	Die Kamera 357

<b>Atomkerne, Ionisierende Strahlung</b>	<b>347</b>
21.1 Atomkerne 359	21.2.9 Kernspaltung und Kernfusion 381
21.1.1 Elementarteilchen 359	21.2.10 Künstliche Kernumwandlung, Aktivierung 383
21.1.2 Aufbau der Atomkerne 360	21.3 Röntgen-Strahlen 384
21.1.3 Kernmagnetische Resonanz 362	21.3.1 Bremsstrahlung, charakteristische Strahlung 384
21.2 Radioaktivität 364	21.3.2 Erzeugung ultraharter Röntgen-Strahlung durch Teilchenbeschleuniger 386
21.2.1 Kernumwandlungen 364	21.3.3 Wechselwirkung von Röntgen- und Gammastrahlung mit Materie 387
21.2.2 Natürliche Radionuklide 367	21.3.4 Röntgenbildaufnahmen 390
21.2.3 Zerfallsgesetz 369	21.4 Dosimetrie 392
21.2.4 Radioaktives Gleichgewicht 370	21.5 Bemerkungen zum Strahlenschutz 394
21.2.5 Wechselwirkung energiereicher geladener Teilchen mit Materie 371	
21.2.6 Wechselwirkung von Neutronen mit Materie 373	
21.2.7 Strahlungsdetektoren 373	
21.2.8 Medizinische Anwendung von Radionukliden; Bestrahlungstechniken 377	
<b>Regelung, Steuerung, Informationsübertragung</b>	<b>397</b>
<b>22. Regelung und Steuerung _____ 397</b>	<b>23. Computergestützte Informationsübertragung in der Medizin ____ 399</b>
<b>Aufgaben und Lösungen</b>	<b>405</b>
24.1 Aufgaben 405	24.2 Lösungen 419
<b>Anhang</b>	<b>441</b>
<b>A.1 Mathematische Beschreibung physikalischer Zusammenhänge _____ 441</b>	2.3.1 Messfehler der Einzelgröße 446
<b>A.2 Fehlerabschätzung _____ 442</b>	2.3.2 Fehlerfortpflanzung 447
2.1 Größenordnungsmäßige Angabe von Messfehlern 443	2.3.3 Fehler einer Funktion 448
2.2 Ursachen von Fehlern 444	2.4 Signifikanz-Tests 449
2.2.1 Fehler durch die Messapparatur 444	<b>A.3 Rechnen mit Vektoren _____ 450</b>
2.2.2 Fehler durch das Messobjekt 444	<b>A.4 Das Exponentialgesetz _____ 452</b>
2.3 Methoden der Fehlerabschätzung 446	<b>A.5 Weitere mathematische Beziehungen _____ 454</b>
	<b>A.6 Einige Naturkonstanten _____ 457</b>
	<b>A.7 Angelsächsisches Einheitensystem _____ 458</b>
<b>Register</b>	<b>461</b>

# Einleitung

---

Der Physik liegen zwei Axiome zugrunde:

1. Naturgesetze sind allgemeingültig, d. h., unter gleichartigen Bedingungen bestimmen sie zu jeder Zeit und überall mit gleicher Notwendigkeit das Naturgeschehen.

2. Die Beobachtung liefert allein die Entscheidungskriterien über die Richtigkeit eines Modells zur Beschreibung eines Naturereignisses: Das Experiment ist Beweisgrundlage. Dabei wird unter dem *Experiment* die planmäßige Beobachtung verstanden, bei der alle wesentlichen Einflüsse auf das Geschehen messend kontrolliert werden.

Erst durch eindeutige Definition physikalischer Größen wird es möglich, Messaufgaben zu formulieren und durch Messungen Gesetzmäßigkeiten aufzudecken. Dazu gehört es, Maßeinheiten für diese Größen festzulegen.

Physikalische Gesetze werden im Allgemeinen in mathematischer Darstellung formuliert, weil sie die einfachste Beschreibung erlaubt und die Möglichkeit bietet, deduktive Schlussfolgerungen abzuleiten. Dies ändert jedoch nichts an der Tatsache, dass im Vordergrund der physikalischen Erkenntnis die messende Beobachtung von Vorgängen in der Natur steht.

Auf einen wichtigen Unterschied zwischen Mathematik und ihrer Anwendung in Physik und Technik sei hingewiesen. In der Mathematik werden Operationen wie Addition, Multiplikation oder die Berechnung einer Sinus-Funktion üblicherweise mit reinen Zahlen durchgeführt. Physikalische Größen sind dagegen fast immer dimensionsbehaftet. Beispiele sind die Zeit  $t$  und der Ort  $x$ . Rechenoperationen in der Physik bestehen deshalb aus drei Teilen, nämlich der Berechnung (1) des Zahlenwertes, (2) der Dimension und (3) der zugehörigen Einheit. Eine Faustregel: die Bestimmung eines Zahlenwertes ist ebenso wichtig wie die Bestimmung der Einheit.

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen einem physikalischen Gesetz und einer mathematischen Formel ist, dass physikalische Größen prinzipiell nicht mit derselben Schärfe zu bestimmen sind wie mathematische Größen. Ein *Messpunkt* stellt wegen prinzipieller Ungenauigkeiten und Messfehler nie einen mathematischen Punkt dar. Daran sollte man sich bei der Beurteilung der Präzision mathematischer Formulierungen von physikalischen Gesetzmäßigkeiten erinnern. Die Grenze jedes Gesetzes liegt in der Messgenauigkeit des jeweils entscheidenden Experiments. Die Abschätzung der Genauigkeitsgrenzen — oder *Fehlergrenzen*, wie man allgemein sagt — ist wesentlicher Bestandteil jeder Messung und auch jeder Anwendung eines physikalischen Gesetzes. Allgemein gilt, dass die Fehlerabschätzung ebenso wichtig ist wie die Angabe des Resultates selber. Ein Gesetz gilt mit Sicherheit nur für den Bereich der Variablen, innerhalb dessen Experimente durchgeführt wurden. Diese Einschränkung ist in der mathematischen Formulierung eines physikalischen Zusammenhanges meist nicht zu erkennen. Daher ist bei extremen Werten der Variablen Vorsicht geboten.

Um in der verwirrenden Vielfalt der Naturerscheinungen allgemeine Gesetzmäßigkeiten überhaupt erkennen zu können, sucht man in der Physik einfache *Modelle*. Diesem Vorgehen liegt die Vorstellung zugrunde, dass man auch verwickelte Naturvorgänge in eine Reihe von ineinandergreifenden Einzelvorgängen zerlegen kann. Unter verschiedenen, einen Sachverhalt beschreibenden Modellen sollte man, wie bereits Newton forderte, normalerweise dem einfachsten den Vorzug geben. Zur Vereinfachung enthalten solche Modelle meist idealisierende Annahmen, die in der Natur nur näherungsweise erfüllt sind.

(Ein Beispiel ist der *Massenpunkt*.) Berechtigt ist das allerdings nur, wenn man abschätzen kann, dass die dadurch entstehenden Abweichungen vom realen Verhalten klein bleiben. Ein aus einem Modell abgeleitetes Gesetz gilt in allen Naturbereichen für Vorgänge, die auf das Modell zurückgeführt werden können. Es ist also zu unterscheiden zwischen dem Modell und der speziellen Realisierung in der Natur.

Man macht sich in der Physik Methoden der Problemlösung zunutze, die sich allgemein bewährt haben. Hier ein Beispiel: Erkennen eines allgemeinen Problems → Entwerfen gezielter, spezieller Fragestellungen (Experimente) → experimentelle Sammlung von Daten und Fakten → Aufstellung vereinfachender Modelle zu deren quantitativer Beschreibung → theoretische Verallgemeinerung, um ein allgemeines Verständnis zu ermöglichen. Dieses *induktive* Vorgehen wird oft ergänzt durch die *deduktive* Vorhersage eines speziellen Vorgangs aus allgemeinen physikalischen Gesetzmäßigkeiten.

Gerade für diejenigen, die die Physik als Hilfswissenschaft benötigen, ist es wichtig, sich immer wieder klarzumachen, dass hinter jedem physikalischen Gesetz eine Unmenge von Anwendungsbeispielen steht, die dem Gesetz erst seine Bedeutung geben. Für solche Anwendungsbeispiele den Blick zu schärfen, sollte ein wesentlicher Bestandteil der

Physikausbildung für Mediziner, Biologen und Pharmazeuten sein.

Insbesondere Medizinern begegnet die Physik heute zunehmend in Form von chromblitzender Verpackung komplizierter technischer Geräte zur Diagnose, Überwachung und Therapie. Das Innenleben und die Funktionsweise dieser Geräte sind den Anwendern zumeist mehr oder weniger unbekannt. Es kann zu verhängnisvollen Konsequenzen führen, dass perfektes Design und optimistische Betriebsbeschreibung ebenso perfekte Mess- und Anwendungsergebnisse demjenigen suggerieren können, dem die näheren Kenntnisse physikalisch-technischer Zusammenhänge fehlen. Unerlässlich sind solche Kenntnisse, um sich eine Vorstellung von den Grenzen der Messgenauigkeit und der Anwendbarkeit von Diagnose-, Mess- und Therapiegeräten zu verschaffen.

Zu fordern, dass das Verständnis der technischen Komponenten eines Gerätes Voraussetzung für seine Bedienung sein soll, ist längst unrealistisch geworden. Ein realistischer Kompromiss dagegen ist, sich mit den physikalischen Grundlagen der technischen Anwendungen vertraut zu machen. Dazu soll das vorliegende Buch beitragen. Die künftige Berufsausübung wird immer wieder spezielle Physikkenntnisse erfordern. Ziel der Autoren ist daher auch, dass das vorliegende Buch dann als nützliches Nachschlagewerk dienen kann.

## 1. Raum und Zeit

### 1.1 Physikalische Größen und Einheiten

#### 1.1.1 Länge als Beispiel

Zur quantitativen Beschreibung eines Ereignisses ist die zahlenmäßige Angabe der untersuchten physikalischen Größen erforderlich. Solche Größen sind z. B. Länge, Geschwindigkeit oder die elektrische Stromstärke. Sie können stetig oder diskret sein. Ein Beispiel für eine stetige Größe ist die Zeit, eine diskrete Größe ist die Zahl  $N$  radioaktiver Atome einer Probe, die sich ja stets nur um ganze Zahlen ändern kann. Diese Unterscheidung ist wesentlich, wenn  $N$  klein ist. Ist  $N$  dagegen sehr groß, so kann man die Größe näherungsweise als stetig veränderlich ansehen, wie dies beim Gesetz von der radioaktiven Umwandlung, Gl. (21-3), geschieht. Stetige Größen haben den Vorteil, dass sie mathematisch leichter zu behandeln (z. B. zu differenzieren oder integrieren) sind.

Eine physikalische Größe wird üblicherweise durch ein Buchstaben-Symbol abgekürzt, und sie ist festgelegt durch Angabe des Zahlenwertes und der Maßeinheit, z. B.:

$$\text{Länge } l = 0,097 \quad \text{Meter (m),} \\ \text{(physikal. Größe) (Zahlenwert) (Einheit).} \quad (1-1)$$

Im Laufe der Zeit ist eine Unzahl von Einheiten erfunden worden. Allein für die Länge geht ihre Zahl in die Hunderte. Durch Einführung von Einheitensystemen, in denen geeignete Einheiten zusammengefasst wurden, hat man versucht, dieses Durcheinander zu beseitigen.

In einem *Einheitensystem* sind einige physikalische Größen als *Grund- oder Basisgrößen* ausgewählt. Die übrigen Größen, die man als *abgeleitete Größen* bezeichnet, ergeben sich dann gemäß ihren Definitionsgleichungen als Kombinationen aus diesen Grundgrößen.

So ergibt sich z. B. die gleichförmige Geschwindigkeit  $v$  als abgeleitete Größe durch die Definitionsgleichung  $v = s/t$ , wobei  $s$  die während der Zeit  $t$  zurückgelegte Wegstrecke ist, aus den Basisgrößen Länge und Zeit. Diese Beziehung stellt eine *Größengleichung* dar und legt zugleich die *Dimension* von  $v$  fest, nämlich *Länge dividiert durch Zeit*. Die Dimension gibt die Zusammensetzung einer Größe aus den Basisgrößen an. In Tab. 1.1 sind die Dimensionen einiger physikalischer Größen angegeben, die sich aus den Basisgrößen Länge, Zeit und Masse ableiten. Setzen wir in die Größengleichung  $v = s/t$  Zahlenwerte ein und geben an, dass z. B. 5 m in 3 s zurückgelegt werden, so erhalten wir eine Zahlenwertgleichung:  $v = 5/3 \text{ m s}^{-1}$ .

**Tab. 1.1** Die Dimensionen einiger physikalischer Größen

Physikalische Größe	Symbol	Dimension
Fläche	$A$	Länge · Länge
Volumen	$V$	Länge · Länge · Länge
Geschwindigkeit	$v$	Länge/Zeit
Beschleunigung	$a$	Länge/(Zeit) <sup>2</sup>
Impuls	$p$	Masse · Länge/Zeit
Kraft	$F$	Masse · Länge/(Zeit) <sup>2</sup>
Energie	$E$	Masse · (Länge) <sup>2</sup> /(Zeit) <sup>2</sup>

**Tab. 1.2** Basis-Größen und -Einheiten einiger Einheiten-Systeme

Einheiten-System	Mechanik				Elektrizitätslehre	Thermodynamik		Photometrie
	Länge	Masse	Kraft	Zeit	Stromstärke	Temperatur	Stoffmenge	Lichtstärke
CGS	Zentimeter cm	Gramm g		Sekunde s				
MKSA	Meter m	Kilogramm kg		Sekunde s	Ampere A			
Technisches	Meter m		Kilopond kp	Sekunde s				
Angelsächsisches	foot ft	pound lb		second s		Fahrenheit °F		
Natürliches	Protonen-Compton-Wellenlänge $l_p$	Protonenmasse $m_p$		$t = l_p/c$ ( $c =$ Lichtgeschwindigkeit)				
Internationales (SI)	Meter m	Kilogramm kg		Sekunde s	Ampere A	Kelvin K	Mol mol	Candela cd

Den Basisgrößen werden Einheiten, *Basis- oder Grundeinheiten* zugewiesen. Damit sind auch die Einheiten der abgeleiteten Größen festgelegt, wenn man vereinbart, dass sie entsprechend ihrer Definitionsgleichungen zu bilden sind. So ist bei Verwendung der Basiseinheiten Meter (m) und Sekunde (s) die Einheit der Geschwindigkeit  $v$  gleich

$1 \text{ m } 1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ m s}^{-1}$ . (Auf Multiplikationspunkte bei Formeln und Einheiten wird in diesem Buch verzichtet.)

**Tab. 1.3** Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten

	Zehnerpotenzen	Vorsatz	Vorsatzzeichen
Vielfache:	$10^{24}$	Yotta	Y
	$10^{21}$	Zetta	Z
	$10^{18}$	Exa	E
	$10^{15}$	Peta	P
	$10^{12}$	Tera	T
	$10^9$	Giga	G
	$10^6$	Mega	M
	$10^3$	Kilo	k
	$10^2$	Hekto	h
	$10^1$	Deka	da
Teile:	$10^{-1}$	Dezi	d
	$10^{-2}$	Zenti	c
	$10^{-3}$	Milli	m
	$10^{-6}$	Mikro	$\mu$
	$10^{-9}$	Nano	n
	$10^{-12}$	Pico	p
	$10^{-15}$	Femto	f
	$10^{-18}$	Atto	a
	$10^{-21}$	Zepto	z
	$10^{-24}$	Yokto	y

In Tabelle 1.2 sind die Basiseinheiten einiger heute üblicher Einheitssysteme, in Tab. 1.3 die zur Erweiterung von Einheiten vorgeschriebenen Vorsatzzeichen und in Tab. 1.4 die Einheiten des *Internationalen Einheitensystems* (SI = *Système International d'Unités*) mit den ihnen oft zusätzlich gegebenen Eigennamen zusammengestellt.

Das SI macht den Gebrauch weiterer bisher üblicher, nicht in Systemen zusammengefasster Einheiten überflüssig. Hierzu gehören z. B. PS als Leistungseinheit, cal als Energieeinheit oder Torr als Druckeinheit. Diese und einige weitere systemfremde Einheiten sind in Tab. 1.5 zusammengestellt. Das in einigen Ländern noch gebräuchliche angelsächsische Einheitensystem finden Sie im Anhang 7.

### 1.1.2 Basiseinheiten des internationalen Einheitensystems

Physikalische Größen sind über Messverfahren definiert. Eine Messung besteht aus dem direkten oder indirekten Vergleich der zu messenden Größen mit einem Eichnormal.

**Tab. 1.4** Abgeleitete und sonstige Größen und ihre Einheiten des SI mit eigenen Namen

<i>Mechanik</i>	
Kraft:	$1 \text{ kg m s}^{-2} = 1 \text{ Newton (N)}$
Druck:	$1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} = 1 \text{ Nm}^{-2} = 1 \text{ Pascal (Pa)}$
Energie:	$1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 1 \text{ Joule (J)}$
Leistung:	$1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} = 1 \text{ Watt (W)}$
Winkel:	
eben:	$1 \text{ Radiant (rad)} \quad 1 \text{ Grad (}^\circ\text{)} = 60' = 60 \cdot 60''$
räumlich:	$1 \text{ Steradian (Sr)}$
Frequenz:	$1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hertz (Hz)}$
<i>Photometrie</i>	
Lichtstrom:	$1 \text{ cd Sr} = 1 \text{ Lumen (lm)}$
Beleuchtungsstärke:	$1 \text{ cd Sr m}^{-2} = 1 \text{ Lux (lx)}$
<i>Elektrizitätslehre</i>	
Spannung:	$1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-1} = 1 \text{ Volt (V)}$
Widerstand:	$1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \text{ A}^{-2} = 1 \text{ Ohm } (\Omega)$
Leitwert:	$1 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^3 \text{ A}^2 = 1 \text{ } \Omega^{-1} = 1 \text{ Siemens (S)}$
Kapazität:	$1 \text{ A s V}^{-1} = 1 \text{ Farad (F)}$
Induktivität:	$1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ A}^{-2} = 1 \text{ Henry (H)}$
Ladung:	$1 \text{ A s} = 1 \text{ Coulomb (C)}$
Magnetischer Fluss:	$1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-1} = 1 \text{ Weber (Wb)}$
Magnetische Induktion:	$1 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1} = 1 \text{ Tesla (T)}$
<i>Atom- und Kernphysik</i>	
Masse:	$1 \text{ atomare Masseneinheit (1 u} = 1,66058 \cdot 10^{-27} \text{ kg)}$
Energie:	$1 \text{ Elektronenvolt (1 eV} = 1,60206 \cdot 10^{-19} \text{ J)}$
Aktivität:	$1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Becquerel (Bq)}$
Energiedosis:	$1 \text{ J kg}^{-1} = 1 \text{ Gray (Gy)}$
Äquivalentdosis:	$1 \text{ J kg}^{-1} = 1 \text{ Sievert (Sv)}$

Die ständige Überprüfung der in Wirtschaft und Industrie verwendeten Messgeräte mit Eichnormalen (die *Eichung*) ist durch Gesetze und staatliche Verordnungen geregelt. In der Bundesrepublik Deutschland ist die Zentralstelle für derartige Überwachungen die Physikalisch-Technische Bundesanstalt in Braunschweig und Berlin. Die *Eichnormale* der *Basiseinheiten* des SI sind:

**Meter (m)** Das Meter ist die Wegstrecke, die das Licht im Vakuum während des Zeitintervalls von  $(1/299\,792\,458) \text{ s}$  durchläuft. Damit ist das Meter auf den Wert der Vakuumlichtgeschwindigkeit bezogen.

**Sekunde (s)** Die Festlegung der Zeiteinheit aus der Länge des Tages ist für heutige Ansprüche zu ungenau. Daher bezieht man sich auf Vorgänge im Atom. Die Sekunde ist das  $9\,192\,631\,770$ fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen 2 bestimmten Niveaus (den Hyperfeinstruktur-niveaus des

elektronischen Grundzustandes) des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung. Das Eichnormal ist in der Atomuhr realisiert.

**Kilogramm (kg)** Die Masseneinheit ist bisher nicht auf Naturkonstanten gegründet, sondern auf dem in Sèvres (Frankreich) aufbewahrten Kilogramm-Prototyp, einem Block einer Platin-Iridium-Legierung. Zur Festlegung von Atommassen bezieht man sich auf das Kohlenstoff-Isotop  $^{12}\text{C}$ , mit der Mol-Masse  $m = \frac{12}{N_A \cdot 10^3} \text{ kg mol}^{-1}$ , wobei  $N_A$  die Avogadro- (Loschmidt'sche-) Konstante,  $N_A = 6,0220 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , ist.

(Die atomare Masseneinheit  $u$  ist der zwölfte Teil der Masse eines Atoms des Nuklids  $^{12}\text{C}$ ; sie gehört nicht zu den Basiseinheiten des SI, darf jedoch verwendet werden).

**Ampere (A)** Ein Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stromes, der, durch zwei im Vakuum im Ab-

**Tab. 1.5** Einige nicht zum SI gehörige Einheiten

Größe	Einheit	Umrechnung → SI
Länge	Fermi	$10^{-15}$ m
	Ångström (Å)	$10^{-10}$ m
	Zoll (inch)	0,0254 m
	englische Meile	1609,33 m
	atomare Längeneinheit ( $a_0$ )	$0,529 \cdot 10^{-10}$ m
Kraft	Lichtjahr	$9,45 \cdot 10^{15}$ m
	dyn	$10^{-5}$ N
Druck	Kilopond	9,81 N
	physikal. Atmosphäre (atm)	101325 Pa
	techn. Atmosphäre (at)	98066,5 Pa
	bar	100000 Pa
	Torr (mm Hg-Säule)	133,3224 Pa
Masse	Zentimeter Wassersäule (cm WS)	98,0665 Pa
	Pfund	0,5 kg
	Zentner	50 kg
	Tonne	1000 kg
Energie	Kalorie (cal)	4,1868 J
	erg	$10^{-7}$ J
	Hartree	$4,359 \cdot 10^{-18}$ J
	Rydberg	$2,179 \cdot 10^{-18}$ J
Leistung	Pferdestärke (PS)	735,49875 W
Lichtstärke	Hefnerkerze	0,903 cd
		$\frac{10^3}{4\pi} \text{ Am}^{-1}$
Magn. Feldstärke	Oersted (Oe)	$10^{-4}$ T
Magn. Flussdichte	Gauß (G)	$10^{-4}$ T
Aktivität einer radioaktiven Substanz	Curie (Ci)	$3,7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ (Bq)
Energiedosis	rad	$0,01 \text{ J kg}^{-1}$ (Gy)
Äquivalentdosis	rem	$0,01 \text{ J kg}^{-1}$ (Sv)
Ionendosis	Röntgen	$2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C kg}^{-1}$
Zeit	Minute (min)	60 s
	Stunde (h)	3600 s
	Temperatur	Fahrenheit (F)

stand 1 m voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbarem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern für jeden Abschnitt der Länge 1 m eine Kraft von  $F = 2 \cdot 10^{-7}$  N hervorruhen würde.

**Kelvin (K)** Ein Festpunkt der Temperaturskala ist der Tripelpunkt des Wassers, bei dem Eis, Wasser und Dampf miteinander im thermischen Gleichgewicht stehen. Seine Temperatur ist auf genau 273,16 K festgelegt. Bei 1 K Temperatursteigerung dehnt sich ein ideales Gas bei konstantem Druck um  $1/273,16$  seines Volumens bei der Temperatur des Tripelpunktes des Wassers aus.

**Candela (cd)** Eine Candela ist die Lichtstärke, die von einer Strahlungsquelle er-

zeugt wird, die monochromatisches Licht der Frequenz  $5,4 \cdot 10^{14}$  Hz mit einer Leistung von 1/683 Watt pro Raumwinkeleinheit emittiert.

**Mol** Ein Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 0,012 kg des Kohlenstoffisotops  $^{12}\text{C}$  enthalten sind. Hierbei müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein; es können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen sein. Das Einheitenzeichen der Stoffmengengröße *Mol* ist mol. Nach dieser Definition sind also Stoffmenge und Masse als voneinander unabhängige Größen anzusehen. In einem Mol sind  $N_A$  Teilchen enthalten:  $N_A = 6,0220 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

### 1.1.3 Längenmessung

Eine Längenmessung in einfacher Form ist unter den physikalischen Messverfahren sicher das anschaulichste. Durch Anlegen eines Maßstabes, der meist in m, cm und mm unterteilt ist, wird durch direkten Vergleich die interessierende Länge eines Gegenstandes oder die Entfernung zwischen zwei Punkten bestimmt. Diesem Verfahren sind jedoch bezüglich der Größe der zu messenden Länge Grenzen gesetzt. Bis zu Größen von einigen Metern kann man sich noch dadurch helfen, dass man den Maßstab mehrere Male aneinandersetzt, was aber meistens mit bedeutenden Ungenauigkeiten verbunden ist. Deshalb verwendet man dort entsprechende Bandmessgeräte. Reichen auch diese nicht mehr aus, werden, wie Tab. 1.6 zeigt, auch andere Messverfahren angewandt. Dazu gehört die *Triangulation* (Abb. 1.1a), mit der sich nach dem Sinussatz durch Messung der beiden Winkel  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  und der Strecke  $d_1$  die unbekannte Strecke  $d_2$  bestimmen lässt,  $d_2 : d_1 = \sin \alpha_2 : \sin (180^\circ - \alpha_2 - \alpha_3)$ . Diese Methode ist wichtiger Bestandteil der GPS Navigation (*Global Positioning System*) (siehe am Ende von Kap. 16.2.4). Im astronomischen Bereich dient schließlich als Maß für Entfernungen die Zeit, die das Licht braucht, um die zu messende Strecke zurückzulegen (Lichtjahr), und man bestimmt den Stand weit entfernter Galaxien aus der Doppler-Verschiebung der von ihnen emittierten Lichtfrequenzen (*Rot-Verschiebung*), die auf die ständige Expansion des Weltalls zurückgeführt wird (vgl. Kap. 7.3).

Noch komplizierter und vielfältiger werden die Messverfahren bei kleinen Längen. Da Messungen im Bereich von cm und mm sehr oft mit großer Genauigkeit durchgeführt werden müssen, hat man hierfür besondere Geräte (Abb. 1.1b) wie z. B. die Schraublehre entwickelt. Bei noch kleineren Abmessungen kann der Vergleich zwischen Objekt und Maßstab nach entsprechender Vergrößerung durch Lupe, Lichtmikroskop oder Elektronenmikroskop durchgeführt werden. In diesem Größenbereich zwischen  $10^{-3}$  m und  $10^{-10}$  m liegt der Großteil der Abmessungen,

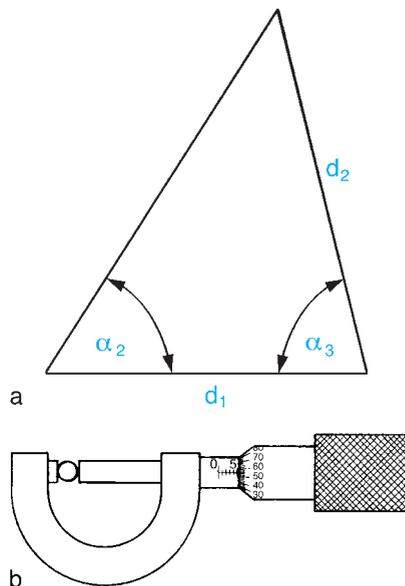
die für Biologie und Medizin interessant sind. Bei technischen Messungen und in der Kristallographie werden auch die Wellenlängen des Lichtes und der Röntgenstrahlen als Maßstäbe benutzt und der Größenvergleich über die Interferenz der Strahlung durchgeführt.

Diese Aufzählung zeigt die Vielfalt der Methoden der Längenmessung und weist gleichzeitig auf ein allgemeines Problem der Physik hin: Bei der Durchführung von Messaufgaben muss man sorgfältig diejenigen Messmethoden auswählen, die dem Problem angepasst sind und die bei möglichst geringem Aufwand die angestrebte Genauigkeit erreichen lassen.

Die spezielle Relativitätstheorie zeigt, dass die Länge einer Strecke keine absolut festgelegte Größe ist, sondern ihr Messwert davon abhängt, ob und wie der Beobachter sich gegenüber dem Messobjekt bewegt. Freilich treten messbare Änderungen erst auf, wenn die Geschwindigkeit  $v$  dieser Bewegung sich der Lichtgeschwindigkeit (siehe Kap. 14.9.7.1) nähert. Dann erscheint dem bewegten Beobachter eine parallel zur Bewegungsrichtung liegende Strecke  $l_0$  verkürzt, nämlich als

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

wobei  $c$  die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit bedeutet ( $c \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ). Man nennt diesen Effekt *relativistische Längenkontraktion*.



**Abb. 1.1** Triangulation zur Bestimmung von  $d_2$  aus den gemessenen Größen  $d_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$ ; in Wirklichkeit gilt  $d_2 \gg d_1$  (a); Schraublehre (b).

**Tab. 1.6** Einige typische Längen, ihre Größenordnung und Messverfahren

$10^{-15}$	Kern-Durchmesser $10^{-15}$	indirekte atomphys. Methoden (Streuung)
$10^{-12}$	Atom-Durchmesser $10^{-10}$	Röntgenbeugung
$10^{-9}$		Elektronenmikroskopie
$10^{-6}$	Wellenlänge des sichtb. Lichts $10^{-6}$	Lichtmikroskopie
$10^{-3}$	Erythrozyten-Durchmesser $10^{-5}$	Bandmaße
1		Trigonometrie
$10^3$	Höhe des Mt. Everest $10^4$	Laufzeit von Licht
$10^6$	Erd-Durchmesser $10^7$	
$10^9$	Abstand Erde-Mond $10^9$	indirekte astrophys. Methoden (Rot-Versch.)
$10^{12}$	Abstand Erde-Sonne $10^{12}$	
$10^{15}$	Durchmesser des Sonnensystems $10^{13}$	
$10^{18}$	Entfernung nächster Fixsterne $10^{17}$	
$10^{21}$	Durchmesser der Milchstraße $10^{21}$	
$10^{24}$	weiteste sichtbare Galaxis $10^{26}$	
Einheit: m		

**Tab. 1.7** Zeitdauer und ihre Größenordnung

$10^{-23}$	Lebensdauer kurzlebiger Elementarteilchen $10^{-23}$
$10^{-15}$	Schwingungsdauer von sichtbarem Licht $10^{-15}$
$10^{-12}$	
$10^{-9}$	Lebensdauer von angeregten Zuständen in Atomen $10^{-9}$
$10^{-6}$	
$10^{-3}$	Dauer eines Blitzes $10^{-3}$
1	Pulsschlag
$10^3$	
$10^6$	1 Jahr $3 \cdot 10^7$
$10^9$	Menschenalter $10^9$
$10^{12}$	
$10^{15}$	Alter der Menschheit $10^{14}$
$10^{18}$	Alter der Milchstraße $10^{18}$
Einheit: s	

### 1.1.4 Zeitmessung

Mit in der Natur nacheinander ablaufenden Vorgängen verbinden wir den Begriff der Zeit. Sie ist, wie in Kap. 1.1.1 bereits erwähnt, eine der Basisgrößen des SI, und ihre SI-Einheit ist die Sekunde (s). Weitere Zeiteinheiten sind in Tab. 1.5 aufgeführt. Unter den physikalischen Größen nimmt die Zeit eine Sonderstellung ein, weil ihr Betrag stets zu- und nie abnimmt.

Ein Zeitpunkt (eine Uhrzeit) wird durch hochgestelltes Einheitszeichen, z. B. 3<sup>h</sup>, eine Zeitdauer (Intervall zwischen zwei Zeitpunkten) wird durch das Einheitszeichen auf der Zeile, z. B. 3 h, angegeben. Einige physikalisch interessante Zeitdauern sind in Tab. 1.7 zusammengestellt.

Vorgänge, bei denen sich in völlig gleicher Weise gleiche Zustände wiederholen, nennen wir *periodisch*. Die Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden gleichen Zuständen bezeichnen wir als die Periode oder Periodendauer  $T$  des Vorganges. Den Kehrwert von  $T$  nennen wir die Frequenz  $\nu$ :

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (1-2a)$$

mit der SI-Einheit *Hertz*,  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

Die Größe  $\nu$  gibt an, wie häufig sich der periodische Vorgang pro Sekunde wiederholt. Beispiele für periodische Vorgänge sind die Drehung der Erde um ihre Achse, die Bewegung eines Pendels, die Schwingung einzelner Atome in einem Molekül oder die Kontraktion des Herzens.

Die Zeitmessung besteht darin, zu vergleichen, wie oft die Zeiteinheit in einer zu messenden Zeitdauer enthalten ist. Messapparate, die diesen Vergleich vornehmen, bezeichnet man als Uhren (Pendeluhr, Atomuhr, usw.). Zur Messung der Zeitdauer bedarf es der Feststellung der Gleichzeitigkeit ihres Anfangs und Endes mit dem angezeigten Gang der Uhr.

Der Begriff der *Gleichzeitigkeit* spielt in diesem Zusammenhang eine wesentliche Rolle, denn die Relativitätstheorie hat uns gelehrt, dass zwei mit einer Relativgeschwindigkeit  $v$  gegeneinander bewegte Uhren für scheinbar gleichzeitig ablaufende Vorgänge unterschiedliche Zeitdauern messen. Um dies zu veranschaulichen, ermitteln wir in einem bezüglich des Beobachters ruhenden und einem bewegten System die Zeit, die ein Lichtblitz braucht (Abb. 1.2), um von einer Lampe zu einem Spiegel und zurück zu einer Photozelle zu gelangen. In beiden Systemen sollen die Lichtblitze gleichzeitig emittiert werden und dabei gleichzeitig die Uhren zu laufen beginnen. Im ruhenden System wird die Uhr (Abb. 1.2a) bis zum Eintreffen des Lichtblitzes in der Photozelle die Zeit  $t_0 = 2D/c$

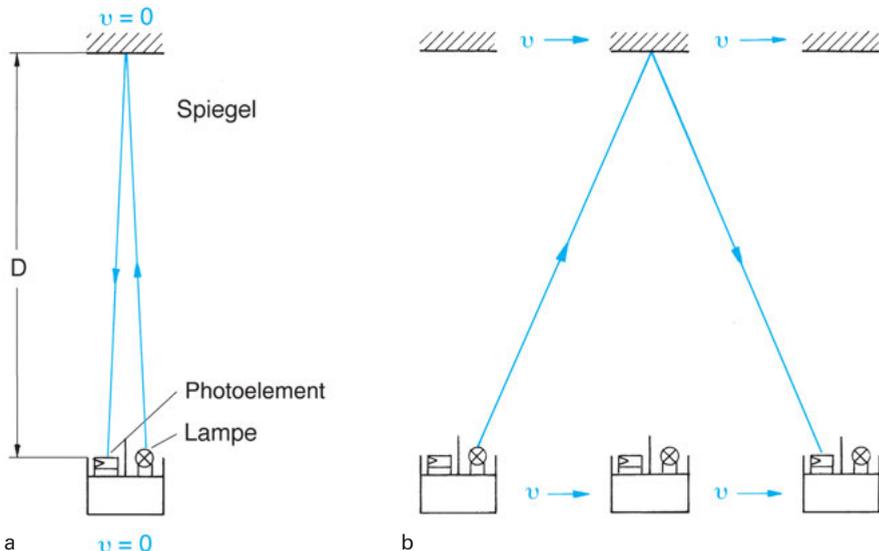


Abb. 1.2 Zeitdehnung bei bewegten Systemen.

( $c \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ; Lichtgeschwindigkeit) anzeigen. In dem mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten System dagegen wird vom Blitz, wie aus Abb. 1.2b hervorgeht, vom ruhenden Beobachter aus gesehen, ein längerer Weg zurückgelegt, was bei gleicher Lichtgeschwindigkeit  $c$  zu einer größeren Messzeit  $t$  bis zum Eintreffen des Lichtblitzes in der Photozelle führt. Vom Beobachter gesehen, treffen die Blitze im ruhenden und im bewegten System also nicht mehr gleichzeitig in den Photozellen ein.

Die bei der Relativbewegung zweier Systeme auftretende *Zeitdilatation (Zeitdehnung)* beträgt quantitativ

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1-2b)$$

Sie besagt, dass dem ruhenden Beobachter die Intervalle gedehnt erscheinen, d. h. eine mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegte Uhr geht, vom ruhenden Beobachter aus betrachtet, langsamer. Zu einer präzisen Zeitmessung gehört also die Angabe, in welchem System sie durchgeführt wurde.

Mit Hilfe von Gl. (1-2b) lässt sich z. B. zeigen, dass eine Rakete, die die Erde mit der Geschwindigkeit  $v = 2 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$  verlässt, ungefähr 16 Jahre unterwegs sein muss, bis die Borduhren für den Beobachter auf der Erde gegenüber den Erduhren um 1 s nachgehen.

### 1.1.5 Winkelmaße

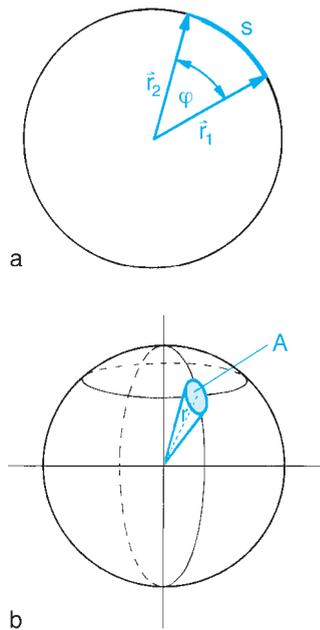
*Ebene Winkel*  $\varphi$  können im *Gradmaß* gemessen werden. 1 Grad ( $1^\circ$ ) ist 1/360 des zum *Vollkreis* gehörenden *ganzen Winkels*. Das Grad wird weiter unterteilt in Minuten ( $'$ ) und Sekunden ( $''$ ):

$$1^\circ = 60' = 3600'' \quad (1-3)$$

Als weiteres Maß für einen Winkel  $\varphi$  verwendet man das *Bogenmaß*, das als Verhältnis der durch zwei Radien  $r_1$  und  $r_2$  aus einem Kreis ausgeschnittenen Bogenlänge  $s$  zum Betrag  $r$  des Radius (Abb. 1.3a) definiert ist:

$$\varphi = \frac{s}{r}, \text{ mit der SI-Einheit } \textit{Radian} \text{ (rad)}. \quad (1-4)$$

Der *ganze Winkel* hat demnach im Bogenmaß die Größe  $2\pi$  rad. Daraus ergibt sich als



**Abb. 1.3** Zur Definition des ebenen Winkels (a) und Raumwinkels (b).

Umrechnungsfaktor zum Gradmaß:

$$\frac{\varphi \text{ (Bogenmaß)}}{\varphi \text{ (Gradmaß)}} = \frac{2 \pi \text{ rad}}{360^\circ} \quad (1-5)$$

Hieraus folgt, dass einer Winkeleinheit im Bogenmaß 57,296 Winkeleinheiten im Gradmaß entsprechen:

$$1 \text{ rad} \cong 57,296^\circ.$$

Analog zur Definition des Bogenmaßes auf einem Kreis wird der *Raumwinkel*  $\Omega$  auf einer Kugel definiert (Abb. 1.3b).  $\Omega$  ist gegeben durch das Verhältnis des durch einen Kegel ausgeschnittenen Kugelflächensegmentes  $A$  zum Quadrat des Kugelradius  $r$ :

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \text{ mit der SI-Einheit } \textit{Steradian} \text{ (sterad)}. \quad (1-6)$$

Der gesamte Raumwinkel beträgt also  $4\pi$  sterad, und der Öffnungswinkel des Kegels für die Raumwinkeleinheit 1 sterad ist  $65,6^\circ$ .

## 1.2 Bewegungen im Raum

### 1.2.1 Geschwindigkeit

Messungen von Länge und Zeit bilden die Grundlage für die physikalische Beschreibung von Bewegungen. Die Lehre von den Bewegungen der Körper im Raum bezeichnen wir als *Kinematik*. Der Bewegungsablauf lässt sich grafisch in einem *Weg-Zeit-Diagramm* (Abb. 1.4) darstellen. Als Beispiel tragen wir in ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Weg- und Zeitkoordinaten  $s$  und  $t$  ein, die angeben, welche Wegstrecke  $\Delta s$  ein Radfahrer nach der Zeit  $\Delta t$  zurückgelegt hat.

**Grafische Darstellungen** Wir haben hier die Möglichkeit benutzt, eine Gesetzmäßigkeit quantitativ durch eine grafische Darstellung zu beschreiben. Dies ist besonders dann vorteilhaft, wenn man Messfehler detailliert angeben will oder wenn die betreffende Gesetzmäßigkeit nicht durch eine einfache mathematische Formel angegeben werden kann. Eine geeignete grafische Darstellung kann dem Beobachter mehr Informationen näherbringen als seitenlange Zahlentabellen und wird zudem anschaulicher sein als eine mathematische Funktion.

Der Abb. 1.4 entnehmen wir, dass die zwischen den Zeiten  $t_0$  und  $t_1$  von dem Radfahrer zwischen den Orten  $s_0$  und  $s_1$  zurückgelegte Wegstrecke  $\Delta s = s_1 - s_0$  linear in der Zeitspanne  $\Delta t = t_1 - t_0$  zunimmt: Der Rad-

fahrer hat sich *gleichförmig* bewegt. Wir sagen dann:  $\Delta s$  ist *proportional zu*  $\Delta t$  und verwenden hierzu die symbolische Schreibweise  $\Delta s \sim \Delta t$ .

Die Proportionalitätsbeziehung lässt sich unter Verwendung einer Proportionalitätskonstanten in Form einer mathematischen Gleichung anschreiben, die den Zusammenhang zwischen  $\Delta s$  und  $\Delta t$  quantitativ beschreibt:

$$\Delta s = v \Delta t. \tag{1-7}$$

Die Proportionalitätskonstante  $v$  bezeichnen wir als *gleichförmige* oder *konstante Geschwindigkeit*.

**Umrechnung von Maßeinheiten** Wegen der Vielfalt von Maßeinheiten für ein und dieselbe physikalische Größe  $G$  ist häufig eine Umrechnung von einer Einheit  $E_1$  in eine andere  $E_2$  erforderlich:  $E_1 = UE_2$ . Da die physikalische Größe  $G$  im Gegensatz zu ihrem Zahlenwert  $Z$  von der gewählten Einheit unabhängig ist, erhalten wir nach Gl. (1-1) mit dem Umrechnungsfaktor  $U$ :

$$G = Z_1 E_1 = Z_1 U E_2 = Z_2 E_2. \tag{1-8}$$

Beispiel: Die Geschwindigkeit  $v = 100 \text{ km h}^{-1}$  soll von der Einheit  $E_1 = \text{km h}^{-1}$  in die Einheit  $E_2 = \text{m s}^{-1}$  umgerechnet werden.  $1 \text{ km/1 h} = 1000 \text{ m/3600 s}$ , und

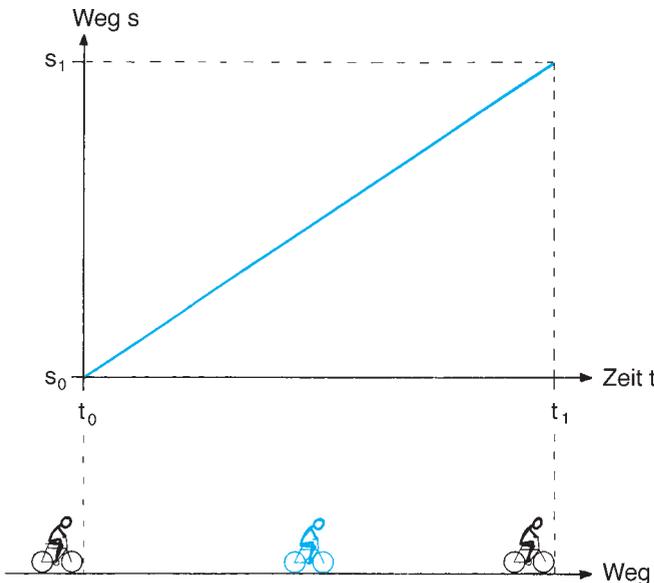


Abb. 1.4 Weg-Zeit-Diagramm.

deshalb ist  $U = (1/3,6) = 0,278$ . Aus Gl. (1-8) folgt für die Geschwindigkeit:  $v = 100 \cdot 0,278 \text{ m s}^{-1} = 27,8 \text{ m s}^{-1}$ .

Bis jetzt haben wir die Wegstrecke  $s$  und die Geschwindigkeit  $v$  durch Zahlenwert und Einheit dargestellt. Größen, für die dies ausreichend ist, nennt man *Skalare*. Weg und Geschwindigkeit jedoch sind durch Zahlenwert und Einheit noch nicht eindeutig festgelegt; dazu ist es notwendig, auch ihre Richtung anzugeben.

Eine Größe, die Zahlenwert, Einheit und Richtung angibt, nennen wir einen *Vektor*.

Vektoren kennzeichnen wir durch ein Pfeilsymbol, in unserem Fall  $\vec{s}$  bzw.  $\vec{v}$ ; häufig werden auch Fettdruck oder Frakturbuchstaben verwendet. Der Begriff des Vektors ist der Geometrie entlehnt; für Vektoren gelten die im Anhang zusammengefassten allgemeinen Rechenregeln. Den Zahlenwert des Vektors mit der dazugehörigen Einheit nennen wir den *Betrag des Vektors* und kennzeichnen ihn durch senkrechte Striche, z. B.  $|\vec{s}|$ . Der Betrag ist ein Skalar, und wir können deshalb auch einfach  $s$  dafür schreiben. Zeichnerisch wird der Vektor durch einen Pfeil in einem Koordinatensystem dargestellt, dessen Koordinaten Dimension und Einheit des Vektors tragen. So ist eine Strecke im *Ortsraum*, eine Geschwindigkeit im *Geschwindigkeitsraum* zu zeichnen. Die Richtung ist dann die der physikalischen Größe, und die Pfeillänge ist ein Maß für den (dimensionsbehafteten) Betrag. Wollen wir den Vektor nach Betrag und Richtung getrennt darstellen, dann schreiben wir  $\vec{s} = s\vec{e}$ , wobei  $\vec{e}$  *Einheitsvektor* genannt wird. Er ist dimensionslos, hat den Betrag 1 und weist in die Richtung von  $\vec{s}$  (s. Anhang A.3).

**Momentangeschwindigkeit** Besteht, wie im Weg-Zeit-Diagramm der Abb. 1.5 angedeutet, kein linearer Zusammenhang zwischen zurückgelegter Wegstrecke und abgelaufener Zeit, so darf nicht wie zuvor in Gl. (1-7) die Geschwindigkeit als Proportionalitätskonstante eingeführt werden, weil sich nun  $\vec{v}$  offenbar während des Bewegungsablaufes mit der Zeit  $t$  ändert:

$$\vec{v} = \vec{v}(t).$$

Diese Änderung des Geschwindigkeitsvektors kann sowohl eine Änderung seiner Richtung als auch seines

Betrages sein. Wir wollen uns zunächst auf eine Bewegung längs eines geraden Weges (geradlinige Bewegung) beschränken. Dann kommen als Änderungen der Geschwindigkeit nur solche ihres Betrages in Frage. Zur näherungsweise Beschreibung dieses Bewegungsvorganges können wir eine *mittlere Geschwindigkeit* einführen. Darunter verstehen wir diejenige konstante Geschwindigkeit, die der Körper hätte haben müssen, um denselben Weg in der gleichen Zeit in gleichförmiger Bewegung zurückzulegen. Wir können den Betrag dieser mittleren Geschwindigkeit,  $v_{\text{mittel}}$ , einfach nach Gl. (1-7) berechnen:

$$v_{\text{mittel}} = (s_{\text{Ende}} - s_{\text{Anfang}}) / (t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}). \quad (1-9)$$

Aus Abb. 1.5 ergibt sich:  $v_{\text{mittel}} = \tan \alpha_1$ . Freilich ist damit nichts über den Wert der Geschwindigkeit zu irgend einer bestimmten Zeit  $t_i$  des Bewegungsvorganges gesagt. Um darüber eine nähere Auskunft zu erhalten, können wir eine mittlere Geschwindigkeit in einem kleinen Intervall  $\Delta t$  um  $t_i$  herum berechnen:

$$v_{\text{mittel}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1-10)$$

Die Bedeutung von  $\Delta s$  geht aus Abb. 1.5 hervor. Die wahre Geschwindigkeit  $v(t_i)$  zum Zeitpunkt  $t_i$  wird durch diese mittlere Geschwindigkeit um so besser angenähert, je kleiner die Intervalle  $\Delta t$  und  $\Delta s$  sind. Den genauen Wert von  $v(t_i)$  finden wir, wenn wir  $\Delta t$  beliebig klein werden lassen. Wir gehen in der Sprache der Mathematik vom Differenzenquotienten der Gl. (1-10) zum Differentialquotienten über (der Quotient aus kleinen Größen braucht selbst nicht klein zu sein):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{mittel}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v(t_i). \quad (1-11)$$

Diese Geschwindigkeit  $v$  nennt man die *Momentangeschwindigkeit* zur Zeit  $t_i$ .

In Abb. 1.5 ergibt sich  $v(t_i)$  als Steigung der Tangente im Punkt  $(s_i, t_i)$  an die Bewegungskurve:  $v(t_i) = \tan \alpha_2$ .

Wie aus der Differentialrechnung bekannt ist, sollen  $\Delta$  und  $d$  hier keine algebraischen Größen darstellen, mit denen  $s$  bzw.  $t$  zu multiplizieren sind; vielmehr sind  $\Delta s$  und  $ds$  Abkürzungen für *kleine* bzw. *differentiell kleine* Intervalle von  $s$ .

**Zur Addition von Geschwindigkeiten** Bei Bewegungen entlang einer gemeinsamen Geraden addieren wir die Beträge der Geschwindigkeiten:

$$v = v_1 + v_2. \quad (1-12)$$

Allgemein haben wir Geschwindigkeiten jedoch vektoriell zu addieren (Anhang). Im Bereich kleiner Geschwindigkeiten ist die Beziehung  $v = v_1 + v_2$  experimentell bestätigt worden. Aber es wäre voreilig, daraus zu schließen, dies gelte auch für beliebig große Geschwindigkeiten. Die *Relativitätstheorie* postuliert,

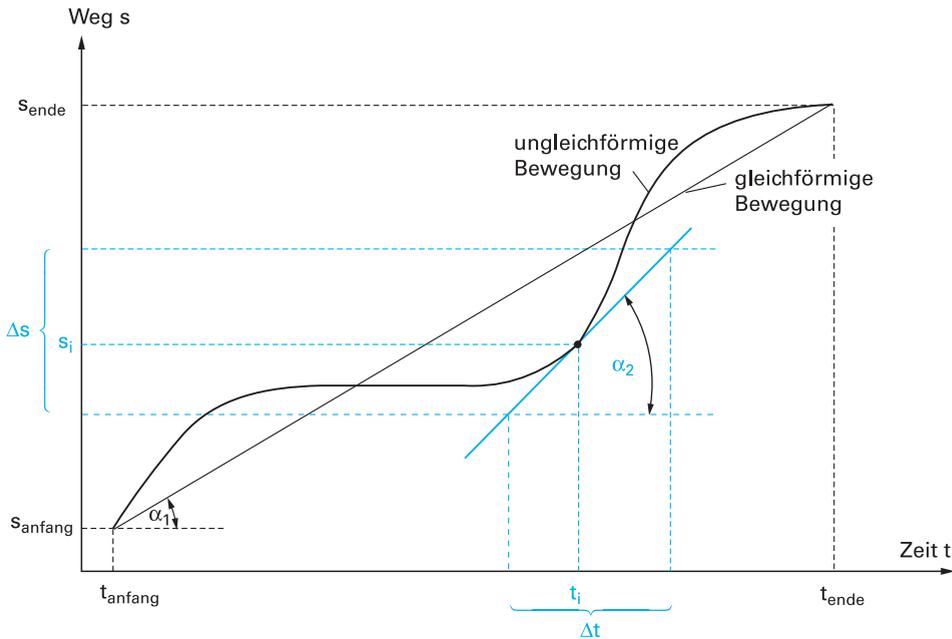


Abb. 1.5 Weg-Zeit-Diagramm bei ungleichförmiger Bewegung.

dass Körper keine beliebig hohe Geschwindigkeit annehmen können, dass vielmehr eine Grenzgeschwindigkeit existiert, die sich als die Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen im Vakuum,  $c$ , ergibt. Da  $v$  also stets kleiner oder gleich  $c$  sein muss, ist Gl. (1-12) abzuändern, und aus der Relativitätstheorie folgt die Additionsbeziehung:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \tag{1-13}$$

Sind  $v_1$  und  $v_2$  gegenüber Lichtgeschwindigkeit  $c$  sehr klein (so dass  $v_1 v_2 / c^2$  gegenüber 1 vernachlässigt werden kann), dann geht Gl. (1-13) in die gewohnte Gl. (1-12) über. Nur unter dieser Voraussetzung darf also Gl. (1-12) benutzt werden. Dass die angegebene Additionsbeziehung dem Postulat der Grenzgeschwindigkeit  $c$  Rechnung trägt, erkennt man, wenn man eine der beiden Geschwindigkeiten oder aber beide gleich  $c$  setzt. Dann ergibt sich als resultierende Geschwindigkeit jeweils  $c$ .

### 1.2.2 Beschleunigung

Um Änderungen der Geschwindigkeit während des Bewegungsvorganges beschreiben zu können, führt man den Begriff der *Beschleunigung* ein.

Die *Geschwindigkeit* beschreibt die Änderung der zurückgelegten Wegstrecke mit der Zeit, und die *Beschleunigung* die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit.

Zunächst führen wir zur näherungsweisen Beschreibung der Beschleunigung die *mittlere Beschleunigung*  $a_{\text{mittel}}$  analog zur Definition der mittleren Geschwindigkeit von Gl. (1-10) ein. Wir bilden dazu das Verhältnis der Geschwindigkeit  $\Delta v = v_2 - v_1$  zwischen zwei Orten  $s_2$  und  $s_1$  und dem zum Zurücklegen der Strecke  $\Delta s = s_2 - s_1$  benötigten Zeitintervall  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1-14}$$

Aus diesem Mittelwert über das *Zeitintervall*  $\Delta t$  erhalten wir die Beschleunigung  $a(t_i)$  zum *Zeitpunkt*  $t_i$  dadurch, dass wir  $\Delta t$  beliebig klein wählen und damit vom Differenzenquotienten der Gl. (1-14) zum Differentialquotienten

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a(t_i) \tag{1-15}$$

übergehen. Die SI-Einheit von  $a$  ist  $\text{m s}^{-2}$ .

Die Geschwindigkeit kann entweder zu- oder abnehmen, d. h.,  $dv$  und damit auch  $a$  können positiv oder negativ sein. Entsprechend unterscheiden wir zwischen Beschleunigung und Abbremsung (*negative Beschleunigung*).

Die Beschleunigung  $dv/dt$  lässt sich nach Gl. (1-11) auch schreiben

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(ds/dt)}{dt};$$

d. h., der Weg  $s$  wird zweifach nach der Zeit differenziert. Dafür verwenden wir auch die formale Schreibweise:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (1-16)$$

In Gl. (1-14) und (1-15) haben wir die Skalare  $\Delta v$  und  $dv$  benutzt, und entsprechend hat sich für  $a$  in Gl. (1-16) ein Skalar ergeben. Diese Beschränkung auf Beträge ist nur bei der *geradlinigen* Bewegung zulässig. Im allgemeinen Fall der *krummlinigen* Bewegung müssen wir den Vektorcharakter der Geschwindigkeit berücksichtigen, und wir erhalten anstelle von Gl. (1-16)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (1-17)$$

Der Vektor  $\bar{a}$  enthält jetzt sowohl die Änderung des Betrages als auch der Richtung von  $\bar{v}$ ; er weist in Richtung von  $d\bar{v}$ , fällt also im Allgemeinen nicht mit der Bahnrichtung zusammen. Eine krummlinige Bewegung ist demnach immer eine beschleunigte Bewegung.

Ist  $\bar{a}$  während eines Bewegungsvorgangs konstant, ändern sich also weder die Richtung noch der Betrag der Beschleunigung, so sprechen wir von einer *geradlinig gleichförmig beschleunigten Bewegung*.

Ändert sich Betrag oder Richtung der Beschleunigung, so nennen wir die Bewegung *ungleichförmig beschleunigt*.

### 1.2.3 Kreisbewegung

**Geschwindigkeit bei der Kreisbewegung** Eine Bewegung, bei der sich die Richtung des Ge-

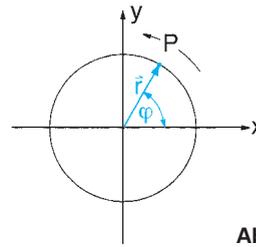


Abb. 1.6 Kreisbewegung.

schwindigkeitsvektors ändert, nennen wir *krummlinig*. Als Sonderfall behandeln wir den auf einer Kreisbahn umlaufenden Punkt P. Die Bewegung von P lässt sich besonders einfach beschreiben, wenn wir statt der kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  die Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi$  verwenden (Abb. 1.6), wobei  $r$  der Betrag des Radiusvektors  $\bar{r}$  und  $\varphi$  der von der  $x$ -Achse aus in der Einheit Radiant gemessene ebene Winkel sind. Da  $r$  bei der Kreisbewegung unverändert bleibt, können wir den Bewegungsablauf durch die Änderung von  $\varphi$  mit der Zeit  $t$  erfassen.

Den Differentialquotienten  $d\varphi/dt$  definieren wir als Betrag der *Winkelgeschwindigkeit*  $\bar{\omega}$  (*Kreisfrequenz*):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \text{ mit der SI-Einheit } \text{rad s}^{-1} \quad (1-18a)$$

Wollen wir neben der Kreisfrequenz  $\omega$  noch Drehachse und Drehsinn angeben, so fassen wir diese drei Angaben in dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  zusammen. Der Vektor  $\bar{\omega}$  ist so definiert, dass seine Länge ein Maß für die Kreisfrequenz ist und die Richtung die Stellung der Drehachse und den Drehsinn der Bewegung angibt (Abb. 1.7). Entsprechend kann auch der Winkel  $\bar{\varphi}$  als Vektor definiert werden.

**Anmerkung** Vektoren von der Art von  $\bar{\omega}$  und  $\bar{\varphi}$  unterscheiden sich von den in Kap. 1.2.1 eingeführten Orts- oder Geschwindigkeitsvektoren dadurch, dass ihre Richtung die Richtung einer Drehachse und den Drehsinn angibt. Zur deutlichen Unterscheidung nennt man  $\bar{\omega}$  und  $\bar{\varphi}$  auch *axiale Vektoren*.

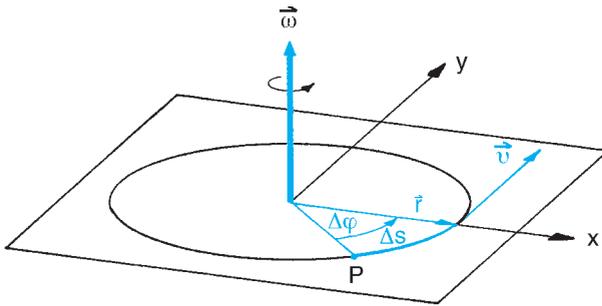


Abb. 1.7 Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$ .

Die *Frequenz*  $\nu$  erhalten wir aus  $\omega$ , indem wir durch den Winkel des Vollkreises ( $2\pi$ ) dividieren:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{1-18b}$$

Wir wollen nun den Begriff der *Bahngeschwindigkeit* einführen. Aus der Geometrie des Kreises folgt mit Gl. (1-4) für die Länge des Kreisbogens  $\Delta s$ :

$$\Delta s = r \Delta\varphi$$

bzw. für infinitesimale Änderungen:

$$ds = r d\varphi. \tag{1-19}$$

Für die zeitliche Änderung von  $ds$  der Gl. (1-19) erhalten wir (da  $r$  konstant ist):

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1-20}$$

Die linke Seite stellt nach Gl. (1-11) den Betrag der Momentangeschwindigkeit (die momentane Bahngeschwindigkeit) dar, und die rechte Seite enthält den in Gl. (1-18) definierten Betrag der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ . Damit folgt die Beziehung zwischen  $\nu$  und  $\omega$ :

$$v = r\omega. \tag{1-21}$$

Gl. (1-21) stellt einen Zusammenhang zwischen den Beträgen von  $\vec{v}$ ,  $\vec{r}$  und  $\vec{\omega}$  der Kreisbewegung dar. Die vollständige Beziehung dieser Vektoren untereinander aber ist durch das Vektorprodukt (siehe Anhang und Abb. 1.7)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1-22}$$

gegeben. Hieraus erhalten wir für die Beträge wieder Gl. (1-21), da bei der Kreisbewe-

gung die Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{\omega}$  stets senkrecht aufeinander stehen.

**Beschleunigung bei der Kreisbewegung** Im vorigen Abschnitt wurde darauf hingewiesen, dass die Kreisbewegung krummlinig, also stets beschleunigt ist. Dies wird schon deutlich, wenn wir den Spezialfall der *gleichförmigen Kreisbewegung* ( $\vec{\omega} = \text{konst.}$ ) betrachten. Aus den Gl. (1-17) und (1-22) folgt dann für die Beschleunigung:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}), \tag{1-23a}$$

und falls  $\vec{\omega}$  konstant ist

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1-23b}$$

Aus Abb. 1.8 erkennt man, dass die Änderung des Radiusvektors  $d\vec{r}$  und des Kreisbogens  $d\vec{s}$  identisch werden, wenn sie infinitesimal kleine Größen darstellen. Daher gilt

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v} \tag{1-24}$$

und aus Gl. (1-23b) folgt für den *Betrag* von  $\vec{a}$ , da  $\vec{v}$  senkrecht auf  $\vec{\omega}$  steht:  $a = \omega v$ ; oder mit

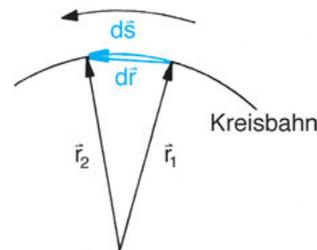


Abb. 1.8 Zur Beschleunigung bei der Kreisbewegung.

Gl. (1-21):

$$a = \omega^2 r \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{v^2}{r}. \quad (1-25)$$

Die *Richtung* von  $\vec{a}$  ergibt sich aus Gl. (1-23). Nach den Rechenregeln zur Bildung des Vektorproduktes steht  $\vec{a}$  senkrecht auf  $d\vec{r}$  und  $\vec{\omega}$  und weist zum Zentrum des Kreises (Anhang):

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}. \quad (1-26)$$

$\vec{a}$  wird als *Zentripetalbeschleunigung* bezeichnet.

Bei der *ungleichförmigen* Kreisbewegung ändert sich auch die Kreisfrequenz  $\omega$  mit der Zeit. Diese Änderung beschreiben wir durch die *Winkelbeschleunigung*

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad \text{mit der SI-Einheit rad s}^{-2}. \quad (1-27)$$

### 1.2.4 Berechnung des Weges aus Geschwindigkeit und Beschleunigung

Aus den vorigen Abschnitten ist bekannt, wie sich bei geradliniger bzw. kreisförmiger Bewegung die Beträge von Geschwindigkeit und Beschleunigung als zeitliche Ableitungen aus Weg bzw. Winkel ergeben.

In umgekehrter Weise lassen sich aber auch die Momentangeschwindigkeit  $v(t)$  und der in einem Zeitintervall zurückgelegte Weg  $s$  berechnen, wenn die Beschleunigung  $a(t)$  vorgegeben ist.

Wir wollen nun den gesamten in der Zeit  $t = t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}$  zurückgelegten Weg  $s = s_{\text{Ende}} - s_{\text{Anfang}}$  für diesen Fall bestimmen. Da die Momentangeschwindigkeit  $v$  von der Zeitkoordinate  $t_i$  abhängt,  $v = v(t_i)$ , müssen wir die gesamte Zeit  $t$  in  $N$  gleich große Intervalle  $\Delta t$  zerlegen, und die zu diesen gehörende Strecken  $\Delta s(t_i) = v(t_i) \Delta t$  aufsummieren. Dabei sind die Zeitintervalle  $\Delta t$  so klein gewählt, dass die jeweilige Momentangeschwindigkeit  $v(t_i)$  während  $\Delta t$  als konstant

angesehen werden darf. Dann gilt:

$$s = \sum_{i=1}^N \Delta s(t_i) = \sum_{i=1}^N v(t_i) \Delta t.$$

Gehen wir zu infinitesimal kleinen Zeitintervallen über, so erfolgt der Schritt von der Summation zur Integration:

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v(t_i) \Delta t = \int_{t_{\text{Anfang}}}^{t_{\text{Ende}}} v(t) dt. \quad (1-28a)$$

Um  $s$  berechnen zu können, müssen wir die Funktion  $v(t)$  kennen. Der einfachste Fall ist die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit,  $v = \text{konstant}$ . Dann ergibt sich:

$$s = \int_{t_{\text{Anfang}}}^{t_{\text{Ende}}} v dt = v \int_{t_{\text{Anfang}}}^{t_{\text{Ende}}} dt = v(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}) = vt. \quad (1-28b)$$

Völlig analog lässt sich durch Integration aus der vorgegebenen Beschleunigung  $a(t)$  die Geschwindigkeit  $v = v_{\text{Ende}} - v_{\text{Anfang}}$  ermitteln, die während des Zeitintervalls  $t = t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}$  zugelegt wird:

$$v = \int_{t_{\text{Anfang}}}^{t_{\text{Ende}}} a(t) dt. \quad (1-28c)$$

Auch hier wollen wir den einfachen Fall betrachten: Die Beschleunigung beginne zur Zeit  $t_{\text{Anfang}} = 0$ , dauere bis zur Zeit  $t_{\text{Ende}} = t$  und sei während der ganzen Zeit konstant. Wenn wir die Abkürzungen  $v_{\text{Anfang}} = v(0)$  und  $v_{\text{Ende}} = v(t)$  verwenden, erhalten wir schließlich:

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a dt = a(t - 0) = at \quad \text{oder} \\ v(t) = at + v(0). \quad (1-28d)$$

Wir können nun auch den während der konstanten Beschleunigung zurückgelegten Weg  $s$  ermitteln, indem wir Gl. (1-28d) in Gl. (1-28a) einsetzen, die Abkürzung  $s_{\text{Anfang}} = s(0)$  und  $s_{\text{Ende}} = s(t)$  verwenden und ein weiteres Mal integrieren:

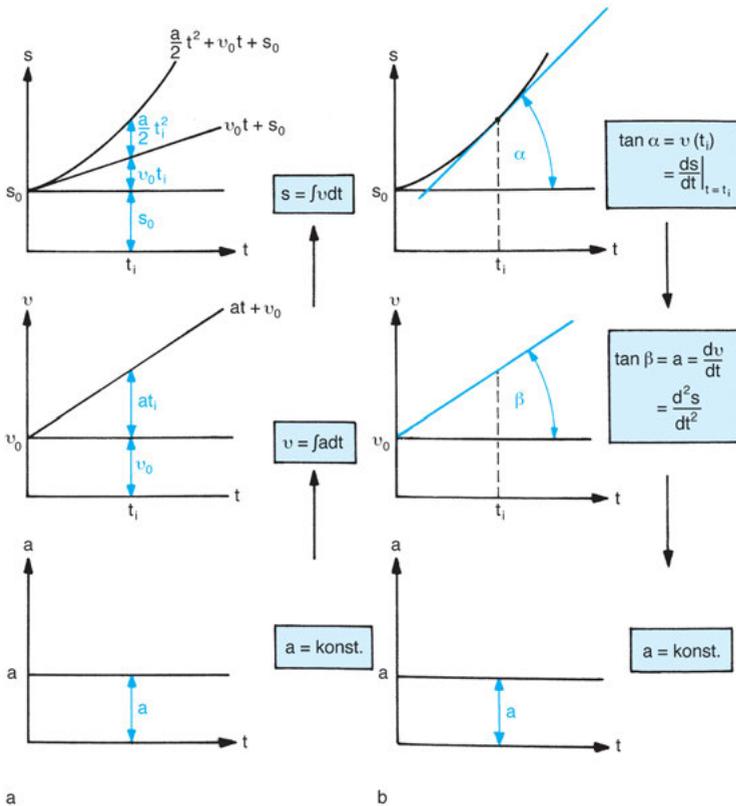
$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t (at + v(0)) dt \\ = \int_0^t at dt + \int_0^t v(0) dt \\ = \frac{a}{2} t^2 + v(0)t. \quad (1-28e)$$

Als Weg-Zeit-Gesetz für die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung ( $a = \text{konstant}$ ) erhalten wir damit:

$$s(t) = s(0) + v(0)t + \frac{a}{2}t^2. \quad (1-29)$$

Gl. (1-29) beschreibt also die Bewegung eines Körpers, der sich mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v(0)$  bewegt, bis er zur Zeit  $t = 0$  den Ort  $s(0)$  passiert und von da an gleichmäßig beschleunigt wird (Abb. 1.9 a, b).

Ein Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung werden wir in Kap. 2.2.2.1 mit dem *freien Fall* kennenlernen.



**Abb. 1.9** (a) Weg-Zeit-Diagramm und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm, wie sie durch Integration aus dem Beschleunigungs-Zeit-Diagramm folgen. (b) Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm und Beschleunigungs-Zeit-Diagramm, wie sie durch Differentiation aus dem Weg-Zeit-Diagramm folgen.

## 2. Masse und Kraft

Bisher wurden Bewegungen betrachtet, nicht aber deren Ursachen.

Während Geschwindigkeiten und Beschleunigungen Thema der *Kinematik* sind, hat die *Dynamik* deren Ursachen, d. h. den Einfluss von Massen und Kräften auf Bewegungen von Körpern zum Inhalt.

Die klassische Mechanik ermöglicht die Formulierung von Gesetzen, durch die Ort,

Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt vorhersagbar werden, wenn die einwirkenden Kräfte bekannt sind. Diese Determiniertheit des Naturgeschehens ist durch die Quantenmechanik eingeschränkt worden (Kap. 17.5); im Bereich des täglichen Lebens gelten jedoch die Gesetze der klassischen Mechanik in guter Näherung.

### 2.1 Die träge Masse

Die *Masse* ist im SI als Basisgröße mit der Basiseinheit *Kilogramm* (kg) eingeführt.

Die *Masse* eines Körpers ist Ursache für sein Beharrungsvermögen gegenüber Versuchen, seinen Bewegungszustand zu ändern. Sie ist also Ausdruck für seine Trägheit; wir nennen sie auch *träge Masse*. Sie wird als quantitatives Maß für das Beharrungsvermögen verwendet. Hier wird aus historischen Gründen das System der Tab. 1.3 durchbrochen: Die Basiseinheit enthält schon die Vorsilbe „Kilo“.

Die Trägheit nimmt bei Körpern desselben Materials mit ihrem Volumen zu: Je größer z. B. eine Eisenkugel ist, um so mehr Mühe macht es, sie zu werfen. Entsprechend ist es wegen der größeren trägeren Masse bedeutend schwieriger, ein normales Kraftfahrzeug abzubremesen als ein Spielzeugauto.

Die Elementarteilchen (eine genauere Darstellung findet sich in Kap. 21.1), aus denen die Atome aufgebaut sind, stellen die kleinsten Massebausteine dar:

$$m_{\text{Proton}} = 1,6724 \cdot 10^{-27} \text{ kg},$$

$$m_{\text{Neutron}} \approx m_{\text{Proton}},$$

$$m_{\text{Elektron}} = \frac{1}{1836} m_{\text{Proton}}.$$

Die größten uns bekannten Massen sind die der Gestirne. Ein Beispiel:

$$m_{\text{Sonne}} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Somit erstreckt sich der Bereich bekannter Massen über mehr als 60 Zehnerpotenzen (Tab. 2.1).

Das von der Relativitätstheorie aufgestellte Postulat, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  Grenzggeschwindigkeit sei, und das daraus folgende Gesetz zur Addition von Geschwindigkeiten (Gl. (1-13) erfordern eine Erweiterung des in der klassischen Mechanik eingeführten Begriffs der Masse. Sie ist nicht mehr als eine unveränderliche Eigenschaft eines Körpers anzusehen, sondern ändert sich mit der Geschwindigkeit des Körpers:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Tab. 2.1 Massen

10 <sup>-30</sup>	Elementarteilchen (Elektron) Atome (10 <sup>-26</sup> – 10 <sup>-25</sup> )
10 <sup>-24</sup>	
10 <sup>-18</sup>	Makromoleküle
10 <sup>-12</sup>	rotes Blutkörperchen
10 <sup>-6</sup>	
1	Fahrrad Auto Lokomotive
10 <sup>6</sup>	
10 <sup>12</sup>	
10 <sup>18</sup>	
10 <sup>24</sup>	Mond (7 · 10 <sup>22</sup> ) Erde (6 · 10 <sup>24</sup> )
10 <sup>30</sup>	Sonne (2 · 10 <sup>30</sup> )

Einheit: kg

Man bezeichnet  $m$  als relativistische Masse bezüglich des ruhenden Beobachters und  $m_0$  als Ruhemasse des Körpers. Die relativistische Masse nimmt also, von der Ruhemasse  $m_0$  aus, mit wachsender Geschwindigkeit des Körpers ständig zu.

Bei der Beschleunigung eines Körpers wird ein Teil der aufgewendeten Energie (siehe Kap. 3) zur Erhöhung der Masse von  $m_0$  auf  $m$  verbraucht, während der Rest der Energie der Erhöhung der Geschwindigkeit dient. Je näher die Geschwindigkeit des Körpers der Lichtgeschwindigkeit  $c$  kommt, um so größer wird die Massenzunahme und um so geringer die Geschwindigkeitszunahme. Man kann heute Elementarteilchen (z. B. Protonen) so weit beschleunigen, dass ihre Masse auf das 500fache der Ruhemasse anwächst. Die erreichte Geschwindigkeit beträgt dabei  $v = 0,999998c$ .

**Dichte** Bei homogenen Körpern (d. h. Körpern aus einheitlichem Stoff und einheitlicher Struktur; siehe Kap. 5.2.1) ist deren Masse proportional zu ihrem Volumen:  $m = \rho V$ . Der Proportionalitätsfaktor heißt *Dichte des Stoffes*:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad \text{mit der SI-Einheit } \text{kg m}^{-3}, \quad (2-1)$$

$\rho$  charakterisiert den Stoff, unabhängig von der Größe des untersuchten Körpers. Da das Volumen eines Körpers stark temperaturabhängig sein kann (siehe Kap. 13.1), wird sich auch  $\rho$  mit der Temperatur ändern (Tab. 2.2).

Mit Geräten zur Bestimmung von Dichten, sog. *Pyknometern*, misst man die Massen und Volumina der zu untersuchenden Stoffe und

**Tab. 2.2** Dichte  $\rho$  von Stoffen in  $\text{kg m}^{-3}$

Luft	(20 °C)	1,29
Wasser	(4 °C)	1000,0
	(20 °C)	998,2
Öl	(20 °C)	915
Hg	(20 °C)	13550,0
Holz		400 – 800
Glas		2200 – 2500
Stahl		7900,0
Cu	(20 °C)	8930
Pt	(20 °C)	21000
<i>Zum Vergleich:</i>		
Materie im interstellaren Raum		$10^{-21}$
das beste auf der Erde		$10^{-16}$
erzeugbare Vakuum		
Kernmaterie		$10^{17}$

setzt diese nach Gl. (2-1) zueinander ins Verhältnis. Die Volumenbestimmung ist bei unregelmäßig geformten Körpern oft nur ungenau möglich. Moderne Präzisionspyknometer messen das unbekannte Volumen eines Festkörpers durch Vergleich zweier Gasvolumina  $V_1$  und  $V_2$  aus zwei gleichgroßen Küvetten, wobei sich der Festkörper in einer der beiden Küvetten befindet. Bei Probengrößen von ca. 10 ml werden Genauigkeiten von 0,001 ml erreicht. Verbunden mit einer genauen Wägung lässt sich dann auch die Dichte der Probe auf  $\pm 0,001 \text{ g ml}^{-1} = 1 \text{ kg m}^{-3}$  genau bestimmen. Die Dichtemessung von Flüssigkeiten mit Hilfe des *Aräometers* wird in Kap. 5.3.2.2 beschrieben.

## 2.2 Wirkung von Kräften

### 2.2.1 Newton'sche Axiome

Der Begriff der *Kraft* wird durch drei von Newton angegebene Axiome festgelegt. Die Kraft, die auf einen Körper wirkt, ist an ihrer Auswirkung erkennbar. Deshalb spricht man statt von Kräften oft auch von Wechselwirkungen. Die Kraft führt, falls der Körper beweglich ist, zur *Änderung seines Bewegungszustandes*, andernfalls zu seiner *Deformation* oder zu beiden gleichzeitig.

#### Das 1. Newton'sche Axiom (Trägheitsprinzip)

Das 1. Newton'sche Axiom beschreibt, wie frei bewegliche Körper sich bewegen, wenn keine Kraft auf sie einwirkt: In diesem Fall verharren sie im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung.

#### Das 2. Newton'sche Axiom (Aktionsprinzip)

Das 2. Newton'sche Axiom besagt,

dass die Einwirkung einer Kraft auf einen beweglichen Körper eine Änderung seines Bewegungszustandes, d. h. seine Beschleunigung oder Verzögerung, hervorruft. Wenn wir uns auf Gegenstände beschränken, deren Massen sich nicht mit der Zeit ändern, dann ist die Kraft  $\vec{F}$  gegeben durch:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (2-2)$$

mit der SI-Einheit  $\text{kg m s}^{-2}$ . Dieser Einheit wurde der Name *Newton* ( $N$ ) gegeben.

Weitere Einheiten der Kraft sind in Tab. 1.5 zusammengestellt.

Nach Gl. (2-2) ist das 1. Newton'sche Axiom nur als ein Spezialfall des 2. Axioms anzusehen. Falls  $\vec{F} = 0$ , dann gilt auch  $\vec{a} = 0$ .

Die Masse  $m$  ist ein Skalar, die Beschleunigung  $\vec{a}$  eine vektorielle Größe. Gemäß Gl. (2-2) ist daher auch  $\vec{F}$  ein Vektor. Er weist in Richtung des Vektors  $\vec{a}$ . Für die Kraft gelten daher die im Anhang angegebenen Rechen- und Konstruktionsregeln für Vektoren.

Kräfte können durch Gegenstände, etwa durch eine Sehne vom Muskel auf den Knochen, weitergeleitet werden, sie können aber auch, wie etwa die durch elektrische Ladungen bewirkte Coulomb-Kraft, ohne Mitwirkung von Materie über weite Entfernungen wirken.

**Das 3. Newton'sche Axiom (Reaktionsprinzip)** Wenn ein Körper 1 auf einen Körper 2 eine Kraft ausübt, die wir  $\vec{F}_{(1 \text{ auf } 2)}$  nennen wollen, dann zeigt die Erfahrung, dass der Körper 2 auf den Körper 1 mit einer Kraft  $\vec{F}_{(2 \text{ auf } 1)}$  wirkt, die von gleichem Betrage, aber entgegengerichtet ist, d. h.

$$\vec{F}_{(1 \text{ auf } 2)} = -\vec{F}_{(2 \text{ auf } 1)}.$$

Newton bezeichnete dieses Gesetz auch als das *Prinzip der Gleichheit von actio (Kraft) und reactio (Gegenkraft)*.

## 2.2.2 Verschiedene Arten von Kräften

Die Vielfalt der uns bekannten Kräfte lässt sich im Wesentlichen auf drei Arten zurückführen:

1. Die *Gravitationskraft* (die Massenanziehung oder Schwerkraft), die zwischen allen Körpern wirkt und stets anziehende Wirkung hat;

2. die *elektromagnetischen Kräfte*, die im Zusammenhang mit elektrischen und (oder) magnetischen Feldern auftreten und die zu Anziehung oder Abstoßung führen können. Zu ihnen gehören auch die Bindungskräfte zwischen Atomen, Molekülen usw.;

3. die *Kernkräfte*. Diese Kräfte wirken zwischen Elementarteilchen und bewirken unter anderem den Zusammenhalt der Atomkerne.

Von diesen drei Arten zu unterscheiden sind *Scheinkräfte* bzw. *Trägheitskräfte* (Kap. 2.2.2.2).

In dieser Aufzählung fehlen die aus dem Alltag bekannten Kräfte, wie etwa die durch Kontraktion eines Muskels, durch thermische Ausdehnung von Verbrennungsgasen im Kraftfahrzeugmotor oder durch Reibung bedingte Kraft. Diese lassen sich jedoch alle unter die bei 2. aufgeführten Kräfte eingliedern, da sie durch Kräfte zwischen Atomen und Molekülen verursacht werden.

### 2.2.2.1 Gravitation

Zwischen allen Massen wirken anziehende Kräfte (Massenanziehung oder Gravitation). Newton hat Größe und Eigenschaften dieser Kräfte im *Gravitationsgesetz* zusammengefasst. Danach ist die Größe der Gravitationskraft zwischen zwei Körpern im Abstand  $r$  gegeben durch:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2-4)$$

Die Proportionalitätskonstante (auch *Gravitationskonstante* genannt) hat den Zahlenwert

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}.$$

Die Größen  $m_1$  und  $m_2$  sind ein Maß für die zwischen den Körpern wirkende Kraft. Masse ist also nicht nur Ursache des Beharrungsvermögens eines Körpers, sondern auch Quelle der Gravitationskraft, deshalb nennt man sie *schwere Masse*. Die Einheit der schweren Masse ist das Kilogramm (kg). Experimente haben gezeigt, dass die schwere Masse mindestens bis zum  $10^{-10}$ ten Teil mit der in Kap. 2.1 definierten trägen Masse übereinstimmt. Die klassische Mechanik kann das nicht begründen. Erst die *Allgemeine Relativitätstheorie* gibt Hinweise auf den Zusammenhang zwischen beiden. Im Weiteren soll nicht mehr zwischen träger und schwerer Masse unterschieden werden; wir werden nur noch von *Masse* sprechen.

Die auf der Erdoberfläche auf einen Körper der Masse  $m$  wirkende Gravitationskraft nennt man die *Schwerkraft*, *Erdanziehung* oder auch die *Gewichtskraft* des Körpers. (Der Begriff *Gewicht* aus dem *Technischen Messsystem* darf im Rahmen des SI-Systems nicht mehr für die *Gewichtskraft* verwendet werden).

Für Versuche nahe über oder auf der Erdoberfläche ist in Gl. (2-4) für  $r$  der Abstand zum Erdmittelpunkt zu setzen, d. h., die Erde verhält sich bezüglich der Erdanziehung, als sei all ihre Masse im Mittelpunkt, also in ihrem Schwerpunkt (Kap. 2.2.7.4) vereint. (Das gilt nicht innerhalb der Erde: Am Erdmittelpunkt ist die resultierende Kraft gleich Null.) Setzen wir also in Gl. (2-4) für  $m_1$  die Erdmasse und für  $r$  den Erdradius ein, so erhalten wir  $F = m_2 G m_{\text{Erde}} / r_{\text{Erde}}^2$ . Andererseits ist nach Gl. (2-2)  $F = m_2 a$ , so dass sich die Beziehung  $a = G m_{\text{Erde}} / r_{\text{Erde}}^2$  ergibt. Mit den bekannten Zahlenwerten ( $m_{\text{Erde}} = 6 \cdot 10^{24}$  kg;  $r_{\text{Erde}} = 6,37 \cdot 10^6$  m) finden wir  $a = 9,8 \text{ m s}^{-2}$ .

Üblicherweise wird  $a = G m_{\text{Erde}} / r_{\text{Erde}}^2$  als *Erdbeschleunigung* (mit dem Formelzeichen  $g$ ) bezeichnet. Da nicht alle Punkte der Erdoberfläche vom Erdmittelpunkt gleich weit entfernt sind (*Abplattung der Erde*), ist  $g$  keine universelle Konstante, sondern an den Polen größer und am Äquator kleiner als der Mittelwert  $9,8 \text{ m s}^{-2}$ . Die Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation bewirkt ebenfalls, dass  $g$  am Äquator kleiner ist als an den Polen.

Verglichen etwa mit der elektrischen Kraft ist die Gravitation schwach. Die elektrische Kraft zwischen zwei Elektronen ist  $10^{42}$  mal größer als ihre Gravitationskraft bei gleichem Abstand. Wesentliche Bedeutung hat die Gravitation daher nur bei großen Massen, wie denen der Planeten und Sterne. Sie bewirkt, dass der Mond um die Erde kreist, dass die Planeten sich um die Sonne bewegen, und dass sogar Photonen von Sternen abgelenkt werden.

Auf der Erdoberfläche kann man heute Schwankungen von einem Millionstel der Erdanziehung messen, wie sie z. B. durch unterschiedliche Dichten der Stoffe unter der Oberfläche verursacht werden. Durch solche *gravimetrische* Messungen gelingt es z. B. Erdöllagerstätten ausfindig zu machen.

**Der freie Fall unter dem Einfluss der Gravitation** Die Gewichtskraft bewirkt, dass jeder nahe der Erde befindliche, frei bewegliche Körper zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt wird (*freier Fall*). Da wir nahe der Erdoberfläche die Erdbeschleunigung  $g$  als konstant annehmen dürfen, ist die Bewegung gleichmäßig geradlinig beschleunigt. Die Bewegungsgleichung für diesen Sonderfall haben wir in Gl. (1-29) beschrieben:  $s = (g/2)t^2 + v_0 t + s_0$ . Sind die Anfangswerte der Geschwindigkeit bzw. des Ortes beide Null ( $v_0 = 0$  und  $s_0 = 0$ ), dann ist  $s = (g/2)t^2$  die in der Zeitspanne von 0 bis  $t$  durchfallene Strecke. Lässt man also von einem Turm einen Stein fallen und misst mit einer Stoppuhr die Fallzeit (z. B.  $t = 3,5$  s), dann lässt sich die Turmhöhe berechnen ( $s = 9,8 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,5 \cdot 3,5^2 \text{ s}^2 = 60$  m).

Die Bewegungsgleichung des freien Falles gilt, streng genommen, nur im Vakuum, da sonst die Bewegung durch Reibung gebremst wird. (Denken Sie an Blätter im Herbst.)

**Gravitationsfeld** Bei der Beschreibung der Wechselwirkung von Massen haben wir bisher den umgebenden Raum als *leer* angesehen. Die Kraftwirkung pflanzt sich auch durch den materiefreien Raum fort, und bezüglich dieser Kraftwirkung muss man daher dem Raum folgende Eigenschaft zuschreiben:

Um jede Masse herum befindet sich ein *Gravitationsfeld* (*Kraftfeld*) mit der Feldstärke  $\vec{E} = F/m = g$ . Der Begriff des Feldes ist nicht auf die Gravitationskraft beschränkt; auch die Kraft zwischen z. B. elektrischen Ladungen (Coulombkraft) wird durch ein Feld, das *elektrische Feld* beschrieben (Kap. 14.7.1).

Allgemein spricht man von einem *Vektorfeld*, wenn jedem Punkt eines begrenzten oder unbegrenzten, leeren oder mit Materie gefüllten Raumes eine vektorielle Größe (wie etwa das Gravitationsfeld) zugeordnet ist.

Von einem *Skalarfeld* spricht man, wenn jedem Raumpunkt eine skalare Größe zugeordnet ist. Beispiele für ein Skalarfeld sind die Dichte in einem inhomogenen Körper oder die potentielle Energie.

### 2.2.2.2 Trägheitskraft

Schreibt man statt Gl. (2-2)

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0, \tag{2-5}$$

so kann diese Beziehung folgendermaßen ausgelegt werden: Der von außen auf den Körper einwirkenden Kraft  $\vec{F}$  wirkt stets eine Kraft  $m\vec{a}$  mit gleichem Betrag entgegen, so dass sich beide aufheben.

Die Größe  $-m\vec{a}$  bezeichnet man als *Trägheitskraft*. Die Summe aus äußerer Kraft und Trägheitskraft ist gleich Null (*dynamisches Gleichgewicht*).

Die Trägheitskraft ist Ausdruck für das Beharrungsvermögen von Körpern. Da die Trägheitskraft nicht von außen am beschleunigten Körper angreift, führt sie nicht zu einer zusätzlichen Beschleunigung des Körpers, wie dies bei der äußeren Kraft  $\vec{F}$  der Fall ist. Aus diesem Grunde bezeichnen wir sie als *Scheinkraft* oder *fiktive Kraft*. Nur für den mitbeschleunigten Beobachter scheint es, als ob eine Kraft von außen angriffe; und nur im beschleunigten System lässt sie sich messen. Ein Autofahrer, der seinen Wagen scharf abbremst, merkt, wie ihn die Trägheitskraft nach vorne reißt.

### 2.2.2.3 Zentrifugal- und Zentripetalkraft

Wir wollen einen Körper der Masse  $m$  gleichförmig auf einem Kreis bewegen. Dazu ist nach Gl. (1-26) eine Zentripetalbeschleunigung in Richtung auf den Kreismittelpunkt,  $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$  erforderlich,  $\vec{r}$  ist der Abstand seines Schwerpunktes zum Kreismittelpunkt.

Die Kraft  $\vec{F}$  in Richtung auf das Zentrum des Kreises zu ist

$$\vec{F}_z = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} \tag{2-6}$$

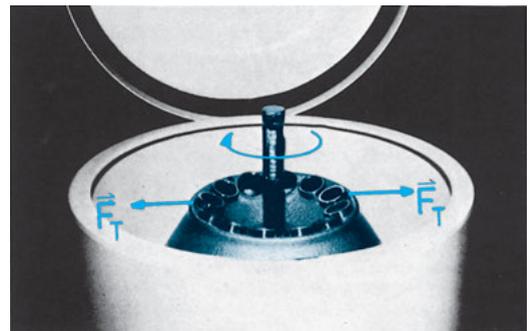
und wird als *Zentripetalkraft* bezeichnet.

Nach Gl. (2-6) gilt  $\vec{F}_z + \omega^2\vec{r}m = 0$ . Die Zentripetalkraft  $\vec{F}_z$  können wir demnach als im Gleichgewicht mit einer Kraft

$$\vec{F}_T = \omega^2\vec{r}m \tag{2-7}$$

ansehen; sie weist in Richtung des Radiusvektors nach außen und wirkt nur auf Beobachter, die mitbewegt werden. Wir haben es also mit einer Scheinkraft, einer Trägheitskraft zu tun. Wir bezeichnen sie als *Fliehkraft* oder *Zentrifugalkraft*.

Der Gl. (2-7) entnehmen wir, dass durch Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , d. h. der Zahl der Umdrehungen pro Zeiteinheit (Drehzahl), die Zentrifugalkraft wächst. Sie greift beispielsweise an den Teilchen einer flüssigen Suspension an, wenn diese rotiert, und zwar um so stärker, je größer die Masse der Teilchen ist. Daher ist es möglich, Teilchen verschiedener Massen voneinander zu trennen, wenn man die Suspension rotieren lässt. Dies geschieht in der *Zentrifuge* (Abb. 2.1). Um besonders hohe Zentrifugalkräfte zu erzeugen, hat man *Ultrasentrifugen* entwickelt. Sie können Umdrehungszahlen von etwa 1000 je Sekunde erreichen. Ein Teilchen, das in einer solchen Zentrifuge auf einer Kreisbahn von 5 cm Radius umläuft, erfährt eine Beschleunigung, die das ungefähr 250000fache der Erdbeschleunigung erreicht. Damit kann man z. B. kolloidale Eiweißteilchen trennen und Einblick in die Größe hochmolekularer Stoffe gewinnen. Die in diesem Zusammenhang für die Sedimentation wichtigen Vorgänge werden später, in Kap. 5.3.3.2 behandelt werden.



**Abb. 2.1** Zentrifuge (zu sehen sind das Schutzmantelgefäß mit Deckel, der Rotor und die schräg eingesetzten Zentrifugenröhrchen, in die die Suspension eingefüllt wird).

### 2.2.3 Statisches und dynamisches Gleichgewicht von Kräften

Wirken Kräfte auf einen beweglichen Körper, so wird sich dieser Körper im Allgemeinen sowohl beschleunigt fortbewegen (Translationsbeschleunigung) als auch drehen (Rotationsbeschleunigung).

Greifen an einem Punkt eines Körpers mehrere Kräfte an, so muss man sie vektoriell addieren, um die resultierende Kraft, die *Resultierende*, zu erhalten (Abb. 2.2). Dabei können sich die verschiedenen Kräfte auch gegenseitig aufheben. Dann verhält sich der Körper genauso, als würden überhaupt keine Kräfte einwirken. Diesen Fall bezeichnet man als *Gleichgewicht* der Kräfte (die Bezeichnung gilt auch, wenn die Kräfte nichts mit Gewichtskräften zu tun haben).

Gleichgewicht herrscht also, wenn die Resultierende gleich Null ist. Sind keine Scheinkräfte beteiligt, so nennen wir das Gleichgewicht *statisches Gleichgewicht*, andernfalls *dynamisches Gleichgewicht*.

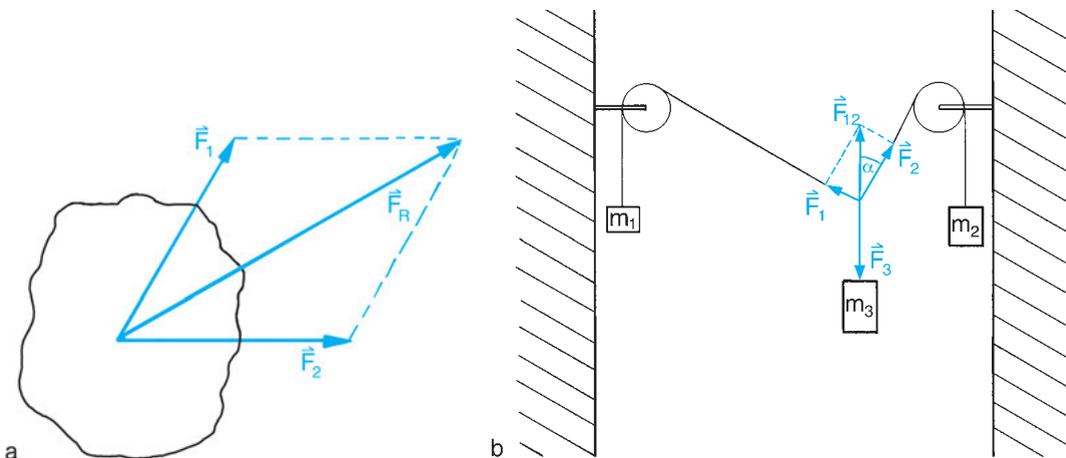
Die Lehre der *Statik* umfasst das Zusammenwirken von Kräften zur Ausbildung von statischen Gleichgewichten. Sie ist von besonderer praktischer Bedeutung, sei es zur Berechnung der Konstruktion von Bauwerken oder zur Berechnung der Belastung eines Knochens (s. Tab. 5.2). Ein Beispiel für dynamisches Gleichgewicht liefert uns die gleichförmige Kreisbewegung, Gl. (2-6) und Gl. (2-7):  $\vec{F}_z + \vec{F}_T = 0$ .

Die Addition zweier am selben Punkt eines Körpers angreifenden Kräfte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$  lässt sich über das Kräfteparallelogramm (Abb. 2.2) zeichnerisch durchführen oder durch Addition der Komponenten der beiden Vektoren berechnen (s. Anhang A.3).

### 2.2.4 Schwerelosigkeit

An einem Beispiel wollen wir diesen Begriff erläutern. Ein Fahrstuhl, dessen Seil gerissen sei und der dann nach unten saugt, ist kräftefrei: Der Gravitationskraft  $m\vec{g}$  wirkt nämlich die Trägheitskraft  $-m\vec{g}$  entgegen (*dynamisches Gleichgewicht*). Ein mitfliegender Beobachter hat dann (für kurze Zeit) das Gefühl der Schwerelosigkeit.

Steht aber der Beobachter auf der Erdoberfläche, so gilt für ihn Kräftefreiheit in einem anderen Sinne: Der am Beobachter angreifenden Gravitationskraft



**Abb. 2.2** (a) Addition von Kräften: Zwei an einem Körper angreifende Kräfte mit Kräfteparallelogramm und resultierender Kraft  $F_R$ . (b) Beispiel mit drei Kräften: Die drei mit Fäden verbundenen Massen  $m_1$ ,  $m_2$  und  $m_3$  können sich über die beiden Umlaufrollen bewegen. Die Gleichgewichtslage ist erreicht, wenn die resultierende Kraft  $\vec{F}$  gleich Null ist:  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ . Der Winkel  $\alpha$  ist dann gerade so groß, dass  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_3$ . Speziell bei Wahl des Masseverhältnisses  $m_1 : m_2 : m_3 = 3 : 4 : 5$  stellt sich zwischen  $F_1$  und  $F_2$  ein rechter Winkel ( $90^\circ$ ) ein.

wirkt eine Kraft  $\vec{F}$  durch den Erdboden entgegen, die verhindert, dass er nach unten beschleunigt wird. Die Gegenkraft  $F$  ist keine Scheinkraft (*statisches Gleichgewicht*). Der Beobachter hat das Gefühl der Schwere.

## 2.2.5 Dynamometer (Kraft einer gespannten Feder)

Ein besonders einfaches Messgerät für Kräfte ist das *Dynamometer*. Es besteht aus einer einseitig befestigten Schraubenfeder und einer Anzeigeskala. Greift eine Kraft  $F$  an der Feder an, so wird diese so lange gedehnt, bis ihre Reaktionskraft entgegengesetzt gleich  $F$  ist und damit Gleichgewicht herrscht. Man wählt Federn, deren Dehnung  $x$  proportional zum Betrag der angreifenden Kraft  $F$  ist:  $F = Dx$  (vgl. Hooke'sches Gesetz, Gl. (5-3)).

$D$  nennt man die *Federkonstante*. Ist sie bekannt, so genügt die Messung der Länge  $x$ , um die Kraft  $F$  zu bestimmen. Wird  $F$  in Newton und  $x$  in Metern gemessen, so hat die Federkonstante die Einheit  $\text{N m}^{-1}$ .

Das Dynamometer lässt sich ebenso zur Messung der schweren Masse verwenden und wird dann auch als *Federwaage* bezeichnet. Dazu muss das Dynamometer lediglich *umgekehrt* werden:  $F = mg = Dx$  oder  $m = Dx/g$ . (Als weitere Methode zur Bestimmung von Massen wird in Kap. 2.2.7.5 die Hebelwaage beschrieben). Das Dynamometer begegnet uns in Kap. 6.1 als Federpendel, d. h. als schwingungsfähiges System wieder.

## 2.2.6 Druck (Kraft auf eine Fläche)

Die Schwerkraft greift an allen Masselementen eines Körpers an. Daneben gibt es Kräfte, die nur auf seine Oberfläche wirken, so die Kräfte, die ein Gas oder eine Flüssigkeit auf die Wände eines Gefäßes ausübt.

Wirkt eine Kraft vom Betrag  $F$  in senkrechter Richtung gleichmäßig auf eine Fläche  $A$ , so nennen wir den Quotienten aus  $F$  und  $A$  den Druck  $p$ :

$$p = \frac{F}{A} \quad (2-8)$$

mit der SI-Einheit  $\text{N m}^{-2} = \text{Pascal (Pa)}$ .

(In Tabelle 1.5 sind weitere Druckeinheiten zusammengestellt).

Nach Gl. (2-8) ist es also auch über eine Druckmessung (mit Manometern, siehe Kap. 5.3.2.2) möglich, Kräfte zu bestimmen.

In Kap. 5.3 bzw. 9 werden wir auf den Druck zurückkommen und zeigen, dass er zur Beschreibung makroskopischer mechanischer Eigenschaften von Flüssigkeiten ebenso wichtig ist wie als Zustandsgröße in der Wärmelehre.

Mit der physikalischen Erscheinung des Drucks haben wir täglich zu tun sei es, indem uns im Wetterbericht der Luftdruck (in Hektopascal, hPa) mitgeteilt wird, indem wir den Reifendruck (in atü) unseres Autos nachprüfen, oder indem uns der Arzt über unseren Blutdruck (in mm Hg) aufklärt. Für den Mediziner ist als diagnostisches Hilfsmittel neben der Kenntnis des Blutdrucks (Kap. 5.3.2.2) u. U. auch der Druck im Schädel (von Neugeborenen), im Auge, im Verdauungssystem, in der Blase usw. von Bedeutung.

**Beispiel Auge** Durch einen geringen Überdruck von 20 bis 25 mm Hg behält das Auge seine Kugelform. Die in ihm ständig produzierte Flüssigkeit (hauptsächlich Wasser, und zwar ca. 5 ml pro Tag) wird durch ein Drainagesystem abgeführt, so dass der Druck im Auge und damit dessen Form konstant bleibt. Erhöht sich z. B. durch Verstopfen des Drainagesystems der Druck im Innern des Auges, so kommt es zu einer Formveränderung, wobei bereits 0,1 mm Änderung des Augendurchmessers die Abbildungseigenschaften des Auges beträchtlich beeinflusst. Gemessen wird der Druck im Auge mit dem *Tonometer*, indem z. B. über einen Stempel von ca. 3 mm Durchmesser eine Kraft auf die Vorderseite der Hornhaut übertragen wird. Die Kraft  $F$ , die benötigt wird, um die Hornhaut unter der Stempelfläche vollständig abzuflachen, beträgt beim gesunden Auge ca. 0,02 N. Daraus resultiert für den Druck:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{0,02 \text{ N}}{(1,5 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2 \pi} = 2829 \text{ Pa} = 28,29 \text{ mbar} \\ = \rho_{\text{Hg}}gh = 21,22 \text{ Torr (mm Hg; Kap. 5.3.2.2)}.$$

Bei dieser Messung wird infolge der geringfügigen Deformation des Augapfels der Innendruck des Auges um ca. 0,5 Torr erhöht, was im Messwert mitenthalten ist.

## 2.2.7 Drehmoment

In Kap. 1.2.3 wurden die Bewegungsgrößen der Drehbewegung eingeführt. Nun ist nachzutragen, wodurch Drehbewegungen zustande

kommen. Aus Kap. 2.2.1 wissen wir bereits, dass die Ursache einer Translationsbeschleunigung die Kraft ist. Analog gilt:

Ursache einer Rotationsbeschleunigung ist das *Drehmoment*.

Am Ende einer als masselos angenommenen Stange (Abb. 2.3), die um die Achse O drehbar sei, befindet sich eine Masse  $m$ , an der eine Kraft  $\vec{F}$  angreift. Den Abstand  $r$  zwischen Drehpunkt und Angriffspunkt der Kraft nennt man den *Hebelarm*.

Das Produkt aus  $r$  und der Komponente der Kraft senkrecht zur Richtung des Hebelarms,  $F_{\perp} = F \sin \varphi$ , liefert den Betrag  $M$  des Drehmoments:

$$M = rF \sin \varphi, \text{ mit der SI-Einheit N m.} \quad (2-9)$$

Die Kraft  $F_{\perp}$  bewirkt eine Beschleunigung  $dv/dt$  der Masse längs eines Kreisbogens. Nach Gl. (1-21) ist  $v = r\omega$ , und daher erhalten wir:

$$M = rF_{\perp} = rm \frac{dv}{dt} = r^2 m \frac{d\omega}{dt} \quad (2-10)$$

Zur vollständigen Beschreibung der Drehung reicht der Betrag  $M$  nicht aus; man muss auch die Richtung der Drehachse und den Drehsinn kennen. Man fügt daher den Betrag von Gl. (2-9) und die Richtung der Achse zu einer gerichteten Größe, dem *axialen Vektor*  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , zusammen. (In entsprechender Weise sind wir in Kap. 1.2.3 mit Drehwinkel,

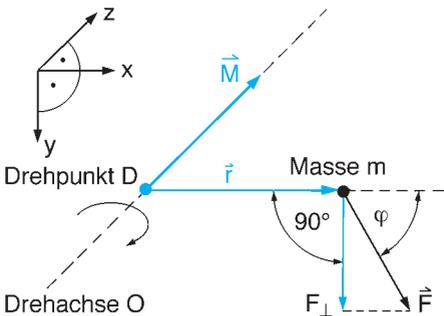


Abb. 2.3 Zur Definition des Drehmoments.

Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung verfahren.) Der Drehsinn ist folgendermaßen festgelegt: Blickt man in Richtung des axialen Vektors, so erfolgt die Drehung im Uhrzeigersinn.

### 2.2.7.1 Trägheitsmoment

Wir wissen bereits, dass ein Körper sich der Translationsbeschleunigung infolge seiner trägen Masse widersetzt. Entsprechendes gilt für die Rotationsbeschleunigung. Dabei wird aber die Trägheitswirkung nicht nur durch die Masse, sondern zusätzlich durch den Abstand  $r$  der Masse von der Drehachse bestimmt: Je weiter ein Massenelement von der Achse entfernt ist, um so mehr trägt es zum Beharrungsvermögen bei. Man kann experimentell nachprüfen, dass der Beitrag eines Massenelements mit dem Quadrat des Abstandes zunimmt. Für unser Beispiel in Abb. 2.3 nennen wir die Größe  $mr^2$  aus Gl. (2-10) das *Trägheitsmoment*  $J$ . Mit dieser Definition kommen wir zu einer Gleichung für  $\vec{M}$ , die der Gl. (2-2) bei der Translationsbewegung entspricht:  $\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ .

Einen ausgedehnten Körper können wir uns aus einer Vielzahl von Massenpunkten  $dm$  in verschiedenen Abständen  $r$  von der Drehachse zusammengesetzt denken. Folglich lässt sich dessen Trägheitsmoment als Integral darstellen:

$$J = \int r^2 dm \quad (2-11)$$

Auf das Trägheitsmoment kommen wir im Zusammenhang mit den Rotationsfreiheitsgraden eines zweiatomigen Moleküls in Kap. 10.3 zurück.

### 2.2.7.2 Kräftepaar

Nicht nur Körper mit einer festen Drehachse können Rotationen ausführen, sondern auch frei bewegliche. Dann genügt jedoch nicht eine einzelne von außen angreifende Kraft, vielmehr ist dazu ein Kräftepaar erforderlich (Abb. 2.4). Darunter verstehen wir zwei einander entgegengerichtete Kräfte von gleichem

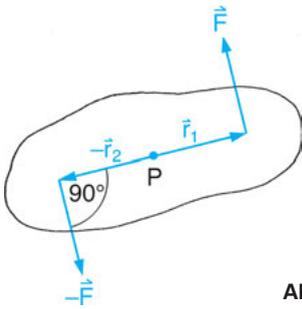


Abb. 2.4 Kräftepaar.

Betrag, deren Angriffspunkte nicht zusammenfallen, so dass man keine resultierende Kraft bilden kann. Der Körper dreht sich dann um eine auf der Verbindungslinie zwischen beiden Angriffspunkten liegende (freie) Achse  $P$ . Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Kräfte  $\vec{F}$  und  $-\vec{F}$  stünden senkrecht auf dieser Verbindungslinie (Abb. 2.4), so entstehen bezüglich  $P$  zwei Drehmomente und die Summe beider ergibt das resultierende Moment:  $M = M_1 + M_2 = r_1 F + (-r_2)(-F) = (r_1 + r_2) F$ .

### 2.2.7.3 Hebel

Eine um eine Achse drehbare Stange, an der zwei (oder mehrere) Kräfte angreifen, nennen wir einen *Hebel*. Liegt die Achse zwischen den Angriffspunkten der Kräfte, so heißt der Hebel *zweiarmlig* (Abb. 2.5a), liegt sie außerhalb beider Angriffspunkte, so ist er *einarmig* (Abb. 2.5b). Die Balkenwaage, die

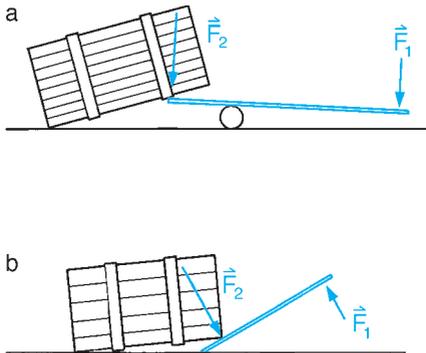


Abb. 2.5 Hebel: (a) zweiarmlig, (b) einarmig, (c) einarmige Hebelwirkung des menschlichen Arms (S: Schwerpunkt des aus dem Unterarm und der Masse  $m$  bestehenden Systems).

Schere und die Zange sind Beispiele für den zweiarmligen Hebel; der menschliche Unterarm dagegen (Abb. 2.5c) ist ein einarmiger Hebel.

Am Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn sich die angreifenden Drehmomente zu Null addieren, d. h.  $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$ .

Hieraus folgt das *Hebelgesetz*:

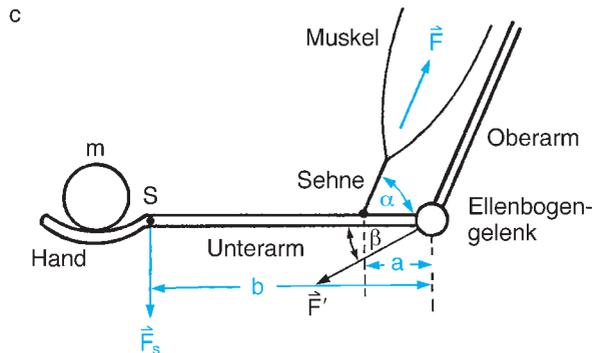
$$|\vec{M}_1| = F_1 r_1 \sin \varphi_1 = |\vec{M}_2| = F_2 r_2 \sin \varphi_2. \tag{2-12}$$

**Beispiel zur Skelett-Mechanik** Mit der Hebelwirkung des menschlichen Armes wollen wir ein Beispiel zur Skelettmechanik besprechen. Unterarm, Ellbogengelenk und Bizeps bilden einen einarmigen Hebel. Für diesen gilt das in Gl. (2-12) angegebene Hebelgesetz. Welche Kräfte und Gegenkräfte wirken nun, wenn dieser Hebel die Masse  $m$  in der Handfläche halten soll? Unterarm und Masse  $m$  wollen wir dabei gemeinsam als starren Körper ansehen, der sich unter dem Einfluss verschiedener Kräfte in waagerechter Stellung halten soll (Abb. 2.5c). Die Muskelkraft des Bizeps wird durch den Pfeil  $\vec{F}$  symbolisiert, sie greift im Abstand  $a$  vom Ellbogengelenk an.

Der Winkel zwischen der Richtung der Muskelkraft und der des Unterarms sei  $\alpha$ . Die resultierende Gewichtskraft von Unterarm und festgehaltener Masse  $m$  sei  $\vec{F}_s$ . Sie greift im Abstand  $b$  vom Ellbogengelenk am Schwerpunkt  $S$  an. Damit die Masse  $m$  festgehalten wird, ohne dass sich der Unterarm um das Ellbogengelenk dreht, müssen die von  $\vec{F}_s$  und  $\vec{F}$  erzeugten Drehmomente in bezug auf die Drehachse im Ellenbogengelenk dem Betrag nach gleich sein:

$$aF \sin \alpha = bF_s. \tag{2-13}$$

Aus Gl. (2-13) geht hervor, dass die näher beim Drehpunkt ansetzende Muskelkraft größer sein muss



als die weiter entfernt angreifende Gewichtskraft:

$$\frac{F \sin \alpha}{F_s} = \frac{b}{a}.$$

Da alle Gelenke einarmige Hebel darstellen, ist  $b$  stets größer als  $a$ , und so müssen von den Muskeln immer größere Kräfte als die von außen wirkenden Kräfte aufgebracht werden. Diese Tatsache führt neben der Belastung der Muskeln auch zu einer starken Beanspruchung der Sehnen, die diese Kräfte von den Muskeln auf die Knochen zu übertragen haben. Da die Muskelkraft unter dem Winkel  $\alpha$  am Unterarm angreift, erzeugt der Muskel neben der Vertikalkomponente, die die Gewichtskraft  $F_s$  kompensieren muss, auch eine Horizontalkomponente  $F \cos \alpha$ . Damit sich nun der Arm durch diese Horizontalkomponente nicht verschiebt, wird durch eine Kraftkomponente  $F'$  der Schultermuskeln vom Schultergelenk aus über den Oberarmknochen auf das Ellbogengelenk die Horizontalkomponente der Bizepskraft kompensiert. Aus Abb. 2.5c ergibt sich für diese Horizontalkompensation:

$$F \cos \alpha = F' \cos \beta. \tag{2-14}$$

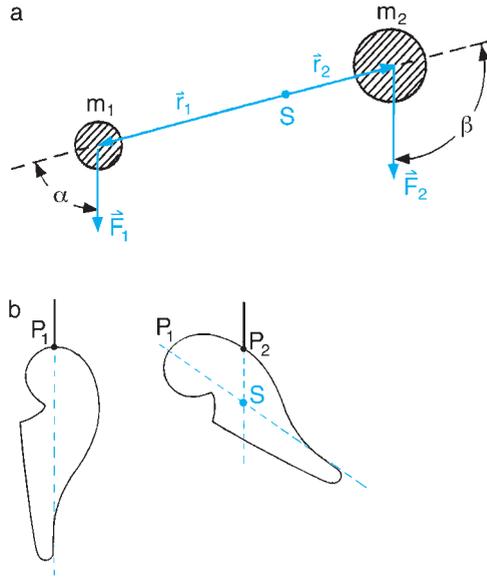
Da aber  $F'$  nun noch die Komponente  $F' \sin \beta$  parallel zur Schwerkraft  $F_s$  liefert, bedarf es zur Vertikalkompensation der Kräfte einer Muskelkraft  $F$ , die folgender zusätzlicher Bedingung genügen muss:

$$F \sin \alpha = F_s + F' \sin \beta. \tag{2-15}$$

Im Fall des Gleichgewichts, wenn also bei Belastung der Handfläche durch die Masse  $m$  diese sich nicht bewegt, müssen die zusammenwirkenden Kräfte  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}_s$  und  $\vec{F}'$  die drei in Gl. (2-13), (2-14) und (2-15) formulierten Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Ein komplizierter Vorgang, der durch entsprechende Regelautomatik im Körper ohne weiteres erreicht, uns aber selten bewusst wird. (Schon dieses einfache Beispiel zeigt, dass es schwierig ist, die Bewegungen von Gliedmaßen mit Prothesen nachzuahmen.)

### 2.2.7.4 Schwerpunkt

An jedem Massenelement eines starren Körpers auf der Erde greift die Gewichtskraft an. Legen wir durch den Körper eine Achse, so trägt jedes Massenelement ein Drehmoment bei, und im Allgemeinen wird sich dadurch der Körper drehen. Es existiert allerdings stets ein Punkt  $S$  derart, dass bezüglich jeder durch diesen Punkt verlaufenden Achse die Summe aller einzelnen Drehmomente Null wird, d. h. der Körper nicht gedreht wird. Diesen Punkt nennt man *Schwerpunkt* oder *Massenmittelpunkt* des starren Körpers.



**Abb. 2.6** (a) Zur Definition des Schwerpunkts. (b) Schwerpunktbestimmung.

Am Beispiel einer gewichtslosen Stange, an deren beiden Enden die Massen  $m_1$  und  $m_2$  befestigt sind (Abb. 2.6a), soll gezeigt werden, wie dieser Punkt bestimmt werden kann. Für die Drehmomente bezüglich einer durch  $S$  gehenden Achse muss nach dem Hebelgesetz der Gl. (2-12) gelten:

$$m_1 g r_1 \sin \alpha = m_2 g r_2 \sin \beta$$

und wenn  $\sin \alpha = \sin \beta$  ist (z. B. für  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ), gilt:

$$r_1 : r_2 = m_2 : m_1. \tag{2-16}$$

Der Schwerpunkt teilt also die Stange im umgekehrten Verhältnis der Massen. Der Schwerpunkt ist von besonderer Bedeutung, da bezüglich dieses Punktes die Newton'schen Axiome der Translationsbewegung auch für starre ausgedehnte Körper gelten.

Als experimentelles Verfahren zur Auffindung von  $S$  eines beliebigen starren Körpers bietet sich folgender Versuch an: Wir hängen den Körper nacheinander an zwei verschiedenen Punkten  $P_1$  und  $P_2$  frei auf (Abb. 2.6b). Die gestrichelte Verlängerung der Aufhängesehne geht jeweils durch den Schwerpunkt, also liegt  $S$  im Schnittpunkt beider Verlängerungen.

Der Schwerpunkt des Menschen liegt, verglichen mit dem von Tieren, sehr hoch (oberhalb der Körpermitte). Die aufrechte Haltung des Menschen mag zwar Ausdruck einer gewissen Überlegenheit gegenüber Vierbeinern sein, vom Standpunkt der Statik aus betrachtet scheint sie jedoch wenig effektiv, denn es bedarf einer komplizierten Regelautomatik, die eine Vielzahl von Muskelkräften miteinander koordiniert, um das Umkippen zu verhindern. Zum Ausruhen legt man sich hin, damit diese Gleichgewichtsautomatik abgeschaltet werden kann. Die Schlafhaltung der Vögel ist unter diesem Gesichtspunkt nur dadurch sinnvoll, dass ein im Schlaf überraschter Vogel schnell startklar sein muss.

### 2.2.75 Die Hebelwaage

Zur Präzisionsbestimmung von Massen dienen Drehmoment-Messer, d. h. *Waagen*, bei denen keine Kräfte (wie bei der Federwaage), sondern Drehmomente verglichen werden. Ihnen liegt das Hebelgesetz zugrunde.

An der *Balkenwaage* kann man das Messprinzip am leichtesten erkennen. Sie besteht aus einem zweiarmigen, in der Mitte drehbar gelagerten Hebel. An jedem Ende hängt eine Waagschale (Abb. 2.7). Der Unterstützungspunkt  $U$  des Balkens liegt oberhalb des Schwerpunktes  $S$  des Systems, so dass sich die Waage im stabilen Gleichgewicht (Kap. 2.2.7.6) befindet. Belasten wir beide Schalen mit den Massen  $m_1$  bzw.  $m_2$ , so kommen drei Drehmomente ins Spiel; und zwar das des rechten Balkenarms,  $M_1 = r_1 m_1 g \cos \beta$ , und das des linken Balkenarms,  $M_2 = r_2 m_2 g \cos \beta$ , und damit der Balken bei Abweichung vom Gleichgewicht nicht gleich ganz kippt, liegt der Schwerpunkt des Balkens unterhalb des Drehpunktes. Er wird bei einer Drehung auf einer Kreisbahn angehoben und liefert schließlich als drittes Drehmoment:  $M_3 = s m_B g \sin \beta$  ( $m_B$  ist die Gesamtmasse des Waagebalkens). Die Waage befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Vektor-Summe aller

Drehmomente gleich Null ist:  $\sum_i \vec{M}_i = 0$ ; oder, was im vorliegenden Fall gleichbedeutend ist:

$$g r (m_2 - m_1) \cos \beta = g s m_B \sin \beta. \tag{2-17}$$

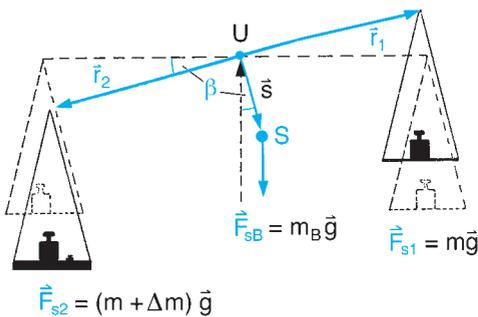
Aus dieser Gleichgewichtsbedingung erhalten wir den Winkel  $\beta$ , um den zur Einstellung der Gleichgewichtslage bei ungleicher Belastung ( $m_1 \neq m_2$ ) sich der Balken neigt:

$$\tan \beta = \frac{r(m_2 - m_1)}{s m_B}.$$

Heute kann man mit Präzisionswaagen Mikrogramme ( $\mu\text{g}$ ) noch auf einige Prozent genau messen. Bei solch genauen Wägungen muss man allerdings den Einfluss des Auftriebs (Kap. 5.3.2.2) durch die Luft auf Wägegut und Gewichtssteine berücksichtigen.

Im Labor verwendet man die einfache Analysewaage, wie sie in Abb. 2.7 skizziert ist, nur mehr selten. An ihre Stelle sind Typen von Analysewaagen getreten, die weniger erschütterungsempfindlich, schneller und einfacher abzulesen sind und zudem den Vorteil haben, dass ihre Empfindlichkeit unabhängig von der Belastung ist. Sie alle beruhen jedoch auf den Hebelgesetzen und speziell dem Gleichgewicht von Drehmomenten.

**Elektrische Wagen** Kleine Massen werden im Labor vornehmlich mit elektrischen Waagen gemessen (nicht zu verwechseln mit der Hebelwaage mit elektrisch-optischer Anzeige). Bei elektrischen Waagen erzeugt die zu messende Masse aufgrund ihrer Gewichtskraft über einen Hebelarm ein Drehmoment, das von dem Drehmoment einer stromdurchflossenen Spule, die in einem konstanten Magnetfeld hängt, kompensiert wird. Das Prinzip ist also dasselbe wie beim Drehspul-Messwerk (Kap. 16.1.1): Ein mechanisches Drehmoment befindet sich im Gleichgewicht mit dem durch Lorentz-Kräfte erzeugten Drehmoment. Bei Änderung der aufgelegten Masse muss der Strom, der durch die Spule fließt, nachgeregelt werden, bis die Kompensation der Drehmomente wieder erreicht ist. An diesem Beispiel zeigt sich ein üblich gewordenes Verfahren der modernen Messtechnik: Man wandelt jede physikalische Messung, sei es einer mechanischen, thermischen, akustischen, optischen oder kernphysikalischen Größe, in ein elektrisches Messsignal um, d. h. in eine Spannung oder einen Strom, um dieses dann geeignet anzuzeigen.



**Abb. 2.7** Hebelwaage (Der Abstand  $s$  zwischen Unterstützungspunkt  $U$  und Schwerpunkt  $S$  ist hier übertrieben groß gezeichnet).

### 2.2.7.6 Stabiles, indifferentes und labiles Gleichgewicht; Standfestigkeit

Ein ausgedehnter Körper ist in vollständigem Gleichgewicht, wenn nicht nur die Summe aller angreifenden Kräfte, sondern auch die Summe aller Drehmomente gleich Null ist.

Die Gleichgewichtsbedingung bezüglich Drehung wollen wir genauer betrachten. Da-

zu stellen wir uns vor, ein Körper sei drehbar gelagert. An jedem Massenelement greift die Gravitation an. Der Aufhänge- oder Unterstützungspunkt sei nun so gewählt, dass das daraus resultierende Drehmoment  $\sum_i \vec{M}_i$  Null ist. Wir können drei Fälle unterscheiden:

1. Wird der Körper aus seiner Ausgangslage geringfügig herausgedreht, und dreht sich dann von selbst wieder in diese zurück, so spricht man von *stabilem Gleichgewicht* in der Ausgangslage. Dann liegt der Unterstützungspunkt  $U$  über dem Schwerpunkt  $S$ .

2. Bleibt der Körper von selbst in der neuen Lage, dann nennt man das *indifferentes Gleichgewicht*. In diesem Fall fallen  $U$  und  $S$  zusammen.

3. Entfernt sich der Körper nach dem Loslassen weiter von der Anfangslage weg, dann ist das ein *labiles Gleichgewicht*.  $U$  liegt dann unter  $S$ . Die Bewegung kommt erst zur Ruhe, wenn das stabile Gleichgewicht erreicht ist,  $U$  also oberhalb  $S$  liegt.

Wird der Körper nicht in einem Punkt, sondern in einer Fläche, wie in Abb. 2.8 gezeigt, unterstützt, so ist für die *Standfestigkeit* des Körpers entscheidend, ob die senkrechte Projektion  $S'$  seines Schwerpunktes  $S$  auf die Unterstützungsfläche innerhalb der Standfläche  $A$  des Körpers liegt oder nicht. Liegt  $S'$  innerhalb  $A$ , so ist die Lage standfest (Abb. 2.8a), liegt  $S'$  aber außerhalb  $A$ , so wird der Körper unter dem Einfluss des Drehmomentes  $\vec{z} \times \vec{F}_R$  umkippen (Abb. 2.8b).

### 2.2.8 Impuls und Drehimpuls

Das Integral der Kraft über die Zeit hat eine besondere physikalische Bedeutung; wir nennen diese Größe *Impuls* (Kraftstoß). Lassen wir im infinitesimalen Zeitintervall  $dt$  die Kraft  $\vec{F}$  auf die Masse  $m$  wirken, dann erfährt sie den Impuls  $d\vec{p}$ :

$$d\vec{p} = \vec{F}(t) dt, \tag{2-18}$$

mit der SI-Einheit  $\text{kg m s}^{-1}$  oder  $\text{N s}$ .

Wirkt die Kraft während eines längeren Zeitintervalles, von  $t_1$  bis  $t_2$ , so erhalten wir als Impuls:

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt. \tag{2-19}$$

Der Betrag der Vektorgröße  $\vec{p}$  ist gleich dem Flächeninhalt der schraffierten „Fläche“ im Kraft-Zeit-Diagramm (Abb. 2.9). Aus dem Impuls ergibt sich umgekehrt durch Differentiation nach der Zeit wieder die Kraft. Die Kraft stellt also die Änderung des Impulses mit der Zeit dar:  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ .

Setzen wir Gl. (2-2) in (2-19) ein, so ergibt sich  $\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{a} dt$  und schließlich unter Verwendung von Gl. (1-16):

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt \quad \text{oder}$$

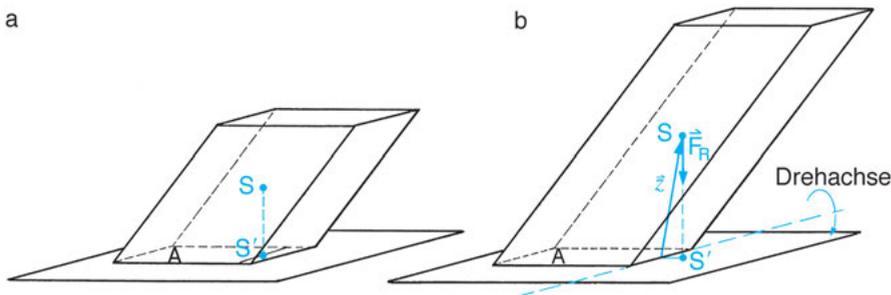
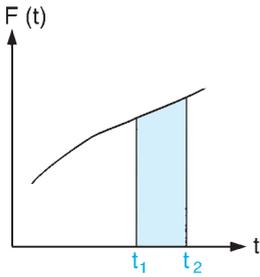


Abb. 2.8 Standfestigkeit: (a) standfest, (b) nicht standfest.



**Abb. 2.9** Kraft-Zeit-Diagramm. Der Betrag des Impulses ist gleich dem Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

$$p = \int_{\bar{v}_1}^{\bar{v}_2} m \, d\bar{v} = m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1). \quad (2-20)$$

Durch diesen Kraftstoß wird also der Bewegungszustand der Masse  $m$  geändert. Besaß nämlich die Masse  $m$  vor dem Kraftstoß die Anfangsgeschwindigkeit  $\bar{v}_1$ , dann werden infolge des Kraftstoßes i. a. sowohl Betrag als auch Richtung der Geschwindigkeit geändert, so dass die Endgeschwindigkeit  $\bar{v}_2$  beträgt. Der Gesamtimpuls der Masse  $m$  hat sich dabei um  $m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$  geändert.

Die dem Impuls der geradlinigen Bewegung entsprechende Größe der Drehbewegung ist der *Drehimpuls* (Drall)  $\bar{L}$ .

Aus der in Tab. 2.3 gezeigten Analogie von Translations- und Rotationsbewegungen können wir diese Größe für den um eine Achse rotierenden, starren Körper direkt angeben. Anstelle von  $m$ ,  $\bar{v}$  und  $\bar{F}$  treten  $J$ ,  $\bar{\omega}$  und  $\bar{M}$ , so dass sich für  $\bar{L}$  ergibt:

$$\bar{L} = J\bar{\omega}, \text{ mit der SI-Einheit N m s.} \quad (2-21)$$

Wie die Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$ , ist auch  $\bar{L}$  ein axialer Vektor.

### 2.2.9 Reibung

Versuchen wir, das erste Newton'sche Axiom im Experiment zu prüfen, so werden wir es zumeist nicht bestätigt finden. Vielmehr wird der bewegte „kräftefreie“ Körper mit der Zeit zur Ruhe kommen. Das liegt an der praktisch kaum völlig auszuschaltenden Reibung mit der Umgebung, wodurch die Bewegung gebremst wird. Das Newton'sche Axiom gilt nur für den idealisierten Fall einer Natur ohne Reibung, und das trifft ebenso für die meisten anderen Gesetze der Mechanik zu. Wenn wir im Folgenden Reibung durch Reibungskräfte beschreiben, so soll das nur ausdrücken, dass dadurch (Relativ)-Bewegungen gehemmt werden; vergrößert werden können sie durch solche Kräfte nicht.

**Tab. 2.3** Vergleich Translation – Rotation\*

Geradlinige Bewegung (Translation)	Kreisbewegung (Rotation)
Weg $\bar{s}$ (m)	Winkel $\bar{\varphi}$ (rad)
Geschwindigkeit $\bar{v} = \frac{d\bar{s}}{dt}$ (ms <sup>-1</sup> )	Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt}$ (rad s <sup>-1</sup> )
Beschleunigung $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2}$ (ms <sup>-2</sup> )	Winkelbeschleunigung $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2}$ (rad s <sup>-2</sup> )
Masse $m$ (kg)	Trägheitsmoment $J = \int r^2 \, dm$ (kg m <sup>2</sup> )
Impuls $\bar{p} = m\bar{v}$ (N s)	Drehimpuls $\bar{L} = J\bar{\omega}$ (N m s)
Kraft $\bar{F} = m\bar{a} = \frac{d\bar{p}}{dt}$	Drehmoment $\bar{M} = J \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\bar{L}}{dt}$ (N m)

\* Um von den Gesetzen der fortschreitenden Bewegung zu denen der Drehbewegung zu gelangen, setzt man anstelle von Kraft  $\bar{F}$ , Masse  $m$ , Wegstrecke  $\bar{s}$ , Geschwindigkeit  $\bar{v}$  und Beschleunigung  $\bar{a}$  die Größen Drehmoment  $\bar{M}$ , Trägheitsmoment  $J$ , Winkel  $\bar{\omega}$ , Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$  und Winkelbeschleunigung  $\frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2}$ .

Die Reibung beruht einmal darauf, dass selbst glatt erscheinende Flächen Rauheiten aufweisen, die sich beim Berühren verhaken können. Zum anderen wird sie durch die zwischen den Molekülen beider Flächen wirkenden Anziehungskräfte (Adhäsion, siehe Kap. 5.3.1) verursacht. Da diese nur auf kleine Entfernungen wirken, sind sie zwischen extrem glatten und ebenen, aufeinander liegenden Oberflächen besonders groß. (Daher haften z. B. zwei planpolierte Glasplatten fester aneinander als zwei aufgerauhte.) Man unterscheidet üblicherweise folgende Fälle von Reibung:

1. Reibung zwischen ruhenden Körpern (Haftreibung).
2. Reibung zwischen bewegten Körpern.
  - a) Gleitreibung auf fester Unterlage.
  - b) Rollreibung auf fester Unterlage.
  - c) Reibung in Flüssigkeiten und Gasen.

**Haftreibung**

Ein auf einer schiefen Ebene liegender Körper setzt sich erst dann in Bewegung, wenn die zur Ebene parallele Angriffskraft  $\vec{F}$  die *Haftreibungskraft*  $\vec{R}_0$  überwindet (Abb. 2.10). Experimente zeigen, dass  $\vec{R}_0$  von der Größe derjenigen Kraft  $\vec{N}$  abhängt, mit der der Körper senkrecht auf die Unterlage gepresst wird. Der Betrag von  $\vec{R}_0$  lässt sich darstellen als:

$$R_0 = \mu_0 N, \tag{2-22}$$

wobei wir die dimensionslose Konstante  $\mu_0$  als *Haftreibungszahl* bezeichnen.  $\vec{N}$  nennen wir die *Normalkraft*.

Kommen  $\vec{N}$  und  $\vec{F}$  wie in Abb. 2.10 durch die Schwerkraft  $\vec{F}_s$  zustande, so ist

$$N = F_s \cos \varphi \quad \text{und} \quad F = F_s \sin \varphi.$$

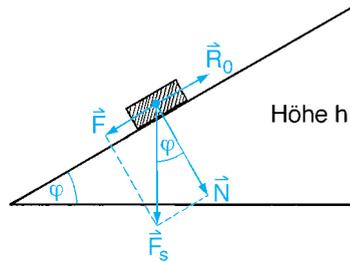
Für den Grenzfall, bei dem die Bewegung einsetzt, gilt:

$$\vec{R}_0 = -\vec{F}. \tag{2-23}$$

Somit erhalten wir aus Gln. (2-22) und (2-23)

$$\mu_0 F_s \cos \varphi = F_s \sin \varphi,$$

und für den speziellen Winkel, bei dem der



**Abb. 2.10** Haftreibung auf der schiefen Ebene.

Körper zu gleiten beginnt, den *Haftreibungswinkel*:

$$\mu_0 = \tan \varphi. \tag{2-24}$$

So paradox dies auch zunächst erscheinen mag, ist  $\vec{R}_0$  die Kraft, die uns beim Gehen vorwärts treibt. Beim Gehen drücken wir mit unseren Sohlen nämlich nach hinten gegen die Gehbahn, wodurch wir in der Berührungsfläche eine nach vorn gerichtete Haftreibungskraft hervorrufen, die uns fortbewegt. Wäre die Haftreibungskraft 0, die Bahn also glatt und rutschig, dann wäre  $\vec{R}_0 = 0$ , und wir könnten uns nicht vorwärts bewegen.

Auch das Auto wird durch Haftreibung, nämlich durch die der Reifen vorwärts getrieben. Wenn sie in Gleitreibung übergeht, ist das Fahrzeug nicht mehr zu steuern.

**Gleitreibung**

Ist die Haftreibung überwunden, so dass der Körper über die Auflagefläche gleiten kann, dann nimmt die Reibungskraft deutlich ab. Die *Gleitreibungskraft*  $\vec{R}_G$  ist entgegengesetzt gleich der Kraft, die dann erforderlich ist, um den Körper auf konstanter Geschwindigkeit zu halten (Kräftegleichgewicht). Auch hier zeigen Experimente, dass die Reibungskraft von der Normalkraft  $N$  mitbestimmt wird:

$$R_G = \mu N, \tag{2-25}$$

wobei  $\mu$  die *Gleitreibungszahl* darstellt ( $\mu < \mu_0$ ). Wie  $\mu_0$  ist auch  $\mu$  eine dimensionslose Zahl. Durch Verwendung von Schmiermitteln lassen sich  $\mu_0$  und  $\mu$  erheblich verringern.

**Rollreibung** Eine Kugel vermag leichter über die Unebenheiten einer Fläche hinwegzurollen als zu gleiten. Dabei haftet die momentane Auflagefläche infolge der Haftreibung fest an der Unterlage. Zur Beschreibung der Reibungseffekte beim Rollvorgang führt man die *Rollreibung* ein; sie ist kleiner als die Gleitreibung. Beim Kugellager, versetzt mit Schmierfett, ist die Rollreibung besonders gering. Die Vorgänge bei der Rollreibung werden dadurch kompliziert, dass eine Drehbewegung abläuft und Rolle und Unterlage wegen der kleinen Auflagefläche beim Abrollen verformt werden können.

### Reibung in Flüssigkeiten und Gasen

Wird ein Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas bewegt, so greift an ihm eine gegen die Bewegung wirkende Reibungskraft an, die von der Relativgeschwindigkeit

$\vec{v}$  des Körpers gegenüber der Umgebung abhängt. Bei kleinem  $\vec{v}$  gilt das einfache Gesetz, dass die Reibungskraft  $\vec{F}_R$  proportional zu  $\vec{v}$  wächst:

$$\vec{F}_R = -r \vec{v}. \quad (2-26)$$

Der *Reibungskoeffizient*  $r$  hat die SI-Einheit  $\text{kg s}^{-1}$ . Er hängt von den Eigenschaften des umgebenden Mediums und auch von der Form des Körpers ab. Das negative Vorzeichen in Gl. (2-26) weist darauf hin, dass  $\vec{F}_R$  der Bewegungsrichtung entgegengesetzt wirkt. Die Proportionalität zwischen Reibungskraft und Geschwindigkeit ist auch für die Beschreibung der Viskosität (Kap. 5.3.3.2.1) und der Sedimentation (Kap. 5.3.3.2.2) wichtig.

Bei hohen Geschwindigkeiten gilt Gl. (2-26) nicht mehr; dann wächst die Reibungskraft stärker als proportional zu  $\vec{v}$ .

## 3. Arbeit, Energie, Leistung

### 3.1 Ein Beispiel für den Begriff *Arbeit*

Wollen wir einen Körper entgegen der Schwerkraft  $\vec{F}_s = m\vec{g}$  um die Strecke  $d\vec{s}$  anheben, so müssen wir eine Gegenkraft  $\vec{F}$  aufwenden, die den Einfluss der Schwerkraft aufhebt.  $\vec{F}$  muss also  $\vec{F}_s$  entgegengerichtet sein, und ihr Betrag muss mindestens gleich dem von  $\vec{F}_s$  sein:  $|\vec{F}| \geq |\vec{F}_s|$ .

Gilt  $\vec{F} = -\vec{F}_s$ , dann befindet sich der Körper im statischen Gleichgewichtszustand, und wir können ihn durch einen beliebig kleinen Anstoß nach oben verschieben. Zur Beschreibung dieses Vorganges definieren wir als neue physikalische Größe die *Arbeit* und sagen:

Durch die Kraft  $\vec{F}$  wird gegen die Schwerkraft  $\vec{F}_s$  längs eines Weges eine Arbeit (*Hubarbeit*) verrichtet. Handelt es sich um ein infinitesimal (beliebig) kleines Wegstück  $d\vec{s}$ , so ist die Größe dieser Arbeit durch das Skalarprodukt aus der einwirkenden Kraft  $\vec{F}$  und dem Weg  $d\vec{s}$  gegeben:

kenden Kraft  $\vec{F}$  und dem Weg  $d\vec{s}$  gegeben:

$$dW = \vec{F} d\vec{s},$$

mit der SI-Einheit Joule (J) =  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ .

$$(3-1)$$

Wir haben für die Definition der Arbeit deshalb das Wegstück als beliebig klein angenommen, da wir dann die Kraft  $\vec{F}$  als eine entlang des Wegstückes  $d\vec{s}$  konstante Größe ansehen können, auch wenn sie sich längs eines größeren Weges  $\vec{s}$  ändert:  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s})$ . Die entlang eines endlichen Weges  $\vec{s}$  verrichtete Arbeit ist dann allgemein gegeben durch:

$$W = \int \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s}. \quad (3-2)$$

Als Skalarprodukt zweier Vektoren stellt  $dW$  eine skalare Größe dar, und gemäß der Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren (Anhang A3) können wir auch

**Rollreibung** Eine Kugel vermag leichter über die Unebenheiten einer Fläche hinwegzurollen als zu gleiten. Dabei haftet die momentane Auflagefläche infolge der Haftreibung fest an der Unterlage. Zur Beschreibung der Reibungseffekte beim Rollvorgang führt man die *Rollreibung* ein; sie ist kleiner als die Gleitreibung. Beim Kugellager, versetzt mit Schmierfett, ist die Rollreibung besonders gering. Die Vorgänge bei der Rollreibung werden dadurch kompliziert, dass eine Drehbewegung abläuft und Rolle und Unterlage wegen der kleinen Auflagefläche beim Abrollen verformt werden können.

### Reibung in Flüssigkeiten und Gasen

Wird ein Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas bewegt, so greift an ihm eine gegen die Bewegung wirkende Reibungskraft an, die von der Relativgeschwindigkeit

$\vec{v}$  des Körpers gegenüber der Umgebung abhängt. Bei kleinem  $\vec{v}$  gilt das einfache Gesetz, dass die Reibungskraft  $\vec{F}_R$  proportional zu  $\vec{v}$  wächst:

$$\vec{F}_R = -r \vec{v}. \quad (2-26)$$

Der *Reibungskoeffizient*  $r$  hat die SI-Einheit  $\text{kg s}^{-1}$ . Er hängt von den Eigenschaften des umgebenden Mediums und auch von der Form des Körpers ab. Das negative Vorzeichen in Gl. (2-26) weist darauf hin, dass  $\vec{F}_R$  der Bewegungsrichtung entgegengesetzt wirkt. Die Proportionalität zwischen Reibungskraft und Geschwindigkeit ist auch für die Beschreibung der Viskosität (Kap. 5.3.3.2.1) und der Sedimentation (Kap. 5.3.3.2.2) wichtig.

Bei hohen Geschwindigkeiten gilt Gl. (2-26) nicht mehr; dann wächst die Reibungskraft stärker als proportional zu  $\vec{v}$ .

## 3. Arbeit, Energie, Leistung

### 3.1 Ein Beispiel für den Begriff *Arbeit*

Wollen wir einen Körper entgegen der Schwerkraft  $\vec{F}_s = m\vec{g}$  um die Strecke  $d\vec{s}$  anheben, so müssen wir eine Gegenkraft  $\vec{F}$  aufwenden, die den Einfluss der Schwerkraft aufhebt.  $\vec{F}$  muss also  $\vec{F}_s$  entgegengerichtet sein, und ihr Betrag muss mindestens gleich dem von  $\vec{F}_s$  sein:  $|\vec{F}| \geq |\vec{F}_s|$ .

Gilt  $\vec{F} = -\vec{F}_s$ , dann befindet sich der Körper im statischen Gleichgewichtszustand, und wir können ihn durch einen beliebig kleinen Anstoß nach oben verschieben. Zur Beschreibung dieses Vorganges definieren wir als neue physikalische Größe die *Arbeit* und sagen:

Durch die Kraft  $\vec{F}$  wird gegen die Schwerkraft  $\vec{F}_s$  längs eines Weges eine Arbeit (*Hubarbeit*) verrichtet. Handelt es sich um ein infinitesimal (beliebig) kleines Wegstück  $d\vec{s}$ , so ist die Größe dieser Arbeit durch das Skalarprodukt aus der einwirkenden Kraft  $\vec{F}$  und dem Weg  $d\vec{s}$  gegeben:

kenden Kraft  $\vec{F}$  und dem Weg  $d\vec{s}$  gegeben:

$$dW = \vec{F} d\vec{s},$$

mit der SI-Einheit Joule (J) =  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ .

$$(3-1)$$

Wir haben für die Definition der Arbeit deshalb das Wegstück als beliebig klein angenommen, da wir dann die Kraft  $\vec{F}$  als eine entlang des Wegstückes  $d\vec{s}$  konstante Größe ansehen können, auch wenn sie sich längs eines größeren Weges  $\vec{s}$  ändert:  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s})$ . Die entlang eines endlichen Weges  $\vec{s}$  verrichtete Arbeit ist dann allgemein gegeben durch:

$$W = \int \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s}. \quad (3-2)$$

Als Skalarprodukt zweier Vektoren stellt  $dW$  eine skalare Größe dar, und gemäß der Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren (Anhang A3) können wir auch

schreiben

$$dW = |\vec{F}| |d\vec{s}| \cos(\vec{F}, d\vec{s}), \quad (3-3)$$

wobei  $(\vec{F}, d\vec{s})$  den Winkel zwischen den Richtungen von Kraft und Weg bedeuten soll. Also ist die Arbeit gleich dem Produkt aus dem Betrag des Weges und der Komponente der Kraft in Richtung des Weges.

Wird zum Beispiel der Körper wie in Abb. 2.10 (ohne Reibung) vom Fußpunkt einer schiefen Ebene bis in die Höhe  $h$ , also längs der Wegstrecke  $s = h/\sin \varphi$  verschoben, dann ist nach Gl. (3-2) die verrichtete Arbeit gegeben durch

$$W = \vec{F}\vec{s} = \frac{Fh}{\sin \varphi}, \quad (3-4)$$

## 3.2 Energieformen

In einem Körper, an dem die Arbeit  $W$  verrichtet wurde, ist das Vermögen aufgespeichert, selbst wieder Arbeit zu verrichten. Dieses Vermögen nennen wir *Energie*. Sie kann in verschiedenen Formen gespeichert werden, je nachdem gegen welche Kraft die Arbeit ausgeführt wurde. Ihre Einheit ist identisch mit der Einheit der Arbeit (Joule).

1. Bei der *Hubarbeit* verrichten wir entlang der Wegstrecke  $\vec{h}$  Arbeit gegen die Schwerkraft  $m\vec{g}$  eines Körpers. Das Vermögen, wieder Arbeit zu verrichten, bezeichnen wir als die

*potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  des Körpers*. Sie ist betragsmäßig gleich der verrichteten Hubarbeit:

$$E_{\text{pot}} = m\vec{g}\vec{h}. \quad (3-5)$$

Sie kann selbst wieder Anlass zur Verrichtung von Hubarbeit geben, z. B. wenn der Körper an ein Seil gehängt wird, das über eine Umlenkrolle läuft und eine am anderen Seilende befestigte kleinere Masse in die Höhe zieht.

wobei die Kraft  $\vec{F}$  die entlang der schiefen Ebene wirkende Komponente  $\vec{F}_s = \vec{F} \sin \varphi$  der Schwerkraft  $\vec{F}_s = m\vec{g}$  ist. Aus Gl. (3-4) ergibt sich somit:  $W = F_s h = mgh$ . Die Arbeit hängt also nur von der Schwerkraft des Körpers und der erreichten Höhe  $h$  ab und ist bei gleicher Höhe unabhängig von der Neigung  $\varphi$  der Ebene. Je steiler diese ist, um so größer ist zwar die erforderliche Kraft  $\vec{F}$ , aber um so kürzer ist der Weg  $\vec{s}$ .

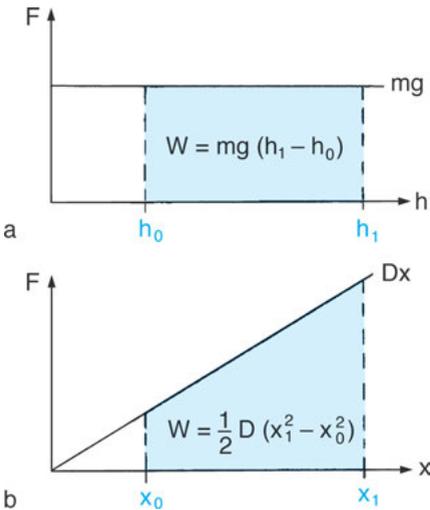
Als Sonderfall erwähnen wir noch, dass beim Halten eines Gegenstandes *keine* Arbeit verrichtet wird. Die Kraft  $\vec{F}$  einer eine Tasche haltenden Hand als Gegenkraft gegen die Schwerkraft (Gewichtskraft) der Tasche verursacht keine Verschiebung der Tasche, so dass  $d\vec{s} = 0$  und damit  $dW = 0$  gilt. Dass wir beim Halten eines schweren Gegenstandes tatsächlich ermüden, beruht darauf, dass der menschliche Körper kein starrer Körper im physikalischen Sinne ist, sondern es der Muskelanspannung bedarf, ihn aufrecht zu halten.

Wirkt eine Kraft auf ein Dynamometer (Kap. 2.2.5), so wird dessen Feder gestaucht oder gespannt, und dazu ist *Verformungs- oder Spannarbeit* nötig. Da für die Spannkraft  $F = Dx$  gilt, erhalten wir aus Gl. (3-2) für die Spannarbeit zur Dehnung der Feder von der Länge  $x_0$  auf die Länge  $x_1$ :

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_0}^{x_1} F dx = \int_{x_0}^{x_1} Dx dx = D \int_{x_0}^{x_1} x dx \\ &= D \frac{1}{2} (x_1^2 - x_0^2). \end{aligned} \quad (3-6)$$

Die Fläche  $W$  im *Kraft-Weg-Diagramm* (Abb. 3.1 b) führt also zur Erhöhung der potentiellen Energie der Feder, durch die sie bei Rückkehr in ihren unverformten, entspannten Zustand Arbeit verrichten kann (zum Beispiel wenn wir die gespannte Feder zum Anheben eines Gegenstandes verwenden).

Trägt man, in Analogie zum *Kraft-Zeit-Diagramm* (Abb. 2.9), die in Richtung des Weges wirkende Kraft auf der Ordinate und den Weg auf der Abszisse eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf, so ergibt sich ein *Kraft-Weg-Diagramm* (Abb. 3.1). Für den Fall der Hubarbeit ist diese Kraft (die Schwerkraft  $\vec{F}_s = m\vec{g}$ )



**Abb. 3.1** Kraft-Weg-Diagramm. (a) Hubarbeit, (b) Spannarbeit einer Feder.

praktisch konstant, deshalb ist die Hubarbeit zum Anheben der Masse  $m$  von der Höhe  $h_0$  auf die Höhe  $h_1$  gleich dem Wert der Rechteckfläche, also  $W = mg(h_1 - h_0)$  in Abb. 3.1 a. Dagegen ist für den Fall der Spannarbeit diese Kraft (die Spannkraft der Feder  $F = Dx$ ) proportional zur Auslenkung selbst, deshalb ist die Spannarbeit der Feder bei der Verformung von  $x_0$  auf  $x_1$  nicht durch eine Rechteckfläche im Kraft-Weg-Diagramm (wie bei der Hubarbeit) gegeben, sondern sie ist gleich dem Wert der schraffierten Fläche  $W = (1/2) D(x_1^2 - x_0^2)$  in Abb. 3.1 b.

2. Beschleunigen wir einen Körper durch die Kraft  $\vec{F}$ , so verrichten wir *Beschleunigungsarbeit* gegen die Trägheitskraft ( $\vec{F}_T = -\vec{F}$ ) des Körpers. Nehmen wir  $\vec{F}$  als konstant an, betrachten also einen geradlinig gleichförmig beschleunigten Körper, dann berechnen wir nach Gl. (2-2) und (3-2) die Beschleunigungsarbeit für die Beschleunigung  $\vec{a}$  längs der Strecke  $\vec{s}$  zu:

$$W = m\vec{a}\vec{s}. \tag{3-7}$$

Nach Gl. (1-29) ergibt sich hierfür  $W = m\vec{a} \frac{\vec{a}}{2} t^2$  und mit Gl. (1-28d):

$$W = \frac{m}{2} v^2, \tag{3-8a}$$

wobei  $v$  die Endgeschwindigkeit ist.

Den durch seine Bewegung bedingten Zuwachs an Energie des Körpers bezeichnen

wir als *kinetische Energie*  $E_{kin}$ . Sie ist gegeben durch:

$$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2. \tag{3-8b}$$

Für einen auf einer Kreisbahn bewegten Körper lässt sich die kinetische Energie nach der in Tab. 2.3 angegebenen Analogie zwischen Bewegungsgrößen der Translation und Rotation darstellen durch:

$$E_{kin} = \frac{J}{2} \omega^2. \tag{3-9}$$

Die kinetische Energie eines Körpers A kann zum Beispiel dazu verwendet werden, dass Körper A durch Stoß mit einem Körper B zur Ruhe kommt und durch diesen Stoß Körper B beschleunigt oder zerstört (also Beschleunigungsarbeit oder Zerstörungsarbeit verrichtet).

3. Verrichten wir *Reibungsarbeit* gegen eine Reibungskraft, indem wir etwa zwei Körper aufeinander verschieben oder Flüssigkeit durch ein Rohr pressen, so wird dabei auftretende Energie in komplizierter Weise zur Verrichtung von Zerstörungsarbeit und (oder) zum Erwärmen (Erzeugung von Wärmeenergie) der Körper oder der Flüssigkeit verwendet.

Die Arbeit des Herzens dient zur Überwindung der Reibungskraft im Gefäßsystem. Die Größe dieser Arbeit, die zur Aufrechterhaltung des Blutflusses und damit zur Versorgung der Gewebe erforderlich ist, wird in Kap. 5.3.2.2 berechnet.

Der Begriff Energie ist nicht auf die bislang erwähnten mechanischen Energien beschränkt; zum Beispiel begegnen wir in der Wärme- und Elektrizitätslehre anderen Energieformen. Wenn man betonen will, dass eine Energie ihre Ursache in Wechselwirkungen hat, dann spricht man in der Physik auch von *Wechselwirkungsenergie*; die wichtigsten Beispiele hierzu sind in Tab. 3.1 zusammengestellt.

**Äquivalenz von Masse und Energie** Eine folgenreiche Konsequenz der speziellen Relativitätstheorie ist die, dass Masse und Energie einander äquivalent sind. Anders ausgedrückt: Eine bestimmte Energiemenge, sei es

**Tab. 3.1** Wechselwirkungsenergien

Wechselwirkung	Partner der Wechselwirkung	relative Größe*	Reichweite der entsprechenden Kräfte
Gravitations-Wechselwirkung	schwere Massen	$10^{-38}$	groß
schwache Kern-Wechselwirkung	Elementarteilchen	$10^{-15}$	klein
elektromagnetische Wechselwirkung	elektrische Ladungen	$10^{-2}$	groß
starke Kern-Wechselwirkung	Nukleonen (Proton, Proton)	1	klein

\* bezogen auf starke Kern-Wechselwirkungen, am Beispiel zweier Protonen

kinetische oder potentielle Energie, Strahlungs- oder Kernenergie, entspricht einer bestimmten Masse, und umgekehrt entspricht die Masse eines Körpers einem bestimmten Energiebetrag.

Die *Masse-Energie-Äquivalenz* (von Einstein) wird ausgedrückt durch die Formel:

$$E = mc^2. \quad (3-10)$$

Dabei ist  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit und  $m$  die in Kap. 2.1 angegebene relativistische Masse:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Wir wollen versuchen, diese Äquivalenz plausibel zu machen: In Kap. 2.1 wurde erwähnt, dass bei der Beschleunigung eines Körpers ein Teil der aufzuwendenden Arbeit zugunsten der Erhöhung seiner Masse verloren geht. Das heißt, mit zunehmender Geschwindigkeit widersetzt sich ein Körper zunehmend weiterer Beschleunigung. Die Differenz zwischen der relativistischen Masse und der Ruhemasse des Körpers ist

$$\Delta m = m - m_0 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) m_0.$$

Wenn die Geschwindigkeit  $v$  des Körpers sehr viel kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c$  ist und damit  $v^2/c^2 \ll 1$ , dann gilt näherungsweise:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für  $\Delta m$  ein, so folgt:

$$\Delta m \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \frac{1}{c^2} \quad \text{oder} \quad \Delta m c^2 \approx E_{\text{kin}}, \quad \text{worin}$$

$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2$  die klassische kinetische Energie der Masse  $m_0$  ist. Die letzte Gleichung bedeutet aber, dass die kinetische Energie einem Massenzuwachs proportional ist (und umgekehrt).

Die Gl. (3-10) lässt sich jetzt in Worten auch folgendermaßen formulieren: Die Gesamtenergie  $E$  eines

bewegten Körpers setzt sich zusammen aus seiner Ruheenergie  $m_0 c^2$  und seiner kinetischen Energie  $\Delta m c^2$ , also  $E = m_0 c^2 + \Delta m c^2 = mc^2$ .

Es gibt vielfältige Möglichkeiten, Energie und Masse ineinander umzuwandeln. Wichtige Anwendungsbeispiele für Masse-Energie-Umwandlungen sind die Kernspaltung und Kernfusion (Kap. 21.2.9) sowie die Elektron-Positron-Vernichtung (Kap. 21.2.1). Ein Beispiel für den umgekehrten Prozess, d. h. die Umwandlung von Energie in Masse, ist die Paarbildung (Kap. 21.3.3).

**Energiequellen, -umwandlungen** Primär benötigt der Mensch Energiezufuhr, um die Arbeit seiner Organe aufrechtzuerhalten, Körperwärme zu erzeugen und mechanische Arbeit zu verrichten. Diese Energie bezieht er vornehmlich aus der Nahrung. Aus ihr entnimmt er, indem er die Nahrungsmittelmoleküle in einfachere Endprodukte zerlegt und die freiwerdende Bindungsenergie nutzt, ca. 17 kJ pro g Kohlehydrate oder Proteine und ca. 39 kJ pro g Fett. Die Energie, die für die Funktionsfähigkeit des menschlichen Körpers benötigt wird, beträgt pro Tag ca.  $10^7$  J. Diese Energiemenge ist freilich nicht zu vergleichen mit jener, die der moderne Mensch aufgrund anderer Bedürfnisse und Ansprüche tagtäglich verbraucht. Bei einem Bundesbürger z. B. machen die erwähnten  $10^7$  J nur ca. 2% seines täglichen Gesamtenergiebedarfs aus.

Um den ständig wachsenden Energiebedarf zu decken, werden heute viele neue Energiequellen genutzt bzw. hinsichtlich ihrer Wirtschaftlichkeit und Umweltverträglichkeit diskutiert. (Die allgemein übliche Bezeichnung *Energiequellen* ist irreführend, da es sich allemal nur um Umwandlungen unterschiedlicher Energieformen handelt.) Die

wichtigsten Energiequellen für Brauchenergie sind:

1. Chemische Energie	chemische Brennstoffzellen (z. B. Blei-Akku, Zinkchlorid-, Natrium-Schwefel-Batterien)	4. Strahlungsenergie	Solarstrahlung
2. Kernenergie	Kernspaltung und Kernfusion	5. Wärmeenergie	Verbrennung organischen Materials (Holz, Kohle, Öl, Gas), Wasserstoff-Verbrennung, Erdwärme, Temperaturunterschiede des Meeres
3. Mechanische Energie	Wasser, Wind	6. Reduzierung von Verlustenergie	Wärmedämmung und Nutzung von Abwärme.

### 3.3 Leistung, Wirkung

Im Zusammenhang mit der Einführung der Arbeit werden zwei davon abgeleitete Größen definiert, die *Leistung* und die *Wirkung*.

Den Differentialquotienten aus Arbeit und Zeit,

$$P = \frac{dW}{dt},$$

mit der SI-Einheit Watt (W) = kg m<sup>2</sup> s<sup>-3</sup> (3-11)

nennt man die *Leistung*.

(Weitere Einheiten sind in Tab. 1.5 angegeben). Wird eine konstante Arbeit  $W$  in der Zeit  $t = (t_2 - t_1)$  geleistet, so ergibt sich die Leistung als Quotient aus Arbeit und Zeit:

$$P = \frac{W}{t}. \quad (3-12)$$

Wird dieselbe Arbeit  $W$  in verschiedenen Zeitintervallen verrichtet, so ist die Leistung

um so größer, je kürzer die dazu benötigte Zeit ist.

Die Leistung der Muskeln kann mit *Ergometern* gemessen werden, wovon am bekanntesten das Fahrradergometer ist. Bei der Messung wird durch die Beinmuskulatur die gleiche Bewegung wie beim Radfahren durchgeführt. Am Rad des Ergometers kann durch einen Magneten eine Bremskraft  $F_B$  fest eingestellt werden; aus ihr und aus Drehzahl  $Z$  (Umdrehungen pro Sekunde) und Umfang des Rades  $U$  ergibt sich die von der Beinmuskulatur erbrachte Leistung:  $P = F_B Z U$ . Der Mensch kann Dauerleistungen bis 100 W und kurzzeitige Spitzenleistungen bis zu 1 kW erbringen. Tab. 3.2 enthält einige Beispiele zur Leistung.

Als *Wirkung* bezeichnet man das Integral der Arbeit über die Zeit:

$$\int W dt, \text{ mit der SI-Einheit J s.} \quad (3-13)$$

**Tab. 3.2** Beispiele zur Leistung

Kraftwerke	ca. 1000 Megawatt (MW)
Motoren (Flugzeug)	ca. 10 MW
(PKW)	ca. 100 kW
mittlerer Leistungsbedarf eines Bundesbürgers	ca. 6 kW
Glühlampen (ab dem 1. September 2012 Herstellungs- und Vertriebsverbot für >10 W)	ca. 100 W
LED (entspricht der Helligkeit einer 17 W Energiesparlampe oder der einer 75 W Glühlampe)	ca. 10 W
Mensch (Höchstleistung für einige s)	ca. 1 kW
(Dauerleistung: Gehen mit 5 km h <sup>-1</sup> )	ca. 70 W
Akustik (Sprechen)	ca. 10 μW
Grenze der Empfindlichkeit für Wärmestrahlungsdetektoren	ca. 1 pW
Hörschwelle des Ohres bei 1000 Hz	ca. 0,1 fW

Ist  $W$  während einer Zeitspanne  $t = (t_2 - t_1)$  konstant, so ergibt sich die Wirkung als Produkt aus Arbeit und Zeit:  $W t$ . Die Wirkung spielt in der Quantenphysik eine wesentliche Rolle; dort ist das *Planck'sche Wirkungsquantum*  $h = 6,63 \times 10^{24} \text{ J s}$  eine grundlegende Größe, auf deren Bedeutung in Kap. 17.4 und 17.5 näher eingegangen wird. Es hat sich gezeigt,

dass bei allen Naturvorgängen die Wirkung als diskontinuierliche, gequantelte Größe auftritt und stets ganzzahlige Vielfache von  $h$  annimmt.

**Anmerkung** Wie auch bei anderen physikalischen Größen stimmt die hier definierte Wirkung nicht mit der Bedeutung dieses Wortes in der Alltagssprache überein (siehe z. B. den Gebrauch des Wortes *Wirkung* in der Überschrift von Kap. 2.2).

## 4. Erhaltungssätze

Ein Teil der Naturgesetze kann in Form von *Erhaltungssätzen* für bestimmte physikalische Größen formuliert werden. Diese Sätze wurden durch Verallgemeinerung von Erfahrungen aufgestellt. Allgemein kann man die *Erhaltung* einer physikalischen Größe  $X$  (z. B. der Gesamtmasse verschiedener, miteinander chemisch reagierender Substanzen) folgendermaßen formulieren:

In einem abgeschlossenen System bleibt die Größe  $X$  zeitlich konstant, unabhängig davon, wie  $X$  in dem System in Einzelgrößen  $X_i$  aufgeteilt ist oder sich diese infolge irgendwelcher interner Vorgänge mit der Zeit ändern. Im Bereich der Mechanik gibt es drei Erhal-

tungssätze, nämlich für die Energie, für den Impuls und für den Drehimpuls. Beim Energieerhaltungssatz ist  $X$  eine skalare Größe, beim Impuls- und Drehimpulserhaltungssatz ist  $\vec{X}$  eine Vektorgröße, die sich als Vektorsumme aus den Einzelvektoren  $\vec{X}_i$  ergibt.

Erhaltungssätze für weitere physikalische Größen sind in der Kernphysik gefunden worden. Dazu gehören die Erhaltung der elektrischen Ladung und die Erhaltung der Gesamtzahl von Protonen und Neutronen. Einschränkungen bezüglich der Gültigkeit von Erhaltungssätzen sind an Beispielen aus der Kernphysik beobachtet worden, doch ist dies für die hier behandelte Physik ohne Bedeutung.

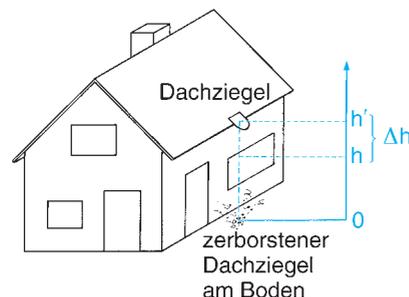
### 4.1 Energieerhaltungssatz

Einer der wichtigsten Sätze der Physik, der *Energieerhaltungssatz*, besagt: Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Alle verschiedenen Formen der Energie können sich aber ineinander umwandeln — wenn auch nicht immer vollständig, wie wir bei der Wärme in Kap. 12.3 sehen werden —, ohne dass in einem abgeschlossenen System die Summe aller Energien verändert wird.

**Freier Fall** Ein Dachziegel mit der Masse  $m$  besitzt auf dem Dach eines Hauses mit der Höhe  $h'$  (Abb. 4.1) gegenüber dem Boden die potentielle Energie  $mgh'$ . Fällt er herunter, so hat er bei der beliebigen Höhe  $h$  zwischen  $h'$  und dem Boden nur noch die poten-

tielle Energie  $mgh$ . Der Differenzbetrag  $E_{\text{pot}} = mg \Delta h$  entspricht genau der kinetischen Energie des Ziegels, die dieser durch freien Fall von  $h'$  nach  $h$  erhalten hat:

$$mg \Delta h = \frac{1}{2} mv^2. \quad (4-1)$$



**Abb. 4.1** Freier Fall eines Dachziegels.

Ist  $W$  während einer Zeitspanne  $t = (t_2 - t_1)$  konstant, so ergibt sich die Wirkung als Produkt aus Arbeit und Zeit:  $W t$ . Die Wirkung spielt in der Quantenphysik eine wesentliche Rolle; dort ist das *Planck'sche Wirkungsquantum*  $h = 6,63 \times 10^{24} \text{ J s}$  eine grundlegende Größe, auf deren Bedeutung in Kap. 17.4 und 17.5 näher eingegangen wird. Es hat sich gezeigt,

dass bei allen Naturvorgängen die Wirkung als diskontinuierliche, gequantelte Größe auftritt und stets ganzzahlige Vielfache von  $h$  annimmt.

**Anmerkung** Wie auch bei anderen physikalischen Größen stimmt die hier definierte Wirkung nicht mit der Bedeutung dieses Wortes in der Alltagssprache überein (siehe z. B. den Gebrauch des Wortes *Wirkung* in der Überschrift von Kap. 2.2).

## 4. Erhaltungssätze

Ein Teil der Naturgesetze kann in Form von *Erhaltungssätzen* für bestimmte physikalische Größen formuliert werden. Diese Sätze wurden durch Verallgemeinerung von Erfahrungen aufgestellt. Allgemein kann man die *Erhaltung* einer physikalischen Größe  $X$  (z. B. der Gesamtmasse verschiedener, miteinander chemisch reagierender Substanzen) folgendermaßen formulieren:

In einem abgeschlossenen System bleibt die Größe  $X$  zeitlich konstant, unabhängig davon, wie  $X$  in dem System in Einzelgrößen  $X_i$  aufgeteilt ist oder sich diese infolge irgendwelcher interner Vorgänge mit der Zeit ändern. Im Bereich der Mechanik gibt es drei Erhal-

tungssätze, nämlich für die Energie, für den Impuls und für den Drehimpuls. Beim Energieerhaltungssatz ist  $X$  eine skalare Größe, beim Impuls- und Drehimpulserhaltungssatz ist  $\vec{X}$  eine Vektorgröße, die sich als Vektorsumme aus den Einzelvektoren  $\vec{X}_i$  ergibt.

Erhaltungssätze für weitere physikalische Größen sind in der Kernphysik gefunden worden. Dazu gehören die Erhaltung der elektrischen Ladung und die Erhaltung der Gesamtzahl von Protonen und Neutronen. Einschränkungen bezüglich der Gültigkeit von Erhaltungssätzen sind an Beispielen aus der Kernphysik beobachtet worden, doch ist dies für die hier behandelte Physik ohne Bedeutung.

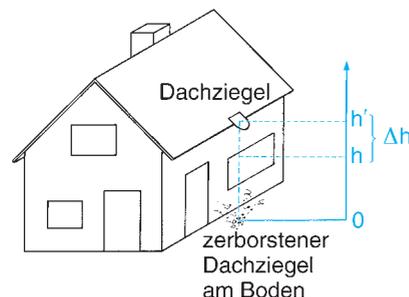
### 4.1 Energieerhaltungssatz

Einer der wichtigsten Sätze der Physik, der *Energieerhaltungssatz*, besagt: Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden. Alle verschiedenen Formen der Energie können sich aber ineinander umwandeln – wenn auch nicht immer vollständig, wie wir bei der Wärme in Kap. 12.3 sehen werden –, ohne dass in einem abgeschlossenen System die Summe aller Energien verändert wird.

**Freier Fall** Ein Dachziegel mit der Masse  $m$  besitzt auf dem Dach eines Hauses mit der Höhe  $h'$  (Abb. 4.1) gegenüber dem Boden die potentielle Energie  $mgh'$ . Fällt er herunter, so hat er bei der beliebigen Höhe  $h$  zwischen  $h'$  und dem Boden nur noch die poten-

tielle Energie  $mgh$ . Der Differenzbetrag  $E_{\text{pot}} = mg \Delta h$  entspricht genau der kinetischen Energie des Ziegels, die dieser durch freien Fall von  $h'$  nach  $h$  erhalten hat:

$$mg \Delta h = \frac{1}{2} mv^2. \quad (4-1)$$



**Abb. 4.1** Freier Fall eines Dachziegels.

Unmittelbar vor dem Aufprall auf den Boden ist die potentielle Energie Null; sie ist vollständig in kinetische Energie umgewandelt. Beim Aufprall des Ziegels mit der Geschwindigkeit  $v_{\max} = \sqrt{2gh'}$  wandelt sich seine kinetische Energie in Deformationsenergie und in Wärmeenergie um.

**Fadenpendel** Es stellt ein einfaches Beispiel für ein schwingungsfähiges System dar und wird in Kap. 6.1 eingehend behandelt. Hier soll es nur ein weiteres Beispiel für den Energieerhaltungssatz liefern. An einem (nahezu) masselosen Faden der Länge  $l$  hänge die Masse  $m$  (Abb. 4.2). Sie wird (bei gespanntem Ende) seitlich ausgelenkt und losgelassen. Durch den Faden wird anstelle eines freien Falles eine Bewegung der Masse längs einer Kreisbahn erzwungen. Am Punkt  $U$  ist ihre Momentangeschwindigkeit gleich Null. Danach wird sie auf die Nullmarke  $0$  hin beschleunigt. Dort ist ihre kinetische Energie am größten und nimmt auf dem Weg zum Umkehrpunkt  $U'$  wieder bis auf Null ab. Dabei wird sie angehoben, erhält also potentielle Energie gegenüber der Lage bei der Nullmarke. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch. Der Energieerhaltungssatz postuliert, dass während dieses Schwingungsvorgangs die Gesamtenergie  $E_{\text{ges}}$  konstant ist (das System wird hierbei als abgeschlossen betrachtet):  $E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{konst.}$  An den Umkehrpunkten der periodischen Bewegung (d. h. bei maximaler Auslenkung) ist  $v = 0$  und daher  $E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}}$ . Umgekehrt ist beim Durchgang durch die Nullmarke  $E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}}$ . Aus der Beziehung  $E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$  lässt sich ableiten (s. Kap. 6), dass sich die Bewegung der Masse vollständig (d. h. für alle Zeiten) beschreiben lässt, und dass Schwingungsvorgänge ganz allgemein den periodischen Wechsel zwischen verschiedenen Energieformen darstellen.

**Abgeschlossene und offene Systeme** Wird bei Energieumwandlungen ein Teil der Energie aus einem System nach außen abgegeben, oder wirken von außen Kräfte auf das System ein und verrichten dort Arbeit, so gelten für dieses System Erhaltungssätze natürlich

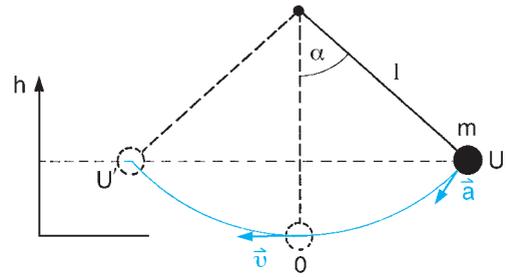


Abb. 4.2 Fadenpendel.

nicht. Ein solches System nennt man *offenes System*. Ein Beispiel: Bei der Verbrennung von Kohle wird u. a. chemische Energie auch in elektromagnetische Strahlung (Wärmestrahlung) verwandelt, da die Kohle zu glühen beginnt. Dabei geht der unmittelbaren Umgebung der brennenden Kohle Strahlungsenergie verloren. Umgekehrt ist ein *abgeschlossenes System* ein solches, das mit seiner Umgebung nicht in Wechselwirkung steht. In ihm ist die Gesamtenergie konstant. Allerdings gibt es kein vollständig abgeschlossenes System; man kann es aber näherungsweise realisieren, wenn man nur den Aufwand zur Isolierung des Systems weit genug treibt. Besonders im biologischen Bereich haben wir es mit ineinandergreifenden (also offenen) Systemen zu tun. Es ist geradezu ein Merkmal aller Lebewesen, dass sie in beständigem Austausch mit ihrer Umgebung stehen, wie schon der einfache Fall der Nahrungsaufnahme zeigt. Was bei den Lebewesen erhalten bleibt, sind nicht Massen und Energien, sondern bestimmte Strukturen und die damit verbundenen biologischen Möglichkeiten. Daher hat man für die Beschreibung biologischer Systeme den Begriff des *Fließgleichgewichts* geprägt. Er besagt, dass ein System sich in ständigem Austausch von Masse und Energie mit seiner Umgebung befindet, dabei aber sich selbst nicht verändert, sich also in einem Gleichgewicht befindet. Der Begriff des Fließgleichgewichts hat somit gewisse Ähnlichkeit mit den Erhaltungssätzen der Mechanik.

## 4.2 Impulserhaltungssatz

Zur Formulierung des Impulserhaltungssatzes betrachten wir ein am Seeufer liegendes Floß ( $m_1$ ) mit einem Schiffer ( $m_2$ ). Da sich das Floß samt Schiffer nicht bewegt ( $v_1 = v_2 = 0$ ) ist sein Gesamtimpuls Null:

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = 0.$$

Springt der Schiffer ans Ufer, dann stößt er sich mit der Kraft  $\bar{F}_2$  vom Floß ab und gleichzeitig erfährt das Floß einen Rückstoß ( $\bar{F}_1$ ) in entgegengesetzter Richtung. Nach dem 3. Newton'schen Axiom gilt:

$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$ . Integrieren wir über das Zeitintervall, in dem der Stoß erfolgt, so erhalten wir die beiden Kraftstöße (Impulse):

$$\int \bar{F}_1 dt = m_1 \bar{v}'_1 = - \int \bar{F}_2 dt = -m_2 \bar{v}'_2, \quad \text{bzw.} \\ m_1 \bar{v}'_1 + m_2 \bar{v}'_2 = 0. \quad (4-2)$$

d. h., auch nach dem Stoß ist der Gesamtimpuls Null. (Die gestrichelten Größen  $\bar{v}'_1$  bzw.  $\bar{v}'_2$  sind die Endgeschwindigkeiten nach dem Stoß.) Die Verallgemeinerung dieses Befundes führt zum *Impulserhaltungssatz*:

Bilden zwei oder mehrere Körper ein abgeschlossenes System (d. h. wirken auf sie nur wechselseitige Kräfte), so bleibt die Vektorsumme aller Impulse konstant.

### 4.3 Der Stoß als Beispiel für Energie- und Impulserhaltung

Als Anwendungsbeispiel für den Energie- und Impulserhaltungssatz wollen wir zwei Kugeln betrachten, die zentral aufeinanderstoßen. Wir nehmen an, sie bewegen sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte, so dass wir das aus diesen beiden Kugeln bestehende System als abgeschlossen ansehen können.

**Elastischer Stoß** Zunächst wollen wir voraussetzen, dass die Bewegungsenergien der Kugeln beim Stoß nicht bleibend in andere Energieformen, wie Verformungs- oder Reibungsenergie, umgewandelt werden. Einen solchen Stoß nennen wir *elastisch*.

Die beiden Kugeln mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  sollen vor dem Stoß die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1$  bzw.  $\vec{v}_2$  und danach  $\vec{v}'_1$  bzw.  $\vec{v}'_2$ , haben. Bewegen sich die Kugeln längs einer gemeinsamen Geraden (zentraler Stoß), so können wir mit den Geschwindigkeitsbeträgen rechnen. Aufgrund der beiden Erhaltungssätze schreiben wir für den Impuls:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (4-3)$$

und für die kinetische Energie:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad (4-4)$$

Durch Umformen und Einsetzen der beiden Gleichungen ineinander finden wir für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (4-5)$$

$$v'_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (4-6)$$

Wir wollen einige Sonderfälle diskutieren:

1. Sei  $m_1 = m_2$  und  $v_2 = 0$ . Dann ist  $v'_1 = 0$  und  $v'_2 = v_1$ . Die zweite Kugel, die vor dem Stoß

Auf diesem Erhaltungssatz beruht das Prinzip des Raketenantriebs. Stößt eine Rakete einen Teil ihrer Masse (den verbrannten Treibstoff) mit großer Geschwindigkeit durch Düsen nach hinten aus, dann bewegt sie sich mit ihrer Restmasse nach vorne. Im Welt- raum ist die Erzeugung von Rückstoß die einzige Möglichkeit, einen Körper zu beschleunigen.

geruht hat, fliegt also mit der Anfangsgeschwindigkeit der ersten Kugel fort, während diese liegen bleibt (Abb. 4.3). Das ist letztlich der Grund dafür, weshalb man in Kernreaktoren vornehmlich Wasser als Moderator (Kap. 21.2.9) benutzt (weil eben  $m_{\text{Neutron}} \approx m_{\text{Proton}}$  ist).

2. Sei  $m_1 = m_2$  und  $v_1 = -v_2$ , d. h., zwei gleich schwere Kugeln bewegen sich gleich schnell aufeinander zu. Nach dem Stoß sind dann die Geschwindigkeiten gerade vertauscht:  $v'_1 = v_2$  und  $v'_2 = v_1$ .

3. Sei  $m_1$  sehr viel kleiner als  $m_2$  (z. B. Stoß eines Neutrons gegen ein Bleiatom),  $m_1 \ll m_2$ , und sei  $v_2 = 0$ . Dann ist näherungsweise  $v'_2 = 2(m_1/m_2) v_1$ . Der von der schweren Kugel aufgenommene Impuls ist demnach  $2m_1 v_1$ , die aufgenommene Energie  $2(m_1^2/m_2) v_1^2$ . Beim elastischen Stoß eines Neutrons mit einem Bleiatom, dessen Masse das ca. 210fache der Neutronenmasse beträgt, übernimmt also das Bleiatom höchstens  $4/210$  der Energie des stoßenden Neutrons. Im Gegensatz zu Wasser ist Blei demnach nicht als Moderator- material in Kernreaktoren geeignet.

Ist die Masse  $m_2$  unendlich groß und  $v_2 = 0$ , dann ist ersichtlich, dass der durch  $m_2$  aufgenommene Impuls zwar  $2m_1 v_1$ , aber die aufgenommene Energie Null ist. Daher gilt  $v'_1 = -v_1$  und  $v'_2 = 0$ . Dieser Fall liegt vor bei der elastischen Reflexion eines Balles an einer Wand.

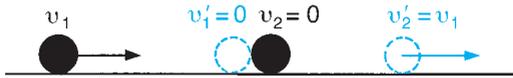
4. Ist stattdessen die Masse  $m_1 \gg m_2$  und  $v_2 = 0$ , so kann  $v'_2$  höchstens  $2v_1$  betragen. Beim Stoß eines  $\alpha$ -Teilchens gegen ein Elektron ( $m_\alpha : m_{\text{E}} = 4 \cdot 1836 : 1$ ) kann also höchstens  $1:1836$  der Energie des  $\alpha$ -Teilchens an das Elektron abgegeben werden.

**Inelastischer Stoß** Beim *inelastischen Stoß* wird ein Teil der kinetischen Energie der Kugeln in Verformungs-, Wärmeenergie usw. umgewandelt. Dann gilt zwar noch der Impulserhaltungssatz, Gl. (4-3), aber nicht der Energieerhaltungssatz, Gl. (4-4).

Für den speziellen Fall, dass, wie z. B. bei der in einen ruhenden Sandsack einschlagenden Kugel (Abb. 4.4), die Endgeschwindigkeit beider Massen gleich ist ( $v'_1 = v'_2 = v'$ ), hat der Impulserhaltungssatz die Form:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v'.$$

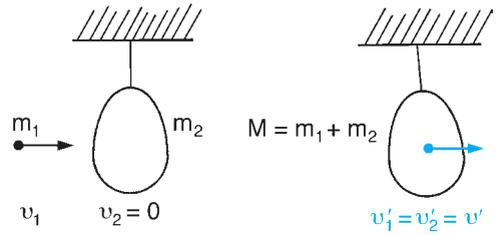
Nur in diesem Fall lässt sich die Geschwindigkeit nach dem Stoß ohne Benutzung des



**Abb. 4.3** Elastischer Stoß zwischen zwei gleichen Kugeln (Fall 1): schwarze Kugeln kennzeichnen die Position vor dem Stoß, gestrichelte Kugeln kennzeichnen die Position nach dem Stoß.

Energieerhaltungssatzes berechnen. Dessen Anwendung wäre ohne Zweifel schwierig, da wir den durch Zerstörungsarbeit im Sandsack bedingten Energieverlust nicht kennen.

Bei den meisten Stoßvorgängen liegt keiner der beiden besprochenen Extremfälle (elastischer bzw. inelastischer Stoß) vor, vielmehr wird meist ein Teil der Energie inelastisch umgewandelt, und dann ist es nötig, den Verformungsvorgang und die darin umge-



**Abb. 4.4** Inelastischer Stoß: (a) vor dem Stoß, (b) nach dem Stoß.

setzte Verformungsenergie mit zu berücksichtigen, wodurch das Problem zwar prinzipiell immer noch lösbar bleibt, praktisch aber sehr kompliziert wird.

### 4.4 Drehimpulserhaltungssatz

Analog zum Impulserhaltungssatz der Translationsbewegung formulieren wir für die Rotationsbewegung den *Satz von der Erhaltung des Drehimpulses*:

Wenn auf ein System mehrerer Körper keine Drehmomente von außen wirken (abgeschlossenes System), so bleibt der Gesamtdrehimpuls des Systems konstant (*erhalten*), gleichgültig, welche inneren Kräfte wirksam sind.

Jemand hat den Satz geprägt, dass Energie- und Drehimpulserhaltungssatz die Welt regieren. Die Bedeutung des Energiesatzes wurde bereits angesprochen. Auch für den Drehimpulssatz gibt es wichtige Beispiele: Weil der den Planeten bei ihrer Entstehung vermittelte Drehimpuls sich nicht ändert, kreisen diese unablässig auf Ellipsenbahnen um die Sonne (die Erde ungefähr 365 mal pro Jahr). Aus dem gleichen Grund dreht sich die Erde alle 24 Stunden einmal um ihre Achse, und im Bereich der Atome regelt der Drehimpulserhaltungssatz den Umlauf der Elektronen auf den stationären Bohr'schen Bahnen (siehe Kap. 17.4).

Wir können den Drehimpulserhaltungssatz mit dem *Drehschemel* veranschaulichen (Abb. 4.5). Auf dem um

seine vertikale Achse drehbaren Schemel sitzt eine Versuchsperson. Sie hält ein schweres, durch einen Motor angetriebenes Rad so, dass die Drehachse senkrecht steht. Solange der Motor nicht läuft, ist der Gesamtdrehimpuls des Systems gleich Null. Schaltet man den Motor ein, dann beginnt sich das Rad zu drehen, und es zeigt sich, dass der Schemel in eine der Drehrichtung des Rades entgegengesetzte Rotation versetzt wird. Aus dem Drehimpulserhaltungssatz folgt, dass die Drehimpulse bei der Bewegung entgegengesetzt gleich sein müssen, damit der Gesamtdrehimpuls wie vor dem Einschalten des Motors gleich Null bleibt. Aus demselben Grund müsste sich beim Starten eines Hubschraubers der Rumpf entgegen der Rotation der Rotorblätter zu drehen beginnen, was aber durch den kleinen Propeller am Schwanzende des Hubschraubers verhindert wird.



**Abb. 4.5** Zum Drehimpulserhaltungssatz.

# 5. Mechanische Eigenschaften von Stoffen

Zum Verständnis der mechanischen Eigenschaften von Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern ist die Kenntnis einiger ihrer atomaren Aufbau betreffender Grundlagen erforderlich.

In Abb. 5.1 ist vereinfachend dargestellt, wie sich Materie aus elementaren Bausteinen aufbaut. Elektrisch positiv geladene Protonen und elektrisch neutrale Neutronen werden durch extrem starke Kernkräfte zu *Atomkernen*

*nen* zusammengehalten. Im elektrischen Feld der positiven Kerne sind negativ geladene Elektronen gebunden, d. h., sie sind in begrenzten Raumbereichen um den Kern (Elektronenhülle) zu finden. Ihre Klassifikation nach *K-, L-, M- ... -Schalen* (Kap. 17.4) bedeutet, dass sich die Elektronen vornehmlich in Kugelschalen aufhalten, die den Bohrschen Bahnen entsprechen. Ihre weitere Klassifikation nach Symmetrien bedeutet,

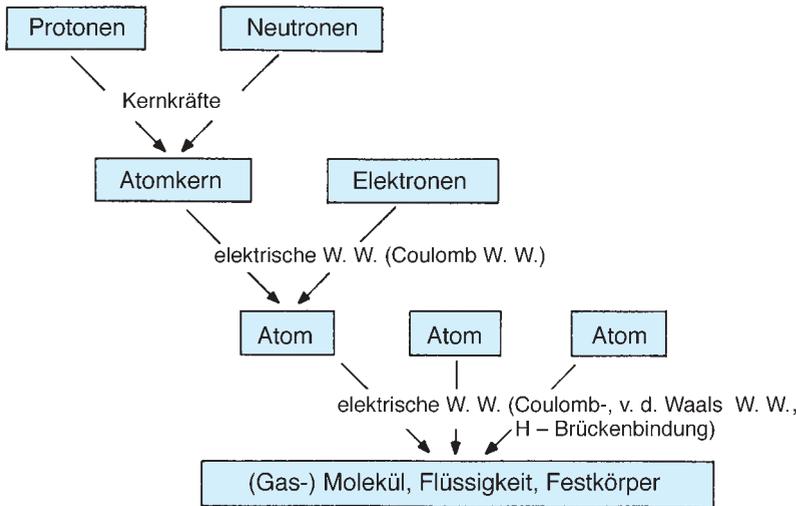


Abb. 5.1 Für den Aufbau der Materie verantwortliche Wechselwirkungen (W. W.).

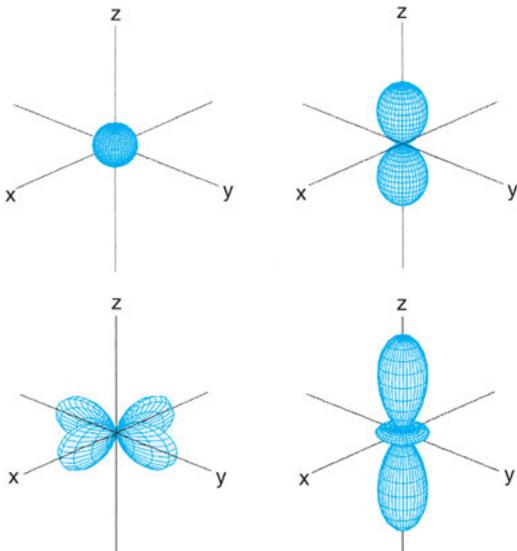


Abb. 5.2 Beispiele für Aufenthaltsbereiche (Orbitale) von Elektronen in der Elektronenhülle: s- und p-Orbitale (oben) zwei d-Orbitale (unten).

dass sich die Elektronen in  $s$ -,  $p$ -,  $d$ - ... Orbitalen (Abb. 5.2) aufhalten, wobei der von  $s$ -Elektronen ausgefüllte Raumbereich kugelsymmetrisch ist, und der von  $p$ -Elektronen keulenförmig. Kern und Hüllenelektronen bilden zusammen das *Atom*. Im Vergleich zum Durchmesser der Kerne (ca.  $10^{-15}$  m) sind die Raumbereiche der Hülle sehr groß (ca.  $10^{-10}$  m). Folgendes Beispiel liefert eine anschauliche Vorstellung von den Größenverhältnissen: Angenommen, der

Kerndurchmesser sei auf die Größe eines Stecknadelkopfes vergrößert, dann entspricht der im gleichen Maßstab vergrößerte Atomdurchmesser der Höhe des Kölner Doms. Den weitaus größten Teil des Volumens eines Atoms nimmt also die Elektronenhülle ein.

Um den Aufbau der Materie aus Atomen weiter zu verfolgen, wollen wir in Kap. 5.1 die Wechselwirkungskräfte, die zwischen verschiedenen Atomen und Molekülen wirken können, näher betrachten.

## 5.1 Wechselwirkungen zwischen Atomen und Molekülen

### 5.1.1 Bindungsarten

Normalerweise werden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten der *chemischen Bindung* mit Hilfe der Quantenmechanik beschrieben. Wir wollen hier versuchen, die aus der Quantenmechanik folgenden Ergebnisse bezüglich der chemischen Bindung im Rahmen der klassischen Physik anschaulich zu interpretieren.

Die Wechselwirkung zwischen Atomen, die zur chemischen Bindung führen, sind elektrischer Art, auch wenn man aufgrund der Tatsache, dass Atome nach außen hin elektrisch neutral sind, auf den ersten Blick eine Coulomb-Kraft nach Gl. (5-1) vom Betrage Null zwischen den Atomen erwarten sollte. Das Coulomb'sche Gesetz – wir werden es in Kap. 14.2.2 genauer kennenlernen –

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (5-1)$$

ist strenggenommen für punktförmige elektrische Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  gültig und außerdem für den Fall, dass  $q_1$  räumlich ausgedehnt, aber kugelförmig und  $q_2$  punktförmig ist. Gl. (5-1) gilt in guter Näherung auch noch für räumlich ausgedehnte Ladungen  $q_1$  und  $q_2$ , wenn der Abstand  $r_{12}$  zwischen  $q_1$  und  $q_2$  sehr groß gegenüber dem Durchmesser der Ladungsbereiche von  $q_1$  bzw.  $q_2$  ist. Bei nahe beieinander liegenden Atomen ist diese Näherung jedoch nicht erfüllt.

Zum Verständnis der *homöopolaren (kovalenten) Bindung* zweier Atome zu einem Molekül, bei der Elektronen (die wir auch als *Bindungselektronen* bezeichnen) nahezu im gesamten Raumbereich zwischen beiden Atomkernen  $K_A$  und  $K_B$  zu finden sind (Abb. 5.3), ist eine detaillierte Beschreibung der möglichen elektrischen Wechselwirkungen notwendig. Wir nehmen hierzu an, dass in den Volumenelementen  $\Delta V_1$  und  $\Delta V_2$  im Raum zwischen den Kernen  $K_A$  und  $K_B$  die Beträge der Elektronenladungen  $q_1$  bzw.  $q_2$  räumlich (und zeitlich) konstant seien. Diese Annahme lässt sich leicht durch Übergang zu beliebig kleinen Volumenelementen realisieren; außerdem erhalten wir dadurch die Gewissheit, dass  $q_1$  und  $q_2$  als nahezu punktförmig angenommen werden dürfen. Zur Beschreibung der elektri-

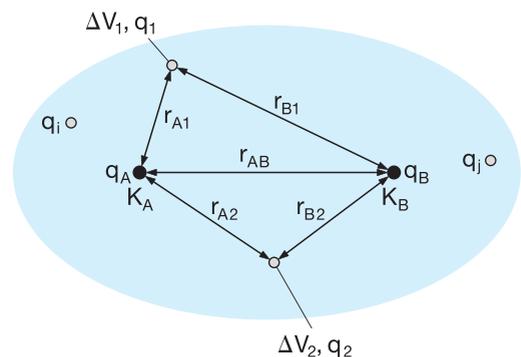


Abb. 5.3 Homöopolare (kovalente) Bindung.

schen Wechselwirkung zwischen  $q_1$  und  $q_2$  kann also wieder Gl. (5-1) verwendet werden. Die elektrischen Wechselwirkungen, d. h. die elektrischen Coulomb-Kräfte (Kap. 14.2.2), die insgesamt zur homöopolaren Bindung beitragen, lassen sich in Anziehungskräfte zwischen den positiven Kernladungen und den negativen Elektronenladungen, in Abstoßungskräfte zwischen den positiven Kernladungen und in Abstoßungskräfte zwischen den negativen Elektronenladungen aufgliedern.

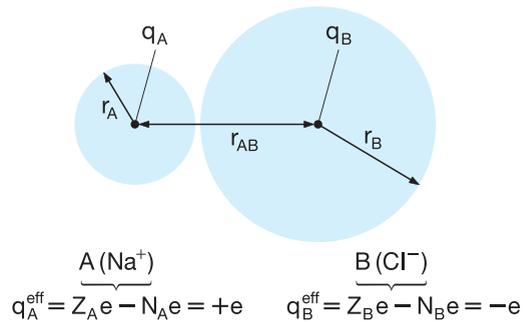
Zur Bestimmung der Gesamtbilanz der zur homöopolaren Bindung beitragenden elektrischen Kräfte ist es nun erforderlich, über alle Ladungselemente  $q_i$  bzw.  $q_j$  zu summieren. Ist die Summe aller Kräfte gleich Null, dann befindet sich das aus  $K_A$  und  $K_B$  und den im blau markierten Raumbereich befindlichen Elektronen bestehende Molekül im stationären Gleichgewichtszustand. Die homöopolare Bindung zwischen den beiden Atomen bewirkt dann den Gleichgewichtsabstand (*die Bindungslänge*)  $r_{AB}$ .

Da nach Abb. 5.2 die Aufenthaltsbereiche der Elektronen in bestimmten Raumrichtungen besonders ausgeprägt sein können, und damit elektrische Wechselwirkungen in diesen Richtungen wahrscheinlicher als in anderen sind, wird die kovalente Bindung oft auch als *gerichtete Bindung* bezeichnet.

Beispiele für vorwiegend kovalente Bindung finden wir in  $O_2^-$ ,  $N_2$ -Molekülen oder im Diamant zwischen den C-Atomen.

Die *metallische Bindung* und die z. B. bei aromatischen organischen Verbindungen (Benzol) auftretende  $\pi$ -Bindung resultiert ganz analog zur kovalenten Bindung aus der Überlagerung verschiedener Coulomb-Anziehungs- und -Abstoßungskräfte. Hierbei ist aber ein Teil der Elektronen (Leitungselektronen bzw.  $\pi$ -Elektronen) nicht mehr auf Raumbereiche nahe einzelner Kerne lokalisiert, sondern kann sich im gesamten Volumen des Metalls bzw. Moleküls aufhalten.

Die *ionogene (heteropolare) Bindung* beruht auf denselben elektrischen Wechselwirkungsmechanismen wie die kovalente Bindung, nur sind hier die Raumbereiche, in



**Abb. 5.4** Heteropolare (ionogene) Bindung. Beispiel:  $Na^+Cl^-$ , Ionenradius  $r_{Na^+} \approx 0,98 \cdot 10^{-10}$  m.  $r_{Cl^-} \approx 1,81 \cdot 10^{-10}$  m. Gleichgewichtsabstand:  $r_{Na^+Cl^-} \approx 2,80 \cdot 10^{-10}$  m.

denen sich die Elektronen der Bindungspartner A und B aufhalten, praktisch getrennt (Abb. 5.4). Die Bindungspartner haben Ladungen ausgetauscht und liegen nun als entgegengesetzt geladene Ionen vor, mit der formalen Ladung  $q_A^{\text{eff}} = (Z_A - N_A) e$  bzw.  $q_B^{\text{eff}} = (Z_B - N_B) e$ . Dabei bezeichnen  $Z_A$  ( $Z_B$ ) die Anzahl der Protonen im Kern A (B) bzw.  $N_A$  ( $N_B$ ) die Anzahl der Elektronen in der Hülle des Ions A (B);  $e$  ist der Betrag der Elementarladung eines Protons oder eines Elektrons.

Ein Beispiel für vorwiegend ionogene Bindung finden wir im  $Na^+Cl^-$ -Molekül. Das Bestreben neutralen Natriums ( $Na^0$ ), aus seiner äußersten Elektronenschale (*Valenzschale*) ein Elektron (*Valenzelektron*) an das neutrale Chlor ( $Cl^0$ ) abzugeben, und das Bestreben von  $Cl^0$ , dieses Valenzelektron aufzunehmen, ist in der Tatsache begründet, dass die Ablösearbeit (*Ionisationsenergie*) des Valenzelektrons von  $Na^0$  geringer ist als die Ablösearbeit eines der Valenzelektronen von  $Cl^-$ . Da die Anzahl der Elektronen in der Hülle von  $Na^+$  der des Edelgases Neon (Ne) und die Anzahl der Elektronen in der Hülle von  $Cl^-$  der des Edelgases Argon (Ar) entspricht, bezeichnet man die elektronische Anordnung (Konfiguration) von  $Na^+$  bzw.  $Cl^-$  auch als *Edelgaskonfiguration*.

Die Bindungen zwischen Edelgasatomen oder zwischen Molekülen in molekularen Festkörpern beruhen auf elektrischen Wech-

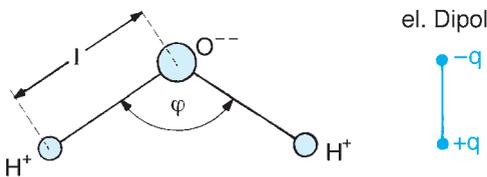
selwirkungen, die wir als *Van der Waals-Kräfte* bezeichnen. Sie entstehen durch elektrische Dipole, die durch Ladungsverschiebungen vorübergehend *induziert* werden. Wir können uns vorstellen, dass zwei Moleküle dadurch miteinander wechselwirken, dass der Dipol des ersten ein elektrisches Feld am Ort des zweiten Moleküls erzeugt, wobei dieses polarisiert und somit zum Dipol wird. Dadurch wirkt es seinerseits wieder auf das erste Molekül zurück. Hierbei erfährt das Molekül 1 eine Kraftwirkung in Richtung des Moleküls 2 und umgekehrt. Diese Kraft (Van der Waals-Kraft) ist umgekehrt proportional zur 7. Potenz des Abstandes zwischen den beiden Molekülen. Durch Vergleich der Abstandsabhängigkeit der beiden Kräfte

$$F \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{Coulomb-Kraft}$$

$$F \sim \frac{1}{r^7} \quad \text{Van der Waals-Kraft} \quad (5-2)$$

wird offensichtlich, dass die Reichweite der Van der Waals'schen Wechselwirkung bedeutend geringer ist als die der Coulomb-Kraft. Bei Van der Waals-Bindungen sind die Bindungslängen größer als typische ionogene Bindungslängen, die ca.  $2 \cdot 10^{-10}$  m betragen.

Wassermoleküle ( $H_2O$ ) besitzen wegen der speziellen räumlichen Anordnung der Atome von Wasserstoff und Sauerstoff nach Abb. 5.5 ein starkes *permanentes* elektrisches Dipolmoment. Zwischen benachbarten  $H_2O$ -Molekülen treten daher Wechselwirkungskräfte auf, die wie bei allen permanenten Dipolen proportional zu  $1/r^4$  sind.



**Abb. 5.5** Wasserdipol:  $l = 0,95 \cdot 10^{-10}$  m,  $\varphi = 104,5^\circ$ .

### 5.1.2 Molekulares Bild der Aggregatzustände

Die Erscheinungsformen der Materie untergliedert man in den festen, flüssigen und gasförmigen Zustand.

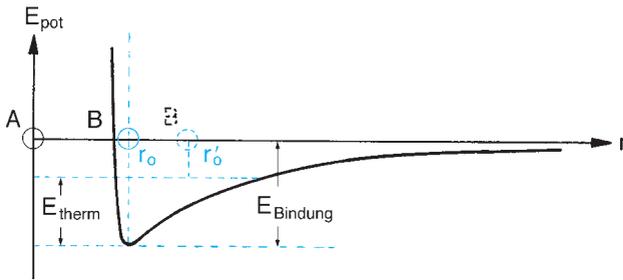
In dieser Reihenfolge nimmt die Festigkeit der Stoffe ab, die wiederum durch die Stärke der Bindungskräfte bedingt ist. Zuweilen zählt man auch den Plasmazustand (ionisierte Materie) und den Zustand superflüssigen (suprafluiden) Heliums zu den Aggregatzuständen.

Alle Bausteine der Materie, Moleküle, Atome und Ionen, befinden sich in ständiger unregelmäßiger Bewegung, der *thermischen Bewegung* (Kap. 10.2). Bei den Gasen bewegen sie sich aufgrund geringer Wechselwirkung untereinander in allen Richtungen gänzlich ungeordnet und zufällig im Raum. Die Atome fester Stoffe dagegen sind an feste Orte gebunden, um die sie Schwingungen ausführen. Die Flüssigkeiten nehmen eine Zwischenstellung ein, d. h., die Atome führen hier thermische Schwingungen aus, können sich aber zugleich über größere Entfernungen gegeneinander verschieben. Jeder Körper enthält also einen bestimmten Betrag an Energie der atomaren bzw. molekularen Bewegung, die je nach Aggregatzustand in unterschiedlichem Anteil aus Translations- und Schwingungsenergie besteht. Die Gesamtheit dieser Energie der *ungeordneten* Atom- oder Molekularbewegung ist ein Maß für die Wärmeenergie (thermische Energie) und für die Temperatur eines Stoffes (Kap. 8.1).

**Gas** Der Gaszustand eines Stoffes ist dadurch charakterisiert, dass die mittlere *thermische Energie* der Atome oder Moleküle ihre Bindungsenergie untereinander wesentlich übertrifft.

**Festkörper** Beim Festkörper liegt der umgekehrte Fall wie beim Gas vor: Die Bindungsenergie übertrifft die thermische Energie.

Als Bindungsenergie bezeichnen wir die Energie, die aufzubringen wäre, um zwei im Gleichgewichtsabstand  $r_0$  gebundene Atome (A und B) räumlich voneinander zu trennen



**Abb. 5.6** Potentialkurve  $E_{\text{pot}}(r)$ : Wechselwirkungsenergie zwischen zwei benachbarten Atomen bzw. Ionen (A und B) im Festkörper in Abhängigkeit vom gegenseitigen Abstand  $r$ . (Die thermische Energie  $E_{\text{therm}}$  und damit die Zunahme von  $r_0$  auf  $r'_0$  sind zur Veranschaulichung hier übermäßig groß gezeichnet.)

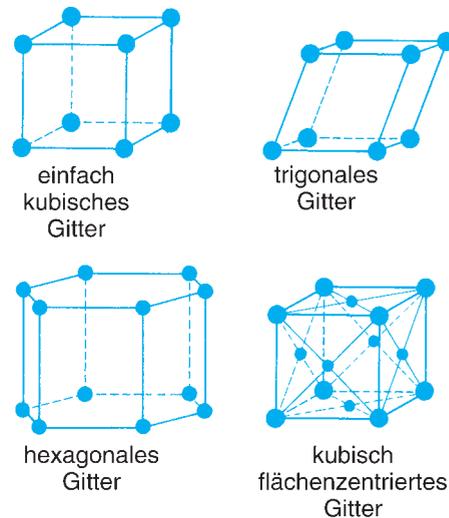
(Abb. 5.6). Dieser Gleichgewichtsabstand ist dadurch charakterisiert, dass sich anziehende und abstoßende Kräfte gegenseitig aufheben, die Atome also im Gleichgewicht sind. Diesem statischen Gleichgewicht entsprechen feste Orte  $r_0$  im Festkörper. Dem Gleichgewichtszustand überlagert ist aber immer die thermische Bewegung (Schwingung) der Atome, die zu periodischen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage  $r_0$  führt. Führt man dem Festkörper Wärmeenergie zu und erreicht diese den Wert der Bindungsenergie, dann wird die Auslenkung der thermischen Bewegung der Atome so groß, dass sie sich von den festen Orten  $r_0$  ablösen können, d. h., der Festkörper schmilzt. Wird dem Festkörper weniger Wärme ( $E_{\text{therm}}$  in Abb. 5.6) als für den Schmelzvorgang notwendig zugeführt, dann nimmt der Gleichgewichtsabstand zwischen A und B von  $r_0$  nur bis  $r'_0$  zu. Der Festkörper dehnt sich thermisch aus, schmilzt aber noch nicht.

Bei der Zusammenlagerung von vielen Atomen (bzw. Ionen) zu einem Festkörper (z. B.  $\text{Na}^+$  und  $\text{Cl}^-$  zu  $\text{NaCl}$ ) ordnen sich diese mit dem gegenseitigen Gleichgewichtsabstand  $r_0$  oft in einer regelmäßigen Struktur (Gitterstruktur oder Kristallstruktur) an. Für  $\text{NaCl}$  entsteht hierbei ein einfaches kubisches Gitter.

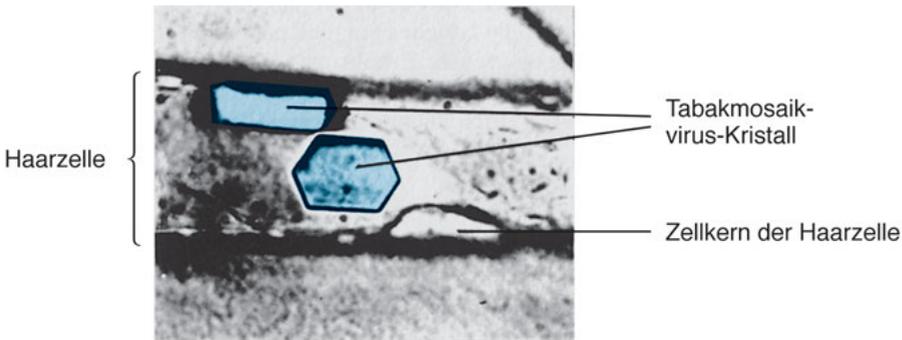
Je nach Art der Bindungskräfte kann die Anordnung der Atome im Kristallgitter auch in komplizierterer Form erfolgen. In Abb. 5.7 sind einige in der Natur häufig vorkommende Formen skizziert. Die Symmetrie der Anordnung bestimmt auch die äußere Gestalt von makroskopischen Kristallen. So ist die makroskopische Form etwa des Bergkristalls für die Art der mikroskopischen Bin-

dungskräfte charakteristisch. Freilich ist es ein seltener Ausnahmefall, dass die Kristallstruktur eines makroskopischen Festkörpers völlig regelmäßig ist. Man spricht dann von einem *idealen Einkristall*. Viel häufiger setzen sich Festkörper aus vielen kleinen, unterschiedlich orientierten einkristallinen Bereichen zusammen (*polykristalliner Zustand*).

**Makromoleküle — Polymere** Von der Art der atomaren Bausteine und von der Anzahl und Orientierung kovalenter Bindungen hängt es ab, ob Atome bei der Bildung organischer Verbindungen sich zu *Monomeren* oder *Polymeren* zusammenlagern. Unter einem Monomer verstehen wir die molekulare Einheit, das einzelne Molekül. Es kann als



**Abb. 5.7** Symmetrien von Kristallgittern (die Punkte stellen Gleichgewichtslagen der nächst benachbarten Atome dar; der makroskopische Kristall entsteht durch Aneinanderfügen von sehr vielen dieser Elementarzellen.)



**Abb. 5.8** Hexagonaler Kristall des Tabakmosaikvirus (Länge 15  $\mu\text{m}$ ) in einer Haarzelle eines Tabakblattes. Links oben ein weiterer Kristall in Seitenansicht. (Für die lichtmikroskopische Aufnahme danken wir Herrn Prof. Dr. C. Wetter).

*Makromolekül* beträchtliche Ausmaße haben (Myoglobin mit ca. 2500 und Hämoglobin mit ca. 10000 Atomen). Ein Polymer entsteht durch Aneinanderreihung vieler *Monomere* (z. B. Polyäthylen  $(\text{CH}_2)_m$ , wobei der Index  $m$  bedeutet, dass insgesamt  $m$   $(\text{CH}_2)$ -Moleküle aneinandergelagert sind).

Außerdem besteht die Möglichkeit, dass Makromoleküle in einem makromolekularen Festkörper auskristallisieren (Abb. 5.8). In den monomeren Makromolekülen wie in den Polymeren können neben geordneten auch ungeordnete Strukturen auftreten. Im Hämoglobinmolekül zum Beispiel sind Teile der Aminosäurekette mit Schrauben- bzw. Knäu-

el-Strukturen bekannt. Kohlenwasserstoff-Verbindungen als Hochpolymere können wie im Fall des vulkanisierten Kautschuks geordnete Raumstrukturen oder wie im Fall von Plexiglas unregelmäßige (amorphe) Strukturen bilden.

**Flüssigkeiten** In Flüssigkeiten sind Atome oder Moleküle gegeneinander verschiebbar, und daher kann sich im Allgemeinen keine regelmäßige Kristallstruktur aufbauen. (Ausnahmen sind Flüssigkeitskristalle wie Cholesterole). Nur in unmittelbarer Umgebung eines Atoms besteht noch eine gewisse Regelmäßigkeit (*Nahordnung*). Während die Dichte von

**Tab. 5.1** Einige typische Eigenschaften von Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern

	Gas	Flüssigkeit	Festkörper
Dichte in $\text{kg m}^{-3}$	Luft ca. 1,3	$\text{H}_2\text{O}$ ca. 1000	Stahl 7900
Ordnung	keine Ordnung	Nahordnung; große Schwankungen der Molekülabstände um einen Mittelwert $r_0$	Regelmäßige Struktur (Kristallgitter); geringe Abstandsschwankungen infolge thermischer Bewegung
Form	nicht formbeständig	nicht formbeständig (falls dünnflüssig); formbeständig (falls zähflüssig, z. B. Glas)	formbeständig
Energiebilanz	thermische Energie größer als Bindungsenergie	thermische Energie ausreichend zur Verschiebung der Atome gegeneinander	thermische Energie klein gegen Bindungsenergie

Gasen bei normalem Luftdruck um mehrere Größenordnungen unter der von Festkörpern liegt, sind in der Flüssigkeit die Atome ähnlich dicht gepackt wie im festen Zustand. Daher kostet es ähnlich viel Energie wie im Festkörper, ihren gegenseitigen Abstand zu verändern. In manchen Flüssigkeiten können die Atome oder Moleküle leicht gegeneinander verschoben werden. Wir können z. B. Wasser aus einem Gefäß ausschütten. In anderen Flüssigkeiten, zu denen Glas oder Teer gehören, ist dies bei Raumtemperatur hingegen praktisch nicht möglich. Dennoch zeigt das völlige Fehlen einer kristallinen Struktur an, dass es sich auch bei diesen Stoffen um Flüssigkeiten mit *amorpher* Struktur handelt.

Erhöht man die Temperatur einer Flüssigkeit soweit, dass die thermische Bewegungsenergie eines Atoms größer wird als die wechselseitige Bindungsenergie mit seinen Nachbarn, so kann es sich von seinen Nachbarn lösen und sich beliebig weit entfernen. Die Flüssigkeit geht in den dampfförmigen (gasförmigen) Zustand über.

In Tab. 5.1 sind einige Eigenschaften der drei Aggregatzustände zusammengestellt.

**Nanomaterie** Die drei Aggregatzustände sind nicht scharf voneinander getrennt. Die *Nanomaterie* bildet den Übergangsbereich von Atom und Molekül zur kondensierten Materie, d. h. zur Flüssigkeit und zum Festkörper.

*Kondensierte Materie* besteht aus einer Zusammenlagerung von vielen Atomen oder Molekülgruppen. Ein Würfel Gold von  $1\text{ cm}^3$  Volumen enthält die fast unvorstellbare Zahl

von etwa  $10^{23}$  Atomen. Da ist es ziemlich unwichtig für die physikalischen Eigenschaften etwa von Festkörpern, ob man 10 oder 10 000 Atome hinzufügt oder entfernt. In einem solchen *makroskopischen* Maßstab sind Materialeigenschaften, wie die Dichte, die elektrische Leitfähigkeit, die spezifische Wärme, die Farbe usw. unabhängig von der speziellen Größe eines Probenstücks.

Seit etwa 150 Jahren sind in der Forschung und bei technischen Anwendungen folgende Fragen zunehmend wichtig geworden: Gibt es Materie, die, verglichen mit  $10^{23}$ , nur aus wenigen Atomen aufgebaut ist? Wenn ja, welche Eigenschaften hat sie? Die vor diesem Hintergrund durchgeführten Untersuchungen haben zur Entdeckung und Entwicklung völlig neuartiger Materialien, der *Nanomaterie*, geführt. Ihre Anwendung durch die *Nanotechnologie* (Kap. 5.4) wird zunehmend wichtiger. Nanomaterie kann sowohl in der Natur vorkommen als auch künstlich hergestellt werden. So konnten die Römer bereits Gläser rubinrot färben, weil *Gold-Nanopartikel* (Durchmesser  $\approx 20\text{ nm}$ ) im Glas diesem eine dunkelrote Farbe (*Goldrubin*) verleihen. Gold in makroskopischen Mengen ist dagegen gelb. Lässt man den Durchmesser der Gold-Nanopartikel auf  $100\text{ nm}$  anwachsen, so geht die Farbe von Rot in Blau über. Ein Beispiel zur Veranschaulichung: 1000 solcher  $20\text{ nm}$ -Gold-Nanopartikel aneinandergereiht entsprechen der Dicke eines  $20\text{ }\mu\text{m}$  starken Haares. Einzelne  $20\text{ nm}$  große Nanopartikel bestehen aus einigen hunderttausend Atomen,  $2\text{ nm}$  große nur aus etwa 250 Atomen.

## 5.2 Makroskopische mechanische Eigenschaften von Festkörpern

### 5.2.1 Homogene Körper

Wir bezeichnen einen Körper als *homogen*, wenn seine Dichte und chemische Zusammensetzung als konstant über den gesamten Volumenbereich, den der Körper ausfüllt, anzusehen sind. Um das Ausmaß

eines homogenen Körpers, seine Menge, zu beschreiben, können wir uns verschiedener Größen bedienen, zum Beispiel der Masse des Körpers, seines Volumens, seiner Teilchenanzahl, seiner Stoffmenge oder *molaren Masse*. Als auf das Volumen bezogene Mengengrößen (Dichten) ver-

wenden wir die *Massendichte* (Gl. (2-1)) mit der Einheit  $\text{kg m}^{-3}$  (Tab. 2.2), die *Teilchenzahldichte* mit der Einheit  $\text{m}^{-3}$  und die *Stoffmengendichte* (Stoffmenge pro Volumen) mit der Einheit  $\text{mol m}^{-3}$ . Beispiel für eine auf die Stoffmenge bezogene Größe ist das molare Volumen mit der Einheit  $\text{m}^3 \text{mol}^{-1}$ .

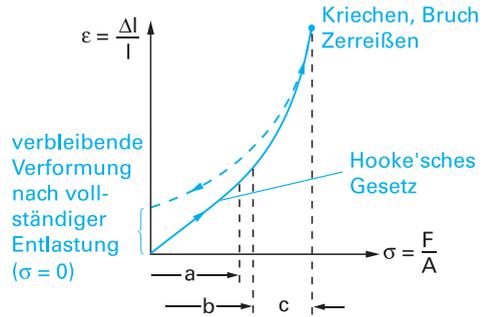
Bei homogenen Stoffen lassen sich die mikroskopischen Strukturen und Bindungsverhältnisse an makroskopischen Proben untersuchen und durch makroskopische Stoffeigenschaften (Elastizitätsmodul, Viskosität usw.) beschreiben.

### 5.2.2 Verformung von festen Körpern unter dem Einfluss von Kräften

Im molekularen Bild zeigte sich, dass sich jeder Körper verformen muss, wenn äußere Kräfte einwirken, da dadurch das Kräftegleichgewicht zwischen den Atomen gestört wird, und diese neue Gleichgewichtslagen einnehmen müssen. Aus der Potentialkurve der Abb. 5.6 geht hervor, dass Kompression eines Festkörpers nur in geringem Maße möglich ist, weil dabei die potentielle Energie sehr steil ansteigt. Im Vergleich dazu kann ein Körper relativ weit gedehnt werden, bis er zerstört wird (Bruch, Zerreißen), weil bei Dehnung die Potentialkurve flach verläuft. Die an makroskopischen Körpern beobachtbaren Verformungen und einige ihrer Prüfverfahren sollen im Folgenden zusammengestellt werden.

**Dehnung** Ein an einer Seite eingespannter Stahldraht werde durch eine äußere Kraft belastet. Dadurch wird seine Länge  $l$  um  $\Delta l$  gedehnt, und wir können das im *Spannungs-Dehnungs-Diagramm* der Abb. 5.9 skizzierte Verhalten beobachten.

Für kleine Verformungen  $\Delta l$  besagt das *Hooke'sche Gesetz*, dass die relative Längenänderung (Dehnung)  $\epsilon = \Delta l/l$  der verformenden Kraft  $F$  direkt proportional



**Abb. 5.9** Spannungs( $\sigma$ )-Dehnungs( $\epsilon$ )-Kurve. (a) Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes, (b) elastischer Bereich, (c) plastische Verformung.

und der Querschnittsfläche  $A$  des Drahtes umgekehrt proportional ist. Die Proportionalitätskonstante nennt man üblicherweise  $1/E$ , wobei wir  $E$  als den *Elastizitätsmodul* mit der Einheit  $\text{N m}^{-2}$  bezeichnen:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{A} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = E \cdot \epsilon. \quad (5-3)$$

Das Hooke'sche Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung  $\sigma$ , Dehnung  $\epsilon$  und Elastizitätsmodul  $E$ . Dieses Gesetz ist uns in anderem Zusammenhang (beim Federpendel) bereits in Kap. 2.2.5 begegnet.

Die durch Dehnung verursachte Volumenänderung wird von dem Körper teilweise durch eine Querschnittsverringering, die *Querkontraktion*, kompensiert. Diese Erscheinung ist zum Beispiel auch von den Muskeln her bekannt.

Den Quotienten  $F/A = \sigma$  nennen wir *mechanische Spannung* (Zugspannung) mit der Einheit  $\text{N m}^{-2}$ . Statt zu dehnen, können wir eine Probe auch einseitig zusammendrücken (durch Druckspannung). Für kleine (!) negative Verformungen  $\epsilon = \Delta l/l$  gilt dann ebenfalls Gl. (5-3).

Eine Verformung heißt *elastisch*, wenn der Körper der durch die äußere Kraft erzwungenen Änderung seiner Gestalt einen bleibenden Widerstand entgegensetzt und dadurch seine ursprüngliche Gestalt ohne Verzögerung wieder annimmt, wenn diese Kraft aufhört zu wirken.

Der elastische Bereich im Spannungs-Dehnungs-Diagramm reicht nur geringfügig über den Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes der Gl. (5-3) hinaus, der oft wegen der linearen Beziehung zwischen  $\varepsilon$  und  $\sigma$  Proportionalitätsbereich genannt wird. Lassen wir die mechanische Spannung in unserem Versuch jedoch zu groß werden, dann überschreiten wir den Bereich elastischer Verformungen, den Elastizitätsbereich, und die Verformungen bilden sich nach Verschwinden der sie verursachenden Kraft nicht mehr von selbst zurück. Es bleibt eine *plastische* Verformung bestehen, die man erst durch zusätzliche äußere Druckkräfte wieder beseitigen kann. Die plastische Verformung von festen Stoffen hat große technische Bedeutung. Auf ihr beruht die Möglichkeit der Verformung der Metalle durch Schmieden, Walzen, Strecken usw. Bei weiterer Zunahme der Spannung über den elastischen Bereich hinaus beginnen manche Stoffe bei erhöhter Temperatur schließlich zu kriechen, d. h., ihre Form verändert sich bei gleichbleibender Spannung laufend mit der Zeit, und zwar so lange, bis der Körper schließlich zerreißt (zu Bruch geht). Die Grenze der elastischen Verformung und die Fließgrenze wandern im Allgemeinen zu größeren Werten der mechanischen Spannung, wenn die Temperatur der Probe herabgesetzt wird. Zu den plastischen, verformbaren Stoffen gehören Metalle oder Plastikmaterialien (Polymere). Andere Stoffe dagegen gehen bereits zu Bruch, kurz nachdem die Elastizitätsgrenze überschritten wurde. Sie lassen sich deshalb kaum plastisch verformen. Wir nennen sie *spröde*. Glas bei Raumtemperatur und auch Knochengewebe gehören zu diesen Stoffen.

Um Ermüdungserscheinungen an Bauwerken (Hochhäuser, Brücken, Staumauern, Windkraftanlagen etc.) zu dokumentieren, wird mittels *Dehnungs-Messtreifen* (DMS) die Kurz- und Langzeitdynamik sowohl metallischer Werkstoffe als auch des Werkstoffs Beton untersucht. Ein DMS ist z. B. ein Mess-element in Streifenform (ca. 1 mm breit), das aus vielen (ca. 10  $\mu\text{m}$  dicken) parallel angeordneten Drähten mit einer aktiven Länge

von 2–10 mm besteht. Die Drähte sind auf einer Trägerfolie isoliert aufgeklebt und mit elektrischen Anschlüssen ausgestattet. Das Messprinzip besteht darin, dass sich proportional zur Längenänderung des Probekörpers der elektrische Widerstand  $R$  des DMS ändert und somit indirekt seine Dehnung  $\varepsilon$  (positiv oder negativ) gemessen wird:

$$\Delta R/R = K \cdot \varepsilon. \quad (K = \text{Kalibrierungskonstante})$$

Ändert sich Temperatur, Zug- oder Druckspannung des zu untersuchenden Materials, dann geht damit eine Änderung des DMS-Signals einher. Damit lässt sich das Verformungsverhalten von Werkstoffen (auch von Knochen) diagnostisch beurteilen.

**Kompression** Von der linearen Formänderung zu unterscheiden ist die Volumenänderung unter allseitig wirkendem Druck, da dann der Ausgleich durch seitliche Verformung, wie bei der Querkontraktion nicht möglich ist. Solange die Verformung klein bleibt, gilt in guter Näherung die einfache Beziehung zwischen relativer Volumenänderung  $\Delta V/V$  und Druck  $p$ :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K} \frac{F}{A} = -\frac{1}{K} p = -\kappa p. \quad (5-4)$$

Das negative Vorzeichen tritt in Gl. (5-4) auf, da eine Erhöhung (Verminderung) des Druckes eine Verkleinerung (Vergrößerung) des Volumens bewirkt.  $K$  ist der *Kompressionsmodul* mit der Einheit  $\text{N m}^{-2}$ . Seinen Kehrwert  $\kappa = 1/K$  nennt man die *Kompressibilität* des Stoffes. Angenähert gilt übrigens  $\Delta V/V \approx 3 \Delta l/l$ . Es zeigt sich, dass vor allem Gase (und weit weniger Flüssigkeiten und Festkörper) kompressibel und damit volumenelastisch sind.

Tab. 5.2 veranschaulicht mit ihren numerischen Daten die mechanischen Eigenschaften (Druckfestigkeit, Zugfestigkeit, Elastizitätsmodul) einiger Stoffe (Stahl, Knochen, Holz, Beton) sowie die Kompressibilität einiger Festkörper, Flüssigkeiten und Gase.

**Scherung, Torsion** Wirkt auf einen an der Unterseite befestigten Körper entlang seiner

**Tab. 5.2a** Mechanische Eigenschaften verschiedener Stoffe.

Material	Druckfestigkeit N/mm <sup>2</sup>	Zugfestigkeit N/mm <sup>2</sup>	Elastizitätsmodul 10 <sup>2</sup> N/mm <sup>2</sup>
Stahl	552	827	2070
Knochen	170	120	179
Eiche	59	117	110
Beton	21	2,1	165

**Tab. 5.2b** Kompressibilität  $\kappa$  einiger Festkörper, Flüssigkeiten und Gase in 10<sup>-7</sup> mm<sup>2</sup> N<sup>-1</sup>

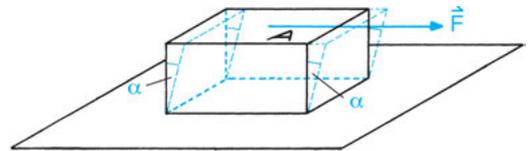
Festkörper	Al	(20 °C)	1,34
	Cu	(20 °C)	0,72
	Quarzglas	(20 °C)	2,6
	Eis	(-4 °C)	10
Flüssigkeiten	H <sub>2</sub> O	(20 °C)	46
		(100 °C)	47,7
	Äther	(20 °C)	171
		(40 °C)	203
Gase	Bei konstanter Temperatur gilt für ideale Gase $\kappa = 1/p$ ; hieraus folgt, dass bei kleinen Drucken $p$ die relative Volumenänderung ganz beträchtlich sein kann. Unter Normalbedingungen (siehe Kap. 9.1) beträgt die Kompressibilität von idealen Gasen demnach $\kappa = 10 \text{ mm}^2 \text{ N}^{-1}$ .		

Fläche  $A$  die Kraft  $F$ , wie in Abb. 5.10 gezeichnet ist, dann erfahren seine Seitenflächen eine Drehung um den Winkel  $\alpha$ . Die Kraft greift hier also im Gegensatz zum Fall der Dehnung tangential an der Fläche  $A$  an. Eine Torsion liegt auch vor, wenn ein Stab oder ein Knochen um seine Längsachse verdreht wird. Ist die Verformung klein, dann erfolgt sie elastisch, und es gilt für den Torsionswinkel eine dem Hooke'schen Gesetz analoge Beziehung:

$$\alpha = \frac{1}{G} \frac{F}{A} = \frac{\sigma_s}{G} \tag{5-5}$$

Die Schubspannung  $\sigma_s = F/A$  besitzt die Einheit N m<sup>-2</sup>, und der Schub- oder Torsionsmodul  $G$  hat die Einheit N m<sup>-2</sup> rad<sup>-1</sup>.

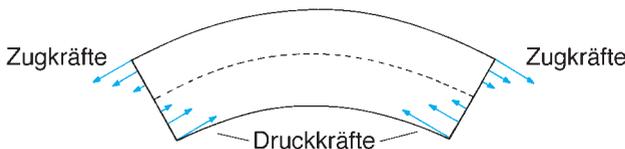
**Biegung** Bei der Biegung eines Körpers greifen im einen Teil Zug- und im anderen Teil Druckspannungen an. Der Balken in Abb. 5.11 wird also auf der oberen Seite gedehnt und auf der unteren gestaucht, und die



**Abb. 5.10** Torsion eines Festkörpers.

Verformung wird im Elastizitätsbereich durch das Hooke'sche Gesetz (Gl. 5-3) beschrieben. **Knickung** Beanspruchen wir einen Körper auf Druck, dann kann er seitlich ausweichen; er knickt ein, wie in Abb. 5.12 veranschaulicht.

Die unter verschiedenen experimentellen Bedingungen zu messenden elastischen Konstanten  $E$ ,  $K$  und  $G$  sind letztlich durch die gleichen Kräfte zwischen den atomaren Bausteinen bedingt, und sie sind daher nicht alle unabhängig voneinander. Der spezielle Aufbau eines Knochens bedingt zum Beispiel, dass wirkende Kräfte eine komplizierte Kombination von Zug-, Druck-, Biege- und Torsionsbelastungen darstellen. Hierbei ist offen-



**Abb. 5.11** Biegung eines Balkens.

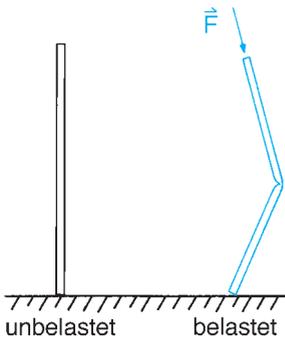


Abb. 5.12 Knickung eines Stabes.

## 5.3 Makroskopische mechanische Eigenschaften von Flüssigkeiten

Bei der Behandlung der mechanischen Eigenschaften von Flüssigkeiten (*Hydromechanik*) unterscheiden wir zwischen der Lehre von den ruhenden Flüssigkeiten (*Hydrostatik*) und der Lehre von den strömenden Flüssigkeiten (*Hydrodynamik*). Da feste und flüssige Stoffe aber stets von Oberflächen begrenzt sind, wollen wir zunächst die physikalischen Eigenschaften an Grenzflächen diskutieren und dabei unterscheiden, ob eine Flüssigkeit an Vakuum oder Luft (freie Oberfläche) oder ob sie an andere Materie grenzt.

### 5.3.1 Grenzflächen

Die Bindungsverhältnisse sind an der Oberfläche gegenüber dem Innern verändert, da für Atome nahe der Oberfläche die Zahl der Nachbaratome anders ist als im Innern. Dadurch entstehen physikalische Phänomene wie Oberflächenspannung, Benetzung, Kapillarität oder auch die chemische Katalyse-Wirkung mancher Stoffe.

**Die freie Oberfläche** Die Bindungskräfte aller Nachbarn auf ein Molekül im Innern einer Flüssigkeit heben sich gegenseitig auf: Das Molekül ist kräftefrei. Auf Atome oder Moleküle, die in einer etwa  $10^{-9} \text{ m} = 10 \text{ \AA}$  dicken Oberflächenschicht einer freien Oberfläche liegen, wirken jedoch nicht mehr aus

bar die Zusammensetzung des Knochens aus organischer Grundsubstanz und anorganischen Kalziumsalzen für wechselnde Belastungen weitgehend optimal. Dies wird deutlich bei Krankheiten, durch die der Knochen einen größeren oder auch kleineren Gehalt an anorganischen Kalziumsalzen aufweist. Bei geringerem Gehalt führen statische Belastungen zu bleibenden Verformungen, während ein zu hoher Gehalt zur Versprödung und damit zu Knochenbrüchen bei Biege- und Torsionsbelastungen führt (*Glasknochenkrankheit*).

allen Richtungen Kräfte (Abb. 5.13) ein. Die Resultierende der Kräfte,  $\vec{F}_R$ , ist daher nicht mehr gleich Null, und jedes Oberflächenmolekül wird ins Innere der Flüssigkeit hineingezogen. Bedingt durch diese Kraft nimmt eine Flüssigkeit diejenige Form an, bei der am wenigsten Moleküle an der Oberfläche liegen und die Oberfläche — bezogen auf das Volumen — am kleinsten ist. Will man die Oberfläche vergrößern, so muss man Moleküle aus dem Flüssigkeitsinnern durch die Oberflächenschicht  $\Delta x$  mittels einer äußeren Kraft an die Oberfläche bringen (z. B. um eine Seifenblase aus einem Tropfen entstehen zu lassen). Dazu muss Arbeit gegen  $\vec{F}_R$  entlang des Weges durch die Oberflächenschicht verrichtet

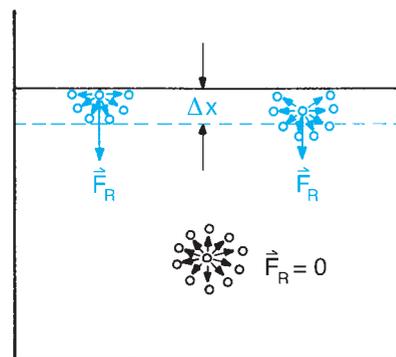


Abb. 5.13 Resultierende Kraft  $\vec{F}_R$  auf Oberflächenmoleküle ( $\Delta x \approx 10^{-9} \text{ m}$ ).

werden, und die potentielle Energie der Flüssigkeitsoberfläche nimmt dabei zu.

Das Verhältnis der Zunahme der potentiellen Energie  $\Delta E$  zur entsprechenden Zunahme der Oberfläche  $\Delta A$  durch Vergrößern der Zahl der Oberflächenatome nennen wir *spezifische Oberflächenenergie*  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta E}{\Delta A}, \quad \text{mit der SI-Einheit } \text{J m}^{-2}. \quad (5-6)$$

$\varepsilon$  ist eine Materialkonstante. Für reines Wasser hat sie den Wert:  $\varepsilon = 7,28 \cdot 10^{-2} \text{ J m}^{-2}$ .

Ein System befindet sich im stabilen Gleichgewicht, wenn seine potentielle Energie ein Minimum besitzt. Unter verschiedenen Gestalten von Oberflächen hat nach Gl. (5-6) diejenige die minimale potentielle Energie, deren Fläche am kleinsten ist. Aus diesem Grunde nehmen Tropfen und Seifenblasen Kugelgestalt an, wenn keine äußeren Kräfte einwirken, denn von allen geometrischen Figuren mit gleichem Rauminhalt besitzt die Kugel die kleinste Oberfläche.

Häufig benutzt man auch eine andere Materialkonstante, die in enger Beziehung zu  $\varepsilon$  steht: Die *Oberflächenspannung*  $\sigma$ . Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, längs der Oberfläche wirke eine Kraft, gegen die zur Oberflächenvergrößerung eine Arbeit zu verrichten sei. Diese Arbeit pro Fläche ist gerade  $\varepsilon$ . Den Betrag der Kraft, bezogen auf die Breite  $l = 1 \text{ m}$  der Oberflächenschicht, nennt man die Oberflächenspannung und gibt sie in der Einheit  $\text{N m}^{-1}$  an. Im selben Maßsystem ist die Einheit von  $\sigma$  gleich der von  $\varepsilon$ :  $\text{N m}^{-1} = \text{J m}^{-2}$ .

Oberflächenspannungen (und somit auch spezifische Oberflächenenergien) sind äußerst empfindlich gegen Verunreinigungen in der Flüssigkeitsoberfläche. Die Wirkung von Waschmitteln beruht teilweise darauf, dass sie die Oberflächenspannung des Waschwassers herabsetzen. Schon ein wenig Seifenlösung vermindert sie beträchtlich. Die Oberflächen-

**Tab. 5.3** Oberflächenspannung (gegenüber Luft) einiger Flüssigkeiten in  $10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ , bzw. spezifische Oberflächenenergie in  $10^{-3} \text{ J m}^{-2}$

Glas*	(20 °C)	1000,0
Hg	(20 °C)	465,0
H <sub>2</sub> O	(0 °C)	75,6
	(20 °C)	72,75
	(90 °C)	62,9
Glyzerin	(20 °C)	65,7
Äther**	(20 °C)	35,4

\* Wie in Kap. 5.1.2 erwähnt, ist auch Glas eine Flüssigkeit

\*\* Die Oberflächenspannung von Äther gegenüber Ätherdampf beträgt  $17,0 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$ .

spannung nimmt außerdem mit wachsender Temperatur ab, weil die Molekularbewegung die intermolekularen Wechselwirkungen stört (Tab. 5.3).

*Oberflächenspannung* und (elastische) *Spannung* werden nach dem SI leider mit dem gleichen Symbol  $\sigma$  bezeichnet. Dies kann zu Missverständnissen führen, denn sie unterscheiden sich nicht nur in ihrer Dimension (*Kraft pro Weg gegenüber Kraft pro Fläche*) sondern auch inhaltlich. Spannung (oder Druck) ist eine physikalische Größe, deren Wirkung eine z. B. elastische Verformung, wie eine Dehnung oder Stauchung, zur Folge hat (s. Gl. 5-3). Die Oberflächenspannung hingegen ist (wie die *spezifische Oberflächenenergie*, s. Gl. 5-6) eine Materialkonstante, kennzeichnend für die Grenzfläche zwischen zwei Stoffen, von denen meist der eine Stoff eine Flüssigkeit ist (s. Tab. 5.3).

Spezielle Eigenschaften werden *gewölbten Oberflächen* zugeschrieben. So ist die Delle, die ein Wasserläufer auf einer Wasseroberfläche mit seinen Beinen erzeugt, elastisch verformt; sie verschwindet wieder, wenn der Wasserläufer seinen Ort gewechselt hat. Auch aus dem Bereich der Medizin gibt es Beispiele mit Bezug zu gekrümmten Oberflächen bzw. Wandungen. Zum einen sind es die *Alveolen* in der Lunge, die am Gasaustausch  $\text{O}_2/\text{CO}_2$  beteiligt sind. Sie lassen sich durch Seifenblasen als Modell erläutern. Die Minimierung der potenziellen Energie der Oberfläche führt, wie oben beschrieben, bei Seifenblasen und Flüssigkeitstropfen zur Kugelform mit dem Krümmungsradius  $r$ . Für solche Oberflächen ergibt sich ein Druck auf das Gas im Inneren der Kugel, der sich mit  $p = 4\sigma/r$  angeben lässt (*Laplace-Gesetz*), wobei  $\sigma$  die Oberflächenspannung ist und der Faktor 4 berücksichtigt, dass die Seifenblase zwei Oberflächen besitzt. Zwei Seifenblasen unterschiedlicher Kugelgröße besitzen daher unterschiedliche *Wölbungsdrucke*. Als Folge davon bläst, bei gegenseitiger Berührung, die kleinere die größere auf und verschwindet, da sie einen größeren Wölbungsdruck  $p$  besitzt. (Anders ausgedrückt: Die potentielle Energie der Oberfläche der großen Gesamt-

blase ist niedriger als die der Summe der zwei unterschiedlichen Blasen zuvor.) Ganz ähnlich findet man, wenn man etwas Quecksilber in eine leicht gewölbte Petrischale schüttet und dann bei den vielen Tropfen unterschiedlicher Größe beobachtet, dass bei gegenseitiger Berührung nach kurzer Zeit nur ein großer Tropfen übrig bleibt. Seifenblasen können, wie Alveolen unterschiedlichen Drucken ausgesetzt sein, letztere beim Ein- bzw. Ausatmen. Beim Einatmen muss der radiusabhängige Wölbungsdruck überwunden werden, um die Alveolen soweit „aufzublasen“, dass ausreichend Sauerstoffzufuhr gewährleistet ist. Beim Ausatmen hilft dieser Druck, um das  $\text{CO}_2$  vom Inneren der Alveolen nach außen zu befördern. Gerade an diesen Beispielen erkennt man die Doppeldeutigkeit des Begriffs *Oberflächenspannung*. Man sollte deshalb beim Laplace-Gesetz besser von *Wandspannung*  $\sigma$  reden. Dass die Verhältnisse bei den Seifenblasen auch auf elastisch verformbare, gewölbte Wände anzuwenden sind, zeigt ein Versuch mit zwei aufgeblasenen, möglichst runden Luftballons unterschiedlicher Krümmungsradien. Bei Verbindung der beiden Ballons mit einem Röhrchen bläst der kleinere den größeren Ballon auf. Ein weiteres Beispiel zum Wölbungsdruck gekrümmter Wandungen (Oberflächen) liefert der Blutkreislauf (Kap. 5.3.3.2.4), wobei hier die Wandungen der Blutgefäße gemeint sind. Bei zylindrischen Gefäßen ergibt das Laplace-Gesetz einen Wölbungsdruck ins Gefäßinnere hinein der Größe  $p = \sigma/r$ . Blutgefäße sind normalerweise in der Lage, dem Druck des transportierten Bluts standzuhalten. Kommt es aber zu einer „Aussackung“ (etwa durch Arteriosklerose) einer Arterie (*Aneurysma*), dann nimmt der nach innen gerichtete Wölbungsdruck an dieser Stelle ab; dies kann zu einer potentiell tödlichen Ruptur der Gefäßwand führen (Verblutungstod).

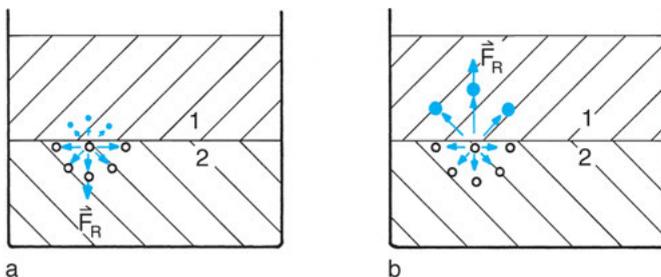
**Adhäsion, Kohäsion** Wir betrachten ein Atom, das in der Grenzflächenschicht zwischen zwei Stoffen liegt. Die Kräfte, die ins Innere desjenigen Stoffes gerichtet sind, dem das Atom angehört, fasst man als *Kohäsionskräfte* zusammen, die Kräfte zwischen dem Atom und dem begrenzenden zweiten Stoff als *Adhäsionskräfte*.

Entsprechend der Definition von  $\varepsilon$  bei der freien Oberfläche (Gl. (5-6)) definiert man  $\Delta E/\Delta A$  als *spezifische Grenzflächenenergie*.

In Abb. 5.14 sind zwei verschiedene Fälle skizziert: In Abb. 5.14a sind die Kohäsionskräfte stärker als die Adhäsionskräfte (Quecksilber (2) an Glas (1)), in Abb. 5.14b überwiegen die Adhäsionskräfte (Wasser (2) an Glas (1)). Wenn beide Stoffe gleich sind, so sprechen wir üblicherweise nur von Kohäsionskräften. Zerschneiden wir einen Glasstab, dann gelingt es uns nicht, die rauhen Bruchstellen durch Kohäsion wieder fest zusammenzufügen. Die Bruchflächen lassen sich nämlich nicht mehr nahe genug aneinander bringen, dass die Kohäsionskräfte entlang der gesamten Bruchfläche wirken könnten. Die wenigen wirklich engen Kontakte reichen nicht aus, um die zerbrochenen Teile wieder zusammenzuhalten. Pressen wir dagegen gut polierte Glasplatten mit der Hand aufeinander, dann haften die glatten Flächen infolge der Kohäsionskräfte von selbst aneinander.

Temperaturerhöhung begünstigt die Wirkung von Kohäsions- oder Adhäsionskräften. Dies macht man sich bei der Herstellung von *Sinter-Werkstoffen* zunutze. Hochschmelzende Metalle oder Oxide können unterhalb des Schmelzpunktes fast unlöslich miteinander verbunden werden, wenn man feinstes Pulver aus der Ausgangssubstanz zusammenpresst und auf etwa zwei Drittel des Schmelzpunktes erhitzt (sintert). Dadurch entstehen Körper hoher Festigkeit.

Weitere Beispiele zur Adhäsion sind uns aus dem täglichen Leben bekannt: Ein Papierschnipsel bleibt am nassen Finger hängen. Die Druckfarbe haftet am Papier, die Farbe an der Wand. Körper werden durch Leimen, Kitten und Löten miteinander verbunden usw.



**Abb. 5.14** Kohäsion und Adhäsion: (a) Kohäsion überwiegt Adhäsion, (b) Adhäsion überwiegt Kohäsion.

**Benetzung** Soll eine Flüssigkeit an einem festen Körper haften, so muss sie ihn benetzen. Dies tritt ein, wenn die Adhäsion zwischen Flüssigkeit und Festkörper größer als die Kohäsion in der Flüssigkeit ist. Die benetzende Flüssigkeit breitet sich dann selbstständig über die ganze Oberfläche des Festkörpers aus.

Einige Beispiele: Quecksilber haftet an Kupfer, benetzt aber weder Glas noch Porzellan oder Eisen. Wasser benetzt reines, nicht aber fettiges Glas, auf dem es Tropfen bildet. Alkohol benetzt Glas gut, da er Fettschichten ablöst.

**Adsorption** Die Eigenschaft fester Körper, an ihren Oberflächen Stoffe in einer Schicht von etwa monomolekularer Dicke festzuhalten, nennt man Adsorption. Das geschieht durch die zwischen den Oberflächenmolekülen des festen Stoffes und den adsorbierten Molekülen wirkenden Bindungskräfte.

Poröse Stoffe und sehr fein verteilte Materie (kolloidale Systeme) besitzen sehr große Oberflächen und können deshalb große Gas-mengen adsorbieren. Besonders eignen sich ausgeglühte Holzkohle (Aktivkohle) oder Zeolith zur Beseitigung von Gasen, sei es, um in einer Apparatur Vakuum zu erzeugen oder um in einer Gasmaske lebensgefährliche Gase festzuhalten (CO wird jedoch von Aktivkohle nicht adsorbiert!). Die Adsorption spielt auch in der chemischen Technik eine wichtige Rolle. Gewisse chemische Prozesse laufen schneller ab oder werden überhaupt erst möglich, wenn die Reaktionspartner an der Oberfläche von *Katalysatoren* adsorbiert sind. Als Beispiel sei die Oxydation von Schwefeldioxid zu Schwefeltrioxid ( $\text{SO}_2 + \frac{1}{2} \text{O}_2 \rightarrow \text{SO}_3$ ) an einer Pt-Oberfläche genannt.

### 5.3.2 Hydrostatik

Typisch für ruhende Flüssigkeiten ist, dass jedes Atom oder Molekül aufgrund der an ihm

angreifenden Gewichtskraft bestrebt ist, die tiefste Stelle in einem Gefäß einzunehmen. Die Folge davon ist, dass sich die Flüssigkeitsmenge der Gefäßform anschmiegt und oben eine waagerechte Oberfläche bildet. Nur da, wo sie an die Gefäßwand angrenzt, treten infolge der Oberflächenspannung Störungen auf (Benetzen bzw. Nichtbenetzen der Gefäßwand durch die Flüssigkeit).

#### 5.3.2.1 Kapillarität

Tauchen wir ein sauberes Glas zum Teil in Wasser, so wird es benetzt, d. h., die Adhäsionskräfte sind größer als die Kohäsionskräfte des Wassers, so dass eine dünne Wasserhaut über die ganze Glasfläche gezogen wird. Dadurch werden zwar die freie Wasseroberfläche und die Wasser-Glas-Grenzfläche vergrößert, aber die freie Glasoberfläche, die eine sehr große Oberflächenspannung besitzt (siehe Tab. 5.3), ist entsprechend herabgesetzt.

Tauchen wir eine saubere Glaskapillare (d. h. ein Haarröhrchen mit Innendurchmesser  $2r \leq 0,5 \text{ mm}$ ) senkrecht in eine benetzende Flüssigkeit, so beobachten wir, dass in ihr eine Flüssigkeitssäule hoch steigt (*Kapillarattraktion*, Abb. 5.15 a), und die Steighöhe  $h$  erweist sich als umso größer, je geringer der Kapillarenradius  $r$  ist.

Die Steighöhe ergibt sich aus folgender Rechnung: Nehmen wir an, die Wassersäule sei in der Kapillare bis zur Höhe  $h$  gestiegen. Bei einer weiteren Anhebung der Säule um  $dh$  wird die Oberflächenenergie der freien Wasseroberfläche um  $dE_0 = dA \varepsilon = 2\pi r dh \varepsilon$  verringert, denn der Betrag  $dA$ , um den die Wasseroberfläche beim Anheben der Wassersäule um die Höhe  $dh$  verringert wird, ist (s. Abb. 5.15) durch die Ringfläche  $dA = 2\pi r dh$  gegeben. Die Masse der Flüssigkeitssäule beträgt  $m = V \rho_{\text{Flüss}} = r^2 \pi h \rho_{\text{Flüss}}$  ( $\rho_{\text{Flüss}}$  = Dichte der Flüssigkeit) und, da sie um  $dh$  gehoben wird, erhöht sich ihre potentielle Energie um  $dE_{\text{pot}} = mg dh = r^2 \pi h \rho_{\text{Flüss}} g dh$ .

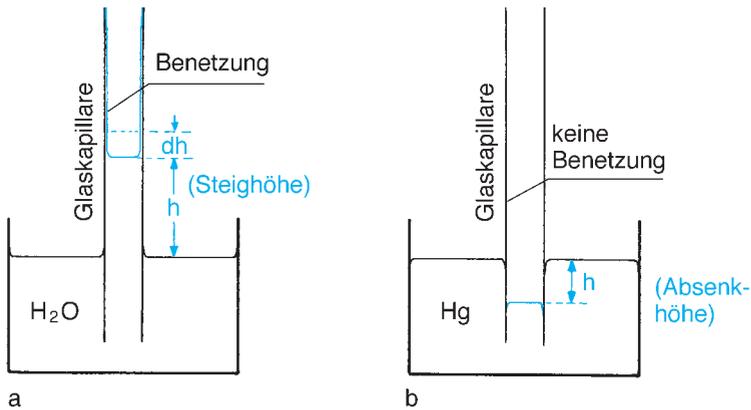


Abb. 5.15 Kapillarität (Haarröhrchenwirkung): (a) Kapillarattraktion, (b) Kapillardepresion.

Der Energiebedarf zur Anhebung um  $dh$  wird also mit wachsender Höhe  $h$  der Säule immer größer, und daher kann diese nur bis zu derjenigen Höhe  $h$  gehoben werden, bei der  $dE_{\text{pot}}$  gleich der freiwerdenden Oberflächenenergie  $dE_0$  ist:

$\varepsilon 2\pi r dh = r^2 \pi h \rho_{\text{Flüss}} g dh$  und aufgelöst nach  $h$ :

$$h = \frac{2\varepsilon}{r \rho_{\text{Flüss}} g} \quad (5-7)$$

Die Steighöhe  $h$  ist proportional zur spezifischen Oberflächenenergie  $\varepsilon$  und ändert sich umgekehrt proportional zum Kapillaren-Radius  $r$ . Daher ist die Steighöhe nur in Kapillaren, nicht aber in normalen Röhren oder Gefäßen merklich. In einem 1 cm dicken Glasrohr steigt Wasser nur um 3 mm an, in einer 0,1 mm dicken Kapillare dagegen (falls diese sauber ist) um 30 cm. Dies geschieht, wie aus Gl. (5-7) zu sehen ist, *ohne* äußeren Druck. Die Kapillarwirkung ist wichtig für die Wasserversorgung der Pflanzen, wenn auch diese allein nicht ausreichen würde, um bei einem Kapillarradius von 10 bis 50  $\mu\text{m}$  das Wasser gegen die Erdanziehung bis in die Spitzen der höchsten Bäume anzuheben. Nach Gl. (5-7) ist nämlich die Steighöhe bei  $r = 10 \mu\text{m}$  etwa 1,5 m. (In Pflanzen wirken dabei spezielle Leitungselemente, sog. *Tracheen*, mit, um größere Steighöhen des Wassers zu erreichen.)

Gl. (5-7) bietet eine einfache Möglichkeit, die spezifische Oberflächenenergie  $\varepsilon$  bzw. die

Oberflächenspannung  $\sigma$  experimentell zu bestimmen, indem man den Kapillarradius  $r$ , die Dichte der verwendeten Flüssigkeit  $\rho_{\text{Flüss}}$  und die Steighöhe  $h$  misst.

Bei nichtbenetzenden Flüssigkeiten (z. B. Hg in Glas) ist die Kohäsion größer als die Adhäsion, und daher liegt in einer eingetauchten Kapillare der Flüssigkeitsspiegel tiefer als außerhalb (*Kapillardepresion*, Abb. 5.15b). Für die Absenkhöhe  $h'$  gilt analog zu Gl. (5-7), dass  $h' \sim 1/r$ .

**Stalagmometer** Eine weitere Möglichkeit zur Messung der spezifischen Oberflächenenergie  $\varepsilon$  bzw. der Oberflächenspannung  $\sigma$  bietet das *Stalagmometer*. Es besteht aus einem Glasrohr mit geeichtem Volumen. An sein unteres Ende ist eine Kapillare angeschmolzen, deren Radius so gering ist, dass eingefüllte Flüssigkeiten nur langsam heraustropfen (Abb. 5.16). Füllen wir nacheinander das Instrument mit zwei verschiedenen Testflüssigkeiten (z. B. H<sub>2</sub>O und Äther) und lassen jeweils dasselbe Volumen durch die Kapillare austropfen, dann können wir aus dem Verhältnis der Tropfenzahlen  $Z$  auf das Verhältnis der Oberflächenspannungen der beiden Versuchsflüssigkeiten schließen.

Ein Tropfen bleibt nämlich solange an der Kapillare hängen, bis seine Gewichtskraft  $F_s = V \rho_{\text{Flüss}} g$  die durch die Oberflächenspannung zustande kommende, am Umfang des Tropfens  $2\pi r$  angreifende und den Tropfen haltende Kraft  $F_U = \sigma 2\pi r$  überwiegt. Ist der Tropfen durch Zulauf von Flüssigkeit so groß geworden, dass beide Kräfte gleich sind, dann gilt in dem

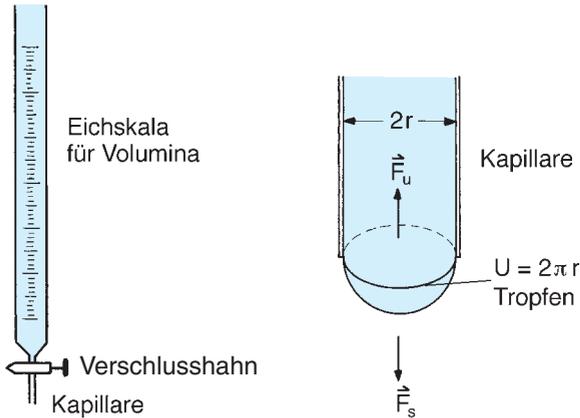


Abb. 5.16 Stalagmometer.

Augenblick, in dem der Tropfen abreißt:

$$\rho_{\text{Flüssig}} g V = \sigma 2r\pi \quad \text{oder} \quad V = \frac{\sigma 2r\pi}{\rho_{\text{Flüssig}} g} \quad (5-8a)$$

Das Verhältnis des gesamten aus dem Stalagmometer ausgetropften Flüssigkeitsvolumens  $V'$  zum Volumen  $V$  eines Tropfens ist die Tropfenzahl  $Z = V'/V$ . Damit ergibt sich mit Gl. (5-8a) für die Beziehung zwischen Tropfenzahl und Oberflächenspannung:

$$Z = \frac{\rho_{\text{Flüssig}} g V'}{\sigma 2r\pi} \quad (5-8b)$$

$Z$  und  $\sigma$  sind also zueinander umgekehrt proportional, d. h. je kleiner die Oberflächenspannung, um so mehr (aber kleinere) Tropfen entstehen. Wenn zwei Testflüssigkeiten (bei gleicher Temperatur und Dichte) mit  $Z_1$  bzw.  $Z_2$  Tropfen aus dem Stalagmometer austropfen, so verhalten sich ihre Oberflächenspannungen wie

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (5-9)$$

Gl. (5-8b) besagt aber auch, dass die Tropfenzahl bei verschiedenen Flüssigkeiten kein Maß für deren Menge ist, sondern von der Dichte und der Oberflächenspannung abhängt.

Beim Verabreichen von Arzneimitteln ist zu beachten, dass gleiche Tropfenzahl bei verschiedenen Flüssigkeiten nicht bedeutet, dass die ausgetropften Mengen gleich sind.

### 5.3.2.2 Druck in Flüssigkeiten

Eine der typischen Eigenschaften einer Flüssigkeit wurde bereits bei der *Kompression* in Kap. 5.2.2 besprochen, dass sich nämlich ihr Volumen (wie auch das eines Festkörpers,

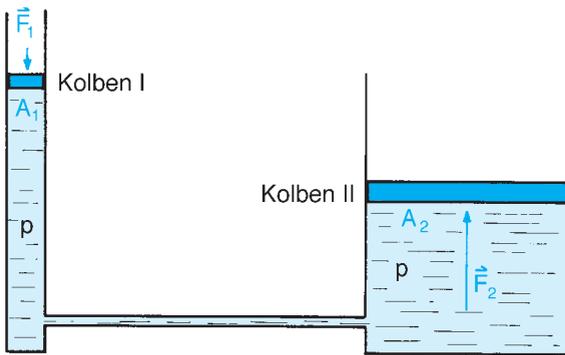
aber im Gegensatz zu dem eines Gases) durch äußere Kräfte nur sehr wenig ändern lässt. Im Folgenden können wir deshalb zur Vereinfachung Flüssigkeiten als *inkompressibel* betrachten.

**Stempeldruck** Wirkt auf eine allseits in ein Gefäß eingeschlossene Flüssigkeitsmenge über irgendein Flächenelement  $A$  (etwa über die Fläche eines Kolbens) die Kraft  $\vec{F}$ , wobei  $\vec{F}$  senkrecht auf  $A$  steht, so wird der Druck  $p = F/A$  auf die Flüssigkeit ausgeübt. Dieser Druck breitet sich in der Flüssigkeit gleichmäßig aus. Auf diesem *Prinzip der allseitig gleichmäßigen Druckausbreitung* beruht die Wirkungsweise der *hydraulischen Presse*, die in Abb. 5.17 skizziert ist.

Mit dem Druck von Kolben I,  $p = \frac{F_1}{A_1}$ , presst die Flüssigkeit den Kolben II nach oben. Dessen Querschnittsfläche sei  $A_2$ . Dann finden wir mit

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2},$$

dass der Kolben II mit der Kraft  $F_2$  nach oben wirkt, und es ist offensichtlich, dass sich die an den Kolben angreifenden Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  wie die Kolbenquerschnitte verhalten:  $F_1 : F_2 = A_1 : A_2$ . Ist  $A_2$  größer als  $A_1$ , so kommen wir also mit einer kleinen Kraft  $F_1$  aus, um eine schwere Last auf dem Kolben II anzuheben. Allerdings müssen wir den Kolben I über einen entsprechend größeren Weg herunterdrücken, als der Kolben II nach oben angehoben wird, so dass die am Kolben I verrichtete Arbeit gleich der ist, die Kolben II an der Last verrichtet. (Das muss wegen des Energieerhaltungssatzes so sein.)



**Abb. 5.17** Hydraulische Presse. Die Kraft  $F_1$  kann leicht durch Fußdruck erzeugt werden (hydraulischer Wagenheber).

**Schweredruck** Nun wollen wir berücksichtigen, dass auf die Flüssigkeit die Schwerkraft wirkt. Bohren wir, wie in Abb. 5.18a gezeigt, in ein mit Wasser gefülltes Gefäß mehrere gleichgroße Löcher in verschiedenen Höhen, so stellen wir fest, dass die Spritzweite des ausfließenden Wassers von oben nach unten zunimmt. Das bedeutet, dass der Druck an der oberen Öffnung am geringsten, an der unteren Öffnung am größten ist. Der Grund ist, dass infolge der Gewichtskraft des Was-

sers der Schweredruck in der Flüssigkeit nach unten zunimmt. Auf dem Gefäßboden (Grundfläche  $A$ ) lastet die gesamte Flüssigkeitsmenge der Masse  $m$  mit ihrer Gewichtskraft und übt auf diesen den Bodendruck  $p_B$  aus:

$$p_B = \frac{mg}{A} = \frac{mgh_0}{Ah_0} = \frac{mgh_0}{V} = \rho gh_0. \quad (5-10)$$

( $h_0$  = Höhe der Flüssigkeit;  $V$  = Flüssigkeitsvolumen;  $\rho$  = Dichte.) Nun wollen wir die oberste Flüssigkeitsschicht zwischen  $h_0$  und  $h_2$  betrachten. Sie übt auf die Querschnittsfläche  $A$  der darunterliegenden Flüssigkeit den Schweredruck  $p_2$  aus:

$$p_2 = \rho g(h_0 - h_2). \quad (5-11)$$

Wegen der gleichmäßigen Druckausbreitung gilt, dass der Seitendruck  $p_s$  an der Öffnung bei  $h_2$  gleich  $p_2$  ist. Der Seitendruck ist also gleich dem Schweredruck in gleicher Höhe.

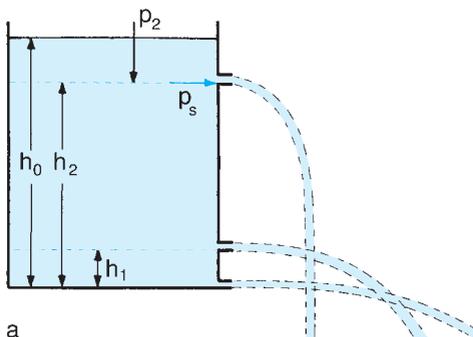
Für den Seitendruck an der Öffnung bei  $h_1$  gilt entsprechend:

$$p_1 = \rho g(h_0 - h_1). \quad (5-12)$$

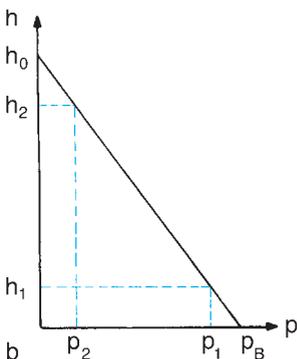
Vergleichen wir Gl. (5-11) und Gl. (5-12), so finden wir, falls  $h_1 < h_2$ , für die Seitendrucke die Beziehung  $p_1 > p_2$ .

Allgemein gilt für den Schwere- oder Seitendruck der in Abb. 5.18 dargestellte lineare Zusammenhang zwischen Druck  $p$  und Höhe  $h$ :

$$p = \rho g(h_0 - h). \quad (5-13)$$

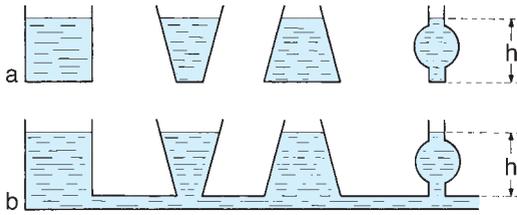


a



b

**Abb. 5.18** Schweredruck.



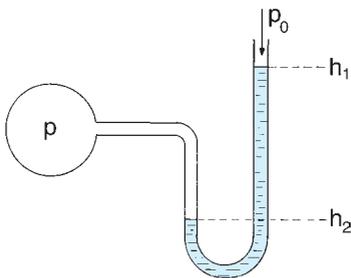
**Abb. 5.19** Hydrostatisches Paradoxon (kommunizierendes System).

Kommt zu dem Schweredruck noch ein äußerer Druck  $p_0$  durch einen Kolben hinzu, der auf die Flüssigkeit drückt, so ist statt Gl. (5-13) für den gesamten hydrostatischen Druck in der Höhe  $h$  des Gefäßes die Summe aus Schwere- und Kolbendruck zu setzen:

$$p = \rho g(h_0 - h) + p_0. \tag{5-14}$$

Es ist auf den ersten Blick nicht einleuchtend, dass diese Gleichung für alle möglichen Gefäßformen (Abb. 5.19a) gilt. Dies beweist aber das Experiment: Verbinden wir die vier Gefäße durch ein Rohr zu einem *kommunizierenden System* (Abb. 5.19b), dann bleibt der Flüssigkeitsspiegel bei allen in der ursprünglichen, gleichen Höhe erhalten. Wir schließen daraus, dass der Schweredruck (Bodendruck) für alle vier Gefäße derselbe ist und durch Gl. (5-10) beschrieben wird. Der Bodendruck ist demnach von der Gefäßform unabhängig. Man bezeichnet diese Tatsache als *hydrostatisches Paradoxon*.

**Druckmessung** Flüssigkeitssäulen in einem U-förmigen Rohr eignen sich zur Messung kleiner Gasdrucke. In Abb. 5.20 ist ein solches Druckmessgerät, das man auch *Flüssigkeitsmanometer* nennt, dargestellt. Es kann



**Abb. 5.20** Flüssigkeitsmanometer ( $p = \rho g(h_1 - h_2) + p_0$ ).

mit Petroleum, Wasser, Glycerin, Quecksilber usw. gefüllt sein. Ein zu messender Gasdruck  $p$  lastet auf der Flüssigkeitsoberfläche im linken Schenkel des U-Rohres. Dadurch wird die Flüssigkeit im rechten Schenkel nach oben gedrückt, bis der Schweredruck der Flüssigkeitssäule zwischen  $h_1$  und  $h_2$  dem Gasdruck das Gleichgewicht hält. Ist der rechte Schenkel oben offen, so lastet der Atmosphärendruck  $p_0$  darauf, und zur Bestimmung des Druckes  $p$  ist Gl. (5-14) heranzuziehen. Bei Hg-gefüllten Manometern ist es üblich, diesen Schenkel zu verschließen und zu evakuieren; dann gilt zur Bestimmung von  $p$  die Gl. (5-13). Ist die Dichte der Flüssigkeit bekannt, reduziert sich die Druckmessung auf eine einfache Längenmessung von  $\Delta h = h_1 - h_2$ . Daher wird der so bestimmte Druck häufig direkt in Einheiten *mm-Quecksilbersäule (Torr)*, *mm-Wassersäule* usw. angegeben. Noch heute ist es in der Medizin üblich, den Liquor-Druck in *cm-Wassersäule* und den Blutdruck in *Torr* statt in der gesetzlich vorgesehenen SI-Einheit *Pascal* anzugeben (Tab.1.5).

Zur Blutdruckmessung werden meist *Membran-Manometer* benutzt. Sie beruhen auf elastischen Formveränderungen von Membranen infolge des Drucks. Genauer wird auf die Blutdruckmessung in Kap. 5.3.3.2.4 eingegangen. In Kap. 9 und 10 wird der Gasdruck behandelt.

**Auftrieb** Taucht man einen Körper in eine Flüssigkeit, so wird er leichter. Archimedes (etwa 200 v. Chr.) soll durch Zufall beim Baden entdeckt haben, in welcher Weise dies geschieht.

Das *Archimedische Prinzip* besagt, dass ein Körper in einer Flüssigkeit soviel an *Gewicht* verliert, wie die Flüssigkeitsmenge wiegt, die er durch sein Volumen verdrängt. Diesen *Gewichtsverlust* bezeichnen wir als den durch die Flüssigkeit am Körper verursachten *Auftrieb*.

Folgen wir den gesetzlichen Bestimmungen, so müssen wir das Wort *Gewicht* durch *die am Körper angreifende Gewichtskraft* ersetzen.

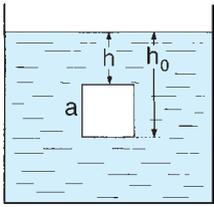


Abb. 5.21 Auftrieb.

Tauchen wir wie in Abb. 5.21 einen Würfel mit der Seitenlänge  $a$  und der Grundfläche  $A$  in eine Flüssigkeit, dann wirkt nach Gl. (5-13) auf die Grundfläche (von unten) der Schweredruck  $p_{\text{unten}} = \rho g h_0$  und von oben auf die Kopffläche der Schweredruck  $p_{\text{oben}} = \rho g h$ . Der Würfel erfährt also einen Druck nach oben vom Betrag

$$p = p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}} = \rho g (h_0 - h) = \rho g a, \quad (5-16)$$

wobei  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit ist. Die resultierende, entgegen der Schwerkraft  $mg$  nach oben wirkende Kraft  $F_A$  ist:

$$F_A = Ap = V_{\text{Körper}} \rho g = m_{\text{Flüss.}} g. \quad (5-17)$$

Die Größe  $m_{\text{Flüss.}}$  ist die Masse der durch das Volumen des Körpers verdrängten Flüssigkeitsmenge. Die Kraft  $F_A$ , die wir als den Auftrieb oder die Auftriebskraft bezeichnen, ist also entgegengesetzt gleich der an der verdrängten Flüssigkeitsmenge angreifenden Gewichtskraft.

Ein Körper, dessen Gewichtskraft größer ist als die Auftriebskraft, wird in einem mit Flüssigkeit gefüllten Gefäß bis zum Boden sinken. Dann ist seine Dichte  $\rho_{\text{Körper}}$  größer als die der Flüssigkeit,  $\rho_{\text{Flüss.}}$ . Stimmen dagegen beide Dichten überein,  $\rho_{\text{Körper}} = \rho_{\text{Flüss.}}$ , so wird der Körper in der Flüssigkeit schweben. (Bei inhomogenen Körpern bedeutet  $\rho_{\text{Körper}}$  die *mittlere Dichte*, die sich als Quotient aus Gesamtmasse  $M$  und Gesamtvolumen  $V$  ergibt:  $\rho_{\text{Körper}} = M/V$ .) Ist aber der Betrag des Auftriebs  $F_A$  eines in die Flüssigkeit getauchten Körpers größer als seine Gewichtskraft  $F_s$ , so schwimmt der Körper. Das heißt, er taucht von selbst nur so weit in die Flüssigkeit ein, bis die Gewichtskraft der von ihm verdrängten Flüssigkeit gleich seiner eigenen Gewichtskraft ist. Er taucht also um so

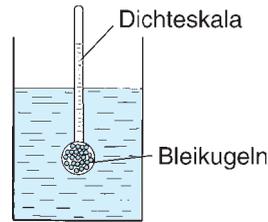


Abb. 5.22 Aräometer (die Flüssigkeit, deren Dichte bestimmt wird, muss die Temperatur haben, auf die das Aräometer geeicht ist).

tiefer ein, je größer seine Gewichtskraft oder je kleiner die Dichte der Flüssigkeit ist.

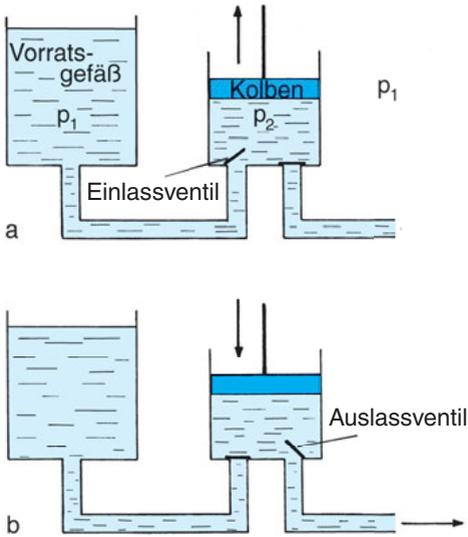
Man kann aus der Eintauchtiefe eines schwimmenden Körpers mit bekannter Dichte  $\rho_{\text{Körper}}$  in eine Flüssigkeit deren Dichte  $\rho_{\text{Flüss.}}$  bestimmen. Nach diesem Prinzip arbeitet das in Abb. 5.22 dargestellte *Aräometer (Senkspindel)* zur Bestimmung der Dichte einer Flüssigkeit, mit dem z. B. auch die Oechsle-Grade von Wein bestimmt werden.

Wir fassen zusammen:

$>$	schwimmt
Wenn $F_A = F_s$ dann	schwebt
$<$	sinkt
der Körper und $\rho_{\text{Flüss.}}$	$>$ $= \rho_{\text{Körper}}$ $<$
	(5-18)

Die mittlere Dichte des menschlichen Körpers ist ungefähr gleich der von Wasser, also etwa  $1000 \text{ kg m}^{-3}$ , wobei Fettgewebe leichter ist, Knochen aber schwerer sind. Daher kann ein Schwimmer sich mit geringen Bewegungen über Wasser halten. Holt er tief Luft, so erweitert sich der Brustkorb, der Auftrieb wächst, und dies kann dazu führen, dass der Körper schwebt. Beim Ausatmen sinkt er allerdings wieder und muss sich durch Armbewegungen an der Wasseroberfläche halten. Fische regulieren ihren Auftrieb durch eine Luftblase, die sie in ihrer Größe verändern können. Dieses Prinzip ist für Unterseeboote übernommen worden.

**Pumpen** Die gleichmäßige Ausbreitung des Stempeldruckes wird in der Kolbenpumpe ausgenutzt, um Flüssigkeiten oder Gase zu transportieren. Um einen dauernden Flüssigkeits-

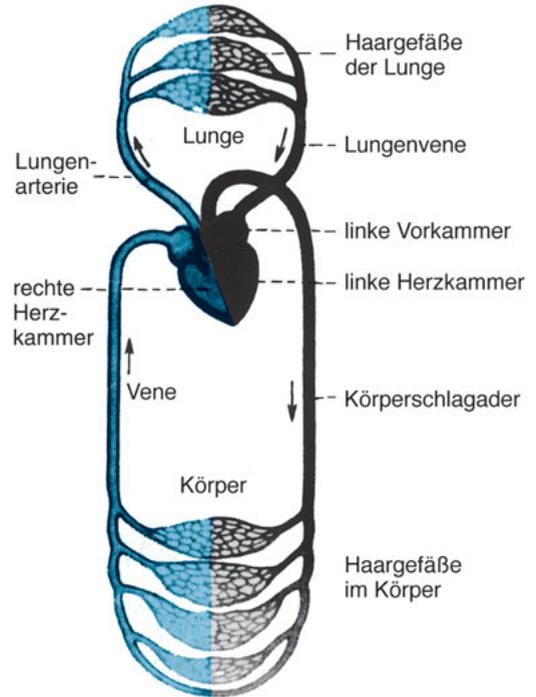


**Abb. 5.23** Kolbenpumpe: (a) Ansaugvorgang, (b) Ausstoßvorgang.

stromfluss zu erreichen, muss der Kolbenraum mit zwei Ventilkappen, dem Einlassventil und dem Auslassventil versehen werden.

In Abb. 5.23 sind die beiden Takte des Pumpvorganges dargestellt. Sie wiederholen sich periodisch. In Abb. 5.23a bewegt sich der Stempel nach oben, der Druck im Kolbenraum  $p_2$  wird unter den Druck im Vorratsgefäß  $p_1$  abgesenkt, der sich aus Schwere- und Atmosphärendruck zusammensetzt. Durch die Druckdifferenz  $p_1 - p_2$  wird das Einlassventil geöffnet und Flüssigkeit in den Kolbenraum gedrückt. Das Auslassventil, das in umgekehrter Richtung öffnet, bleibt dabei geschlossen. Bei der darauffolgenden Abwärtsbewegung des Kolbens wird der Druck im Kolbenraum stark erhöht, die Klappe des Einlassventils wird zugepresst, während das Auslassventil öffnet, durch das die Flüssigkeit in das Rohr entweicht (Abb. 5.23b).

In der technischen Ausführung von Förderpumpen ist diese Methode in verschiedenartiger Weise abgeändert worden, z. B. indem man die Auf- und Abbewegung des Kolbens durch eine Rotationsbewegung ersetzt hat. Sie beruht jedoch stets auf dem Prinzip der Druckausbreitung und der dadurch gesteuerten Öffnung und Schließung von Ventilen. Übrigens lässt sich mit einer Pumpe nicht nur Flüssigkeit oder Gas kontinuierlich transportieren (fördern), sondern man kann die Pumpe bei Gasen auch zur Erzeugung von



Blutkreislauf des Menschen

**Abb. 5.24** Herz mit Körper- und Lungenkreislauf (schematisch). Blick des Arztes auf den Patienten.

Überdruck (*Kompressor*) oder Unterdruck (*Vakuumpumpe*) verwenden.

Das *Herz*, durch dessen Pumparbeit der Blutkreislauf aufrecht erhalten wird, ist eine Doppelpumpe mit zweimal zwei Ventilen, wie in Abb. 5.24 dargestellt. Von der rechten Herzkammer wird das Blut durch den Lungenkreislauf gefördert, gelangt dann über den linken Vorhof in die linke Herzkammer, von dort in den Körperkreislauf und anschließend über den rechten Vorhof zurück in die rechte Kammer. Die Kompression in den beiden Pumpenräumen, der rechten und linken Herzkammer, wird durch Kontraktion des Herzmuskels erzielt. Unter Ruhebedingungen werden von jeder Kammer pro Herzschlag  $70 \text{ cm}^3$  Blut gepumpt. Hierbei hat die rechte Kammer gegen den Blutdruck in der *Arteria pulmonalis* (von etwa  $20 \text{ mm Hg} \approx 2,6 \text{ kPa}$ ) und die linke Kammer gegen den Blutdruck in der *Aorta* (von ca.  $120 \text{ mm Hg} \approx 16 \text{ kPa}$ ) Blut zu fördern. Bei 60 Herzschlägen pro Mi-

nute ergibt sich für die Förderleistung, das sog. Schlagvolumen, einer Kammer (unter Ruhebedingung):

$$70 \cdot 60 \text{ cm}^3 \text{ min}^{-1} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ min}^{-1} \\ = 4,2 \text{ Liter min}^{-1}.$$

Beide Kammern verrichten genau die gleiche Förderleistung, da sonst im Lungen- bzw. Körperkreislauf ein Stau auftreten würde.

Bei erhöhten Anforderungen, insbesondere bei Muskelarbeit, steigt die Förderleistung des Herzens bis zum 5fachen dieses Wertes an. Dies geschieht durch Steigerung der Schlagfrequenz, wobei sich zudem der Pumpendruck, d. h. der Blutdruck am Herzausgang erhöht. Im Gegensatz zu den meisten technischen Pumpen ist das Herz also sehr anpassungsfähig. Die optimale Anpassung an die jeweiligen Erfordernisse erfolgt nach dem Prinzip der Regelung. Die an einer strömenden Flüssigkeit verrichtete Förderarbeit (*Volumenarbeit*, Kap. 10.5) errechnet sich aus der Kraft  $F$ , die auf die Querschnittsfläche  $A$  der Flüssigkeit drückt, und aus der Wegstrecke  $s$ , um die das Flüssigkeitsvolumen  $V = As$  vorwärts geschoben wird:  $W = Fs = (F/A) \cdot (As) = pV$ . Die Förderarbeit des Herzens ergibt sich also aus dem ausgeworfenen Volumen  $V$  der beiden Ventrikel und dem in der *Arteria pulmonalis* und in der *Aorta* herrschenden Blutdruck:

$$W = p_{\text{Arteria pulmonalis}} V + p_{\text{Aorta}} V. \quad (5-19)$$

Geht man von  $70 \text{ cm}^3$  je Ventrikel und Blutdrucken von 20 bzw. 120 mm Hg aus, so ergibt sich pro Herzschlag eine Arbeit von 1,27 Joule. Bei einer Herzfrequenz von 1 Hz beträgt die Arbeit während eines Tages  $1,09 \cdot 10^5 \text{ Joule} = 27 \text{ kcal}$ . Dies sind etwa 1,3% des *Grundumsatzes* (Kap. 12.6).

### 5.3.3 Hydrodynamik

#### 5.3.3.1 Die Kontinuitätsgleichung

Um die Vorgänge in strömenden Flüssigkeiten durch einfache Gesetze beschreiben zu können, verwenden wir zunächst das *Modell der „idealen Flüssigkeit“*. Dieses Modell weist folgende Vereinfachungen auf:

1. Die Kompressibilität der Flüssigkeit wird vernachlässigt; sie wird als *inkompressibel* angesehen.

2. Die Wechselwirkung zwischen den strömenden Flüssigkeitsmolekülen, d. h. die innere Reibung (*Viskosität*) (Kap. 5.3.3.2.1), wird außer acht gelassen; die Flüssigkeit bewegt sich reibend an der Rohrwand entlang (äußere Reibung, Kap. 5.3.3.2.1).

Strömt eine ideale Flüssigkeit durch ein Rohr mit konstantem Querschnitt  $A$ , so dass ihre Geschwindigkeit  $\vec{v}$  nach Betrag und Richtung dauernd beibehalten wird, so nennen wir die Strömung *stationär*. Verändert sich der Rohrquerschnitt, so gilt die *Kontinuitätsgleichung*:

$$Av = \text{konstant}$$

bzw.

$$\frac{V}{t} = \text{konstant}. \quad (5-20)$$

wobei  $V$  das Flüssigkeitsvolumen ist, das in der Zeit  $t$  durch den Querschnitt  $A$  des Rohres fließt.

Nach Gl. (5-20) muss der Flüssigkeitsstrom (Stromfaden) bei kleiner werdenden Querschnitten des Rohres schneller fließen. In dem zwischen  $A_1$  und  $A_2$  liegenden Bereich der Abb. 5.25 erfährt der Stromfaden demnach eine Beschleunigung. Diese wird nach den Gesetzen der Mechanik von einer Kraft bewirkt, die über die Querschnittsfläche  $A$  an der Flüssigkeit angreift. Zwischen dem linken ( $A_1$ ) und dem rechten Teil ( $A_2$ ) des Rohr-

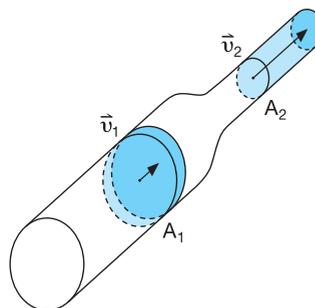


Abb. 5.25 Zur Kontinuitätsgleichung.

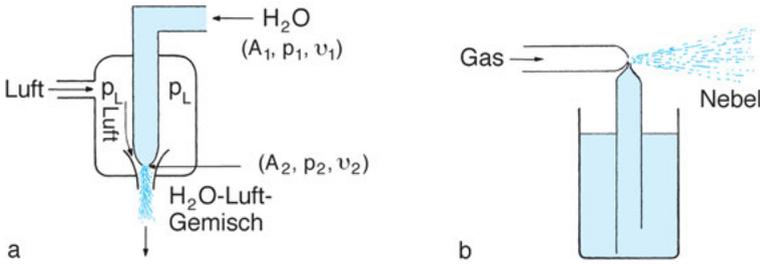


Abb. 5.26 (a) Wasserstrahlpumpe, (b) Zerstäuber.

stücks besteht also ein Druckgefälle. Daraus folgt, dass an dem Ort größerer Geschwindigkeit  $A_2$  ein geringerer Druck herrscht als bei  $A_1$ . Dies lässt sich verallgemeinern: An Orten größerer Strömungsgeschwindigkeit herrscht in Flüssigkeiten (oder auch in Gasen) ein geringerer Druck.

Bei idealen Flüssigkeiten können wir diese Druckänderung quantitativ angeben. Ausgehend vom Energieerhaltungssatz, nach dem die Summe aus Volumenarbeit  $pV$  (Gl. (5-19)), potentieller Energie (Gl. (3-5)) und kinetischer Energie (Gl. (3-8b)) in einem abgeschlossenen System konstant ist,

$$pV + mgh + \frac{m}{2} v^2 = \text{konstant},$$

erhalten wir nach Division durch das Volumen:

$$p + gh_{\text{Flüss}} + \frac{\rho_{\text{Flüss}}}{2} v^2 = \text{konstant} \quad (5-21)$$

Außendruck + Schweredruck + Staudruck = konstant.

Gl. (5-21) heißt *Bernoulli'sche Gleichung*. Sie besagt in Worten: In Gebieten größerer Strömungsgeschwindigkeit ist der sich aus Außendruck und Schweredruck zusammensetzende statische Druck in der Flüssigkeit und damit auch der Druck auf die Wände des Rohres kleiner als in Gebieten kleinerer Strömungsgeschwindigkeit.

Gl. (5-21) gilt quantitativ nur für ideale Flüssigkeiten, aber auch bei realen Flüssigkeiten und Gasen kann man beobachten, dass bei Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit der sich aus Außendruck und Schweredruck zu-

sammensetzende Druck vermindert. Darauf beruhen die im Folgenden angegebenen Beispiele.

**Wasserstrahlpumpe** Sie wird als einfache Gaspumpe zur Erzeugung von Vakuum ( $p > 2000 \text{ Pa} \approx 15 \text{ mm Hg}$ ) verwendet. In Abb. 5.26a durchfließt ein Wasserstrahl am unteren Ende der Glasröhre einen verengten Querschnitt  $A_2$  ( $A_2 < A_1$ ). Entsprechend Gl. (5-20) ist die Austrittsgeschwindigkeit  $v_2$  des Wassers daher größer als seine Einlaufgeschwindigkeit  $v_1$ . Ist  $A_2$  klein genug, dann kann nach Gl. (5-21) der Druck  $p_2$  an der Auslauföffnung  $A_2$  kleiner sein als der umgebende Luftdruck  $p_L$ , und das Wasser saugt Luft an und reißt sie mit sich fort. Ganz analog wird in Schiffsventilatoren der Fahrtwind ausgenutzt, um den Schiffsrumpf zu entlüften.

**Zerstäuber** Die Umkehrung der Wasserstrahlpumpe ist in gewisser Weise der Zerstäuber (Abb. 5.26b). Hier wird durch einen Gasstrom (in der Spraydose z. B. durch Verdampfen des Flüssiggases erzeugt) Flüssigkeit in einem Steigrohr angesaugt und zugleich in kleine Tröpfchen zersprüht.

**Bunsenbrenner** Im Bunsenbrenner (Abb. 5.27) saugt das mit Überdruck ausströmende Leuchtgas durch die seitliche Öffnung Luft an, so dass dem Gas der zu seiner vollständigen Verbrennung nötige Sauerstoff zugeführt werden kann. Die Sauerstoffzufuhr lässt sich durch die Größe der Öffnung regeln.

**Abdecken eines Daches** Bläst der Wind mit großer Geschwindigkeit über ein Dach hinweg, dann entsteht entsprechend dem Bernoulli'schen Gesetz auf der Dachaußenseite gegenüber dem Dachinnern ein Unterdruck.

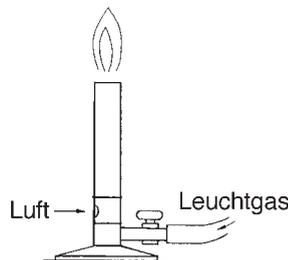
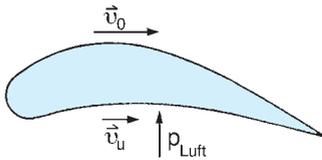


Abb. 5.27 Bunsenbrenner.



**Abb. 5.28** Strömungsauftrieb an einer Flugzeugtragfläche.

Der von innen nach außen wirkende größere Druck drückt die Dachplatten vom Dachstuhl weg. (Es ist also nicht so, dass der außen über das Dach fegende Wind die Platten selbst mit sich fortreißt.)

**Strömungsauftrieb an einer Flugzeugtragfläche** Durch die besondere, in Abb. 5.28 gezeigte Form der Tragfläche wird erreicht, dass die Luft oberhalb des Flügels schneller strömt als unterhalb, sobald das Flugzeug sich bewegt. Erhöhte Strömungsgeschwindigkeit auf der Oberseite des Flügels erzeugt Unterdruck gegenüber dem bei geringerer Strömungsgeschwindigkeit auf die Unterseite einwirkenden Druck. Durch dieses Druckgefälle wird der Flügel und damit das Flugzeug in die Höhe gehoben.

### 5.3.3.2 Zähne Flüssigkeiten

#### 5.3.3.2.1 Viskosität

Im Folgenden wollen wir das Modell der *idealen Flüssigkeit* verlassen und uns mit *realen Flüssigkeiten* beschäftigen

Verschieben sich Atome oder Moleküle in *realen Flüssigkeiten* gegeneinander, so versuchen die Nachbarpartikeln infolge der Kohäsionskräfte, diese Bewegung zu behindern. Aneinander angrenzende Flüssigkeitsschichten können sich daher nur reibend gegeneinander verschieben. Diese *innere Reibung*, auch *Zähigkeit* oder *Viskosität* genannt, unterscheidet reale (zähe) von idealen (reibungsfreien) Flüssigkeiten.

Autofahrer wissen, dass bei strenger Kälte das Motoröl so zähflüssig werden kann, dass beim Starten Schwierigkeiten auftreten. Die Zähigkeit ist also temperaturabhängig. Sie steigt bei Flüssigkeiten allgemein mit sinkender Temperatur stark an.

Die Viskosität hängt von der Art und Stärke der Kohäsionskräfte und daher von der Art des Stoffes ab. Wir können sie also durch eine Materialkonstante quantitativ beschreiben. Zu deren Definition betrachten wir das in Abb. 5.29 dargestellte Experiment. Wir verschieben eine ebene Platte mit der Fläche  $A$  in einer Flüssigkeit parallel zu einer ebenen Wand. Dabei nehmen wir an, dass die Flüssigkeitsteilchen sowohl an der Platte selbst als auch an der Wand fest haften. Um die Platte mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  im Abstand  $x$  von der Wand zu verschieben, bedarf es einer Kraft, die sich i. a. als proportional zur Plattenfläche  $A$  und der Geschwindigkeit  $v$  und umgekehrt proportional zum Abstand  $x$  erweist:

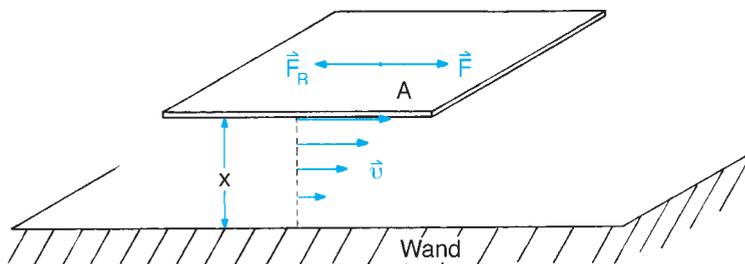
$$F = \eta A \frac{v}{x} . \quad (5-22)$$

Sie wirkt entgegen der gleich großen Reibungskraft (vgl. Gl. (2-26)):

$$F_R = -\eta A \frac{v}{x} . \quad (5-23)$$

Die Proportionalitätskonstante  $\eta$  beschreibt die Stärke der Reibung. Man nennt  $\eta$  die *Viskosität* oder den *Koeffizienten der inneren Reibung* mit der SI-Einheit  $\text{N s m}^{-2}$  oder  $\text{Pa s}$ .

Bei den meisten Flüssigkeiten ist  $\eta$  eine Konstante und hängt weder von der Kraft (bzw. dem Druck) noch von der Geschwindigkeit ab. Solche Flüssigkeiten nennt man *Newton'sche Flüssigkeiten*. Suspensionen, also Mi-



**Abb. 5.29** Zur Definition der Viskosität.

schungen kleiner Teilchen wie Erythrozyten mit Flüssigkeiten, folgen dieser Gesetzmäßigkeit dagegen nicht und werden als *Nicht-Newton'sche Flüssigkeiten* bezeichnet. Die Erklärung für diese Abweichung ist beim Blut in der Form der Erythrozyten zu finden: Ein Erythrozyt gleicht einem flachen Diskus, der sich bei größer werdendem Druck in der Flüssigkeit mit seiner Flachseite zunehmend parallel zur Stromrichtung einstellt, was die Viskosität des Blutes erniedrigt.

Die Viskosität des Blutes wird meist als Relativwert, bezogen auf Wasser derselben Temperatur angegeben. Sie ist etwa vier mal so groß wie diejenige des Wassers (Tab. 5.4). Sie hängt von der Zahl der Erythrozyten ab und wird folglich bei denjenigen Krankheiten erhöht sein, bei denen die Zahl der Erythrozyten vermehrt ist. Eine Erhöhung der Viskosität bedeutet eine größere innere Reibung und bedingt damit eine höhere Leistung, wenn pro Zeiteinheit die gleiche Blutmenge wie im Normfall durch das Gefäßsystem fließen soll. Diese erhöhte Leistung muss vom aktiven Element des Gefäßsystems, dem Herzen, aufgebracht werden.

Werden Platte und Wand in Abb. 5.29 von der Flüssigkeit benetzt, ist also die Adhäsion größer als die Kohäsion, so haften die an Platte bzw. Wand angrenzenden Flüssigkeitsschichten fest und besitzen die Geschwindigkeit  $v$  bzw. 0. Die dazwischen liegenden Flüssigkeitlamellen nehmen infolge der inneren Reibung Geschwindigkeiten zwischen  $v$  und 0 an, und zwar so, dass die Geschwindigkeitsabnahme quer zur Strömung, das *Geschwindigkeitsgefälle*  $dv/dx$ , zwischen Platte und Wand konstant ist. Die Reibung erfolgt nur zwischen den Molekülen in der Flüssigkeit, und dies erklärt die Bezeichnung *innere Reibung*.

Ist dagegen die Kohäsion größer als die Adhäsion, dann bewegen sich Flüssigkeits-

schichten reibend an der Wand entlang. Diese Reibung zwischen Flüssigkeit und Wand bezeichnen wir als *äußere Reibung*.

**Viskositätsmessung** Die Messung von Viskositätseigenschaften, *Rheologie* genannt, hat große praktische Bedeutung für Emulsionen, Pasten, flüssigen Kolloiden (Solen), Farben, Ölen, Pharmazeutika usw. Bei Newton'schen Flüssigkeiten ist  $\eta$  als eine Materialkonstante zu bestimmen (die freilich stark mit der Temperatur variieren kann). Bei Nicht-Newton'schen Flüssigkeiten misst man die Abhängigkeit  $\eta = \eta (dv/dx)$ , wobei  $dv/dx$  das Geschwindigkeitsgefälle ist.

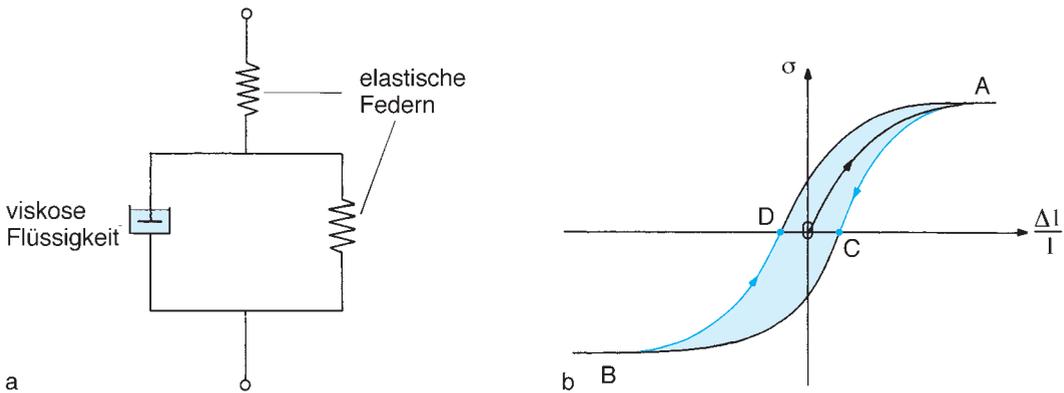
Die *Viskosimeter* genannten Messgeräte lassen sich in 3 Gruppen einteilen: die Kapillar-Viskosimeter, die auf dem Hagen-Poiseuille'schen Gesetz (Gl. (5-27)) beruhen, die Kugelfall-Viskosimeter, die im Prinzip das Stokes'sche Gesetz (Gl. (5-28)) ausnutzen, und die Rotationsviskosimeter, bei denen ein Körper in einem mit der Flüssigkeit gefüllten Gefäß rotiert, und man dabei die Drehmoment-Übertragung auf die Gefäßwand misst.

**Viskoelastizität** Viele hochpolymere Stoffe wie Kautschuk zeigen zwei Bereiche verschiedenartiger Elastizität. Bei tiefen Temperaturen, bei denen man Gummi als *eingefroren* bezeichnen kann, ist er elastisch, und sein Elastizitätsmodul ist vergleichbar mit dem von Metallen ( $10^9$  bis  $10^{10}$  N m<sup>-2</sup>). Bei höheren Temperaturen jedoch sind die Werte des Elastizitätsmoduls so gering ( $10^6$  bis  $10^7$  N m<sup>-2</sup>) wie bei keiner anderen Stoffgruppe. Und schon bei kleinen Belastungen folgen diese Stoffe nicht mehr dem Hooke'schen Gesetz. Man bezeichnet diesen Zustand als *gummielastisch* oder *viskoelastisch*. Diese Bezeichnung rührt davon her, dass sich die Verformung aus einem elastischen Anteil und einem u. U. sehr langsam erfolgenden inelastischen Anteil zusammensetzt, der das Material unter Spannung wie eine hochviskose Flüssigkeit fließen lässt (*Nachwirkung*).

Man kann dieses Verhalten durch mechanische Modelle (Abb. 5.30a) nachbilden, die sich aus viskosen Elementen, bei denen die zeitliche Ableitung der Verformung (d. h. die Verformungsgeschwindigkeit) pro-

**Tab. 5.4** Viskosität  $\eta$  einiger Flüssigkeiten und von Luft

Substanz (bei 20 °C)	Öle	Glyzerin	Blut ♂ Mittelwert	Blut ♀ Mittelwert	Äther	Hg	H <sub>2</sub> O	Luft
$\eta$ (Pa s)	1	0,83	0,0047	0,0044	0,0018	0,0015	0,001	$1,8 \cdot 10^{-5}$



**Abb. 5.30** (a) Mechanisches Modell eines viskoelastischen Stoffes (Stoßdämpfer), (b) elastische Hysterese.

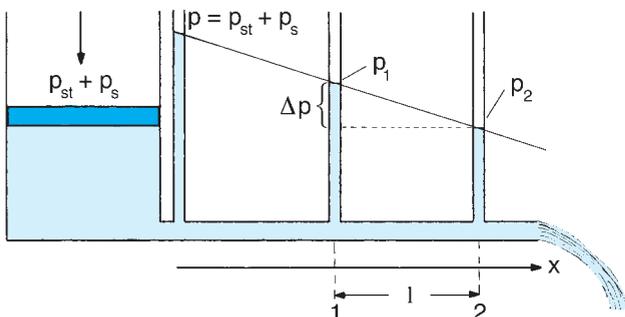
portional zur Spannung  $\sigma$  ist, und aus elastischen Elementen wie Spiralfedern (bei denen die Verformung selbst zur Spannung proportional ist) zusammensetzen.

Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ergibt sich wegen des inelastischen Anteils keine Hooke'sche Gerade (vgl. Gl. (5-3)), sondern eine *Hysterese-Kurve*. Unter Hysterese versteht man, dass bei Be- und Entlastung verschiedene Kurven durchlaufen werden. Geht die Spannung auf Null zurück, so bleibt eine Verformung übrig, die erst durch eine zusätzliche Druckspannung rückgängig gemacht werden kann. Belastet man einen viskoelastischen Stoff periodisch durch Zug und Druck, indem man ihn z. B. in Schwingungen versetzt, so durchläuft er die in Abb. 5.30b gezeigte Kurve. Hierbei ist die zur Verformung (Kurvengstück 0 bis A) aufzuwendende Arbeit größer als bei Entspannung (Kurvengstück von A bis C) freiwerdende Arbeit. Beim Durchlaufen der gesamten Hysterese-Kurve ist also ein der Fläche ACBD entsprechender Betrag an Verformungsenergie verloren gegangen, z. B. durch innere Reibung in Wärme umgesetzt worden. Wird das Material zu Schwingungen ange regert, dann geht bei jedem Durchlauf der Hysterese-Kurve ein solcher Energieanteil verloren. Die Schwingung des Materials verläuft also gedämpft. Die technische Ausnutzung dieses Vorganges ist weit verbreitet (Stoßdämpfer, Antiröhnmittel usw.).

### 5.3.3.2 Laminare Strömung

Strömt eine reale Flüssigkeit durch ein Rohr, dann ist die Strömungsgeschwindigkeit wegen der inneren Reibung im Rohr-Innern größer als in der Nähe der Wand. Werden dabei infolge ihrer unterschiedlichen Geschwindigkeiten benachbarte Flüssigkeitsschichten parallel zueinander verschoben, so nennen wir diese Strömung *schlicht* oder *laminar*. Treten jedoch beim Strömungsvorgang, etwa durch Hindernisse im Rohr, Wirbel auf, so verläuft die Strömung *turbulent*.

**Druckgefälle in einem Rohr** Drücken wir mittels eines Kolbens Flüssigkeit aus einem Vorratsgefäß durch ein Rohr mit offener Ausflussöffnung (Abb. 5.31), so kann wegen der inneren Reibung die Flüssigkeit nicht be-



**Abb. 5.31** Druckgefälle in einem Rohr beim Ausfließen einer Flüssigkeit.

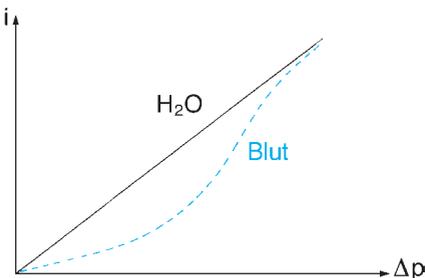
liebig schnell ausfließen. Die Reibung erzeugt einen Strömungswiderstand, und der sich aus Stempeldruck  $p_{St}$  und Schweredruck  $p_S$  zusammensetzende Druck  $p$ , der sich im Vorratsgefäß bis zur Rohröffnung gleichmäßig ausgebreitet hat, nimmt im Rohr allmählich ab. Hat das Rohr konstante Dicke und ist die Strömung laminar, so sinkt, wie in Abb. 5.31 gezeichnet, der Druck linear, das Druckgefälle  $dp/dx$  ist also konstant. Dies können wir durch die Steighöhe in den eingezeichneten Flüssigkeitsmanometern messen. Jedes Flüssigkeitsvolumen der Länge  $l$  wird also durch die Druckdifferenz

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{dp}{dx} l \tag{5-24}$$

durch das Rohr gedrückt.

**Stromstärke-Druck-Abhängigkeit** Für das Verständnis des Blutkreislaufs ist die Frage wichtig, wie die durch ein Rohr strömende Menge einer realen, also viskosen Flüssigkeit quantitativ durch Druckänderungen beeinflusst werden kann. Messen wir die Durchflussmenge durch ein Rohr bei laminarer Strömung in Abhängigkeit vom Druck  $\Delta p$  und tragen den Zusammenhang zwischen Stromstärke  $i$  und  $\Delta p$  in ein Diagramm (Abb. 5.32) ein, so erhalten wir bei vielen Flüssigkeiten eine Gerade; ihre Steigung ist gleich dem reziproken Strömungswiderstand,  $1/R$ .

Flüssigkeiten, bei denen sich ein linearer Zusammenhang zwischen  $i$  und  $\Delta p$  ergibt, d. h. der Strömungswiderstand für alle



**Abb. 5.32** Stromstärke-Druckdifferenz-Diagramm (Wasser ist eine Newton'sche-, Blut dagegen eine Nicht-Newton'sche Flüssigkeit).

Drücke derselbe ist, sind *Newton'sche Flüssigkeiten* (Kap. 5.3.3.2.1). Für sie gilt:

$$i = \frac{\Delta p}{R} \tag{5-25}$$

Die *Stromstärke*  $i$  bezeichnet das pro Zeit  $t$  durch das Rohr fließende Flüssigkeitsvolumen  $V$ :

$$i = \frac{V}{t} \text{ mit der SI-Einheit } m^3 s^{-1} .$$

Der Faktor  $R$  beschreibt den *Strömungswiderstand*, der durch die Druckdifferenz  $\Delta p$  zu überwinden ist, damit es überhaupt zum Stromfluss kommt;  $R$  hängt von der Geometrie des Rohres und von der Art der Flüssigkeit ab.

Der durch Gl. (5-25) beschriebene Zusammenhang hat Ähnlichkeit mit dem Ohm'schen Gesetz des elektrischen Stromes (Kap. 14.5). In beiden Fällen ist die Stromstärke über einen Widerstand linear mit einer treibenden Kraft verknüpft, die hier aus der Druckdifferenz  $\Delta p$  und dort aus der elektrischen Potentialdifferenz  $U$  resultiert.

Für den praktisch wichtigen wie auch einfachen Fall eines zylindrischen Rohres ist der Strömungswiderstand  $R$  gegeben durch:

$$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4} , \text{ mit der SI-Einheit } N s m^{-5} . \tag{5-26}$$

$l$  bezeichnet die Rohrlänge und  $r$  den Rohrradius. Damit ergibt sich aus Gl. (5-25) die folgende Beziehung für die Stromstärke  $i$ :

$$i = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p . \text{ (Hagen-Poiseuille'sches Gesetz)} \tag{5-27}$$

Nach Gl. (5-27) ist also  $i$  proportional zur 4. Potenz des Rohrradius und umgekehrt proportional zur Rohrlänge. Die Abhängigkeit von  $r^4$  ist besonders wichtig für die Regelung der Blutzirkulation (vgl. Kap. 5.3.2.2.4).

Ergibt sich jedoch kein linearer Zusammenhang zwischen  $i$  und  $\Delta p$ , so haben wir es mit einer *Nicht-Newton'schen Flüssigkeit* zu

tun; zu diesen zählt beispielsweise das Blut. In derartigen Flüssigkeiten ist die Viskosität  $\eta$  und damit auch der Strömungswiderstand  $R$  vom Druck abhängig. Da bei Blut mit zunehmendem Druck der Strömungswiderstand kleiner wird, steigt dort die Stromstärke stärker als proportional mit dem Druck an.

**Sedimentation** Innere Reibung beeinflusst auch die Bewegung eines Fremdkörpers in ruhenden Flüssigkeiten, wenn dieser Körper von der umgebenden Flüssigkeit benetzt wird. Diese Reibung entsteht dadurch, dass die an dem Körper haftenden Flüssigkeitsteilchen die Geschwindigkeit des Körpers besitzen und damit ein Geschwindigkeitsgefälle in der Flüssigkeit vom Körper weg erzeugen. Fällt z. B. eine Kugel in eine viskose Flüssigkeit, so wird sie durch die um die Auftriebskraft  $F_A$  verminderte Gravitationskraft  $F_S$  gerade so weit beschleunigt, bis die resultierende Kraft  $F_S - F_A$  durch die Reibungskraft  $F_R$  kompensiert wird. Mit konstanter Sinkgeschwindigkeit gleitet die Kugel dann kräftefrei weiter.

Die Reibungskraft ist unter Voraussetzung laminarer Strömung, kleiner Sinkgeschwindigkeit und von im Vergleich zum Kugeldurchmesser großem Gefäßdurchmesser gegeben durch das *Stokes'sche Gesetz*:

$$F_R = -6\pi\eta vr. \quad (5-28)$$

Dabei bedeuten  $r$  den Radius und  $v$  die Geschwindigkeit der Kugel. Im Gleichgewicht gilt  $F_S - F_A + F_R = 0$ , d. h.

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{Kugel}} g - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{Flüss}} g - 6\pi\eta v_s r = 0, \quad (5-29)$$

woraus sich die konstante *Sink- oder Sedimentationsgeschwindigkeit*  $v_s$  berechnen lässt:

$$v_s = 2r^2(\rho_{\text{Kugel}} - \rho_{\text{Flüss}}) \frac{g}{9\eta}. \quad (5-30)$$

Die Größen  $\rho_{\text{Kugel}}$  bzw.  $\rho_{\text{Flüss}}$  sind die Dichten des Kugelmaterials bzw. der viskosen Flüssigkeit. Aus Gl. (5-30) entnehmen wir,

dass die Bestimmung der Sedimentationsgeschwindigkeit sehr kleiner Partikel Informationen liefern kann über ihre Größe und Dichte und auch über die Viskosität von Flüssigkeiten. Da  $v_s$  proportional zur Beschleunigung  $g$  ist, lässt sich unter Zuhilfenahme einer Zentrifuge (siehe Kap. 2.2.2.3) die Sedimentationsgeschwindigkeit beträchtlich vergrößern.

Die älteste medizinische Anwendung der Sedimentation ist die Bestimmung der *Blutkörperchen-Senkungsgeschwindigkeit* (BSG). Hierzu bringt man das Blut in nicht zu enge Glasröhren und beobachtet, um welche Strecke  $\Delta x$  während einer bestimmten Zeit  $\Delta t$  (1 bis 2 h) durch Sedimentation der Blutkörperchen die Trennfläche zwischen dem Plasma und dem roten Erythrozyten-Plasma-Gemisch absinkt. Die Sedimentationsgeschwindigkeit ergibt sich nach Gl. (1-7) als Quotient aus  $\Delta x$  und  $\Delta t$ :  $v_s = \Delta x / \Delta t$ . Die so gemessenen Senkungsgeschwindigkeiten (Normalwerte für Männer  $0,8 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$  bis  $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$ , für Frauen  $1,7 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$  bis  $3,4 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-1}$ ) sind wesentlich kleiner, als es Gl. (5-30) entspricht. Dies wird im Wesentlichen der elektrischen Ladung der Oberflächen der Erythrozyten durch Adhäsion von Eiweißen zugeschrieben. Bei einer ganzen Reihe von Krankheiten kommt es zur Verringerung dieser Ladung und damit zum Aneinanderhaften von Erythrozyten (Geldrollenbildung), wodurch die Senkungsgeschwindigkeit erhöht wird. Diese wird daher als unspezifischer Indikator von Krankheiten routinemäßig benutzt.

Beim Zentrifugieren kann Gl. (5-30) auf zwei verschiedene Arten zur Trennung von Teilchen verschiedener Dichte genutzt werden. Bei der *Zonenzentrifugation* werden Flüssigkeiten verschiedener Dichte übereinander geschichtet. Dies ist in Abb. 5.33 an dem einfachen Beispiel von Blut und einer isotonen Lösung aus einem Mehrfachzucker und einer jodierten Ringverbindung der Dichte  $1076 \text{ kg m}^{-3}$  gezeigt. Da die Lymphozyten eine geringere Dichte als  $1076 \text{ kg m}^{-3}$  haben, können sie die Trennfläche nicht

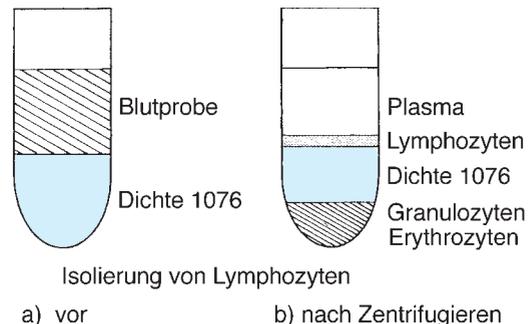


Abb. 5.33 Zonenzentrifugation.

durchdringen, da zuvor ihre Geschwindigkeit Null wird. Erythrozyten und Granulozyten mit ihrer Dichte  $> 1076 \text{ kg m}^{-3}$  setzen sich auf dem Boden des Zentrifugenröhrchens ab. Damit hat man ein einfaches Verfahren, um Lymphozyten für immunologische Bestimmungen zu isolieren.

Bei der *Ultrazentrifugation* werden große Zentrifugalbeschleunigungen von ca. 250000 g erreicht (vgl. Kap. 2.2.2.3). Man verwendet die Ultrazentrifugation einerseits als Verfahren zur Zonenzentrifugation. Andererseits hat sie als Verfahren zur Bestimmung der Sedimentationsgeschwindigkeit  $v_s$  von Eiweißen große Bedeutung erlangt. Da  $v_s$  nach Gl. (5-30) der Zentrifugalbeschleunigung  $a$  proportional ist, wird zur Charakterisierung der verschiedenen Eiweiße deren Sedimentationskonstante  $S = v_s/a$  benutzt. Den Wert von  $S = 10^{-13} \text{ s}$  bezeichnet man als *Svedberg-Einheit*.

**Gesetze der laminaren Flüssigkeitsströmung**

Verzweigen wir, wie in Abb. 5.34a gezeigt, den laminaren Flüssigkeitsstrom  $i$  einer Kapillare in zwei Teilströme der Stromstärken  $i_1$  und  $i_2$ , dann muss die Summe aus  $i_1$  und  $i_2$  den Gesamtstrom  $i$  ergeben, da nirgends Flüssigkeit verloren geht:

$$i = i_1 + i_2 \tag{5-31}$$

Zwischen den Enden der beiden verzweigten Kapillaren herrscht dieselbe Druckdifferenz, d. h.  $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p$ . Aus der Verteilung der Teilströme auf die beiden Kapillaren

folgt nach Gl. (5-25):

$$i_1 : i_2 = \frac{\Delta p}{R_1} : \frac{\Delta p}{R_2} = R_2 : R_1 \tag{5-32}$$

Gl. (5-32) besagt, dass sich die Stromstärken der Teilströme umgekehrt wie die Strömungswiderstände verhalten. Zur Berechnung des effektiven Strömungswiderstandes  $R_{\text{eff}}$  zweier *parallel geschalteter Kapillaren* addieren wir  $i_1$  und  $i_2$  und erhalten

$$i = i_1 + i_2 = \frac{\Delta p}{R_1} + \frac{\Delta p}{R_2} = \frac{\Delta p}{R_{\text{eff}}} \tag{5-33}$$

und daraus:

$$\frac{1}{R_{\text{eff}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{5-34}$$

In Worten: Der reziproke Widerstand (auch *Leitwert* genannt) einer Kombination von parallelgeschalteten Widerständen ist gleich der Summe der reziproken Einzelwiderstände.

Für die Druckabfälle in hintereinander geschalteten Kapillaren gilt (Abb. 5.34b):

$$\Delta p_{AD} = \Delta p_{AB} + \Delta p_{BC} + \Delta p_{CD} \tag{5-35}$$

und weil in allen Kapillarabschnitten die Stromstärke gleich sein muss:

$$iR_{\text{eff}} = iR_1 + iR_2 + iR_3 \tag{5-36}$$

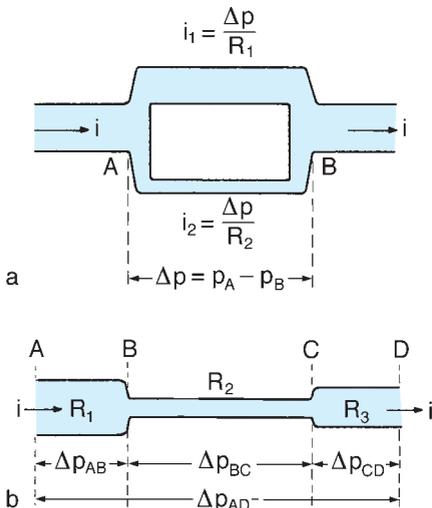
In Worten: Bei Hintereinanderschaltung von Kapillaren ist der gesamte Strömungswiderstand also gleich der Summe der Teilwiderstände:

$$R_{\text{eff}} = R_1 + R_2 + R_3 \tag{5-37}$$

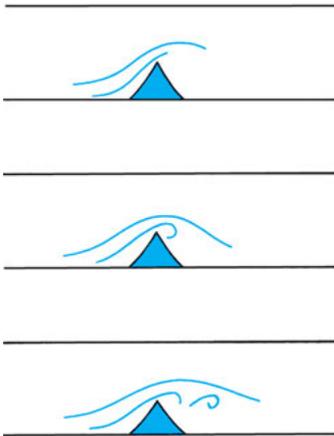
Den vier Gleichungen (5-31), (5-32), (5-34) und (5-37) werden wir bei der elektrischen Stromleitung in Leitersystemen (Kap. 14.6.3) unter der Bezeichnung *Kirchhoffsche Regeln* erneut begegnen.

**5.3.3.2.3 Turbulente Strömung**

Die *Turbulenz* (Verwirbelung einer Strömung) hat ihre Ursache in Unebenheiten im Strömungskanal, wie Ecken, Kanten, Fremdkörpern usw., die eine laminare Strömung stören.



**Abb. 5.34** Zu den Gesetzen der Flüssigkeitsströmung: (a) in parallel geschalteten und (b) in hintereinandergeschalteten Kapillaren.



**Abb. 5.35** Verwirbelung der Strömung in einem Rohr an einer Kante.

Befindet sich in einem Rohr eine Kante (Abb. 5.35), wird die Flüssigkeitsschicht, die direkt mit der Kante in Berührung steht (die Grenzschicht), eine kleinere Geschwindigkeit haben, als ihre von der Kante weiter entfernte Nachbarschicht. Die schnellere Schicht rollt dann auf der langsameren ab, wobei sich Wirbel bilden. Dies geschieht vor allem bei großen Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen den Nachbarschichten, also bei großer Geschwindigkeit der Strömung. Unterhalb einer kritischen Strömungsgeschwindigkeit  $v_K$  klingt die Verwirbelung der laminaren Strömung in einiger Entfernung von dem Hindernis wieder ab. Oberhalb dieses kritischen Wertes  $v_K$  jedoch bewegt sich die turbulente Strömung weiter durch das Rohr, ohne abzuklingen. Die Wirbel reißen dabei am Hindernis ab. Beim Einsetzen der Wirbelbildung werden Flüssigkeitselemente zur Drehbewegung angeregt. Die dazu nötige Rotationsenergie wird der kinetischen Energie der laminaren Strömung entzogen. Aufgrund des Energieerhaltungssatzes ist klar, dass dadurch die Strömungsgeschwindigkeit kleiner wird.

Beim Umschlagen der laminaren in turbulente Strömung macht sich das Einsetzen der Turbulenz durch eine plötzliche, kräftige Erhöhung des Strömungswiderstandes bemerkbar.

Die kritische Geschwindigkeit in einem Rohr, bei deren Überschreiten laminare in turbulente Strömung umschlagen kann, lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$v_K = \frac{K\eta}{\varrho r} . \quad (5-38)$$

- $\eta$ : Viskosität der Flüssigkeit.  
 $\varrho$ : Dichte der Flüssigkeit.  
 $r$ : Radius des durchströmten Rohres.  
 $K$ : Konstante (die dimensionslose *Reynolds'sche Zahl*). Sie ist für die meisten Flüssigkeiten, einschließlich des Blutes, etwa  $10^3$ , wenn in Gl. (5-38) SI-Einheiten verwendet werden.

#### 5.3.3.2.4 Strömungsgesetze und Blutkreislauf

Der Blutkreislauf des Menschen, wie er in Abb. 5.24 skizziert ist, besteht aus zwei hintereinander, d. h. in Reihe geschalteten Teilkreisläufen (Lungen- und Körperkreislauf) mit jeweils einer Pumpe, nämlich einer Herzkammer. Beide Herzkammern müssen vollständig synchron arbeiten und genau gleiches Schlagvolumen haben, damit diese Hintereinanderschaltung möglich ist und im einen oder anderen Kreislauf kein Stau entsteht. Unter sogenannten Ruhebedingungen werden von jeder Herzkammer pro Minute 4-5 Liter in die beiden Teilkreisläufe gepumpt (Herzminutenvolumen). Bei etwa 60 Herzschlägen pro Minute entspricht diesem Herzminutenvolumen ein Schlagvolumen von ca. 70 ml. Wegen der rhythmisch erfolgenden Pumpstöße ist der Blutdruck in den großen Gefäßen nicht konstant, er ist am größten während der Austreibung (Systole) und am kleinsten während der erneuten Füllung des Herzens (Diastole). Da der Strömungswiderstand im Lungenkreislauf wesentlich geringer ist als im Körperkreislauf, ist am Ausgang der rechten Herzkammer ein wesentlich geringerer Druck notwendig als am Ausgang der linken Herzkammer, um den gleichen Blutfluss aufrecht zu erhalten. Bei normaler Herzfunktion liegen die Druckwerte in der Arteria pulmonalis zwischen 2,6 und 1,3 kPa (20 und 10 mm

Hg) und in der Aorta zwischen 16 und 11 kPa (120 und 80 mm Hg). Die Unterschiede im Blutdruck zwischen Systole und Diastole wären noch wesentlich größer, wenn nicht durch die erhebliche Elastizität der großen Gefäße sich diese während der Systole dehnen würden, wodurch eine Speicherwirkung erreicht wird (*Windkesselfunktion* der Aorta).

Im Körperkreislauf erfolgt die Blutversorgung der verschiedenen Organe und Gewebe weitgehend parallel geschaltet. Das bedeutet, dass der Blutstrom durch die Aorta, die einen Durchmesser von ca. 2,5 cm hat, sich über die großen und kleinen Arterien bis hin zu den Kapillaren auf eine Vielzahl von Gefäßen mit immer kleinerem Durchmesser verzweigt. Da der Gesamtröhrenquerschnitt aller parallel verzweigten Gefäße ungefähr 1000 mal größer als der Querschnitt der Aorta ist, ist nach der Kontinuitätsgleichung (5-20) die Fließgeschwindigkeit des Blutes in den Kapillaren mit ca.  $0,0003 \text{ ms}^{-1}$  entsprechend kleiner als in der Aorta (ca.  $0,5 \text{ ms}^{-1}$ ). Dies begünstigt den Gas-, Stoff- und Wärmeaustausch in den Kapillaren. Da die Verzweigung und damit auch der Gesamtquerschnitt der Gefäße zu den großen Venen hin wieder abnimmt, nimmt entsprechend die Fließgeschwindigkeit des Blutes zur Vena Cava hin wieder zu.

Aufgrund des viel geringeren Querschnitts der einzelnen Kapillaren ist ihr Leitwert weit aus geringer als der der großen Gefäße. Deshalb fällt der Blutdruck mit zunehmender Verzweigung in den kleinen Gefäßen stark ab (Abb. 5.36), viel stärker, als wenn der Gefäßquerschnitt konstant bleiben würde, denn dann würde nämlich nach Abb. 5.31 das Druckgefälle konstant verlaufen.

Der Wölbungsdruck in zylindrischen Röhren, also auch in Blutgefäßen ( $p = \sigma/r$ ), unterscheidet sich von dem in sphärischen Gebilden ( $p = 2\sigma/r$ , Kap. 5.3.1) nur geringfügig und ist dem Blutdruck entgegen gerichtet. In den kleinsten Gefäßen sind Wölbungsdruck und Blutdruck von der gleichen Größenordnung ( $\sim 20$  Torr, Abb. 5.36). Mit zunehmendem Durchmesser wird der Wölbungsdruck jedoch kleiner als der Blutdruck; er beträgt für die Aorta nur noch einen Bruch-

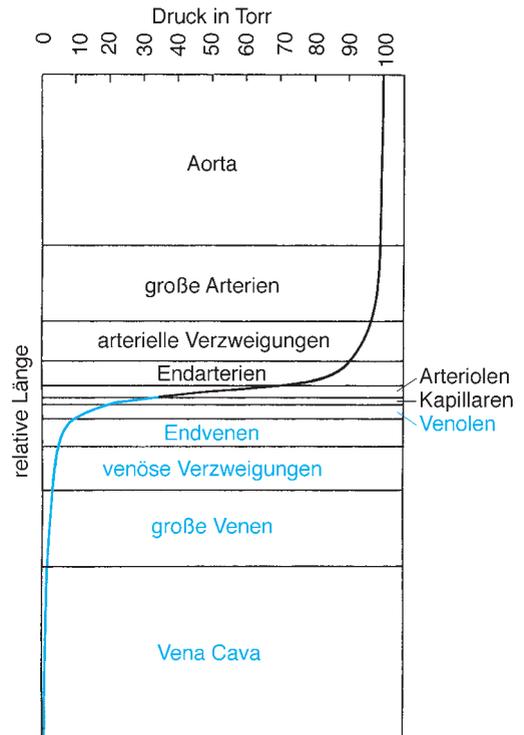


Abb. 5.36 Druckabfall über die einzelnen Abschnitte des Kreislaufs.

teil des dort herrschenden Blutdrucks von  $\sim 100$  Torr. Dies ist der Grund, weshalb die großen Gefäße dickwandiger als die kleinen sein müssen.

Besteht ein parallel geschaltetes Gefäßsystem aus *starr*en Röhren, dann entfällt auf die verschiedenen Gewebe und Körperregionen wegen Gl. (5-31) immer ein konstanter Teil des Gesamtflusses. Eine optimale Blutversorgung lässt sich jedoch nur erreichen, wenn diese Anteile je nach dem Bedürfnis des Organismus geändert werden können. So muss beispielsweise bei Muskelarbeit die Durchblutung der Muskeln auf Kosten der Verdauungsorgane und des Gehirns gesteigert werden. Eine entsprechende Regelung des Blutkreislaufs wird dadurch erreicht, dass die Gefäßdurchmesser durch die in den Gefäßwänden vorhandene glatte Muskulatur variiert werden. Da nach dem Hagen-Poiseuille'schen Gesetz der Strömungswiderstand sehr stark vom Rohrradius abhängt — er ist der 4. Po-

tenz des Rohrradius umgekehrt proportional — kann bereits durch geringfügige Änderungen des Radius die Stromstärke  $i$  sehr wirksam beeinflusst werden. Dadurch lassen sich bei gleicher Gesamtstromstärke die Teilstromstärken durch die einzelnen Organe, je nach deren Bedürfnissen, regulieren.

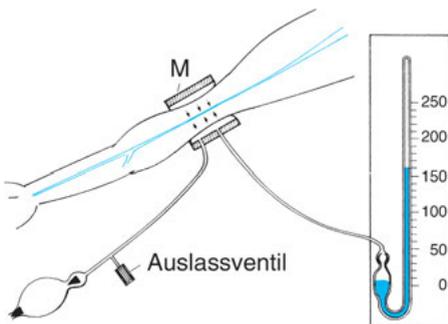
Der Strömungswiderstand ist in den großen Gefäßen nach Gl. (5-26) gering, damit ist in ihnen das Druckgefälle nur sehr gering. Daher ist der Blutdruck, den man üblicherweise an der Arterie misst, praktisch gleich dem Druck in der Aorta, unmittelbar am Ausgang des Herzens. Wie das Druckgefälle über die einzelnen Abschnitte des Kreislaufs verteilt ist, zeigt die Abb. 5.36.

Setzen wir entsprechende Zahlenwerte in Gl. (5-38) ein, so finden wir, dass auch in der Aorta, wo die Fließgeschwindigkeit am größten ist, noch laminare Strömung vorliegt. Turbulente Strömungen und die dabei erzeugten Wirbel sind im Organismus vor allem vorhanden, wenn es durch pathologische Prozesse zur weitgehenden Einengung einer großen Arterie kommt. Durch Wirbel entstehen Geräusche, die man mit dem *Stethoskop* hören kann. Bei der Messung des Blutdrucks werden künstlich Wirbel erzeugt. Gemäß Abb. 5.37 wird hierbei um den Oberarm eine aufblasbare Manschette gelegt, und der Druck in der Manschette wird mit einem Manometer gemessen. Ist der Druck der Manschette weit größer als der Arteriendruck, so wird die Arterie zusammengepresst und der Blutfluss unterbunden. Ist der Manschettendruck dagegen geringfügig kleiner als der systolische Ar-

teriendruck, so kann kurzzeitig während der Systole Blut durch die eingeschnürte Stelle der Arterie fließen. Dies geschieht mit turbulenter Strömung, weil nach der Kontinuitätsgleichung (5-20) in dem eingeschnürten Bereich die Strömungsgeschwindigkeit groß genug ist, um den Wert der kritischen Geschwindigkeit  $v_K$  (Gl. (5-38)) zu überschreiten. Die durch die Verwirbelung des Blutes entstehenden Geräusche kann man mit einem in der Ellenbogenbeuge aufgesetzten Stethoskop hören. Wird nun sukzessive der Druck in der Manschette  $M$  erniedrigt, so kann schließlich auch während der Diastole die Ader nicht mehr völlig abgequetscht werden, und es kommt zu einer dauernden turbulenten Strömung mit begleitenden Geräuschen. Bei weiterer Verminderung des Manschettendrucks kann die Arterie nicht mehr genügend eingengt werden, um turbulente Strömungen zu verursachen, und die Geräusche verschwinden. Den höchsten Druck, bei dem Geräusche wahrgenommen werden, bezeichnen wir als systolischen und den tiefsten als diastolischen Blutdruck. Sie werden meist als Kombination, zum Beispiel 120/80 mm Hg ( $1,60 \cdot 10^4/1,05 \cdot 10^4$  Pa), angegeben.

## 5.4 Nanotechnologie

Fast alle Eigenschaften von Nanomaterie weichen stark von denen des massiven Festkörpers ab. Ihre Anwendung hat zu einer neuen Technologie, zur *Nanotechnologie*, geführt. Um diese Eigenschaften zu beschreiben, werden die klassischen physikalischen Gesetze unserer Alltagswelt durch Gesetze der Quantenphysik ersetzt. Durch die Nanostrukturierung lassen sich neuartige und oftmals einzigartige Materialeigenschaften erzeugen und neuartige Funktionselemente wie z. B. Sensoren bauen, die mit konventionellen Materialien nicht zu realisieren sind. Das Besondere ist, dass diese neuartigen Eigenschaften von der Größe eines einzelnen Nano- bausteins abhängen, also durch gezielte Wahl der Größe steuerbar sind. Da diese Größen

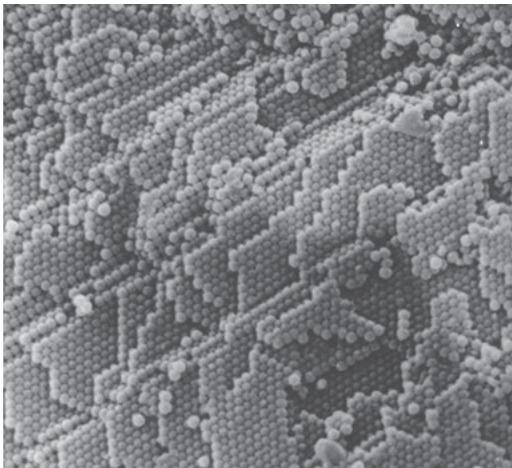


**Abb. 5.37** Blutdruckmessung am Arm (M: Manschette. Druckangabe in Torr).

in die Längenskala von Nanometern, d. h. von  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$  bis  $1000 \text{ nm} = 1 \text{ }\mu\text{m}$  fallen, hat sich die Bezeichnung *nanoskopische Materie* oder kurz *Nanomaterie* in Analogie zur makroskopischen und mikroskopischen Materie eingebürgert.

Gehen wir vom massiven Festkörper aus, dann kann die *Nanostrukturierung* in unterschiedlichen Raumdimensionen erfolgen. Wir erhalten bei eindimensionaler Größenreduktion Nanoschichten (dünne Filme), bei zweidimensionaler Reduktion Nanodrähte, Nanoröhrchen oder Leiterbahnen in Computerbausteinen und bei Reduktion aller drei Größendimensionen sogenannte Nanopartikel; diese werden oft auch als Cluster, Nanos oder Quantenpunkte bezeichnet.

Abb. 5.38 zeigt als Beispiel die Struktur von natürlichem *Opal*, der aus einer regelmäßigen Packung von etwa 200 nm großen, runden Quarzpartikeln besteht. Die Nanopartikel erzeugen typische, *opaleszierende* Farben dieses Edelsteins durch Interferenz des von ihnen gestreuten Lichts. Bei anorganischer Nanomaterie sind die einzelnen Nanobausteine zumeist Anhäufungen identischer Atome (z. B. Gold-Nanopartikel) oder kleiner Molekülgruppen (z. B. Nanokeramiken für Zahnersatz oder Füllmaterialien, bestehend aus  $\text{SiO}_2$



**Abb. 5.38** Elektronenmikroskopisches Bild der Oberfläche eines Opals (Silikat-Kugeln mit ungefähr 200 nm Durchmesser). Nach Falk, Stark, Seeing the Light Wiley, 1986.

oder  $\text{TiO}_2$ , für Kosmetika, Zahnpasta usw.). Bei Nanobiomaterie bestehen die einzelnen Nanobausteine dagegen aus einzelnen Proteinen, Polymeren oder gar Viren.

Werden Nanostrukturen in Bauelementen so angeordnet, dass sie spezielle Eigenschaften des ganzen Elements optimieren, dann spricht man von *funktionalisierter* Nanomaterie. Beispiele dafür finden sich in der *Nanoelektronik*. Deren Nanobausteine bestehen aus einer Vielzahl von Transistoren und Speicherelementen, die aus vielen dünnen Halbleiter- und Metallschichten künstlich aufgebaut sind (s. Abb. 15.12). Das weite Feld von Herstellung, Charakterisierung und Funktionalisierung in Abhängigkeit von Strukturgröße und von Oberflächen-/Grenzflächeneffekten fasst man oft unter dem Begriff *Nanotechnologie* zusammen.

Die Vorsilbe *Nano* ist zum Modewort geworden, das verschiedenartigen Materialien übergestülpt wurde. Sie haben oft nichts weiter gemeinsam als ihre Größe auf der Nanometerskala. Die *Nanowissenschaften* und die *Nanotechnologie* (zu der als wichtiger Teil auch die *Nanobiotechnologie* zählt) gehören zurzeit zu den aktuellen und schnell wachsenden Bereichen der naturwissenschaftlichen Forschung und Technologieentwicklung. Allerdings ist nicht das Prinzip sondern nur der Name *Nano* neu: Viele Arten von Nanomaterie sind natürlichen Ursprungs, und künstlich hergestellte Nanomaterialien, wie z. B. Kolloide und viele chemische Katalysatoren, sind funktionalisierte Nanosysteme, die bereits vor mehr als 150 Jahren entwickelt wurden.

Einzelne, isolierte Nanobausteine sind selten, und ihre Eigenschaften können wegen ihrer geringen Größe nur mit großem technischen Aufwand bestimmt werden. Um Größen und Formen zu messen, reichen optische Mikroskope (Kap. 20.3) oft nicht aus, und man muss hochauflösende Instrumente wie das Transmissions-Elektronenmikroskop (Kap. 20.4) oder das Raster-Elektronenmikroskop (Kap. 20.5) einsetzen. Isolierte Nanobausteine sind im Wesentlichen nur interessant für die Grundlagenforschung. In Natur und Technik sind sie häufig als Agglomerate,

d. h. aus zahlreichen Nanobausteinen zusammengesetzt, zu finden, die dann sogar makroskopische Größen haben können, z. B. Klumpen aus Feinststaubpartikeln, biologisches Gewebe mit Zellstruktur, die Superkristallstruktur des Opals in Abb. 5.38, kolloidale Systeme (Kap. 13.3.2) oder nanostrukturierte elektronische Bausteine in Computern.

### Teilchengrößen- und Oberflächeneffekte

Nanostrukturen lassen sich auf zweierlei Weise charakterisieren, entweder direkt durch das Volumen des einzelnen Nanobausteins oder, da er durch seine Ober- oder Grenzfläche von der Umgebung getrennt ist, durch die Oberfläche. Die Oberflächenatome tragen in anderer Weise zu den Materialeigenschaften bei als die Volumenatome. Je mehr man einen einzelnen Baustein wachsen lässt, umso mehr nimmt dessen Oberfläche zu, aber viel schneller wächst dabei sein Volumen. Das Volumen ( $\frac{4}{3}\pi R^3$ ) eines kugelförmigen Nanos mit dem Durchmesser  $R$  ist proportional zu  $R^3$ , die Oberfläche ( $4\pi R^2$ ) aber nur zu  $R^2$ . Damit nimmt der *relative* Anteil der Atome an der Oberfläche zu dem der Volumenatome bei wachsender Größe proportional zu  $1/R$  ab, und die Materialeigenschaften nähern sich denen des massiven Festkörpers.

Man kann Nanobausteine in zwei Größen-Gruppen einteilen:

1. *Molekulare Cluster*. Sie bestehen aus wenigen bis zu einigen Hundert Atomen. Molekulare Bindungskräfte formen regelmäßige Molekülstrukturen, und diese können sich abrupt ändern, wenn nur ein einziges Atom hinzugefügt oder entfernt wird („Jedes Atom zählt“). Die elektronischen Energiespektren gleichen Molekülspektren, die von den Stärken und Richtungen der (kovalenten) Bindungskräfte zwischen den Atomen (Kap. 5.1.1) bestimmt sind, und sie haben keine Ähnlichkeit mehr mit denjenigen des zugehörigen massiven Festkörpermaterials. Dementsprechend ändern sich die physikalischen und chemischen Eigenschaften dieser Cluster mit der Teilchengröße („Teilchengrößeneffekte“, „size effects“).

2. *Festkörperähnliche Nanostrukturen*. Hier ist die Zahl der Atome so groß, dass die Struktur der Nanobausteine bereits der des massiven Festkörpers, z. B. der Kristallstruktur, gleicht. Hier werden die Materialeigenschaften durch ihre Festkörperstruktur, aber auch durch die Oberfläche der Nanobausteine, d. h. durch den Grenzbereich zur umgebenden Materie bestimmt („Oberflächen- und Grenzflächeneffekte“). Bei Metallen z. B. ermöglicht die Oberfläche spezielle Anregungen der freien Metallelektronen, behindert aber gleichzeitig deren Bewegung. Die oben erwähnte Goldrubinfarbe von Gold-Nanopartikeln im Glas kommt durch solch einen Oberflächeneffekt zustande.

Im Prinzip kann man Nanopartikel also gleichermaßen durch die Probengröße charakterisieren als auch durch den relativen Anteil der die Oberfläche bildenden Atome. Deren Anteil wird umso größer, je kleiner der Baustein ist. Ein Beispiel: Au<sub>55</sub>-Cluster enthalten 75 % Oberflächenatome. Diese sind chemisch sehr aktiv (obwohl es sich um eigentlich chemisch träges Gold handelt) und katalytisch wirksam. Jedes zusätzliche Oberflächenatom erfordert zusätzliche Oberflächenenergie (Kap. 5.3.1). Das kann Cluster instabil machen und Koaleszenz und Zusammenklumpen verursachen. Das erschwert einerseits ihre Herstellung, und andererseits müssen sie für Anwendungen durch Deposition auf Unterlagen (z. B. Quarzglas-träger) oder durch Einbettung in feste oder flüssige Wirtsmedien (z. B. Wasser, Zellflüssigkeit) stabilisiert werden.

### Herstellung und Charakterisierung von Nanomaterie

Im Prinzip gibt es zwei Routen zur Herstellung von Nanobausteinen. Man kann makroskopische Materie zunehmend zerkleinern oder aber durch Kondensation von Einzelatomen und -molekülen die Nanobausteine schrittweise wachsen lassen. Diese Wege werden heute dem sprachlichen „mainstream“ folgend als „top down“ bzw. „bottom up“ gekennzeichnet. Bei der Bildung von Nanobiosystemen spielt die

**Tab. 5.5:** Beispiele für natürlich vorkommende und technisch hergestellte Nanomaterie.

Natürlich vorkommende Nanomaterie	Technisch hergestellte Nanomaterie
Interstellarer Staub Geokolloide (Mineralien, Hydrosole, Aerosole) Biokolloide (Proteine, Zellen, Viren, Holz-Zellen, Richtungssensoren bei Zugvögeln, Milchfett, Rezeptoren der Retina usw.)	Nanostrukturierte Materie (Nanokeramiken, Nanokristalline Metalle, Nanoverbundstoffe) Füllmaterialien im drug- und food-Sektor Halbleiter-Quantendots Magnetische Nanosysteme (Ferrofluide) Dispersionsfarben, Lacke, Druckerfarben, Toner für Kopierer Farbfilter (Dispersionsfarbenfilter, Interferenzfilter) Fotografische Systeme (analog und digital) Heterogene Katalysatoren in der Chemieindustrie Automobil-Kats Bauteile in Batterien und Brennstoffzellen Nanoelektronik (Transistoren, magnetische, optische Datenspeicher, Sensoren, Lichtrezeptoren) Solarzellen Biotechnologische Sensorsysteme Sol-, Gel-Systeme Kosmetika (Hautcremes, Zahnpasta, etc.) Mikroskopische Markersysteme (cytochemisch, radiochemisch, größen-, farbenselektiv) Oberflächenschichten (Schutz, Veredlung, Härtung, Selbstreinigung durch <i>Lotosblatt</i> -Systeme)

spontane Selbstorganisation (d. h. Strukturierung ohne fremde Einflüsse, z. B. durch einen Experimentator) eine große Rolle. Die biologische Zelle ist das wichtigste Beispiel von spontaner Selbstorganisation in der Natur. Für die künstliche Herstellung von Nanomaterie ist eine Vielzahl von komplizierten Methoden entwickelt worden. Viele davon beruhen auf chemischen Prozessen, z. B. die Herstellung von Kolloiden und Aerosolen. Andere erfolgen im Vakuum durch thermisches Verdampfen und anschließendem Kondensieren von Atomen.

Beispiele für natürlich vorkommende und für technisch hergestellte Nanomaterie sind in Tabelle 5.5 zusammengestellt.

### Einige Beispiele aus der Nanobiotechnologie

Im Bereich der *Nanobiotechnologie* werden z. B. magnetische, mit spezifischen Antikörpern versehene Nanopartikel eingesetzt. Sie lassen sich in cancerogenem Gewebe anreichern und dann durch äußere magnetische Wechselfelder so stark erhitzen, dass das maligne Gewebe durch Koagulation zerstört wird.

Neuerdings sind auch erste Versuche zur Giftigkeit von Feinststaub, d. h. von Aeroso-

len aus Nanopartikeln durchgeführt worden, wobei strikt zwischen der gewöhnlichen chemischen Giftigkeit (z. B. von Arsen, Schwermetallen oder Cyanid) und der speziellen Beeinflussung und Schädigung menschlichen Gewebes durch Teilchengrößen- und Grenzflächen-Effekte zu unterscheiden ist. Goldpartikel lassen sich an DNS-Moleküle anlagern, um diese dann mechanisch auszurichten und elastisch zu deformieren.

Weitverbreitet sind inzwischen Methoden, die es erlauben, durch Anlagerung von funktionalisierten Nanobausteinen an spezielle Biomoleküle (z. B. in Zellen) diese mit Elektronenmikroskopen oder optischen Fluoreszenzmikroskopen (Kap. 17.11 und Kap. 20.3) zu lokalisieren.

**Magnetik Particle Imaging** (MPI) ist ein bildgebendes Verfahren (Kap. 14.8.8), bei dem die Verteilung magnetischer Nanopartikel (vorzugsweise Eisenoxid) in einem bestimmten Körperbereich, z. B. in Lymphknoten, mittels ihrer Magnetisierung (Kap. 14.8.1) sichtbar gemacht werden kann. Per Computergrafik steht dann ein direktes Bild von der Größe des Lymphknotens für diagnostische und therapeutische Zwecke zur Verfügung.

# Mechanische Schwingungen und Wellen

Schwingungen und Wellen, d. h. *zeitlich* bzw. *räumlich und zeitlich* periodische Vorgänge begegnen uns in allen Bereichen der Physik. Sie sind für die Bio-Wissenschaften allgemein und insbesondere für die medizinische Praxis wichtig: Informationsübertragung erfolgt bei Lebewesen vorzugsweise mit Wellen über Ohr, Stimme und Auge, und sowohl akustische wie auch elektromagnetische Wellen haben ihren festen Platz in der medizinischen Diagnostik und Therapie. Wo immer sie auftreten, haben Schwingungen und Wellen gemeinsam, dass sie auf denselben physikalischen Grundlagen beruhen und daher in ein und derselben Weise mathematisch beschrie-

ben werden können. Einige Formeln zur Beschreibung stellen wir in diesem Kapitel anhand von einfachen Beispielen aus der Mechanik und der Akustik vor. Allerdings werden nicht alle Wellenphänomene in diesem Kapitel behandelt: elektrische Schwingungen, elektromagnetische Licht-Wellen und verschiedene, wesentlich nur für diese Wellen wichtige Phänomene wie Polarisierung, Kohärenz, Beugung oder Interferenz werden auf die Kapitel 14.9 und 18 verschoben, nachdem wir in Kap. 14.7, 14.8 und 14.9.7 im Rahmen der Elektrizitätslehre elektrische und magnetische Felder eingeführt haben. Materiewellen werden im Kap. 18.6 behandelt werden.

## 6. Schwingungen

Schwingungen treten in sämtlichen Bereichen der Physik auf, sei es in der Mechanik (z. B. beim Pendel), in der Elektrizitätslehre (z. B. beim Schwingkreis), in der Atomphysik (z. B. die Molekülschwingungen) oder in der Festkörperphysik (z. B. Phononen, die Schwingungen des Kristallgitters). Und Wellen sind sich ausbreitende Schwingungen.

All diese Vorgänge haben gemeinsam:

1. Ein Schwingungsvorgang wiederholt sich zeitlich periodisch.
2. Ein Schwingungsvorgang kommt durch periodische Umwandlung verschiedener Energieformen zustande.

Wird ein schwingungsfähiges System, ein *Resonator oder Oszillator*, einmal von außen angestoßen und schwingt dann ohne weitere Einwirkung äußerer Kräfte weiter, so geschieht dies mit einer für das System typischen Frequenz, der *Eigenfrequenz*. Diese Schwingung nennen wir *freie*

*Schwingung*, im Unterschied zur *erzwungenen Schwingung*, die dann entsteht, wenn eine äußere Kraft periodisch auf das System einwirkt und ihm ihre eigene Frequenz aufzwingt.

Eine exakt periodische Bewegung ist bei der freien mechanischen Schwingung nur dann möglich, wenn von der Bewegungsenergie nichts (durch Reibung etwa) verloren geht, d. h. wenn die Schwingung *ungedämpft* erfolgt. Klingt dagegen die Schwingung mit der Zeit infolge von Energieverlusten ab, ist sie gedämpft, so ist sie streng genommen nicht mehr periodisch; sie wird dennoch als Schwingung (*gedämpfte Schwingung*) bezeichnet.

Zur Beschreibung einer Schwingung benutzen wir folgende Größen:

1. Die *momentane Auslenkung*  $A$ . Sie ist diejenige physikalische Größe, die sich bei der Schwingung periodisch zwischen zwei Extremwerten, den *Amplituden* (*Schwingungs-*

weiten)  $A_0$  und  $-A_0$  verändert (Beispiele: Ausschlag eines Pendels, Druck, elektrische Feldstärke). Es sei angemerkt, dass bisweilen auch  $A$  als Amplitude und  $A_0$  als Maximalamplitude bezeichnet werden. Hier ist leider der Sprachgebrauch nicht einheitlich.

2. Die *Schwingungsdauer* oder *Periode*  $T$ . Sie ist die Zeit zwischen aufeinanderfolgenden gleichen Zuständen des Systems (d. h. zwei Zuständen, die durch gleiche momentane Auslenkung und Bewegungsrichtung charakterisiert sind).

3. Die *Frequenz*  $\nu$ . Sie ist die Zahl der Schwingungen pro Sekunde. Daraus ergibt sich für die Schwingungsdauer  $T$ :

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

Oft fügt man den Zahlenfaktor  $2\pi$  hinzu und erhält so aus der Frequenz die *Kreisfrequenz*  $\omega = 2\pi\nu$  (vgl. hierzu auch Gl. (1-18b)).

Die Einheit der Frequenz im SI ist  $s^{-1}$  und wird auch mit *Hertz* bezeichnet. Die Einheit der Kreisfrequenz ist ebenfalls  $s^{-1}$ .

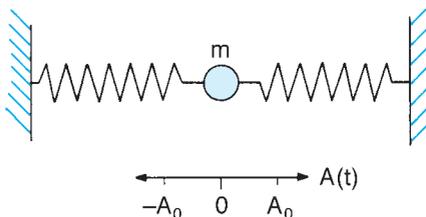
4. Die *Phase*  $\varphi$ . Sie ist die den momentanen Schwingungszustand (zur Zeit  $t$ ) charakterisierende Größe,  $\varphi = \omega t$ . Da sich alle Schwingungszustände nach der Zeit  $T$  wiederholen, sagen wir, dass alle sich um ganzzahlige Vielfache der Schwingungsdauer  $T$  unterscheidenden Schwingungszustände *in Phase* sind, oder *gleiche Phase* haben. Neben der *Phase* werden wir den Begriff *Phasendifferenz* gebrauchen, den wir in Gl. (6-7) kennenlernen werden.

Der Begriff der Phase wird anschaulicher, wenn wir zur Beschreibung einer periodischen Bewegung trigonometrische Funktionen  $\sin \varphi$  oder  $\cos \varphi$  einführen (Gl. (6-3)). Die Phase ist dann deren Argument. Schreiben wir für sie  $\varphi = 2\pi t/T$ , so sehen wir, dass sie den momentanen Schwingungszustand zur Zeit  $t$  charakterisiert. Ändert sich  $t$  z. B. um  $T$ , d. h. um eine Schwingungsdauer, so entspricht dem eine Änderung der Phase um  $2\pi$ , und das ist gerade die Periode der trigonometrischen Funktion.

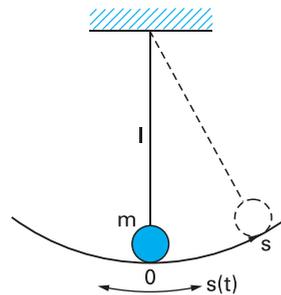
## 6.1 Pendel als mechanisches schwingungsfähiges System

Zu einem mechanischen schwingungsfähigen System gehört eine schwingungsfähige Masse in einem stabilen Gleichgewichtszustand, der Ruhelage und eine Kraft, welche die Masse zur Ruhelage zurücktreibt, wenn sie aus dieser ausgelenkt wurde.

Dies kann, wie beim Federpendel (Abb. 6.1) durch zwei elastische Federn geschehen oder aber, wie beim Faden- oder Schwerependel (Abb. 6.2), durch die Schwerkraft.



**Abb. 6.1** Federpendel mit der Maximalauslenkung  $A_0$  ( $m$ : schwingende Masse, 0: Ruhelage,  $\pm A_0$ : Umkehrpunkte der geradlinigen Bahn).



**Abb. 6.2** Fadenpendel ( $m$ : schwingende Masse,  $l$ : Fadenlänge, 0: Ruhelage,  $s$ : krummlinige Bahnkoordinate (Kreisbahn)).

Eine *freie Schwingung* wird durch eine einmalig von außen wirkende Kraft eingeleitet, die die Masse  $m$  aus ihrer Ruhelage auslenkt. Die hierbei von außen in das System eingebrachte Energie wird als *potentielle Energie* des Systems gespeichert, sei es durch Deformationsarbeit an der Feder oder durch Hubarbeit (Anheben im Schwerfeld der Erde)

am Schwerependel. Lässt man nun beim ausgelenkten Federpendel die Masse  $m$  los, so wird sie durch die rücktreibende Federkraft in Richtung zur Ruhelage  $A = 0$  hin beschleunigt. Mit zunehmender Geschwindigkeit wächst die *kinetische Energie* der Masse; beim Durchgang durch die Ruhelage  $0$  ist sie am größten. Hier sind die beiden Federn entspannt, d. h. in ihnen ist keine Deformationsenergie mehr gespeichert, die potentielle Energie hat daher den Wert Null angenommen. Schwingt dann die Masse infolge ihrer Trägheit über die Ruhelage hinaus, so werden die Federn erneut deformiert, und dabei wird die Masse durch die rücktreibenden Federkräfte abgebremst. Die kinetische Energie nimmt also wieder ab, und sie ist Null bei der größten Auslenkung, bei der die Masse ihre Bewegungsrichtung umkehrt (Umkehrpunkt  $A_0$ ). Dort ist die Deformation der Feder maximal und mit ihr die als Deformationsenergie

gespeicherte potentielle Energie. Nach der Umkehr der Bewegung wiederholt sich der Vorgang, so dass eine periodische Bewegung entsteht. Während dieses Prozesses bleibt die Gesamtenergie  $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$  konstant.

Feder- und Fadenpendel unterscheiden sich dadurch, dass es sich im einen Fall um die kinetische Energie einer geradlinigen und im andern Fall um die einer Kreisbewegung handelt, und dass die potentielle Energie im einen Fall als Deformationsenergie in der Feder, im anderen Fall durch das Anheben der Masse als Hubarbeit gespeichert wird.

Wir können allgemein mechanische Schwingungen als periodische Umwandlung zwischen kinetischer und potentieller Energie beschreiben, wobei die Gesamtenergie konstant bleibt (vorausgesetzt, die Bewegungen erfolgen reibungs- und verlustfrei).

## 6.2 Differentialgleichung der ungedämpften Schwingung

Auf zwei verschiedenen Wegen können wir die Schwingungsbewegung quantitativ beschreiben: mit dem Energieerhaltungssatz (Kap. 4) und mit Hilfe der Kräftebilanz (Kap. 2.2.2.2).

Der *Energieerhaltungssatz* besagt für das (ungedämpfte) Federpendel, dass die Gesamtenergie, d. h. die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant ist:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} m \left( \frac{dA}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} DA^2 = \text{konst.}, \quad (6-1)$$

(siehe Gl. (3-6)). Die variable Größe  $A$  beschreibt die momentane Auslenkung der Masse  $m$  von der Ruhelage  $A = 0$  aus gemessen, die zeitliche Ableitung  $dA/dt$  ihre momentane Geschwindigkeit. Differenzieren wir Gl. (6-1) nach der Zeit und dividieren wir durch  $dA/dt$  ( $dA/dt \neq 0$ , außer an den Umkehrpunkten), so erhalten wir die

*Kräftebilanz* des Schwingungsvorganges:

$$m \frac{d^2 A}{dt^2} + DA = 0. \quad (6-2)$$

Sie besagt, dass die Trägheitskraft entgegengesetzt gleich der Rückstellkraft der Feder,  $DA$ , ist (vgl. Kap. 2.2.5), bzw. dass die Summe der Kräfte Null ist. Das gilt für alle Zeiten  $t$ .

Weder Energiesatz noch Kräftebilanz geben direkt Auskunft über die Bewegung  $A(t)$  der Pendelmasse, da neben der Variablen  $A$  auch deren Ableitungen nach der Zeit in Gl. (6-1) und (6-2) enthalten sind. Eine Gleichung, die Ableitungen der Variablen enthält, nennt man eine *Differentialgleichung*. Die spezielle Differentialgleichung der ungedämpften Schwingung des Federpendels, Gl. (6-2), weist neben der Funktion  $A(t)$  auch deren zweite Ableitung nach der Zeit,  $d^2 A/dt^2$ , auf, Gl. (6-1) dagegen die erste Ableitung  $dA/dt$ .

Wir *lösen* nun die Differentialgleichung (6-2), d.h. wir suchen die *Amplitudenfunktion*  $A(t)$ , die der Gl. (6-2) genügt. Diese Funktion muss offenbar die Eigenschaft haben, zu ihrer zweiten Ableitung nach der Zeit proportional zu sein. Wir erhalten sie durch den (durch Probieren gefundenen) Ansatz

$$A = A_0 \sin(\omega t), \quad (6-3)$$

wobei die *Sinus-Funktion* durch ihren periodischen Verlauf dem Schwingungscharakter der durch  $A(t)$  beschriebenen Bewegung Rechnung trägt und zudem proportional zu ihrer zweiten Ableitung ist.  $A_0$  ist die Schwingungsamplitude und  $\omega$  die Kreisfrequenz.

Diese durch eine Sinus-Funktion beschriebene Bewegung ist ein spezielles, einfaches Beispiel für eine ungedämpfte Schwingung; wir bezeichnen sie auch als *harmonische Schwingung*.

Dass Gl. (6-3) tatsächlich eine *Lösungsfunktion* der Differentialgleichung (6-2) ist, sehen wir, wenn wir Gl. (6-3) in (6-2) einsetzen. Dazu müssen wir Gl. (6-3) zweimal nach  $t$  differenzieren:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -\omega^2 A_0 \sin(\omega t).$$

Setzen wir diesen Ausdruck für  $d^2 A/dt^2$  in Gl. (6-2) ein und dividieren durch  $A_0 \sin(\omega t)$ , so ergibt sich:

$$-m\omega^2 + D = 0. \quad (6-4)$$

In dem Ansatz der Gl. (6-3) war die Größe von  $\omega$  unbestimmt geblieben. Gl. (6-4) gibt uns nun den genauen Wert, nämlich:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (6-5a)$$

Die Frequenz des Federpendels wächst also, wenn die Federkonstante  $D$  größer wird, sie nimmt ab, wenn die Masse des Pendels zunimmt.

Auch das in Abb. (6.2) gezeigte Fadenpendel (Kap. 6.1) führt, allerdings nur bei *kleinen* Auslenkungen, eine harmonische Schwingung aus, und wir erhalten

die Amplitudenfunktion  $s = s_0 \sin(\omega t)$ , wobei  $s$  die Koordinate der von der Pendelmasse durchlaufenen Kreisbahn bedeutet. In diesem Fall ergibt sich die Kreisfrequenz zu

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (6-5b)$$

wobei  $l$  die Fadenlänge und  $g$  die Erdbeschleunigung ist.

Wichtig ist, dass  $\omega$  hier im Gegensatz zum Federpendel nicht von der Pendelmasse abhängt. (Dies gilt allerdings nur, wenn die Masse  $m$  des Fadenpendels nahezu punktförmig ist. Man spricht dann von einem *mathematischen Pendel*.)

Auch die trigonometrische Funktion  $\cos(\omega t)$  stellt eine *Lösungsfunktion* der Gl. (6-2) dar:

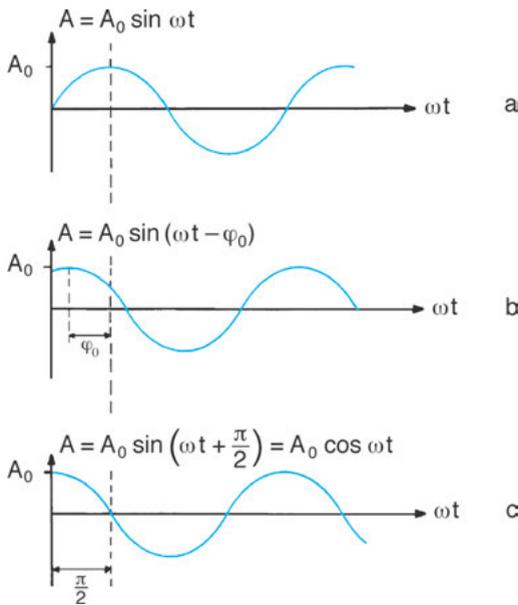
$$A(t) = A_0 \cos(\omega t). \quad (6-6)$$

Welche der beiden Lösungsansätze (Gl. (6-3) oder (6-6)) den Bewegungsablauf einer harmonischen Schwingung richtig beschreibt, hängt von der sog. *Anfangsbedingung* ab. Befindet sich z. B. das Pendel zur Zeit  $t=0$  in der Ruhelage  $A=0$  und wird es danach in positiver Richtung ausgelenkt, so stimmt dies mit dem Verhalten der Sinus-Funktion (Abb. 6.3a) überein, die ja ebenfalls bei  $t=0$  den Wert Null hat; damit ist Gl. (6-3) die mit der Anfangsbedingung ( $A=0, t=0$ ) verträgliche Lösung. Ist dagegen das Pendel maximal ausgelenkt und wird zur Zeit  $t=0$  losgelassen, so ist Gl. (6-6) die richtige Lösungsfunktion, da ja der Cosinus zur Zeit  $t=0$  gerade sein Maximum hat (Anfangsbedingung  $A=A_0, t=0$ ).

Neben den beiden Anfangsbedingungen ( $A=0, t=0$ ) und ( $A=A_0, t=0$ ) sind beliebige weitere Anfangsbedingungen ( $0 < A < A_0, t=0$ ) möglich. Eine passende, allgemein gültige Lösungsfunktion ist:

$$A = A_0 \sin(\omega t - \varphi_0). \quad (6-7)$$

Die Größe  $\varphi_0$  ist ein konstanter Winkel, der die zeitliche Verschiebung der Schwingung gegenüber einer sinusförmigen Bewegung nach Gl. (6-3) berücksichtigt (Abb. 6.3b).  $\varphi_0$  nennt man die *Phasenverschiebung*, *Phasendifferenz* oder *Phasenkonstante* zwischen den beiden durch Gl. (6-3) und (6-7) beschriebenen speziellen Schwingungen. Mit  $\varphi_0 = 0$  ergibt sich Gl. (6.3). Für den speziellen Fall,



**Abb. 6.3** Lösungsfunktionen der Schwingungsdifferentialgleichung (6-2). Graphisch können wir die Amplitudenfunktion  $A(t)$  darstellen, indem wir als Abszisse entweder den Winkel  $\omega t$  oder die Zeit  $t$  auftragen. Dann ist die Periode der Schwingung entweder gegeben durch den *ganzen Winkel*  $2\pi$  oder durch die Schwingungsdauer  $T$ .

dass die Phasenverschiebung den Wert  $\varphi_0 = -\pi/2$  annimmt (Abb. 6.3c), erhalten wir die in Gl. (6-6) angegebene Lösungsfunktion, denn es gilt:

$$A = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_0 \cos(\omega t).$$

Wollen wir die Amplituden  $A_0$  und  $A'_0$  zweier Schwingungen miteinander vergleichen, so können wir deren Verhältnis  $A_0/A'_0$  angeben.

## 6.3 Gedämpfte Schwingungen

Bei den bisher besprochenen ungedämpften Schwingungen wurde die vereinfachende Annahme gemacht, dass weder Luftreibung noch Reibung in einer Halterung vorhanden sei. Damit war es möglich, die einfache Form des Energieerhaltungssatzes (Gl. (6-1)) für das Federpendel anzuwenden. Falls Reibung jedoch nicht vernachlässigt werden kann (z. B. bei der mit Stoßdämpfern versehenen Fe-

In der Technik ist stattdessen das sog. *Pegelmaß* üblich, das den dekadischen Logarithmus dieses Verhältnisses enthält:

$$z = 20 \cdot 10 \log\left(\frac{A_0}{A'_0}\right). \quad (6-8)$$

Die dimensionslose, reine Zahl  $z$  wird *Dezibel* (abgekürzt dB) genannt.

Anstelle des Amplitudenverhältnisses  $A_0/A'_0$  dessen Logarithmus zu verwenden, hat den Vorteil, dass man auch sehr große Unterschiede der Amplituden durch kleine Zahlen angeben kann. Ist beispielsweise  $A_0$  um ein Millionenfaches größer als  $A'_0$ , so ist das Pegelmaß gegeben durch  $z = 120$  dB. Wir werden dem Pegelmaß bei der Beschreibung von Wellen wieder begegnen.

Der Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie und der Amplitude  $A_0$  wird durch eine einfache Beziehung beschrieben. Setzen wir eine der Amplitudenfunktionen Gl. (6-3, 6-6 oder 6-7) in die Energiebilanz Gl. (6-1) ein, und wählen wir einen der Zeitpunkte maximaler Auslenkung (bei dem die Geschwindigkeit Null ist), so sehen wir unmittelbar:

Die Gesamtenergie des schwingenden Körpers ist proportional zum Quadrat der Amplitude  $A_0$ :

$$E_{\text{ges}} \sim A_0^2. \quad (6-9)$$

Dies gilt für harmonische Schwingungen beliebiger schwingungsfähiger Systeme und auch für Wellen.

derung eines Autos), wird die Energiebilanz nicht mehr durch Gl. (6-1) beschrieben, denn durch Reibung wird laufend Bewegungsenergie in Reibungswärme umgewandelt. Dem schwingungsfähigen System geht also laufend Bewegungsenergie verloren, so dass die Schwingungsamplitude mit der Zeit immer kleiner, die Schwingung also gedämpft wird. Zur Kräftebilanz der Gl. (6-2) muss man dann

als weitere Kraft die *Reibungskraft* hinzunehmen.

Erfolgt die Reibung in Luft oder in einer Flüssigkeit, so können wir sie durch die mit Gl. (2-26) angegebene Reibungskraft beschreiben:

$$F_R = -r \frac{dA}{dt}.$$

Die Differentialgleichung der Kräftebilanz enthält dann die Reibung durch einen Term mit der ersten zeitlichen Ableitung der Auslenkung  $A$ , und an die Stelle von Gl. (6-2) tritt:

$$m \frac{d^2 A}{dt^2} + r \frac{dA}{dt} + DA = 0. \quad (6-10)$$

Diese Differentialgleichung lässt sich durch folgenden Ansatz lösen (sofern die Dämpfung nicht zu stark ist):

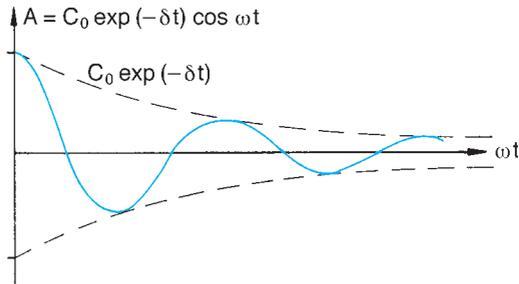
$$A = C_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t - \varphi_0). \quad (6-11a)$$

( $C_0 = \text{konstant}$ )

Dies können wir ähnlich wie bei Gl. (6-3, 6-6 und 6-7) direkt durch Einsetzen in Gl. (6-10) prüfen. Gl. (6-11a) enthält die zwei durch die beiden Anfangsbedingungen ( $A = 0, t = 0$ ) bzw. ( $A = C_0, t = 0$ ), d. h. durch spezielle Werte der Phasenkonstante  $\varphi_0$  festgelegten Spezialfälle

$$A = C_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad A = C_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t). \quad (6-11b)$$

Vergleichen wir diese Lösungsansätze mit denen der ungedämpften Schwingung, so sehen wir, dass die Amplitude  $A_0$  jetzt gemäß  $A_0(t) = C_0 \exp(-\Delta t)$  mit der Zeit  $t$  abnimmt (Abb. 6.4).



**Abb. 6.4** Gedämpfte Schwingung (Anfangsbedingung  $A = C_0$  für  $t = 0$ ).

Die Stärke der Abnahme wird bestimmt vom *Dämpfungsfaktor*  $\delta$ , der mit dem Reibungskoeffizienten  $r$  der Gl. (2-26) folgendermaßen zusammenhängt:

$$\delta = \frac{r}{2m}.$$

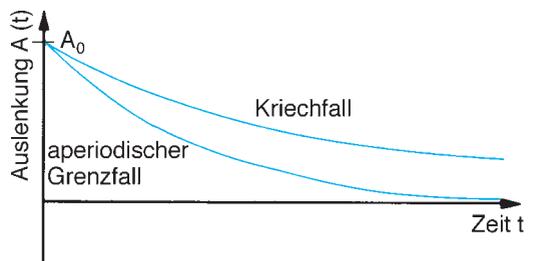
Auch die Frequenz  $\omega$  der gedämpften Schwingung wird durch den Dämpfungsfaktor beeinflusst:  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , wobei  $\omega_0$  die Frequenz der ungedämpften Schwingung bedeutet.

$\delta$  bewirkt also eine Abnahme der Frequenz;  $\omega$  wird Null für den Fall  $\omega_0 = \delta$ . Dann hört die Bewegung auf, periodisch zu sein; deshalb nennt man den durch  $\delta = \omega_0$  beschriebenen Fall den *aperiodischen Grenzfall*. Hierbei und bei noch stärkerer Reibung, dem *Kriechfall*, ( $\delta > \omega_0$ ) kann das ausgelenkte Pendel nicht mehr über die Ruhelage hinausschwingen, sondern kriecht langsam zur Ruhelage zurück (Abb. 6.5).

Als einfaches *Dämpfungsmaß* einer Schwingung kann man den Dämpfungsfaktor  $\delta$  heranziehen. Sein Kehrwert  $\tau = \delta^{-1}$  hat die Dimension einer Zeit und wird *Abklingzeit* der gedämpften Schwingung genannt.

Auch das Produkt  $\Lambda = \delta T$ , wobei  $T$  die Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung ist, wird als Dämpfungsmaß verwendet; man nennt  $\Lambda$  das *logarithmische Dekrement*. Es gilt, wie sich aus Gl. (6-11a) berechnen lässt:

$$\Lambda = \delta T = \ln [A_0(t)/A_0(t + T)]. \quad (6-12)$$



**Abb. 6.5** Aperiodischer Grenzfall und ein beliebiger Kriechfall.

## 6.4 Erzwungene Schwingungen

Eine Schaukel führt infolge der Reibung in der Halterung und mit der Luft eine gedämpfte Schwingung aus. Wird sie aber von Zeit zu Zeit angestoßen, so kann man erzwingen, dass die Schwingungsbewegung dennoch nicht abklingt, und stößt man sie *im Takt*, d. h. nach jeder Schwingungsperiode erneut an, so kann die Amplitude mit der Zeit sogar zunehmen. Ist die Ankopplung der von außen einwirkenden periodischen Kraft nicht nur auf kurze Zeitintervalle beschränkt (wie in dem Beispiel der Schaukel), sondern kontinuierlich, und ist die Kraftquelle stark genug, dann wird diese Kraft dem Schwingungssystem ihre eigene Frequenz, die *Erregerfrequenz*, aufzwingen. Dieser Sachverhalt lässt sich exakter folgendermaßen formulieren:

Ein schwingungsfähiges System (ein *Resonator* oder *Oszillator*) mit der Frequenz  $\omega_0$  seiner freien Schwingung (*Eigenfrequenz*) und der Dämpfungskonstanten  $\delta$  kann durch eine äußere periodische Kraft der beliebigen Frequenz  $\omega$  zu einer andauernden *erzwungenen Schwingung* mit dieser Frequenz  $\omega$  angeregt werden.

Dass es einiger Zeit bedarf, um diese erzwungene Schwingung anzuregen, werden wir im folgenden Abschnitt über den *Einschwingvorgang* sehen.

Die Amplitude der erzwungenen Schwingung wird besonders groß werden, wenn  $\omega$  ungefähr mit  $\omega_0$  übereinstimmt; wir sprechen dann von *Resonanz*. Die Dämpfung verhindert, dass die Amplitude dann unendlich anwächst.

In der Praxis wird das schwingungsfähige System zerstört, wenn die Dämpfung zu gering ist (*Resonanzkatastrophe*). Bei unserem Beispiel der Schaukel mag diese Katastrophe eintreten, wenn sich die Schaukel überschlägt.

Bei vorhandener Dämpfung wird dem schwingenden System dauernd Energie entzogen, die vom Erreger nachgeliefert werden

muss, wenn die Bewegung nicht zum Stillstand kommen soll. Der Entzug, d. h. die *Absorption* von Energie aus dem Erreger ist am größten im Resonanzfall; denn in unserem Ansatz für die Reibungskraft,  $F_R = -r \, dA/dt$  (Gl. (2-26)), ist die Dämpfung proportional zur Geschwindigkeit  $dA/dt$ , und diese ist umso größer, je weiter das System ausschwingt.

Die mathematische Formulierung der erzwungenen Schwingung gestaltet sich beim Federpendel (Abb. 6.1) einfacher als beim Schwerependel. Deshalb wollen wir dieses Beispiel herausgreifen. Schreiben wir wieder wie in Gl. (6-2) bzw. (6-10) die Kräftebilanz an, so müssen wir jetzt die periodische äußere Kraft  $F$  mitberücksichtigen und erhalten, falls diese Kraft durch  $F = F_0 \cos(\omega t)$  beschrieben wird:

$$m \frac{d^2 A}{dt^2} + r \frac{dA}{dt} + DA = F_0 \cos(\omega t). \quad (6-13)$$

Diese Gleichung stellt, wie Gl. (6-2) und (6-10), eine Differentialgleichung dar, allerdings enthält sie einen zusätzlichen Term, der nicht die Variable  $A$  enthält. (Eine solche Differentialgleichung nennt man *inhomogen*). Sie besitzt als Lösung die Amplitudenfunktion der erzwungenen Schwingung  $A(t)$ :

$$A(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_0), \quad (6-14a)$$

wobei  $A_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$  die Amplitude,  $m$

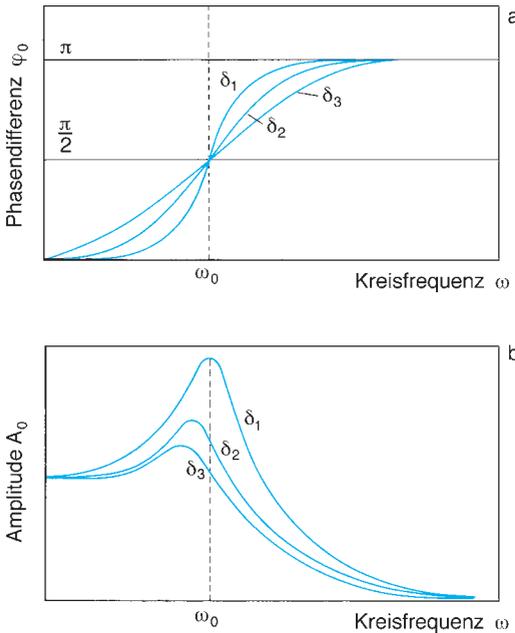
die Pendelmasse,  $\omega_0$  die Eigenfrequenz,  $\omega$  die Frequenz der periodischen äußeren Kraft und  $\delta$  die Dämpfungskonstante des Pendels,  $\delta = r/(2m)$ , bedeuten. Die Phasendifferenz  $\varphi_0$  der Amplitudenfunktion  $A(t)$  zur äußeren Kraft  $F(t)$  ist eine Funktion der Erregerfrequenz  $\omega$ :

$$\varphi_0 = \arctan \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (6-14b)$$

wobei  $\arctan$  die *Umkehrfunktion* der Tangens-Funktion ist (Anhang A5),

Die Abhängigkeit der Phasendifferenz  $\varphi_0$  und der Amplitude  $A_0$  von der Erregerfrequenz  $\omega$  sind für verschieden große Dämpfungsfaktoren  $\delta$  in Abb. 6.6 dargestellt.

Bei kleinen Erregerfrequenzen  $\omega$  ist die Phasendifferenz  $\varphi_0$  nahezu Null und die Amplitude  $A_0$  unabhängig von  $\omega$ ; d. h. das Pendel folgt der erregenden Kraft  $F(t)$  ohne Verzögerung mit der Amplitude  $A_0 \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ .



**Abb. 6.6** Erzwungene Schwingung: Abhängigkeit (a) der Phasendifferenz  $\varphi_0$  und (b) der Amplitude  $A_0$  von der Frequenz  $\omega$  der äußeren Erregerkraft  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  für verschiedene Dämpfungsfaktoren  $\delta$  ( $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$ ).

Mit wachsender Erregerfrequenz nehmen  $\varphi_0$  und  $A_0$  zu.

Bei  $\omega = \omega_0$  schließlich erhalten wir  $\varphi_0 = \pi/2$ , und  $A_0$  wird sehr groß; dieser Zustand kennzeichnet die *Resonanz* zwischen erregender äußerer Kraft  $F(t)$  und schwingungsfähigem System. Im Resonanzfall läuft die erzwungene Schwingung der erregenden Kraft um  $\pi/2$  hinterher, wodurch dieser Gelegenheit gegeben ist, das System stets im richtigen Takt anzustoßen und die Schwingung *aufzuschaukeln*; in Gl. (6-14a) wird dann wegen  $\omega = \omega_0$  der Nenner klein und die Amplitude  $A_0$  maximal.

Bei verschwindend kleiner Dämpfung ( $\delta \approx 0$ ) wird im Resonanzfall der Nenner in Gl. (6-14a) sogar Null und die Amplitude  $A_0$  (mathematisch) unendlich groß. (In der Natur wird der Vorgang vorher durch Zerstörung (Resonanzkatastrophe) beendet werden: ein Beispiel dafür, dass eine mathematische Beschreibung von Naturvorgängen nicht immer für alle Bereiche der Variablen zutrifft).

Bei sehr hohen Erregerfrequenzen ( $\omega \gg \omega_0$ ) hinkt die erzwungene Schwingung um  $\varphi_0 \approx \pi$  der äußeren Kraft  $F(t)$  hinterher; d. h., die erzwungene Schwingung erfolgt jetzt *gegenphasig* zur Kraft  $F(t)$ . Mathematisch heißt das:  $\sin(\omega t - \pi) = -\sin(\omega t)$ . Dadurch wirkt  $F(t)$  bremsend auf die Schwingung und nach Gl. (6-14a) wird bei genügend großer Erregerfrequenz  $\omega$  die Amplitude  $A_0$  praktisch Null.

Das Phänomen der *Resonanz* ist also durch die Phase der Bewegung, bezogen auf die Phase der äußeren Kraft, bedingt. Ihre Stärke, d. h. ihre Amplitude  $F_0$  geht hier lediglich linear in die Bewegungsamplitude  $A_0$  ein. Der Einfluss der Dämpfung auf die erzwungene Schwingung macht sich im wesentlichen dadurch bemerkbar, dass mit größer werdendem  $\delta$  die Resonanzkurve  $A_0(\omega)$  in Abb. 6.6b flacher und breiter verläuft und das Maximum von  $\omega_0$  weg zu kleineren Frequenzen hin verschoben wird.

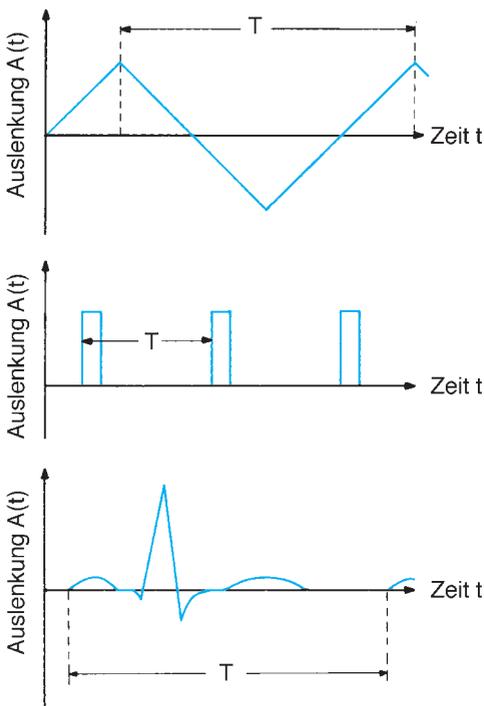
**Einschwingvorgang** Greift an einem zunächst ruhenden schwingungsfähigen Gebilde (z. B. Federpendel) von außen her eine periodische Kraft mit der Frequenz  $\omega$  an, so wird sich die erzwungene Schwingung nicht sofort einstellen; dazu ist einige Zeit notwendig, während der das Pendel komplizierte, nicht periodische Bewegungen ausführt. Einen derartigen *Einschwingvorgang* hat jeder schon einmal erlebt, der versucht hat, einen an einer Schnur hängenden Gegenstand in Pendelschwingungen zu versetzen. Seine Dauer wird dabei durch die Frequenz  $\omega$  und ebenso durch die Dämpfung  $\delta$  bestimmt: je kleiner  $\delta$ , desto länger währt der Einschwingvorgang. Er ist abgeschlossen, wenn die erzwungene Bewegung periodisch geworden ist und mit der Frequenz  $\omega$  der äußeren Kraft erfolgt. Wir werden Einschwingvorgänge bei den Musikinstrumenten in Kap. 7 kennenlernen.

## 6.5 Anharmonische Schwingungen

Unter den Begriff der *anharmonischen Schwingungen* fallen alle periodischen Bewegungen, die nicht durch eine einzelne Sinus- und/oder eine Cosinus-Funktion beschrieben werden können.

Beispiele hierfür sind in Abb. 6.7 dargestellt. Zu ihnen gehört auch das in Abb. 6.7c gezeigte und in Kap. 15.1.2 behandelte Elektrokardiogramm (EKG).

In Kap. 6.5.2 werden wir sehen, dass man anharmonische Schwingungen ebenfalls durch trigonometrische Funktionen beschreiben kann, und zwar durch eine Überlagerung von i. a. unendlich vielen Sinus- bzw. Cosinus-Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen.



**Abb. 6.7** Anharmonische periodische Vorgänge: (a) Dreieckschwingung, (b) Rechteckimpulsfolge, (c) Elektrokardiogramm (EKG).

### 6.5.1 Überlagerung von harmonischen Schwingungen

Zur Beschreibung der Überlagerung (*Superposition*) von harmonischen Schwingungen wollen wir annehmen, dass an dem Federpendel aus Kap. 6.1 nicht nur *eine*, sondern *zwei* periodische Kräfte zugleich angreifen. Jede der beiden Kräfte für sich bewirkt eine erzwungene harmonische Schwingung des Pendels; die Gesamtbewegung des Pendels ergibt sich dann aus der Überlagerung beider Schwingungen.

Im Normalfall ist die Überlagerung linear (*lineare Superposition*):

$$A_{\text{res}}(t) = A_1(t) + A_2(t) \text{ für alle } t.$$

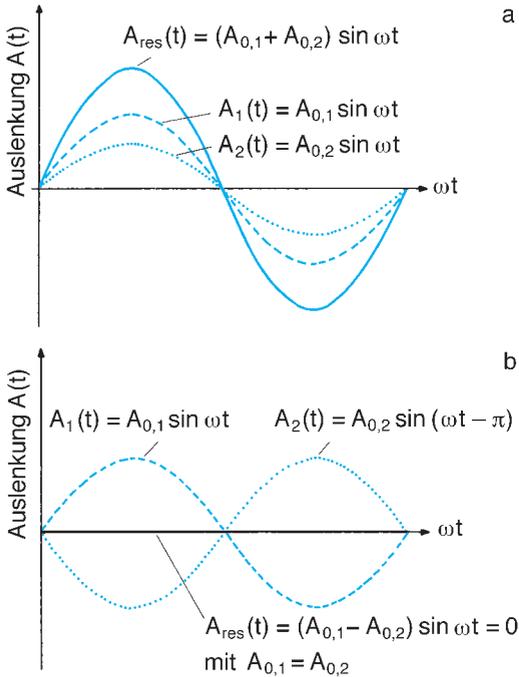
Wir können drei Fälle unterscheiden:

1. Die Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  der beiden periodischen Kräfte sind gleich. Dann beobachten wir als Überlagerung beider Schwingungen wieder eine harmonische Schwingung, deren Amplitude von der Phasenverschiebung  $\varphi_0$  zwischen beiden Einzelschwingungen bestimmt wird. Die resultierende Schwingung  $A_{\text{res}}(t)$  erhalten wir, indem wir in der grafischen Darstellung (Abb. 6.8) Punkt für Punkt (d. h. für alle  $t$ ) die Einzelamplituden addieren:

$$a \quad A_{\text{res}}(t) = A_{0,1} \sin(\omega t - \varphi_0) + A_{0,2} \sin(\omega t). \quad (6-15)$$

Ist  $\varphi_0 = 0$ , so ergibt sich durch die Überlagerung  $A_{\text{res}}(t) = (A_{0,1} + A_{0,2}) \sin(\omega t)$  (*konstruktive Überlagerung*, Abb. 6.8a). Sind beide Teilschwingungen jedoch um  $\varphi_0 = -\pi$  (oder  $+\pi$ ) gegeneinander verschoben, sind sie also *gegenphasig*, so schwächen sie sich, und, falls ihre Amplituden  $A_{0,1}$  und  $A_{0,2}$  gleich sind, heben sie sich gegeneinander auf (*destruktive Überlagerung*), so dass die resultierende Schwingungsamplitude dauernd Null ist (Abb. 6.8b).

2. Die Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  sind verschieden, aber  $\omega_2$  ist ein *ganzzahliges* Vielfaches von  $\omega_1$ . Dann ergibt sich wieder eine periodische Bewegung. Allerdings ist sie nicht harmonisch, wie wir im folgenden Kapitel 6.5.2 sehen werden.



**Abb. 6.8** Überlagerung von harmonischen Schwingungen: (a) maximale Verstärkung bei konstruktiver Superposition, (b) Auslöschung bei destruktiver Superposition.

3. Die Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  unterscheiden sich, aber die eine ist *kein ganzzahliges* Vielfaches der anderen. Zu diesem Fall finden wir überhaupt keine streng periodische harmonische Bewegung mit einer einzigen Frequenz mehr, sondern z. B. eine *Schwebung* (Kap. 6.5.3).

### 6.5.2 Zerlegung anharmonischer Schwingungen in harmonische Teilschwingungen

Der im vorigen Kapitel genannte Fall 2 lässt sich auch umkehren, denn der mathematische *Satz von Fourier* besagt:

Jeder *anharmonische* (d. h. nichtharmonische), periodische Vorgang lässt sich in eine Summe von (im allgemeinen unendlich vielen) harmonischen Teilschwingungen, d. h. Sinus- und Cosinus-Schwingungen, zerle-

gen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz  $\omega$  sind.

Die Amplitudenfunktion  $A(t)$  einer beliebigen, anharmonischen Schwingung lässt sich demnach in der folgenden Form der *Fourier-Reihe* anschreiben:

$$A(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (6-16a)$$

Eine andere Schreibweise von Gl. (6-16a) ist:

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]. \quad (6-16b)$$

Die Konstanten  $a_n$  und  $b_n$  bestimmen die Größe des Beitrages der  $n$ -ten Cosinus- bzw. Sinus-Schwingung. Werden  $a_n$  und  $b_n$  mit wachsendem  $n$  genügend klein – dies ist bei den meisten Anwendungen der Fall –, so kann die Summe nach einer endlichen Anzahl von Teilschwingungen abgebrochen werden. Die *Grundfrequenz*  $\omega$  ist gleich der Frequenz der anharmonischen Schwingung.

Eine weitere Schreibweise erhält man wenn man zusammenfasst:  $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = c_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ . Dann ergibt sich anstelle von Gl. (6-16b):

$$A(t) = \sum_n c_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (6-16c)$$

Die mathematische Methode zum Auffinden der Konstanten  $a_n$  und  $b_n$  – der sog. *Fourierkoeffizienten* – aus der Amplitudenfunktion bezeichnet man als *Fourier-Analyse* von Schwingungen. In dem *Frequenzspektrum* der Fourier-Koeffizienten ist die Form der anharmonischen Schwingung enthalten. Wir werden der Fourier-Analyse bei der Diskussion anharmonischer Wellen (z. B. akustischer Wellen) wieder begegnen (Kap. 7.5). Praktisch wichtig ist, dass man bei beliebig komplizierten Schwingungen sich zur Vereinfachung der Beschreibung oft auf die dominierende Fourier-Komponente, d. h. eine einzelne harmonische Schwingung beschränken kann.

### 6.5.3 Schwebung

Eine *Schwebung* kommt zustande, wenn zwei harmonische Schwingungen nahezu gleicher Frequenz ( $\omega_1 \approx \omega_2$ ) überlagert werden.

Mathematisch wird diese Superposition wieder einfach durch Addieren der beiden Amplitudenfunktionen der Teilschwingungen formuliert, z. B.:

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) = A_0(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \tag{6-17}$$

wobei wir zur Vereinfachung angenommen haben, dass  $A_{0,1} = A_{0,2} = A_0$  gilt.

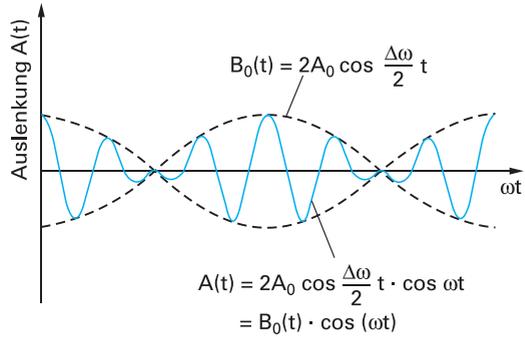
Mittels der trigonometrischen Umformung für  $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$  (s. Anhang A5) erhalten wir anstelle der Gl. (6-17):

$$A(t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right). \tag{6-18}$$

Es war vorausgesetzt, dass die Frequenzen beider harmonischen Schwingungen nahezu gleich seien, also  $\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega$ , wobei  $\Delta\omega \ll \omega_1$ . Wir können nun schreiben:

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_2 + \Delta\omega \cong 2\omega \quad \text{und}$$

$$\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega.$$



**Abb. 6.9** Schwebung (gestrichelt: Amplitudenmodulation).

Mit dieser Vereinbarung erhalten wir aus Gl. (6-18):

$$A(t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega t). \tag{6-19}$$

Eine Schwebung stellt sich somit nach Gl. (6-19) als eine Schwingung  $\cos(\omega t)$  mit der Frequenz  $\omega$  dar, wobei die resultierende, zeitabhängige Amplitude  $B_0 = 2A_0 \cdot \cos(\Delta\omega/2 \cdot t)$  periodisch mit der Frequenz  $\Delta\omega/2$  verändert (*moduliert*) wird (Abb. 6.9).

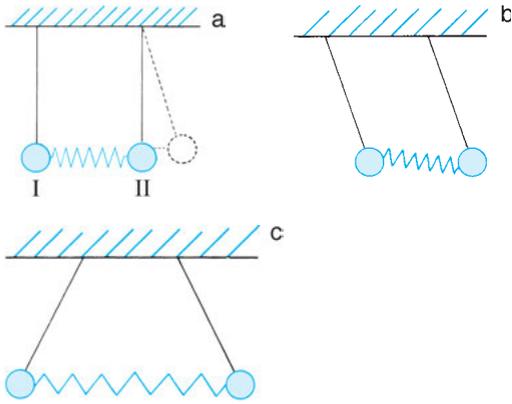
Diese *zeitliche Modulation* der resultierenden Amplitude erfolgt um so langsamer, je weniger sich die beiden Frequenzen unterscheiden. Ein Beispiel für eine Schwebung ist die Superposition der Schwingungen von zwei Stimmgabeln fast gleicher Frequenz. Die Schwebung ist dann als periodisch zu- und wieder abnehmende Lautstärke hörbar.

## 6.6 Gekoppelte Pendel

### 6.6.1 Zwei gekoppelte Pendel

Verbinden wir zwei gleiche ungedämpfte Pendel entsprechend Abb. 6.10a durch eine schwache Spiralfeder miteinander, so kann dieses System Schwingungen durchführen, die eine Zwischenstellung zwischen den freien und den erzwungenen Schwingungen einnehmen, weil jetzt erzwingende Kräfte auf die einzelnen Pendel einwirken, die nur schwach

über die Feder angekoppelt sind. Wird das Pendel II in der Zeichenebene der Abb. 6.10a zum Beispiel nach rechts ausgelenkt, so übt es über die Kopplungsfeder auf Pendel I eine Kraft aus und lenkt dieses ebenfalls nach rechts aus. Lässt man das eine Pendel schwingen, so regt es daher das andere Pendel über die Kopplungsfeder allmählich zu Schwingungen an. Der Energievorrat dieses Systems ist konstant (er ist gleich der durch die anfängli-

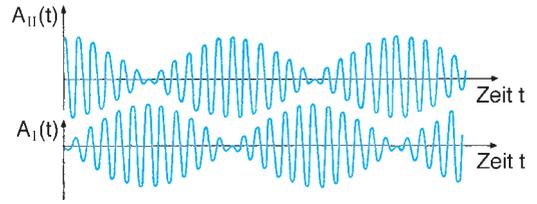


**Abb. 6.10** Zwei gekoppelte Fadenpendel (a) und ihre beiden Eigenschwingungen: (b) gleichphasig, (c) gegenphasig.

che Auslenkung des Pendels II gespeicherten potentiellen Energie), und die auf das Pendel I übertragene Energie wird nun dem Pendel II entzogen. Nach einiger Zeit ist die gesamte Schwingungsenergie von II auf I übertragen worden, so dass Pendel II zum Stillstand kommt, während das Pendel I seine größte Schwingungsamplitude erreicht. Danach übernimmt Pendel I die Rolle, die das Pendel II gespielt hat, und es läuft derselbe Vorgang in umgekehrter Richtung ab: Pendel I regt Pendel II allmählich zur Schwingung an und gibt seine Energie an Pendel II zurück bis es selbst zur Ruhe kommt.

Neben der Eigenschwingung der beiden einzelnen Pendel tritt infolge ihrer Kopplung ein weiterer periodischer Vorgang auf, nämlich das periodische Wechseln der Schwingungsenergie von einem Pendel zum anderen. Auch dies ist ein *Schwebungsvorgang*. Die Schwingungsenergie wird dabei um so rascher ausgetauscht, je steifer die Kopplungsfeder, d. h. je fester die Kopplung ist.

In Abb. 6.11 ist der zeitliche Verlauf der Schwingungen  $A_I$  und  $A_{II}$  beider Pendel dargestellt. Wir sehen, dass jede dieser beiden Amplitudenfunktionen eine Schwebungskurve



**Abb. 6.11** Schwingungen  $A_I(t)$  und  $A_{II}(t)$  der beiden gekoppelten Pendel I und II in Abb. 6.10.

ve wie in Abb. 6.9 ist. Aus dem vorigen Kapitel wissen wir, dass diese durch die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit geringfügig sich voneinander unterscheidenden Frequenzen  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$  entstehen.

Diese beiden harmonischen Schwingungen, wir nennen sie die *Eigenschwingungen der gekoppelten Pendel*, lassen sich auch leicht gezielt einzeln anregen. Lässt man nämlich beide Pendel im Gleichtakt schwingen, so spielt die Kopplung zwischen ihnen (wenn die Pendel gleich sind) keine Rolle, da der Abstand beider Pendel in jedem Augenblick der gleiche ist (Abb. 6.10b). Die Frequenz dieser Eigenschwingung,  $\omega_1$ , stimmt also mit der der einzelnen, nicht gekoppelten Pendel überein. Die zweite Eigenschwingung mit der Frequenz  $\omega_2$  erhalten wir, wenn beide Pendel gegeneinander schwingen (Gegentakt Abb. 6.10c); dann wird die Kopplungsfeder maximal beansprucht, und zu der rücktreibenden Kraft des Einzelpendels kommt noch eine durch die Kopplungsfeder bedingte Zusatzkraft hinzu. Die Schwingungen erfolgen dadurch etwas rascher als im ersten Fall, d. h.,  $\omega_2$  ist etwas größer als  $\omega_1$ . Außer diesen Eigenschwingungen können – abhängig von den Anfangsbedingungen – viele andere Schwingungsformen des Systems angeregt werden. Ihnen gegenüber sind aber die beiden Eigenschwingungen mit den Anfangsbedingungen  $A_I(t=0) = A_{II}(t=0)$  und  $A_I(t=0) = -A_{II}(t=0)$  dadurch ausgezeichnet, dass *keine* Schwebung auftritt, wenn sie angeregt werden. Alle anderen Schwingungsformen zeigen hingegen Schwebungseffekte, da in ihnen beide Eigenschwingungen zugleich angeregt sind.

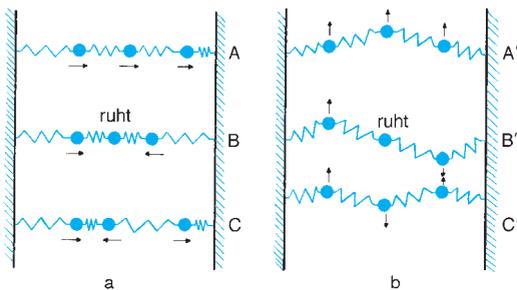
## 6.6.2 Übergang von der Pendelkette zu Eigenschwingungen ausgedehnter Körper

Koppeln wir mehr als zwei Federpendel in einer Kette z. B. durch Federn aneinander, so wächst die Zahl der Eigenschwingungen des Systems mit der Zahl der Einzelpendel. Neben Schwingungsformen, bei denen sich die Pendelkörper längs ihrer Verbindungsgeraden bewegen (*Longitudinalschwingungen*, Abb. 6.12a) können die Körper auch senkrecht zur Verbindungsachse ausgelenkt werden und *Transversalschwingungen* (Abb. 6.12b) ausführen.

Um beide Arten von Schwingungen zu unterscheiden, gibt man die Amplitude als *Vektor*  $\vec{A}_0$  an, dessen Richtung die Schwingungsrichtung ist. Es ist aber üblich, für beide Schwingungsformen (longitudinal oder transversal) in der grafischen Darstellung den Betrag der Auslenkung gegen die Zeit aufzutragen. So kann eine Kurve wie in Abb. 6.3 sowohl eine longitudinale wie eine transversale Schwingung beschreiben, und man muss, um beide Fälle zu unterscheiden, den Schwingungstyp gesondert angeben.

Allgemein gilt, dass die Zahl der longitudinalen wie auch der transversalen Eigenschwingungen einer Kette aus  $N$  gekoppelten Pendeln jeweils gleich  $N$  ist. Das Beispiel  $N = 2$  wurde bereits ausführlich behandelt.

Stößt man das System in beliebiger Weise an, so entstehen normalerweise Schwingungen,



**Abb. 6.12** Grundschwingungen ( $A, A'$ ), erste Oberschwingungen ( $B, B'$ ) und zweite Oberschwingungen ( $C, C'$ ) eines Systems aus drei gekoppelten Federpendeln: (a) Longitudinalschwingungen, (b) Transversalschwingungen.

die sich als Überlagerung aller Eigenschwingungen ergeben und komplizierte Schwingungseffekte zeigen. In Abb. 6.12 sind die longitudinalen und die transversalen Eigenschwingungen eines Systems aus drei gekoppelten Federpendeln dargestellt. Die Eigenschwingungen  $A$  und  $A'$  haben die niedrigsten Eigenfrequenzen, wir nennen sie daher longitudinale bzw. transversale *Grundschwingung*. Die Schwingungen  $B$  und  $B'$  bzw.  $C$  und  $C'$  heißen die erste bzw. zweite *Oberschwingung*. Sie haben höhere Eigenfrequenzen, da bei ihrer Anregung die Kopplungsfedern stärker beansprucht werden.

Moleküle, speziell auch *Bio-Moleküle*, stellen wegen der chemischen Bindungskräfte zwischen ihren atomaren Bausteinen schwingungsfähige Systeme dar. Ihre Eigenschwingungen („*Molekülschwingungen*“), deren Zahl mit der Größe des Moleküls wächst, können durch Wärmezufuhr oder, falls die atomaren Bausteine elektrische Ladungen tragen, auch durch Licht angeregt werden. Bei Biomolekülen liegen die Anregungsfrequenzen zumeist im infraroten Spektralbereich (Kap. 17.1). Das Frequenzspektrum ist oft charakteristisch für die chemische Molekülstruktur. Deshalb ist die (infrarot-optische) *Molekül-Absorptionsspektroskopie* zu einer der Standardmethoden chemischer Analyse, auch von Bio-Molekülen, (Kap. 18.4) geworden.

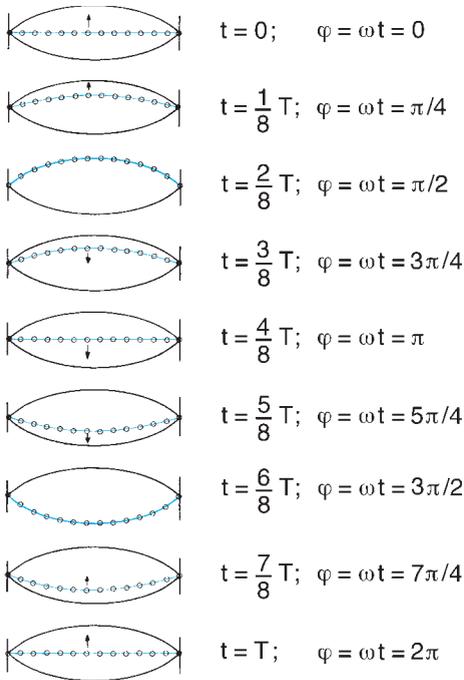
Aus Kap. 5.1.2 wissen wir, dass ein *Festkörper* auch ein System schwingungsfähiger Gebilde darstellt (nämlich der durch Bindungskräfte elastisch aneinandergeschalteten Atome oder Ionen). Bindungskräfte spielen die Rolle der Federkräfte unserer Pendelkette. Freilich ist die Zahl  $N$  der Gitterteilchen riesig, und zudem sind sie nicht in linearen Ketten, sondern räumlich, z. B. als Kristall, angeordnet. Auch in diesem Fall unterscheiden wir longitudinale und transversale Eigenschwingungen.

Allgemein gilt, dass die Zahl aller Eigenschwingungen eines dreidimensionalen Systems aus  $N$  gekoppelten Teilchen gleich  $3N$  ist.

Die Schwingungen der Atome eines kristallinen Festkörpers, die *Gitterschwingungen*, sind bei genügend hoher Temperatur allesamt durch Wärmebewegung angeregt, und zwar mit Amplituden, die sehr klein sind, verglichen mit der Gitterkonstanten. Im Rahmen der Quantentheorie werden sie als *Quasiteilchen* beschrieben und als *Phononen* bezeichnet.

Die Grundschwingungen und die niedrigsten Oberschwingungen eines Festkörpers stellen makroskopische Schwingungen dar, die wir z. B. durch einen Schlag von außen oder durch Schallwellen anregen können.

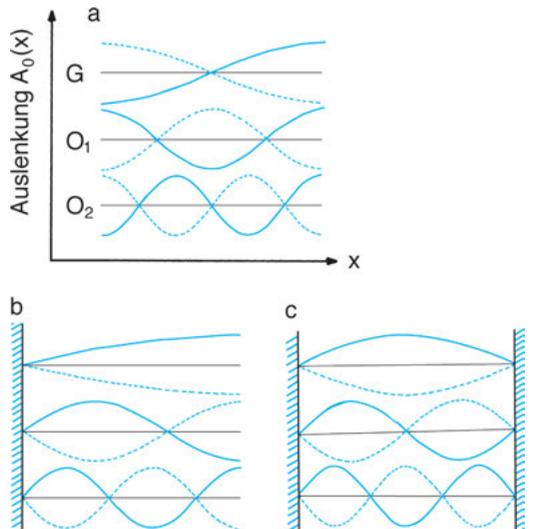
Bei longitudinaler Anregung entstehen dabei Schwingungsamplituden an den Enden des



**Abb. 6.13** Momentaufnahmen der transversalen Grundschwingung eines an beiden Enden fest eingespannten Stabes (dünne blaue Linien). Die dick gezeichneten schwarzen Linien geben die Maximalauslenkung des Stabes an. Zum Vergleich zeigen die Punkte die momentanen Auslenkungen einer Kette aus 14 Oszillatoren. An jedem Ort  $x$  des Stabes ändert sich die Auslenkungsamplitude zeitabhängig:  $A_x(t) = A_{x,0} \cdot \sin(\omega t)$ .  $\varphi$  ist die Momentanphase, bei einer einfachen sin-Funktion deren Argument ( $\omega t - \varphi_0$ ).

Körpers, die, je nach dessen Größe, das Millionenfache der mikroskopischen (genauer: atomaren) thermischen Schwingungsamplituden übersteigen.

In Abb. 6.13 sind für die *transversale Grundschwingung* eines an beiden Enden fest eingespannten Stabes Momentaufnahmen zu verschiedenen Zeiten skizziert. Wir können uns zur Vereinfachung aber auch darauf beschränken, anstelle dieser Bildserie den Verlauf der *Maximalauslenkung* (Amplitude) längs des Stabes darzustellen. Dies ist in Abb. 6.14 geschehen, die die örtlich variierenden Amplituden der Eigenschwingungen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen (die Grundschwingung und die ersten 2 Oberschwingungen) für einen Stab dargestellt, der frei schwingt (Abb. 6.14a), bzw. an einem (Abb. 6.14b) oder an beiden Enden (Abb. 6.14c) fest eingespannt ist.



**Abb. 6.14** Räumlicher Verlauf der Maximalauslenkung der transversalen Grundschwingung  $G$  und der ersten beiden Oberschwingungen  $O_1$  und  $O_2$  eines Stabes: (a) frei schwingend, (b) an einem Ende fest eingespannt, (c) an beiden Enden fest eingespannt. (Analoge Bilder erhält man auch für die longitudinalen Eigenschwingungen, da die Ordinate nur den Betrag, nicht aber die Richtung der Auslenkung angibt).

## 7. Wellen Teil I: Mechanische und Akustische Wellen

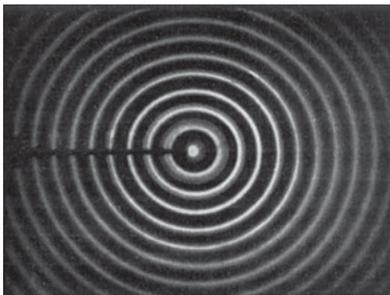
Wie schon in der Einleitung zu Kapitel 6 herausgestellt wurde, lassen sich, wie die Schwingungen, so auch Wellen durch einen weitgehend einheitlichen Formelapparat beschreiben, unabhängig von der Art der Welle (Wasser-, Schallwellen, elektromagnetische Welle usw.) Wir werden diese Beschreibung im folgenden wieder anhand von mechanischen Systemen veranschaulichen, weil diese Systeme die einfachsten und übersichtlichsten sind.

Ganz besonders bieten sich uns für die Veranschaulichung der mathematischen Zusammenhänge und Gesetze die *akustischen*

*Wellen* oder *Schallwellen* an, weil die *Akustik*, d. h. die Lehre vom Schall wegen Stimme und Gehör aber auch wegen therapeutischer Anwendungen von Ultraschall für die Medizin von großer Bedeutung ist. Es gibt aber spezielle Wellenphänomene, die hauptsächlich für elektromagnetische Wellen wichtig sind. Diese werden hier noch nicht vorgestellt, sondern erst, wenn *nach* der Einführung von elektrischen und magnetischen Wechselfeldern im Kapitel 14 die Natur elektromagnetischer Wellen verständlich zu machen ist. Daher werden in Kapitel 18 weitere Eigenschaften von Wellen vorgestellt werden.

### 7.1 Ausbreitung von Schwingungen in Wellenfeldern

Ein ins Wasser geworfener Stein regt die Wassermoleküle in und nahe der Oberfläche zu Schwingungen an; diese Schwingungen breiten sich kreisförmig um das Erregerzentrum als Welle aus (Abb. 7.1). Die Kopplungskräfte zwischen den Wassermolekülen (Dipolkräfte) haben zur Folge, dass die Verschiebungen eines jeden Moleküls auf Nachbarbereiche übertragen werden und sich somit durch das ganze Medium fortpflanzen. Wichtig ist, dass dies mit *endlicher* Geschwindigkeit geschieht.

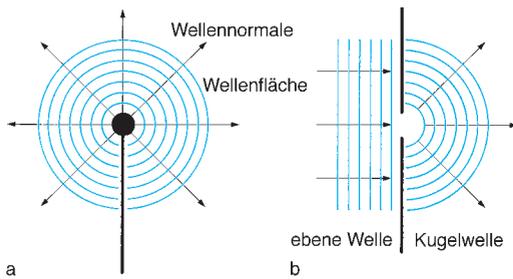


**Abb. 7.1** Kreisförmig von einer punktförmigen Quelle sich ausbreitende Wasserwellen (entnommen aus Bergmann/Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik Band 1, Mechanik, Relativität, Wärme, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1998).

Wird in einem System, das aus vielen untereinander gekoppelten schwingungsfähigen Gebilden besteht, an einer bestimmten Stelle ein Schwingungsvorgang angeregt, so breitet sich dieser mit endlicher Geschwindigkeit räumlich aus.

Die räumliche Ausbreitung der Schwingung kann in einer, in zwei oder in drei Raumdimensionen erfolgen. Das von den Rädern eines herannahenden Zuges erzeugte Geräusch pflanzt sich beispielsweise längs der Schiene in einer Richtung fort. Bei der Wasserwelle beobachten wir ihre Ausbreitung in der Ebene der Wasseroberfläche (wenngleich auch tiefere Wasserschichten mitwirken). Schall oder Licht kann sich in alle Richtungen des Raumes ausbreiten und dabei Kugelwellen bilden (Abb. 7.2).

Die sich räumlich (ein-, zwei- oder dreidimensional) ausbreitende Schwingung nennen wir eine *Welle* und die Gesamtheit der in einem Raumbereich existierenden Wellen ein *Wellenfeld*.



**Abb. 7.2** Kugelwellen: (a) Schallwellen eines Kugelstrahlers; (b) Lichtwellen hinter einer von einer ebenen Welle beleuchteten Lochblende (siehe hierzu auch Kap. 18.2.3).

Allgemein gilt, dass sich nur der Bewegungsvorgang, nicht aber das schwingende Teilchen selbst in unserer Wasserwelle längs der Oberfläche ausbreitet: Die Wassermoleküle vollführen lediglich Schwingungen um ihre Ruhelagen, alle mit derselben Frequenz. Dies sieht man, wenn ein Blatt auf dem Wasser schwimmt, das dann infolge einer Welle auf und ab tanzt, aber nicht durch die Welle über weite Strecken längs der Oberfläche transportiert wird.

Das gilt für alle Arten von Wellen in einheitlichen Medien. Allerdings ist die gegen das Ufer anlaufende Wasserwelle ein Gegenbeispiel. Hier ist das Ausbreitungsmedium wegen des seichten Meeresbodens nicht einheitlich: durch Bremsung der Welle am Meeresboden verzögert, entsteht Brandung, und die Welle transportiert tatsächlich Wasser, Boote und Schwimmer in Richtung zum Ufer.

Vergleichen wir die Schwingungsbewegung mit der eines Blattes an einer anderen Stelle des Wellenfeldes, so sehen wir: Beide tanzen nicht mit gleicher Phase, sondern mit einer bestimmten Phasendifferenz, und diese hängt vom gegenseitigen Abstand ab.

Mit dem Bewegungszustand breitet sich auch der in ihm enthaltene Energieinhalt aus. Die Zerstörungskraft eines gegen das Land anlaufenden *Tsunami* ist ein Beispiel dafür.

Es ist nun nicht überraschend, dass die zur Beschreibung einer Schwingung in Kapitel 6 eingeführten Größen *Amplitude*, *Frequenz*, *Schwingungsdauer* und *Phase* auf die Welle übertragen werden können. Daneben sind zu deren vollständiger Beschreibung jedoch weitere Größen wie *Polarisation*, *Wellenlänge* und *Ausbreitungsgeschwindigkeit* erforderlich, die im folgenden eingeführt werden.

**Ebene Wellen** Wir wollen die Ausbreitung von Wellen in *einer* Richtung  $x$  betrachten, d. h. eine eindimensionale Welle. Die am einfachsten zu beschreibende Welle ist dann die

jenige, bei welcher an jedem Ort  $x$  eine harmonische Schwingung

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (7-1)$$

erfolgt. Wir nennen sie eine *harmonische Welle*, in Analogie zur harmonischen Schwingung (Kap. 6.2). Entscheidend für die Welle ist nun, dass die Phasenkonstante  $\varphi$  sich längs der Ausbreitungsrichtung  $x$  linear mit dem Ort ändert:  $\varphi = kx$ , wobei  $k$  eine Konstante ist, auf deren Bedeutung wir weiter unten eingehen werden.

Im Argument der trigonometrischen Funktion in Gl. (7-1) ist also eine zeitabhängige Variable ( $\omega t$ ) und eine ortsabhängige Variable ( $kx$ ) enthalten. Wir werden sehen, dass erst ihr Zusammenspiel zur Ausbreitung der Welle führt, und dass beide Funktionen über die Ausbreitungsgeschwindigkeit miteinander verknüpft sind.

Für die simultane zeitliche und räumliche Amplitudenfunktion der harmonischen Welle erhalten wir also:

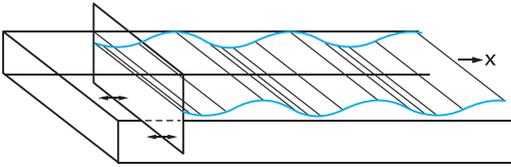
$$A(t, x) = A_0 \sin(\omega t - kx). \quad (7-2a)$$

Diese Welle ist dadurch ausgezeichnet, dass sie zur Zeit  $t = 0$  am Ort  $x = 0$  die Auslenkung  $A = 0$  hat. Wellen mit anderen *Anfangsbedingungen* (Kap. 6.2) erfassen wir mit der verallgemeinerten Schreibweise

$$A(t, x) = A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (7-2b)$$

$\varphi_0$  ist eine *Phasenkonstante*. (Wir könnten auch die Schreibweise  $-\varphi_0$  anstelle von  $+\varphi_0$  wählen).

Gl. (7-2a) und (7-2b) gelten für eine eindimensionale Welle und auch für Wellen an Oberflächen und in dreidimensionalen Medien, die sich nur in *einer* Richtung ausbreiten, die *ebenen Wellen*. Ebene Wasserwellen können wir z. B. dadurch erzeugen, dass wir wie in Abb. 7.3 ein Brett in einem Wasserbecken periodisch hin- und herschieben. Die Welle wird auf der ganzen Breite des Troges angeregt, aber so, dass von jedem Punkt des dreidimensionalen Wellenfeldes eine Welle gemäß Gl. (7-2) weiterläuft.



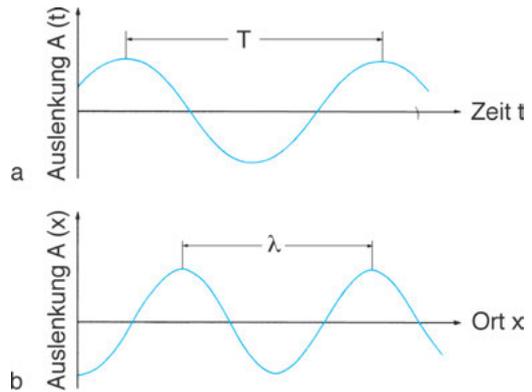
**Abb. 7.3** Ebene Wasserwelle in einem Wassertrug, erzeugt durch ein bewegtes Brett.

In Abb. 7.2 und 7.3 stellen die Striche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle Orte gleicher Phase dar. Im allgemeinen Fall der dreidimensionalen Welle liegen die Orte gleicher Phase auf einer Fläche, die wir *Wellenfläche* nennen.

Bei der Wasserwelle beschreibt  $A$  die Auslenkung von Flüssigkeitsmolekülen, bei Schallwellen die Auslenkung von Gasmolekülen und bei elektromagnetischen Wellen die Größe elektrischer und magnetischer Wechselfelder (Kap. 14.9.7). Gl. (7-2) enthält 3 Variable  $t$ ,  $x$  und  $A$  und benötigt eigentlich eine dreidimensionale grafische Darstellung. Wir können uns dies vereinfacht grafisch veranschaulichen, indem wir einen festen Ort ( $x = \text{konstant}$ ) wählen und dort über längere Zeit den in Abb. 7.4 a skizzierten *zeitlichen* Verlauf der Auslenkung beobachten, eine Schwingung mit der Phasenkonstanten  $\varphi = kx$ . Ebenso können wir die *räumliche* Verteilung der Auslenkung zu einem festen Zeitpunkt ( $t = \text{konstant}$ ), eine Momentaufnahme also, betrachten und erhalten den in Abb. 7.4 b dargestellten Verlauf längs der Ausbreitungsrichtung.

**Kugelwellen** Tritt in der *ebenen* Welle keine Absorption auf, so ist die Größe der Wellenamplitude  $A_0$  unabhängig vom Abstand des Beobachtungspunktes  $x$  von der Erregerquelle.

Anders liegen die Verhältnisse bei der *Kugelwelle* (Abb. 7.2), die sich von einer punktförmigen Erregerquelle gleichmäßig in alle Richtungen des Raums ausbreitet. Hier nimmt die Amplitude mit zunehmendem Ab-



**Abb. 7.4** (a) Zeitabhängigkeit einer Welle an einem festen Ort  $x$ , (b) Ortsabhängigkeit der Welle zu einem festen Zeitpunkt  $t$ . ( $T$ : Schwingungsdauer;  $\lambda$ : Wellenlänge).

stand  $r$  in jeder beliebigen Raumrichtung von der Quelle aus ab, auch wenn die Welle nicht gedämpft ist, und zwar hat die Amplitudenfunktion die Form

$$A(t, r) = \frac{B_0}{r} \sin(\omega t - kr), \quad \text{d. h. } A_0 = \frac{B_0}{r}, \quad (7-3)$$

wobei  $B_0$  eine Konstante ist. Offenbar nimmt  $A$  mit wachsendem Abstand  $r$  ab.

Der Grund für diese  $r$ -Abhängigkeit von  $A_0$  ist, dass sich die Welle und die in ihr gespeicherte Energie mit zunehmender Entfernung von der Quelle auf einen größeren Raumbereich verteilt. Da die durch eine beliebige Querschnittsfläche, z. B. ein Flächenelement auf einer Kugelfläche mit der Quelle im Mittelpunkt, transportierte Energie mit dem Abstand der Fläche von der Quelle quadratisch abnimmt (vgl. hierzu Abb. 7.2a), muss die Amplitude entsprechend Gl. (6-9) linear abnehmen.

## 7.2 Beschreibung von Wellenfeldern

Zur Beschreibung von Wellenfeldern werden weitere Größen wie Wellenlänge, Polarisation und Ausbreitungsgeschwindigkeit benötigt.

**Wellenlänge** Die Phasenkonstante in Gleichung (7-1),  $\varphi = kx$ , variiert mit dem Ort  $x$ ; Abb. 7.4 b zeigt, dass sich dadurch zu jedem Zeitpunkt eine sinusförmige Verteilung der Auslenkungen in Ausbreitungsrichtung einstellt.

Die Schwingungszustände zu einem Zeitpunkt wiederholen sich periodisch in der Ausbreitungsrichtung; sie stimmen in ihrer Phase an allen Orten überein, die um einen gewissen Abstand voneinander entfernt sind. Diesen Abstand nennen wir die *Wellenlänge*  $\lambda$  der Wellen. Auf die Wasserwelle

bezogen bedeutet dies:  $\lambda$  ist z. B. der Abstand zwischen je zwei benachbarten Wellenbergen.

Nun wiederholt sich die Sinus-Funktion in Gl. (7-1) periodisch, wenn sich die Phasenkonstante  $\varphi$  um ein Vielfaches von  $2\pi$  ändert. Daher bewirkt eine Ortsänderung  $\Delta x$  um  $\lambda$  eine Phasenänderung  $\Delta\varphi$  um  $2\pi$ , und wir finden  $\Delta\varphi = 2\pi = k \Delta x = k\lambda$ , oder für die Konstante  $k$ , die auch als *Wellenzahl* bezeichnet wird:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (7-4)$$

Vergleichen wir noch einmal die beiden Abb. 7.4 a und 7.4 b, so wird folgendes deutlich:

Die Wellenlänge  $\lambda$  beschreibt die räumliche Periodizität, die Schwingungsdauer  $T$  die zeitliche Periodizität der Welle.

**Polarisation** Die Polarisation beschreibt die Richtung der räumlichen Auslenkung in der Welle bezogen auf die Richtung der Wellenausbreitung. Erfolgt die Auslenkung längs der Ausbreitungsrichtung, dann sprechen wir von *longitudinaler Welle*, erfolgt sie senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, handelt es sich um eine *transversale Welle*.

Für beide Wellenarten gelten die grafischen Darstellungen der Abb. 7.4a und 7.4b gleichermaßen. (Diese zeitliche bzw. räumliche Darstellung einer Welle in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, auf dessen Ordinate nachse der Betrag der Auslenkung aufgetragen wird, darf nicht mit dem wirklichen Bild der Welle verwechselt werden, bei dem noch die Richtung der Auslenkung unterschiedlich sein kann!) Longitudinal ist eine Schallwelle in Gasen, transversal z. B. die elektromagnetische Welle (Kap. 14.9.7). Die Amplitudengleichungen (7-2) beschreiben beide Typen von Wellen. Wie bei den Schwingungen ist

die Polarisation der Welle *zusätzlich* anzugeben. Dies kann dadurch geschehen, dass man die Schwingungsrichtung zum Betrag der Amplitude  $A_0$  hinzunimmt und die Amplitude als Vektorgröße auffasst, wodurch auch die Auslenkung  $A$  in Gl. (7-2) zur Vektorgröße wird:

$$\vec{A} = A \vec{e}, \quad \vec{A}_0 = A_0 \vec{e}, \quad (7-5)$$

wobei mit  $\vec{e}$  der Einheitsvektor in Schwingungsrichtung gemeint ist.

Bei longitudinalen Wellen weist dieser Vektor in Ausbreitungsrichtung. Bei der transversalen Welle sind die Verhältnisse insofern komplizierter, als hier beliebig viele Polarisationsrichtungen in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, der *Schwingungsebene*, möglich sind.

Die Polarisation transversaler Wellen spielt insbesondere bei elektromagnetischen Wellen und deren Spezialfall, den Lichtwellen, eine große Rolle. Daher wird im Kapitel 18 ausführlich darauf eingegangen werden.

Hier nur so viel: Als *linear* polarisiert bezeichnet man diejenige transversale Welle, bei der die Schwingungsamplitude stets in *einer* Richtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung liegt (Abb. 18.30). *Unpolarisiert* ist eine Welle, die alle Polarisationszustände zugleich enthält. Bei *zirkular* (Abb. 18.31) und *elliptisch* polarisierten Wellen läuft die Amplitude auf einem Kreis bzw. einer Ellipse in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung um.

### Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle

Sie ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle, also z. B. ein Wellenberg einer Wasserwelle, längs der Ausbreitungsrichtung fortpflanzt.

Während der Zeit einer Schwingungsdauer  $T$  hat sich ein vom Erregerzentrum einer Wasserwelle auslaufender Wellenberg gerade um die Strecke einer Wellenlänge  $\lambda$  vom Zentrum entfernt (dort ist die Welle dann mit dem Erregerzentrum gerade wieder in Phase). Die

Ausbreitung der Welle um die Strecke  $\lambda$  erfolgt also in der Zeit  $T$ , und wir erhalten für die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ :

$$c = \frac{\lambda}{T}, \quad \text{bzw.} \quad c = \lambda \nu$$

$$(\nu = 1/T : \text{Frequenz}). \quad (7-6)$$

Diese Beziehung gilt allgemein für jede Art von Wellen. In voneinander verschiedenen Medien breitet sich eine Welle i. A. unterschiedlich schnell aus;  $c$  ist also vom Ausbreitungsmedium abhängig.

Gl. (7-6) beinhaltet, dass sich der Schwingungszustand einer Welle *geradlinig* im Raum ausbreitet. Dies gilt für homogene Stoffe mit einheitlichem  $c$ , nicht aber an der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Stoffen, wo die Ausbreitungsrichtung abrupt geändert werden kann (*Brechung*). Auch wenn die Ausbreitung

der Welle durch enge Öffnungen, einen Spalt oder eine Blende behindert wird, treten Abweichungen von der geradlinigen Ausbreitung auf; wir bezeichnen sie als *Beugung*. In Kap. 18.2 und 18.3 werden wir im Zusammenhang mit elektromagnetischen Wellen genauer auf diese Vorgänge eingehen.

Mit Gl. (7-6) können wir für die ebene Welle anstelle von Gl. (7-2) andere Schreibweisen einführen, die ebenfalls häufig verwendet werden:

$$A(t, x) = A_0 \sin 2\pi(t/T - x/\lambda) \quad \text{oder}$$

$$A(t, x) = A_0 \sin 2\pi\nu(t - x/c)$$

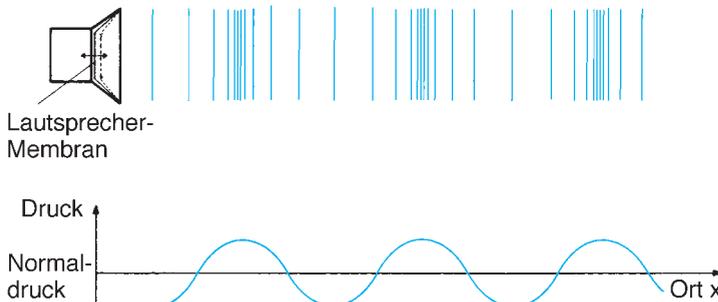
$$= A_0 \sin \omega(t - x/c). \quad (7-7)$$

Wir wollen nun weitere Wellengrößen einführen und diese am Beispiel der Schallwellen veranschaulichen und zugleich die dort gebräuchlichen, oftmals speziellen Bezeichnungen einführen.

## 7.3 Akustik

In Materie aller Aggregatzustände können sich periodische Auslenkungen von Atomen und Molekülen als elastische Wellen räumlich ausbreiten. Ist die Wellenlänge sehr groß gegen die mittleren Atomabstände, so nennen wir diese Wellen *Schallwellen* oder *akustische Wellen*. Sie können weiter unterteilt werden in *Infraschall* (niedrige Frequenzen), *Hörschall* und *Ultraschall* (hohe Frequenzen) und *Hyperschall*. Sie überlagern sich der stets vorhandenen Wärmebewegung der Materieteilchen.

Schwingt die Membran eines Lautsprechers, so schiebt sie periodisch die angrenzenden Luftschichten vor sich her, wodurch ein geringfügiger Überdruck entsteht, oder saugt sie zurück, wodurch die Membran einen geringfügigen Unterdruck erzeugt (Abb. 7.5). Dieser Druckunterschied im Gas und die dadurch bewirkte Bewegung der Gasmoleküle breiten sich als longitudinale Schallwelle aus. Um hörbar zu sein, genügt es, wenn die Amplitude der Druckschwankungen  $10^{-4}$  Pa und die zugehörige Maximalauslenkung der Gasmoleküle  $10^{-10}$  m (das ist weniger als ein Moleküldurchmesser!) beträgt.



**Abb. 7.5** Schwingung einer Lautsprechermembran erzeugt geringfügige periodische Dichteveränderungen der Luft (Über- und Unterdruck), die sich als longitudinale Schallwellen ausbreiten.

Schallwellen sind (im Gegensatz zu elektromagnetischen Wellen) an Materie gebunden. Im Vakuum kann sich Schall nicht ausbreiten. In Gasen und Flüssigkeiten sind Schallwellen longitudinal. In elastischen Festkörpern können auch transversale Schallwellen angeregt werden.

(Anmerkung: Wir dürfen Schallwellen in Materie nicht mit *Materiewellen* verwechseln, mit denen wir die Wellennatur mikroskopischer Materie beschreiben (Kap. 18.6)).

**Frequenzbereiche des Schalls** Der eigentliche Frequenzbereich der Akustik ist der Bereich, für den das menschliche Ohr als Empfänger empfindlich ist. Dieser *Hörbereich* liegt zwischen 16 Hz (*untere Hörgrenze*) und 20000 Hz (*obere Hörgrenze*). Am empfindlichsten ist das menschliche Ohr bei Frequenzen zwischen 2 und 4 kHz.

Die Grundtöne von Musikinstrumenten reichen nur bis etwa 4 kHz (vgl. Abb. 7.6). Der Bereich von dort bis zur oberen Hörgrenze wird durch Obertöne (Kap. 7.5) ausgefüllt. Die Sprache umfaßt einen Frequenzbereich von etwa 100 bis 2000 Hz. Um eine einheitliche Tonhöhenkala für Musikinstrumente (die z. B. in einem Orchester spielen) zu erreichen, wurde der *Kammerton* *a* mit einer Frequenz  $\nu_a = 432$  Hz als Stimmton international festgelegt. 1939 wurde er auf  $\nu_a = 440$  Hz erhöht, wodurch – wegen größerer benötigter Saitenspannung – die Töne von Streichinstrumenten schärfer werden.

Unterhalb von 16 Hz beginnt der Bereich des *Infraschalls*. Jenseits der oberen Hörgrenze von etwa 20000 Hz liegt der Bereich des *Ultraschalls*, für den das menschliche Ohr (nicht aber z. B. das Hundeohr) unempfindlich ist. Oberhalb von  $10^9$  Hz schließlich beginnt der *Hyperschall*-Bereich.

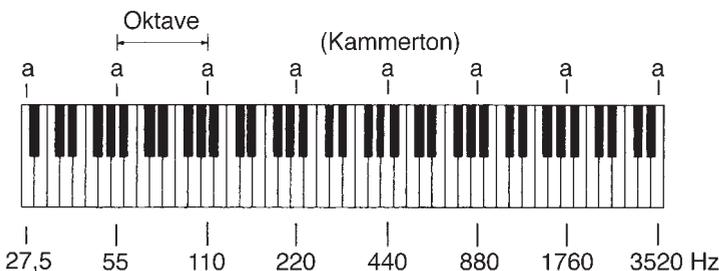
**Schallfeldgrößen** Die Gesamtheit der einen Raum erfüllenden Schallwellen bezeichnet man als Wellenfeld oder, spezieller, als *Schallfeld*. Zu seiner Beschreibung dienen die *Schallfeldgrößen*, auf die wir im folgenden näher eingehen wollen, da sie für Sprechen und Hören wichtig sind.

Als einfachstes Beispiel wollen wir wieder eine sich in einer Richtung  $x$  in Luft ausbreitende ebene Schallwelle betrachten. Die durch die Schallerregung bewirkten momentanen Auslenkungen  $A(t, x)$  von Gasmolekülen, die sich im Abstand  $x$  von der Schallquelle befinden, können dann durch Gl. (7-7) beschrieben werden, wobei  $A_0$  in dieser Gleichung als *Schallamplitude* bezeichnet wird.

Die Geschwindigkeit  $v$  der periodischen Teilchenbewegung um die Ruhelage ( $v$  hat nichts mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gl. (7-6) zu tun!) ergibt sich aus Gl. (7-7) durch Differentiation nach der Zeit:

$$v = \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi}{T} A_0 \cos(2\pi(t/T - x/\lambda)). \quad (7-8)$$

Die Geschwindigkeit ändert sich also periodisch wie  $A$  selbst, allerdings, worauf das Auftreten der Cosinus-Funktion hinweist, um  $\pi/2$  phasenverschoben.



**Abb. 7.6** Tonumfang des Klaviers.

In der Literatur werden entweder die Geschwindigkeit  $v$  oder ihr Maximalwert

$$v_0 = \frac{2\pi}{T} A_0 = \omega A_0 \quad (7-9)$$

die *Schallschnelle* genannt.

Die periodischen Auslenkungen der Moleküle in einer longitudinalen Schallwelle führen zu periodischen Druckschwankungen im Schallfeld. Diese Druckschwankungen werden beschrieben durch den *Schallwechseldruck*  $\Delta p$ .

Die Druckschwankungen  $\Delta p$  in einem Gas überlagern sich dem normalen Druck, d. h. dem Atmosphärendruck  $p_a$ , und ergeben zusammen mit ihm den Gesamtdruck

$$p = p_a + \Delta p. \quad (7-10)$$

In Kap. 10.1 werden wir sehen, dass Druck und Molekülgeschwindigkeit miteinander zusammenhängen. Bei der Schallausbreitung erfolgen die periodischen Druckänderungen mit der gleichen Phase wie die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit:

$$\Delta p = p_0 \cos 2\pi(t/T - x/\lambda). \quad (7-11)$$

Die Schallwechseldruck-Amplitude  $p_0$  ist proportional der (mittleren) Gasdichte  $\rho$ , der Schallgeschwindigkeit  $c$  im Gas und der Schallschnelle  $v_0$ :

$$p_0 = \rho c v_0. \quad (7-12)$$

Wir werden im folgenden näher auf die sehr komplizierte Art eingehen, mit der der Hörapparat des Menschen die Intensität von Schallwellen in die *subjektive* Empfindung des Hörens umsetzt. Den minimalen Schallwechseldruck, der einen Höreindruck hervorruft, nennen wir die *untere Schallschwelle*. Sie beträgt bei  $\nu = 1$  kHz in Luft  $3 \cdot 10^{-5}$  Pa. Andererseits erreicht der Schallwechseldruck in sehr starken, therapeutisch wirksamen Schallfeldern die Größe von einigen Pascal.

**Die Schallgeschwindigkeit** Die Schallgeschwindigkeit  $c$ , mit der sich die Druckschwankungen längs der Ausbreitungsrichtung der Schallwelle fortpflanzen (vgl. Abb. 7.5), wird

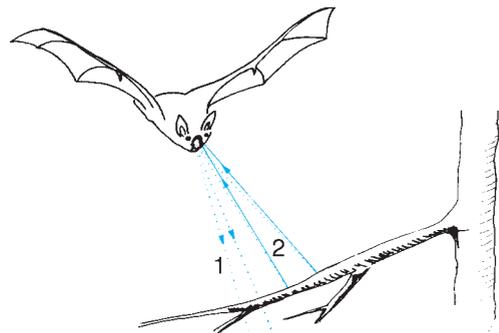
– wie bei allen Wellen – durch Gl. (7-6) bestimmt.

Bei Schallwellen können wir unter günstigen Umständen direkt beobachten, wie groß die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Nehmen wir an, wir schauen einem weit entfernten Tennisspieler beim Spiel zu, dann erreicht uns das Geräusch eines jeden Schlages deutlich später als wir den Schlag gesehen haben: das Schallsignal hat in der Luft mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von ca.  $3 \cdot 10^2$  m/s eine längere Laufzeit benötigt als das optische, mit Lichtgeschwindigkeit (ca.  $3 \cdot 10^8$  m/s) sich ausbreitende Signal, das uns praktisch unmittelbar erreicht. Wenn wir die Entfernung  $\Delta x$  zum Spieler kennen und die Verzögerung des Schalls gegen das Lichtsignal  $\Delta t$  z. B. per Stoppuhr messen, erhalten wir die Größe der Schallgeschwindigkeit aus  $c = \Delta x / \Delta t$ .

Ein anderes Beispiel: Blitz und Donner eines Gewitters treffen nacheinander bei einem Beobachter ein. Zählt man die Sekunden zwischen beiden, dann kann man die Entfernung des Gewitters aus  $x = ct$  ( $c \cong 3 \cdot 10^2$  m/s) ausrechnen.

Die Entfernungsmessung mittels *Echolotung* (mit akustischen Wellen) oder mittels *Radar* (mit elektromagnetischen Wellen) basiert ebenfalls auf der Laufzeit von Wellen. Ein abgehackter kurzer Wellenzug wird ausgesandt, an einem Hindernis reflektiert und vom am Ort der Quelle befindlichen Beobachter als *Echo* nach einer Zeitspanne  $\Delta t$  wieder registriert. Misst man diese Zeitspanne, so ergibt sich der doppelte Abstand zwischen Beobachter und Hindernis aus  $2l = c \Delta t$ , wobei  $c$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist.

Übrigens orientieren sich Fledermäuse nach diesem Echolot-Prinzip (Abb. 7.7), indem sie Ultraschall-Schreie ausstoßen.



**Abb. 7.7** Echolot-Prinzip bei der Ortung der Fledermaus.

(Die Ultraschallwellen 1 gehen am Hindernis vorbei, die Wellen 2 werden reflektiert und registriert.)

Die *Schallgeschwindigkeit* ist i. A. in unterschiedlichen Stoffen verschieden; ihre Größe hängt von den elastischen Eigenschaften des Ausbreitungsmediums ab und auch von der Polarisierung der Welle.

a) In *Gasen* ist der *Kompressionsmodul* (Kap. 5.2) die für die Geschwindigkeit entscheidende Größe. Er ist – bei idealem Gaszustand – gleich dem herrschenden Druck  $p$ . Nun erfolgen aber die Druckänderungen so rasch, dass die mit Kompression und Ausdehnung verbundenen geringfügigen Temperaturschwankungen nicht durch die Umgebung ausgeglichen werden können, so dass die Schallausbreitung *adiabatisch* (Kap. 9.3) abläuft und folglich der *Adiabatenexponent*  $\kappa$  die Schallausbreitung mitbestimmt. Für die Schallgeschwindigkeit in Gasen gilt:

$$c = \sqrt{\kappa p / \rho}, \quad (p = \text{Druck}, \rho = \text{Dichte}). \quad (7-13a)$$

$c$  erweist sich als unabhängig von der Frequenz, d. h., der Tonhöhe des Schalls. Daher können wir Klänge und Akkorde auch in größerer Entfernung von der Schallquelle ungestört empfangen. Wäre es anders, würden die einzelnen enthaltenen Töne (Kap. 7.10) nach unterschiedlichen Laufzeiten beim Hörer eintreffen, und die Wiedergabe von Konzerten in großen Sälen wäre unmöglich. Wächst die Temperatur, so breitet sich (bei konstantem Druck  $p$ ) der Schall schneller aus, da die Gasdichte abnimmt.

b) In *Flüssigkeiten* ist die longitudinale Schallgeschwindigkeit analog zu Gl. (7-13a) durch den Modul der adiabatischen Kompression,  $K$  (Kap. 5.2.2), gegeben:

$$c = \sqrt{K / \rho}. \quad (7-13b)$$

c) In *Festkörpern* sind mehrere Schallgeschwindigkeiten zu unterscheiden. Für *longitudinale* bzw. *transversale* Wellen gilt:

$$c_{\text{long}} \sim \sqrt{E / \rho} \quad \text{bzw.} \quad c_{\text{trans}} \approx \sqrt{G / \rho} \quad (7-13c, d)$$

( $E$  = Elastizitätsmodul;  $G$  = Torsionsmodul).

In Flüssigkeiten und Gasen können keine Transversalwellen angeregt werden, da dort  $G = 0$ .

Die Proportionalitätskonstante in Gl. (7-13c) und in Gl. (7-13d) hängt von der Geometrie des schalleitenden Körpers ab. Z. B. ist sie in Gl. (7-13c) bei einem langen Stab gleich 1; in diesem Fall bezeichnet man die longitudinale Schallgeschwindigkeit als *Dehnwellen-Geschwindigkeit*  $c_{\text{dehn}}$ . Allgemein gilt für Festkörper:  $c_{\text{long}} > c_{\text{dehn}} > c_{\text{trans}}$ . In Tabelle 7.1 sind Werte der Schallgeschwindigkeit einiger Stoffe zusammengestellt.

**Energiegrößen der Welle** In jeder Welle ist Energie gespeichert, die mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle von der

**Tab. 7.1** Schallgeschwindigkeiten

Material		$c_{\text{Schall}}$ in $\text{ms}^{-1}$ bei $20^\circ\text{C}$	
Gase	CO <sub>2</sub>	276	
	Luft	343	
	N <sub>2</sub>	404	
Flüssigkeiten	C <sub>3</sub> H <sub>6</sub> O (Aceton)	1190	
	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> (Benzol)	1324	
	H <sub>2</sub> O	1485	
Festkörper	Pb	(long.)	2200
		(trans.)	700
	Cu	(long.)	4700
		(trans.)	2300
	Glas	(long.)	4000 – 5500
		(trans.)	2500 – 3500

Quelle wegtransportiert wird. Unter der *Energiedichte*  $\varrho_E$  versteht man den zeitlichen Mittelwert der pro Volumen  $V$  im Wellenfeld enthaltenen Feldenergie  $E$ :  $\varrho_E = E/V$ .

Als *Strahlungsleistung* (*Energiestrom*)  $P$  bezeichnen wir die pro Sekunde durch eine beliebige Querschnittsfläche transportierte Energie:

$$\text{Strahlungsleistung } P = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}}. \quad (7-14a)$$

Typische Schall-Leistungen sind in Tab. 7.2 zusammengestellt.

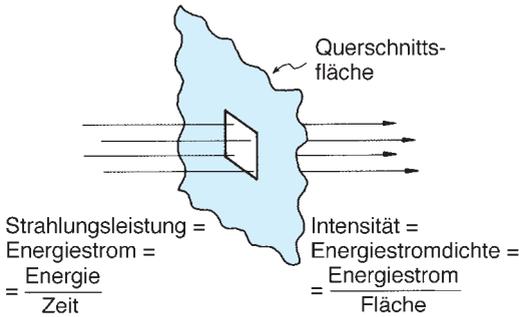
Als *Intensität* (*Energiestromdichte*)  $I$  einer Welle ist die pro Sekunde und pro Einheit der Querschnittsfläche fließende Energie, also die *Energiestromdichte* definiert (Abb. 7.8):

$$\text{Intensität } I = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{\text{Energiestrom}}{\text{Fläche}}. \quad (7-14b)$$

Die Einheit der Intensität ist demnach  $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$  oder  $\text{W m}^{-2}$ .

**Tab. 7.2** Typische Schall-Leistungen in Watt

Sprache	$10^{-5}$
Saiteninstrument	$10^{-3}$
Blasinstrument	$10^{-1}$
Zimmerlautsprecher	10
Großlautsprecher	$10^2$
Sirene	$10^3$



**Abb. 7.8** Zur Definition der Intensität (Gl. 7-14b).

Analog zur Schwingung (Gl. (6-9)) ist die in der Welle gespeicherte Energie proportional zum Quadrat der Amplitude der Welle  $A_0$  (siehe hierzu auch Kap. 17.2), und entsprechend gilt dies auch für die Intensität

$$I \sim A_0^2. \quad (7-14c)$$

**Schallstärke und Lautstärke** Für die medizinische Akustik sind besonders zwei Schallfeldgrößen von Bedeutung: zum einen die Intensität als physikalische Größe, dann aber auch die Lautstärke als bezüglich des Ohrs physiologisch gewichtete Meßgröße.

Die *Schallintensität* oder *Schallstärke*  $I$  ist entsprechend Gl. (7-14b) definiert als die pro Zeiteinheit und Flächeneinheit einfallende Schallenergie. Die SI-Einheit ist  $\text{Watt m}^{-2}$ .

Um einen sinnvollen zeitlichen Mittelwert für die Intensität zu erhalten, muss die Messdauer größer sein als die Schwingungsdauer  $T$  der Welle, damit in der Messung über mindestens eine ganze Schwingungsperiode gemittelt wird.

Auch für die Schallstärke besteht die für alle Arten von Wellen gültige Proportionalität zwischen Intensität und Amplitudenquadrat (vgl. Gl. 7-14c). Der genaue Zusammenhang lautet im Falle des Schalls für den zeitlichen *Mittelwert der Intensität*:

$$I = \frac{1}{2} Z(A_0\omega)^2. \quad (7-15a)$$

$Z$  wird der *Wellenwiderstand* oder *Impedanz* genannt. Bei Schallwellen in Gasen steht  $Z$  für  $\rho c$ .

Aufgrund der Gln. (7-12) und (7-9) kann man hierfür auch folgendes schreiben:

$$I = \frac{p_0^2}{2Z}. \quad (7-15b)$$

Die Schallstärke lässt sich also auch durch Schalldruck  $p_0$  und Schallwellenwiderstand  $Z$  beschreiben.

Hier lernen wir einen allgemeinen Zusammenhang kennen: Die Wellenausbreitung kann als Energiestrom gedeutet werden, und dieser ist durch einen Widerstand im Ausbreitungsmedium begrenzt analog zu einer Flüssigkeitsströmung oder dem elektrischen Strom.

In diesen Beispielen entsteht der Strom durch eine Potentialdifferenz, d. h. eine Spannung (siehe die Diskussion des elektrischen Stromes in Kap. 14.5), und das Verhältnis aus Potentialdifferenz und Strom ist der Widerstand. Bei der Welle ist es der Wellenwiderstand  $Z$ . Für die Schallausbreitung ergibt er sich als Quotient der Druckdifferenz  $\Delta p$  und der Teilchengeschwindigkeit  $v$ : Setzt man nämlich Gl. (7-12) in Gl. (7-11) ein, so erhält man bei Berücksichtigung von Gl. (7-9) die Beziehung

$$\frac{\Delta p}{v} = \rho c = Z. \quad (7-16)$$

Will man die Leistungen  $P_1$  und  $P_2$  zweier Schallquellen vergleichen, so kann man

das Pegelmaß (Gl. (6-8)) heranziehen und erhält:

$$z = 10 \cdot \log \left( \frac{P_1}{P_2} \right) = 20 \cdot \log \left( \frac{A_{0,1}}{A_{0,2}} \right). \quad (7-17)$$

$z$  ist eine (dimensionslose) Zahl; man hat ihr als Einheit den Namen Dezibel (dB) gegeben.

Die beiden Formeln in Gl. (7-17) unterscheiden sich dadurch, dass einmal die Zahl 10 und einmal 20 auftritt. Das ist kein Druckfehler: Setzen wir nämlich die zu den Leistungen proportionalen Quadrate der Amplituden ein,  $z = 10 \cdot \log (A_{0,1}^2/A_{0,2}^2)$ , so erhalten wir nach Umformung den zusätzlich Faktor 2. Wir finden also denselben Zahlenwert für  $z$ , ob wir nun von Amplituden oder Strahlungsleistungen ausgehen.

Bei guten CD-Spielern wird z. B. der Unterschied der Tonamplituden zur Amplitude von Störgeräuschen mit 74 dB angegeben, und das bedeutet, dass die Amplituden beider Schallwellen im Verhältnis 5000 : 1 stehen.

Auch die Qualität von schallabsorbierenden Baumaterialien kann man in dB angeben: werden von einem Baustoff in einer Schicht von 1 m 95% einer Schallwelle absorbiert, so ist der Unterschied der Wellenamplitude vor und hinter dem Schallschlucker 26 dB.

Schallstärke ist die wesentliche physikalische Größe; die Beschreibung des *subjektiven*, physiologischen Höreindrucks benötigt aber eigene Charakterisierungsgrößen zu denen die *Lautstärke* gehört.

Das Ohr zeigt innerhalb des Hörbereiches eine besondere Fähigkeit, sich verschiedenen Schallintensitäten anzupassen. (Das gilt ähnlich für das Helligkeitsempfinden des Auges). Im Frequenzbereich um 1 kHz ist das Ohr in der Lage, Intensitäten von  $10^{-12} \text{ W/m}^2$  gerade noch wahrzunehmen. Man nennt diese untere Grenze die *untere Hörschwelle*. (Noch etwas niedriger liegt die untere Hörschwelle im Bereich um 3 kHz.) Damit ist eine prinzipielle Empfindlichkeitsgrenze erreicht, denn wäre das Ohr noch empfindlicher, so würde es den Aufprall der infolge der Wärmebewegung auf das Trommelfell prasselnden Gasmoleküle *hören*.

Andererseits werden Schallintensitäten erst bei etwa  $10^{-1} \text{ W/m}^2$  als schmerzhaft empfunden, d. h. die *Schmerzschwelle* liegt bei dieser Frequenz um 11 Zehnerpotenzen über der unteren Hörschwelle! Es ist unglaublich, dass der Hörapparat dies zu bewältigen vermag. Der Grund: die *subjektiv empfundene Lautstärke* wächst nicht linear mit der Leistung sondern nach dem *Weber-Fechnerschen Gesetz* näherungsweise proportional zum Logarithmus der Intensität. Dieses Gesetz gilt analog auch für das subjektive Helligkeitsempfinden beim Setzen (Kap. 19.5.3). Dies ist eine wesentlich schwächere Abhängigkeit, und aus den 11 Zehnerpotenzen wird der Faktor 11 (siehe Anhang A5).

Da die Schallempfindlichkeit des Ohres im Hörbereich mit der Frequenz stark variiert, ist die Schallleistung für den Höreindruck nicht alleine entscheidend. Vielmehr ist der physiologische Effekt der Abhängigkeit des Hörapparates von der Frequenz wichtig; dies wird bei der Definition des *subjektiven Lautstärkemaßes Phon* mitberücksichtigt. Das geschieht,

**Tab. 7.3** Lautstärken

	Lautstärke (Phon)
Schmetterlingsgeräusch (Hörschwelle)	0
Taschenuhr (1 m entfernt)	20
Schnakensummen	30
Sprache normal	50
Gesundheitsschäden bei dauernder Beschallung	70
Straßenlärm	80
Beat-Musik	90
Irreversible Ohr-Schädigung (Tinnitus) nach 8 std	90
Walkman (volle Stärke)	110
Presslufthammer (1 m entfernt)	120
Irreversible Ohrschädigung nach 1/2 min.	120
Kesselschmiede (Schmerzempfindung)	130

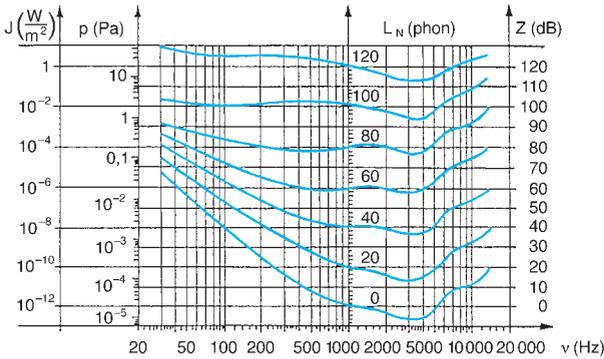
indem man die zu messende Lautstärke bei der Frequenz  $\nu$  mit einem Referenzton der Frequenz  $\nu_0 = 1 \text{ kHz}$  (bei der das Ohr sehr empfindlich ist) vergleicht und dessen Lautstärke variiert, bis beide Töne dem Ohr als gleich laut *erscheinen*. Man berechnet dann das Verhältnis der so gefundenen Intensität des Referenztones  $I_{\text{ref}}$  bei 1 kHz und der Intensität der unteren Hörschwelle bei 1 kHz ( $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ), bildet daraus den Logarithmus, multipliziert mit dem Zahlenfaktor 10 und hat dann endlich

das (dimensionslose) *Lautstärkemaß*  $L_N$ :

$$L_N = 10 \cdot 10 \log \left( \frac{I_{\text{ref}}}{I_0} \right). \quad (7-18)$$

Obwohl  $L_N$  dimensionslos ist, gibt man eine Einheit, nämlich *Phon*.

Die Lautstärkeeinheit *Phon* unterscheidet sich vom Pegelmaß *Dezibel* der Gl. (7-17) dadurch, dass bei ersterer die Frequenzabhängigkeit der Empfindlichkeit des Hörorgans mitberücksichtigt wird. *Dezibel* ist eine *physikalische* Einheit, *Phon* hingegen eine *subjektive, physiologische*. So ist z. B. für einen Lautstärke-Eindruck von 40 Phon bei 50 Hz eine tausendfach größere Schallintensität erforderlich als bei 500 Hz oder 1 kHz.



**Abb. 7.9** Frequenzabhängigkeiten der Schallfeldgrößen Schallstärke  $J$ , Schalldruck  $p$ , Lautstärke  $L_N$  und Pegelmaß  $z$  (beachten Sie die unterschiedlichen Ordinaten-skalen!) Die Kurven geben  $L_N = \text{const.}$  an.

Einige typische Lautstärken sind in Tab. 7.3 zusammengefasst. Die Angabe 0 Phon bedeutet entsprechend Gl. (7-18) nicht etwa, dass man gar nichts hört, sondern dass  $I_{\text{ref}} = I_0$  wird und damit die Lautstärke an der unteren Hörschwelle liegt.

Als gesundheitsschädlich gilt heute eine dauernde Beschallung mit mehr als 70 Phon. Bei 110 Phon reichen 30 s für eine irreversible Schädigung des Hörapparates.

In Abb. 7.9 ist die für die *Audiometrie* (subjektive Hörprüfung) wichtige Frequenzabhängigkeit der Lautstärke grafisch dargestellt: In einer doppelt-logarithmischen Darstellung ist auf der Abszisse die Schallfrequenz aufgetragen. Die Ordinate zeigt sowohl die Schallintensität  $I$  und den Schallwechseldruck  $p$  als auch Pegel- und Lautstärkemaß für eine Schar von Kurven konstanter Lautstärke zwischen 0 und 120 Phon.

## 7.4 Der Doppler-Effekt

Zu Gl. (7-6) haben wir bemerkt, sie gelte für jede Art von Wellen, wenn wir die Ausbreitung in einer Richtung betrachten. Nun müssen wir eine Einschränkung machen: Bei der Herleitung wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass Quelle und Beobachter der Welle sich beide bezüglich des Ausbreitungsmediums in Ruhe befinden. Der *Doppler-Effekt* beschreibt die Konsequenzen, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Wir wollen mit einem Urlaubsbeispiel beginnen:

Laufen Meereswellen in gleichmäßiger Folge gegen eine Küste an, so werden wir, wenn wir ruhig im Wasser stehen, in einer bestimmten Zeit  $t$  von einer gewissen Anzahl  $n$  von Wellenbergen getroffen. Die Größe  $n/t$  ist gerade die Frequenz  $\nu_0$  der Welle:

$$\frac{n}{t} = \nu_0 = \frac{c}{\lambda}.$$

Rennen wir aber vor den Wellen mit einer Geschwindigkeit  $v$  davon, so wird die An-

zahl der Wellen  $n'$ , die uns in der Zeit  $t$  treffen, kleiner und die dazugehörige Frequenz  $\nu'$  ebenso:

$$\nu' = \frac{n'}{t} = \frac{c - v}{\lambda} = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right). \tag{7-19}$$

Dabei ist  $\lambda$  die im Wasser gemessene Wellenlänge. Entscheidend ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit bezüglich des bewegten Beobachters und diese ist die Relativgeschwindigkeit  $c - v$ . Sie wird Null, und damit auch die Frequenz  $\nu'$ , wenn wir uns mit derselben Geschwindigkeit bewegen, mit der sich die Welle ausbreitet:  $\nu' = 0$ , wenn  $c = v$ . Wir laufen dann beispielsweise mit einem Wellenberg mit.

Laufen wir aber den Wellen mit der Geschwindigkeit  $v$  entgegen, dann wird die Anzahl  $n''$  der uns im gleichen Zeitraum  $t$  treffenden Wellenberge größer sein als  $n$  und zwar um so größer, je größer unsere Geschwindigkeit  $v$  ist. Die neue Frequenz  $\nu''$  be-

rechnet sich zu:

$$\nu'' = \frac{n''}{t} = \frac{c+v}{\lambda} = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad (7-20)$$

wobei nun die Relativgeschwindigkeit zwischen Beobachter und Welle  $c+v$  ist.

Entsprechende Änderungen der Wellenlänge (und damit auch der Frequenz) treten auf, wenn der Beobachter ruht und die Quelle, die die Welle erzeugt, sich bewegt. Im täglichen Leben begegnet uns dieser zweite Fall häufig. Fährt beispielsweise ein hupendes Auto schnell an uns vorbei, so hören wir beim Herannahen das Hupsignal mit höherer Tonhöhe (größerer Frequenz) als beim Davonfahren. Für diesen Fall wollen wir die Änderung der Wellenlänge – bezüglich der ruhenden, schallübertragenden *Umgebung* und des ruhenden Beobachters – betrachten. Zwischen der Aussendung zweier aufeinanderfolgender Wellenberge der Schallwelle, die im Zeitabstand  $T$  folgen, hat sich die Lage des Autos verändert, so dass der zweite Wellenberg an einem anderen Ort erzeugt wird als der erste. Wir wollen vorerst annehmen, dass sich die Schall-Quelle vom ruhenden Betrachter fortbewegt. Wir müssen dann zur Wellenlänge bei ruhender Quelle  $\lambda_0$  die während einer Schwingungsdauer  $T$  von der Quelle zurückgelegte Strecke  $s = vT$  hinzuzählen, wobei  $v$  deren Geschwindigkeit ist:

$$\lambda' = \lambda_0 + vT = \lambda_0 + v \frac{\lambda_0}{c} = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right). \quad (7-21)$$

Bewegt sich andererseits die Quelle auf den Beobachter zu, dann wird die Wellenlänge verkürzt:

$$\lambda'' = \lambda_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right). \quad (7-22)$$

Für die beiden Fälle ergeben sich mit Gl. (7-6) die gegenüber der Frequenz  $\nu_0$  bei ruhender Quelle veränderten Frequenzen:

$$\nu' = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v}{c}} \quad (7-23)$$

und

$$\nu'' = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c}}. \quad (7-24)$$

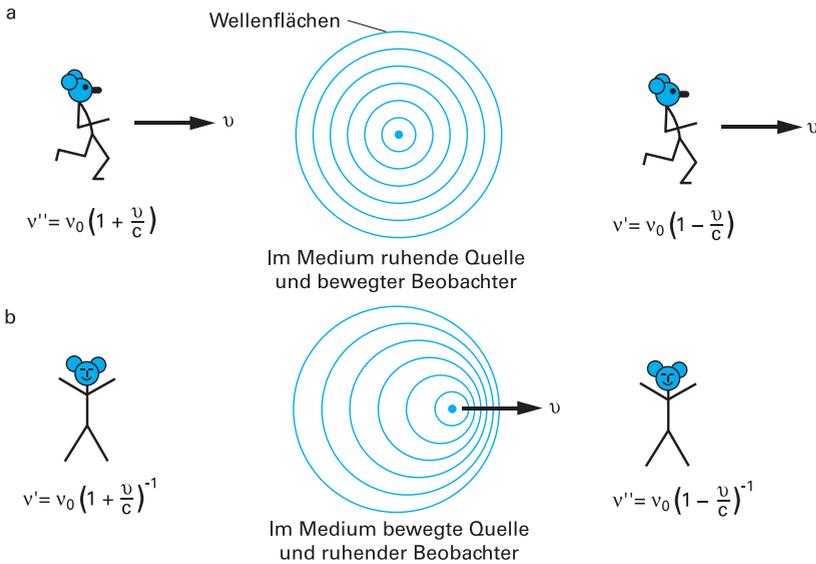
Die Phänomene, dass

1. der sich bewegende Beobachter eine andere Frequenz registriert als der ruhende Beobachter (Gl. (7-19), (7-20)), und
2. eine sich bewegende Quelle eine andere Wellenlänge erzeugt als eine ruhende gleichartige Quelle (Gl. (7-21), (7-22)), bezeichnen wir als *Doppler-Effekt*.

Die vier verschiedenen Effekte sind in Abb. 7.10 zusammengefasst. Ein Vergleich zwischen den Gln. (7-19) und (7-23) bzw. (7-20) und (7-24) macht deutlich, dass das Ausmaß der Frequenzänderung nicht nur von der Geschwindigkeit  $v$  abhängt, sondern auch davon, ob sich die Quelle oder der Beobachter bewegt (vgl. Abb. 7.10). Dieser Unterschied rührt daher, dass in den Gln. (7-21) und (7-22) bzw. (7-23) und (7-24) neben der Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter auch die Relativgeschwindigkeit bezüglich des wellenübertragenden Mediums (z. B. Luft) implizit berücksichtigt wurde, und zwar insofern, als  $\lambda_0$  (bzw.  $\nu_0$ ) in diesem Medium definiert ist, d. h. von einem in diesem Medium ruhenden Beobachter zu messen ist. Beide Ergebnisse gehen jeweils ineinander über, wenn  $v \ll c$  ist, da man dann  $(1 \pm v/c)^{-1} \approx 1 \mp v/c$  schreiben kann. Bewegen sich Quelle und Beobachter relativ zum Medium, dann sind die Gln. (7-19, 20, 23 und 24) miteinander zu kombinieren.

Der Doppler-Effekt tritt bei allen Wellenerscheinungen auf, also auch beim Licht. Hier wird allerdings die Gesetzmäßigkeit komplizierter, weil man bei großen Geschwindigkeiten wie der Lichtgeschwindigkeit für die Addition der Geschwindigkeiten Gl. (1-13) aus der Relativitätstheorie verwenden muss.

Die Messung von Wellenlängen bestimmter Spektrallinien im Licht ferner Galaxien hat das äußerst überraschende Ergebnis gebracht, dass diese Wellenlängen gegenüber den entsprechenden im Labor gemessenen Spektrallinien mehr oder weniger zu höheren Werten verschoben sind (*Rotverschiebung*). Sieht man den Grund im Doppler-Effekt, so folgt daraus, dass sich alle Gestirne voneinander fortbewegen. Diese *Fluchtgeschwindigkeit* ist um so größer, je



**Abb. 7.10** Die vier verschiedenen Fälle des Doppler-Effektes bei Schallwellen.

weiter sie voneinander entfernt sind. Diese Beobachtung lässt sich dann durch die Annahme deuten, dass sich das Weltall ausdehnt. Unser astronomisches und astrophysikalisches Weltbild beruht also weitgehend auf der messbaren Rotverschiebung der Spektren von Galaxien und deren Interpretation durch den Doppler-Effekt.

Die gemessenen optischen Spektren von Sternen und Galaxien zeigen Spektrallinien, die chemischen Elementen (zumeist Wasserstoff) zugeordnet werden können. Gegenüber irdischer Spektralanalyse weisen sie aber *Rotverschiebungen*  $z$  auf.

Oft interpretiert man das Produkt  $cz$  (wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet), im Sinne des *Doppler-Effektes* als Fluchtgeschwindigkeit, die sich mit der Entfernung  $D$  der Gestirne verändert.

Mit Hilfe einer indirekten, auf den Helligkeiten der Gestirne beruhenden Kalibrierung kann man dann Angaben zur Entfernung  $D$  einer Quelle ermitteln.

Das *Hubblesche Gesetz* postuliert eine (näherungsweise) lineare Beziehung zwischen den Entfernungen  $D$  und  $z$ :  $cz \approx H_0 D$ .

$H_0$  ist der *Hubble-Parameter*, eine der fundamentalen Größen der *Kosmologie*. Heute gilt der Wert  $H_0 = 2,3 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1}$  (SI-Einheit).

Die Anwendung des Hubble-Gesetzes ist die häufigste Methode, große astronomische Entfernungen zu messen, und daraus die Struktur des Weltalls zu modellieren. Bei Entfernungen jenseits von 1 Milliarde Lichtjahren funktioniert keine andere Entfernungsmessmethode.

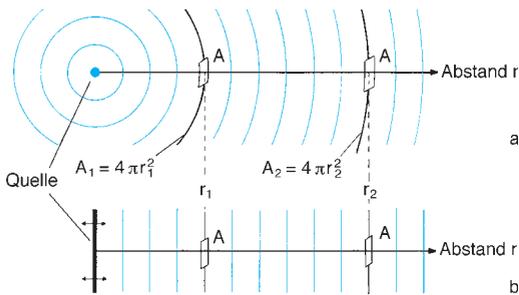
Unser Bild des Weltraums beruht also wesentlich auf dem Hubbleschen Gesetz.

## 7.5 Gedämpfte Wellen

Die Triebwerksgeräusche eines Düsenflugzeuges sind für uns am Boden um so leiser, je höher das Flugzeug fliegt. Dies ist einleuchtend, denn die Schallenergie der von den Triebwerken auslaufenden *Kugelwellen* (Abb. 7.11a) verteilt sich mit zunehmendem Abstand von der Quelle auf immer größere Raumbereiche, und die auf unseren Schallempfänger, das Ohr, auftreffende Schalleistung nimmt daher mit dem Abstand ab. Aus Gl. (7-3) und (7-15a) folgt, dass dies bei Kugelwellen proportional

zum Quadrat des Abstandes geschieht. Dies hat nichts mit einer Dämpfung der Welle zu tun; es ist ein einfacher Geometrieeffekt.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Ausbreitung einer *ebenen Welle* (Abb. 7.11b). Aus Geometrie Gründen ändert sich hier die Intensität der auf einen Empfänger treffenden Wellen nicht mit dem Abstand von der Quelle. Eine solche Welle verliert an Strahlungsleistung nur dann, wenn das Ausbreitungsmedium die Welle dämpft, d. h. absorbiert oder streut.



**Abb. 7.11** Abhängigkeit der Schallleistung vom Abstand von der Quelle: (a) Kugelwelle, (b) ebene Welle. Die Gesamtstrahlungsleistung  $S$  verteilt sich bei der Kugelwelle im Abstand  $r_1$  auf die Kugelfläche  $A_1$  und im Abstand  $r_2$  auf die Kugelfläche  $A_2$ . Auf die Empfängerfläche  $A$  fällt in beiden Fällen der Anteil

$$S \frac{A}{A_1} = S \frac{A}{4\pi r_1^2} \quad \text{bzw.} \quad S \frac{A}{A_2} = S \frac{A}{4\pi r_2^2}.$$

Die Intensität nimmt also proportional zu  $1/r^2$  mit zunehmendem Abstand  $r$  ab. Bei der ebenen Welle dagegen ist sie unabhängig vom Abstand.

Einige Beispiele: Das ins Meerwasser eindringende Sonnenlicht nimmt mit dem Abstand von der Wasseroberfläche an Intensität ab (es wird absorbiert und an Schwebeteilchen gestreut), weil die in der Lichtwelle enthaltene Energie entweder aus der Ausbreitungsrichtung heraus in andere Richtungen gestreut oder aber in andere Energieformen (hauptsächlich in Wärmeenergie) umgewandelt wird. In größeren Meerestiefen ist es daher auch bei Tage dunkel.

Die Schalldämpfung im Meerwasser hingegen ist sehr gering, weitaus geringer als in Luft, weshalb sich Wale oder Robben unter Wasser über sehr weite Entfernungen von mehr als 20 km durch akustische Signale verständigen. Schallwellen werden besonders stark in lockerem Material, z. B. Samtstoff, Styropor usw. absorbiert; aus diesem Grund hört man auch bei Regen oder Schnee schlechter als bei klarem Wetter.

Für die Abnahme der Amplitude einer ebenen Welle längs der Ausbreitungsrichtung  $x$  in einem absorbierenden Medium,  $A_0 =$

$A_0(x)$ , gilt ein Ansatz, der analog ist dem der zeitlichen Abnahme,  $A_0 = A_0(t)$ , bei der gedämpften Schwingung (Kap. 6.3):

$$A_0(x) = C e^{-\delta x}, \quad (7-25)$$

wobei  $C$  und  $\delta$  Konstanten bezüglich der Variablen  $x$  sind.

Gl. (7-25) gilt allgemein für die Absorption und Streuung jeder Art von Wellen, so z. B. für die Dämpfung von Schallwellen in einer Hauswand und für die Extinktion von Röntgenstrahlen in biologischem Gewebe. Die Konstante  $\delta$  ist ein Maß für die räumliche Dämpfung der Welle, man bezeichnet sie als *Dämpfungs-* oder *Extinktionskonstante*. Die Dämpfung (Extinktion) setzt sich i. A. aus Absorption (d. h. Umwandlung der Wellenenergie in andere Energieformen) und Streuung (d. h. Verteilung der Wellenenergie in Richtungen, die nicht mit der der ebenen Welle übereinstimmen, sodass diese geschwächt wird) zusammen.

In Kap. 18.3.2 wird die Diskussion des Absorptionsgesetzes Gl. (7-25) nochmals aufgenommen und auf elektromagnetische Wellen angewandt werden. Dort werden wir auch eine anschauliche Begründung für das Auftreten einer Exponentialfunktion in Gl. (7-25) geben.

Als ein anderes Maß der Dämpfung können wir, wie bei der Schwingung (Kap. 6.3), das *logarithmische Dekrement*  $\Lambda$  (Gl. (6-12)) verwenden, das jetzt aber nicht das zeitliche, sondern das räumliche Abklingen beschreibt. An die Stelle der zeitlichen Periodizität  $T$  tritt daher die Wellenlänge  $\lambda$  als Maß für die räumliche Periodizität:

$$\Lambda = \delta \lambda = \ln [A_0(x)/A_0(x + \lambda)]. \quad (7-26)$$

## 7.6 Anharmonische Wellen: Schallwellen als Beispiel

Entsprechend der Unterscheidung zwischen harmonischen und anharmonischen Schwingungen (in Kap. 6.5) wird auch zwischen *harmonischen* und *anharmonischen Wellen* unterschieden.

Als *anharmonisch* bezeichnet man alle Wellen, die nicht durch eine Sinus- und/oder Cosinus-Funktion beschrieben werden.

Dazu gehören die von *Musikinstrumenten* erzeugten Schallwellen. Sie sind zwar periodisch mit  $\lambda$  und  $T$ , haben jedoch komplizierte Amplitudenfunktionen. Es gibt auch Wellen, die nicht streng periodisch sind. Dazu gehört z. B. die Ausbreitung des Donners, d. h. einer einmaligen Schallerregung, die schnell wieder abklingt. Dazu gehören auch die Radiowellen, bei denen sich Frequenz oder Amplitude mit der Zeit unregelmäßig ändern (diese Änderung beinhaltet gerade die transportierte Information, nämlich Sprache, Musik usw., die über die Radiowelle ausgebreitet wird (Kap. 14.9.7 und 16.2.4).

Da die sich ausbreitende Welle an jedem Ort zu einer Schwingung führt, kann man die Methode der in Kapitel 6.5.2 für Schwingungen eingeführten *Fourier-Analyse* auf Wellen erweitern und jede nichtharmonische, aber streng periodische Welle als eine Überlagerung von harmonischen Wellen darstellen. Die anharmonische Welle lässt sich demnach in eine Reihe (Summe) von harmonischen Wellen verschiedener Frequenzen zerlegen. Damit kommt der harmonischen Welle eine ganz besondere Bedeutung zu. Dies gilt für jede Art von Wellen; in diesem Kapitel wollen wir uns im weiteren auf Schallwellen beschränken. (Wir werden dabei sehen, dass die Fourier-Analyse nicht nur ein mathematischer Formalismus ist, sondern dass ihr physikalische Vorgänge zugrundeliegen.)

Analog zu Gl. (6-16b) können wir die Amplitudenfunktion einer anharmonischen Welle als *Fourier-Reihe* darstellen:

$$A(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos n(\omega t - kx) + b_n \sin n(\omega t - kx)]. \quad (7-27)$$

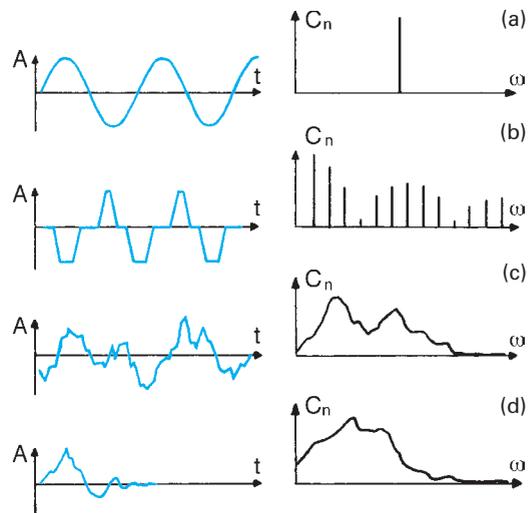
Fassen wir die beiden zur gleichen Frequenz  $n \cdot \omega$  gehörenden Terme  $a_n \cos n(\omega t - kx)$  und  $b_n \sin n(\omega t - kx)$  zusammen, so erhalten wir einen phasenverschobenen Term  $c_n \sin [n(\omega t - kx) + \varphi_n]$ , wobei Amplitude  $c_n$  und Phasenkonstante  $\varphi_n$  durch die Amplituden  $a_n$  und  $b_n$  bestimmt sind, und aus Gl. (7-27) wird:

$$A(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin [n(\omega t - kx) + \varphi_n]. \quad (7-28)$$

Beim Schall tragen die unterschiedlichen Arten von Wellen besondere Namen:

Eine rein sinus- oder cosinus-förmige (also harmonische) Welle heißt *Ton* (Abb. 7.12a), eine periodische, nichtharmonische Welle heißt *Klang* (Abb. 7.12b), die Welle mit ungleichmäßiger Frequenz und /oder Amplitude wird *Geräusch* (Abb. 7.12c) genannt, und schließlich ist die einmalige, kurzzeitige Schallerregung ein *Knall* (Abb. 7.12d).

Ein Klang entsteht also durch die Überlagerung von vielen Tönen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz  $\omega$  ( $n\omega$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) sind. Diese Töne werden als die *Obertöne* zur Frequenz  $\omega$  bezeichnet und nach der Laufzahl  $n$  numeriert. So spricht man vom 1., 2., 3. Oberton des Grundtones, wenn  $n = 2, 3, 4$  ist. (Dem Grundton kommt  $n = 1$  zu.) Jeden Klang kann man demnach durch Angabe der Amplituden  $c_n$  der Obertöne charakterisieren, die gleichzeitig mit dem Grundton angeregt werden. Wir können also das Ergebnis einer *Klanganalyse* so darstellen, dass wir all die Klanganteile (*Töne*) als Funktion der Fre-

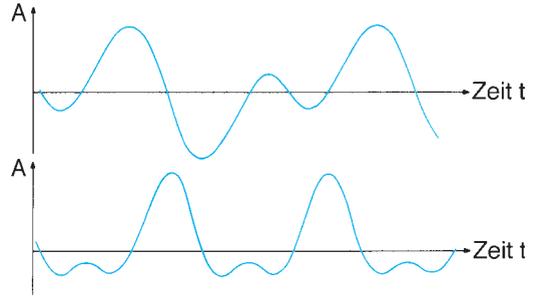


**Abb. 7.12** (a) Amplitudenfunktion und Spektrum eines Tones; (b) Amplitudenfunktion und Spektrum eines Klanges; (c) Amplitudenfunktion und Spektrum eines Geräuschs; (d) Amplitudenfunktion und Spektrum eines Knalls.

quenz  $\omega$  grafisch auftragen und so das *Spektrum des Klanges* erhalten (Abb. 7.12b).

Das gesamte akustische Spektrum, d. h. Grundton und alle im Hörbereich liegenden Obertöne, formen zusammen die *Klangfarbe* des Klangs mit der Grundfrequenz  $\omega$ . Das Ohr vermag die im Klang enthaltenen Obertöne nicht zu trennen aber für den akustischen Eindruck mitzuverwerten. Eine Trompete liefert eine andere Klangfarbe als ein auf derselben Tonhöhe (Frequenz) angestrichenes Cello; das liegt an den in beiden Fällen unterschiedlichen Amplituden der Obertöne zum selben Grundton. Aber auch bei ein und demselben Instrument ist das Spektrum der Obertöne nicht fest vorgegeben, sondern wird durch die Art der Anregung bestimmt. Während man bei einer sinus-ähnlichen Schwingung der Saite einer Geige einen leeren, uncharakteristischen Klang empfindet, weicht der typische durch einen Bogen angestrichene Klang wesentlich von einer einfachen harmonischen Schwingung ab.

Das Ohr ist in der Lage, die Frequenzen und Amplituden (d. h. die Tonhöhen und Lautstärken) der in  $A(x, t)$  der Gl. (7-28) enthaltenen Töne als Tonhöhe, Klangfarbe und Lautstärke wahrzunehmen, nicht jedoch deren Phasenlagen  $\varphi_n$  zueinander. Es vermag also z. B. nicht zwischen den beiden Wellen der Abb. 7.13 zu unterscheiden, in denen mit unterschiedlichen Phasenbeziehungen die beiden selben Töne enthalten sind. Wäre dies anders, so könnte man keine Orchestermusik im herkömmlichen Sinne hören, denn dann müssten



**Abb. 7.13** Das Ohr vermag nicht zwischen den beiden gezeichneten Klängen zu unterscheiden, die durch die Überlagerung der gleichen zwei Töne, jedoch mit unterschiedlicher Phasendifferenz entstanden sind.

die Musiker ihre Einsätze phasengerecht einhalten, d. h., auf Zeiten der Größenordnung der Schwingungsdauer ( $\approx 10^{-3}$  s) genau. Die Klanganalyse kann sich daher auf die Angabe des Spektrums der  $c_n$  (Abb. 7.12b) beschränken, während zur vollständigen Fourier-Analyse zusätzlich das Spektrum der Phasenkonstanten  $\varphi_n$  gehören würde.

Auch ein *Geräusch* oder einen *Knall* kann man als Überlagerung von Tönen darstellen, allerdings reichen dazu nicht mehr die Obertöne der Gl. (7-28) als ganzzahlige Vielfache des Grundtons aus; vielmehr sind im Spektrum ganze kontinuierliche Frequenzbereiche enthalten. Ein solches Spektrum nennt man deswegen ein *kontinuierliches Spektrum*. Abb. 7.12c und 7.12d zeigen Beispiele für die Amplitudenverteilung über die verschiedenen Frequenzen bei einem Geräusch und einem Knall.

Die Zusammensetzung von Geräuschen aus einzelnen Tönen spielt eine große Rolle bei Versuchen, Computer direkt durch gesprochene Worte zu steuern oder Sprache künstlich zu erzeugen.

**Tab. 7.4** Frequenzverhältnisse  $\nu_n : \nu_m$  zwischen verschiedenen Tönen des Monochords und die Bezeichnungen der entsprechenden Tonintervalle

$\nu_n : \nu_m$	Tonintervalle
2:1	Oktave zum Grundton
3:2	Quint
4:3	Quart
5:3	Sext
5:4	große Terz
9:8	große Sekunde
15:8	Septime
16:15	kleine Sekunde

## Nichtlineare Effekte; Nichtlineare Physik

Harmonische Schwingungen/Wellen entstehen, wenn ein *lineares Kraftgesetz* wie in Gl. (6-2) für die Rückstellkraft  $F_{\text{rück}} = D \cdot A$  gilt, die Auslenkung  $A$  also proportional zu (oder „linear abhängig von“) der Rückstellkraft ist. Diese Beziehung gilt nicht mehr, wenn die Kraft und damit die Auslenkung sehr groß werden. Z. B. ist die Verformung einer Rückstellfeder bei extrem starker Dehnung durch ihre Materialeigenschaften behin-

dert. Dann gilt allgemein ein *nichtlineares* Kraftgesetz. Es führt zu Abweichungen von der harmonischen Form der Schwingung, d. h. von der einfachen Sinus- (oder Cosinus-) Form.

Die *nicht-harmonische* Bewegungsform der Schwingung/Welle lässt sich formal durch eine *Fourier-Reihe* darstellen, also durch eine Reihe von Sinus-Funktionen unterschiedlicher Frequenzen (Oberschwingungen).

Ein Beispiel aus der *nichtlinearen Optik*: regt man ein optisch transparentes Material durch eine extrem intensive, harmonische Welle (d. h. mit Laser-Licht einer Eigenfrequenz) an, so entstehen in dem System mehrere harmonische Wellen, die durch eine harmonische Welle der Grundfrequenz, sowie — als *nichtlinearer Effekt* — durch weitere harmonische Oberwellen mit Vielfachen der Grundfrequenz darstellen lässt. Aus rotem Laserlicht kann man so mit einem „nichtlinearen Kristall“ (z. B. einem Kalium-Dihydrogenphosphat-Kristall, KDP) grünes „frequenzverdoppeltes Licht“ erzeugen.

Lineare *Ursache-Wirkung-Prozesse* (mathematisch beschreibbar durch *lineare* Gesetze der Form  $y = ax + b$ ) bilden den wesentlichen Inhalt der Physik. Daraus ist aber nicht zu folgern, dass sich die Natur allgemein so verhält. Speziell, wenn es um Materie-Eigenschaften, z. B. um weiche Biomaterie, geht, sind auch *nichtlineare* Effekte wichtig. Als Beispiel sei das *Hooke'sche* Gesetz genannt (Gl. 5-3). Es beschreibt die Dehnung fester Materie, wie Knochen oder Hautgewebe durch ein lineares Gesetz zwischen Dehnung und angreifender Kraft. Es kann zugleich als Kraftgesetz für mechanische, harmonische longitudinale Schwingungen und Wellen in

fester Materie dienen. Bei hohen Kräften geht aber die *elastische Dehnung* in die *plastische Verformung*, dann in das *Kriechverhalten* und schließlich in den *Zerreiß-Vorgang* über (siehe Abb. 5.9). Die drei letzten Prozesse sind nicht durch das lineare Hooke'sche Gesetz beschreibbar, das nur für einen beschränkten Variablen-Bereich gilt. Das Hooke'sche Gesetz ist also nur das Gesetz der „linearen Näherung“ für kleine Dehnungen.

Die Physik ist historisch für die Beschreibung unseres Alltages in Natur und Technik mit zumeist mäßigen Werten physikalischer Größen entwickelt worden, und daher steht der lineare Teil der Physik üblicherweise im Vordergrund. Das i. A. sehr komplexe Naturgeschehen ist zudem durch lineare Näherungsgesetze mathematisch einfacher zu formulieren. Für spezielle Fälle von Variablen mit extremen Werten ist die Hinzunahme von nichtlinearen Effekten erforderlich, die allerdings die mathematische Beschreibung oftmals erheblich erschweren, oder gar unmöglich machen.

Es ist möglich, im Labor Variable mit extremen Werten zu erzeugen, beispielsweise so hohe Drucke, dass Kohlenstoff (Graphit) in Diamant umgewandelt wird.

Mit Lasern kann man elektromagnetische Felder erzeugen, deren Kräfte diejenigen der inneratomaren Bindungskräfte von Materie weit übersteigen. Und in der Astrophysik sind extreme Werte von Ortskoordinaten, von Zeiten, Geschwindigkeiten, von Kräften, Energien, Massen usw. vorherrschend. Daher ist die nichtlineare Physik wichtig geworden.

Für die Praxis auch der medizinischen Physik bedeutet das, dass man bei Anwendung linearer physikalischer Näherungsgesetze stets deren Gültigkeitsbereich abschätzen sollte.

## 7.7 Überlagerung von Wellen, Interferenz

Von der Möglichkeit, Schwingungen oder Wellen zu überlagern, haben wir schon bei der Fourier-Analyse (Kap. 6.5.2 und 7.5) Gebrauch gemacht. Hier wollen wir auf die Erscheinung der *Interferenz* eingehen. Ausführlich wird dies in Kap. 18.1 geschehen, da Interferenzerscheinungen besonders für optische elektromagnetische Wellen von Bedeutung sind.

Treffen an einem Ort  $x$  mehrere Wellen aufeinander, so überlagern sie sich, und es entsteht dort eine Schwingung, deren Auslenkung  $A(t, x)$  sich zu jedem Zeitpunkt  $t$  durch Addition der Einzelauslenkungen  $A_1(t, x)$ ,  $A_2(t, x)$  usw. ergibt:

$$A(t, x) = A_1(t, x) + A_2(t, x) + \dots \quad (7-29)$$

Diese Art der Überlagerung wird wie bei den Schwingungen (Kap. 6.5.1) auch als *lineare* oder *ungestörte Superposition* bezeichnet, da sich jede Welle so ausbreitet, als seien die anderen nicht vorhanden.

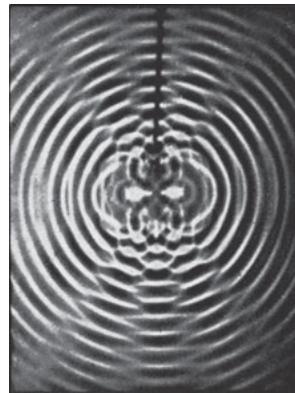
Gemeint ist damit, dass weder Amplitude, noch Frequenz oder Phase einer einzelnen Welle durch die gleichzeitige Existenz der anderen Wellen verändert werden. Da Wellenfelder zumeist Räume erfüllen, die groß gegen ihre Wellenlänge sind, findet Überlagerung in ausgedehnten Raumbereichen statt. Man nennt diese Überlagerung von Wellen *Interferenz*.

Bei optischen Wellen hoher Intensitäten in einem materiellen Ausbreitungssystem (z. B. Laserstrahlung in einem Festkörper) kann es zu *nichtlinearer* (Kap. 7.5) Überlagerung kommen, die von der Interferenz abweicht.

Bei der Superposition von transversalen Wellen muss auch deren Polarisierung mitberücksichtigt werden: das bedeutet, dass die einzelnen Auslenkungen als Vektoren  $\vec{A}_i$  zu addieren sind. Nur im speziellen Fall, dass die einzelnen Wellen gleiche Polarisierung besitzen, genügt es, wie in Gl. (7-29) die einzelnen skalaren Beträge  $A_i$  zu addieren.

Ein Beispiel hierfür ist das in Abb. 7.14 gezeigte momentane Interferenzbild, das durch Superposition zweier kreisförmiger Wasserwellen gleicher Wellenlänge entsteht. An jedem Ort  $x$  addieren sich die dort angeregten Schwingungen, wie dies bereits in Abb. 6.8 dargestellt wurde. In dem Bild kann man Bereiche erkennen, in denen die resultierende Amplitude praktisch Null ist (*destruktive Interferenz, Auslöschung*); dort erfolgen die Einzelschwingungen gegenphasig (Phasendifferenz  $\pi$ ,  $3\pi$ ,  $5\pi$ , usw.) und schwächen einander. An anderen Stellen des Wellenfeldes in Abb. 7.14 ist die resultierende Amplitude besonders groß (*konstruktive Interferenz, maximale Verstärkung*); hier sind die Einzelschwingungen *in Phase*, d. h., ihre Phasendifferenz ist entweder 0 oder  $2\pi$ ,  $4\pi$ , usw.

In dem Fall, dass die miteinander interferierenden Wellen unterschiedliche Wellenlängen haben, sind die Verhältnisse komplizierter; dann liegen die Orte der Auslöschung und der maximalen Verstärkung i. A. nicht mehr räumlich fest, sondern laufen mit der Zeit sehr schnell über den ganzen Interferenzbereich, d. h., es entsteht keine räumlich feste und damit sichtbare *Interferenzfigur*.



**Abb. 7.14** Momentanbild der Interferenzfigur, die durch Superposition zweier nebeneinander erzeugter kreisförmiger Wasserwellen gleicher Wellenlänge entstand (entnommen aus Bergmann/Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik Band 1, Mechanik, Akustik, Wärme, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1998).

## 7.8 Das Huygens'sche Prinzip

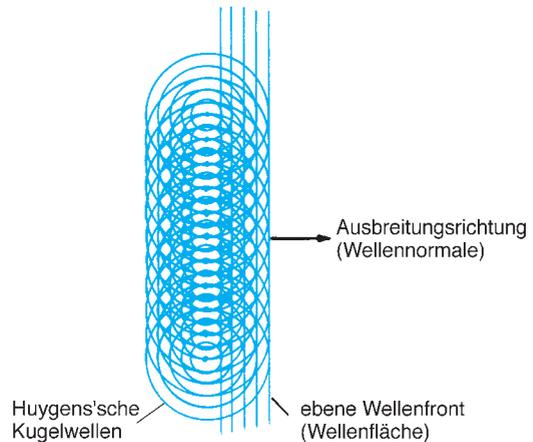
Das Huygens'sche Prinzip gibt unter Berücksichtigung des Interferenzeffektes nähere Einsicht in die lineare Ausbreitung von Wellen. Es besagt:

Jeder von einer Welle getroffene Punkt eines Wellenfeldes kann selbst wieder als Quelle einer sekundären Kugelwelle (*Huygens'sche Elementarwelle*) angesehen werden, die so lange und mit gleicher Phase emittiert, wie die Primärwelle einfällt.

In Materie kann an jedem Ort  $x$  ein Oszillator eine solche Sekundärquelle von Elementarwellen sein, z. B. bei Schallwellen ein schwingendes Atom, jedoch kann auch jeder Punkt im Vakuum als Ausgangspunkt elektromagnetischer Wellen aufgefasst werden, sobald er von der Primärwelle erreicht wird. Jede einzelne Elementarwelle kann äußerst intensitätsschwach sein, ihre Anzahl ist aber sehr groß. Eine beobachtbare Welle ergibt sich erst, wenn durch Überlagerung vieler Elementarwellen eine Verstärkung auftritt. Die durch Interferenz aller Elementarwellen resultierende Welle ist dann die nach den Gesetzen der Wellenausbreitung sich fort-pflanzende und beobachtbare Welle. Wir können daher das Huygens'sche Prinzip auch folgendermaßen ausdrücken:

Die Ausbreitung jeder realen Welle kann durch Überlagerung (Interferenz) von Huygens'schen Kugelwellen (Elementarwellen) beschrieben werden, die durch die einfallende Welle in jedem Raumpunkt des Wellenfeldes angeregt werden und selbst wieder neue Elementarwellen erzeugen.

Diese willkürliche aber sehr praktische Zerlegung beliebiger realer Wellen in einander überlagernde Kugelwellen lässt sich mathematisch begründen, findet aber auch ihre Rechtfertigung in der Anschaulichkeit, mit der in diesem Modell komplizierte Fälle der



**Abb. 7.15** Huygens'sches Prinzip: Zusammensetzung einer ebenen Welle (ebene Wellenfronten) aus kugelförmigen Elementarwellen. (Momentanbild zu einer bestimmten Zeit  $t$ ).

Wellenausbreitung wie Brechung oder Beugung plausibel gemacht werden können.

Abb. 7.15 zeigt das Huygens'sche Prinzip, angewandt auf eine ebene Welle, die sich in  $x$ -Richtung ausbreitet. Alle Elementarwellen von Quellen auf einer Wellenfläche haben dabei dieselbe Phase. Die seitlich laufenden Anteile der einzelnen Kugelwellen heben sich aber durch auslöschende Interferenz weg, so dass die aus den Kugelwellen resultierende Welle eine ebene Welle ist. Betrachtet man nicht nur diese Wellenfläche sondern die gesamte Welle im Raum, so kann man zeigen, dass die rückwärts laufenden Anteile der elementaren Kugelwellen durch Interferenz mit anderen, nachfolgenden Kugelwellen ausgelöscht werden, und so die resultierende Welle sich wirklich in Vorwärtsrichtung als ebene Welle ausbreitet.

Aber nicht zur Darstellung ebener Wellen ist das Huygens'sche Prinzip wichtig – es macht diese eher umständlicher – sondern für die Wellenausbreitung in komplizierten Fällen.

Jedes Hindernis im Wellenfeld verändert nämlich die Erzeugung, die Ausbreitung und die Überlagerung der Elementarwellen, sei es, dass sich beim Übergang von einem zu einem anderen Stoff die Ausbreitungsgeschwindigkeit

keit ändert, oder dass durch Hindernisse ein Teil der Elementarwellen unterdrückt, absorbiert oder reflektiert wird und damit nicht mehr zu der Interferenz beiträgt. Einfache Beispiele sind die Brechung, die Beugung

oder die Reflexion der Wellen. Diese sind insbesondere für die Wellenoptik und für optische Instrumente wichtig, weshalb wir die Anwendung des Huygens'schen Prinzips auf diese Beispiele auf das Kapitel 18 verschieben.

## 7.9 Wellen an der Grenzfläche zwischen verschiedenen Medien

In homogenen, nicht absorbierenden Stoffen wird die Ausbreitung einer ebenen Welle durch Gl. (7-2) beschrieben, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  ist eine durch das Material bestimmte Größe.

Wird das Medium durch ein anderes begrenzt, so kann sich die Welle nicht ungestört durch die *Grenzfläche* zwischen beiden hindurch ausbreiten, und wir beobachten – unabhängig von der Art der Welle – im Prinzip stets folgende Erscheinungen:

1. Breitet sich die Welle im zweiten Medium langsamer aus als im ersten, ist also  $c_2 < c_1$ , so bedeutet das, dass gemäß Gl. (7-6) die Wellenlänge verringert wird. Die Frequenz und damit die Schwingungsdauer  $T$  ist durch die Quelle vorgegeben und bleibt unverändert.

2. Trifft die Welle schräg auf eine ebene Grenzfläche – wir wollen diese der Einfachheit halber als glatt und eben ansehen –, so ändert sie abrupt ihre Ausbreitungsrichtung, und es gilt – wieder unabhängig von der Natur der Welle – für die ebene Welle das *Brechungsgesetz* (Abb. 7.16)

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad (7-30)$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  die Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den verschiedenen Medien sind.

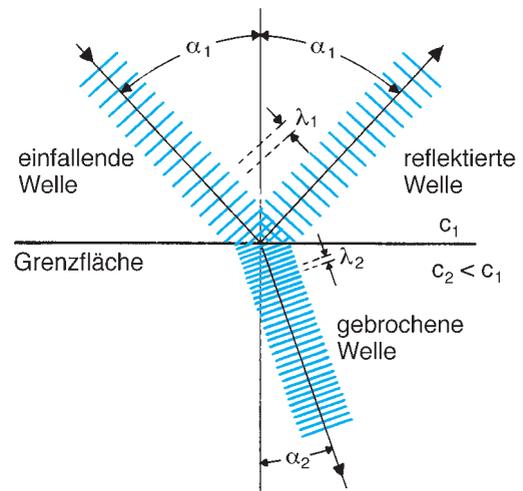
Dem Kap. 18.3.1 vorgreifend, sei schon hier erwähnt, dass im Spezialfall optischer Wellen das Verhältnis  $c_1/c_2$  den Namen *Brechungsquotient*, und, speziell auf das Vakuum als erstes Medium bezogen, den Namen *Brechungsindex* trägt. Eine Herleitung des Brechungs-

gesetzes mit Hilfe des Huygens'schen Prinzips von Kap. 7.7 werden wir in Kap. 18.3.1 am Beispiel der elektromagnetischen Wellen bringen.

Die einfache Form des Brechungsgesetzes der Gl. (7-30) gilt übrigens nur für nicht-absorbierende Ausbreitungsmedien.

Als Gedächtnishilfe merken wir noch an: Beim Übergang von einem Stoff mit größerer Ausbreitungsgeschwindigkeit zu einem anderen mit kleinerer Geschwindigkeit wird die Welle zum *Einfallslot*, d. h. der senkrechten Achse auf der Grenzfläche, hin gebrochen und im umgekehrten Falle vom Lot weg.

3. Nicht die gesamte Strahlungsleistung pflanzt sich in das zweite Medium fort; vielmehr wird an der Grenzfläche ein Bruchteil in das erste Medium zurück *reflektiert*.



**Abb. 7.16** Reflexion und Brechung einer ebenen Welle an einer Grenzfläche zwischen zwei Stoffen mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ .

## Reflexion und Transmission von Wellen

Trifft eine Schallwelle auf eine Felswand, so wird ein Teil zurückgeworfen (reflektiert); es entsteht ein *Echo*. Trifft die Welle senkrecht aus einer Richtung  $\vec{z}$  auf die Wand, so kehrt sich die Ausbreitungsrichtung um, und die Welle läuft nach der Reflexion in der Richtung  $-\vec{z}$  zurück. Ein Teil der Welle dringt in die Felswand ein und wird dort absorbiert. Ist das zweite Medium hingegen beispielsweise eine transparente Wasserschicht, so läuft dieser Teil in diesem Medium weiter.

Bei schrägem Einfall wird die Welle in diejenige Richtung reflektiert, die aus dem *Reflexionsgesetz* folgt. Es besagt, dass Einfallswinkel  $\alpha_1$  und Reflexionswinkel  $\alpha'_1$  gleich sind

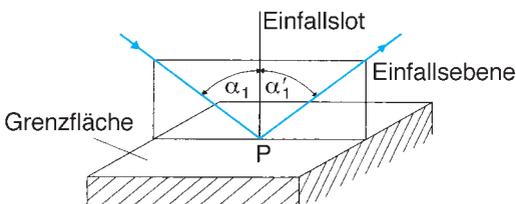
$$\alpha_1 = \alpha'_1, \quad (7-31)$$

und dass Einfalls- und Reflexionsrichtung mit der Flächennormalen, dem Lot, in einer Ebene liegen, die gemeinsam die *Einfallsebene* festlegen (Abb. 7.17).

Dem Reflexionsgesetz werden wir in Kap. 19.3.1 im Zusammenhang mit optischer Strahlung wiederbegegnen.

Ist die reflektierende Wand nicht glatt, sondern (wie eine Felswand) rau, so wird nach Gl. (7-31) eine aus einer bestimmten Richtung kommende Welle in Anteile aufgespalten, die in verschiedene Richtungen reflektiert werden; man nennt dies *diffuse Reflexion* oder *Streureflexion* oder *Rückstreuung*, drei Bezeichnungen für dasselbe Phänomen. Streureflexion bestimmt auch die Akustik eines Konzertsaals. Hinzu kommt: Stark schallschluckend sind poröse Wände, Schaumstoffe usw. in denen sich Schallwellen durch wiederholte Streureflexionen „totlaufen“.

In Wirklichkeit ist jede Oberfläche – zumindest in atomaren Dimensionen – uneben. Entscheidend für die Gültigkeit des Reflexionsgesetzes ist aber nicht die



**Abb. 7.17** Reflexionsgesetz: Einfallender Strahl, reflektierter Strahl und das Lot auf der Fläche liegen in einer Ebene, der Einfallsebene.

absolute Abweichung von der ebenen Fläche sondern die Größe der Abweichung gemessen an der Wellenlänge. *Glatt* ist eine Oberfläche, deren *Rauigkeit* klein ist gemessen an der Wellenlänge. So ist eine Felswand rau für Schallwellen, ein Stück Papier ist rau für Licht. Daneben kann die Oberfläche durch *Krümmung* oder *Welligkeit* großflächig von der ideal ebenen Fläche abweichen. Diese Abweichung wird durch die *Planität* angegeben, z. B. sei ein Spiegel oder ein Mikroskop-Objekt-Träger auf  $\lambda/10$  plan.

Der reflektierte Anteil ist bei gleichem Einfallswinkel  $\alpha_1$  um so größer, je mehr sich die beiden Stoffe bezüglich ihrer Ausbreitungsgeschwindigkeit unterscheiden. (Von Totalreflexion, Kap. 19.3.6, sei hier abgesehen.). Bei *absorbierenden Stoffen* wird die Größe des reflektierten Anteils wesentlich auch durch die Stärke der Absorption mitbestimmt.

Die Gln. (7-30) und (7-31) geben nur die *Richtung* der Ausbreitung an. Zur quantitativen Beschreibung der zugehörigen *Intensitäten* definiert man folgende Größen:

Der reflektierte Anteil der Welle wird durch den *Reflexionskoeffizienten*  $r$  angegeben, der gleich dem Verhältnis aus den Amplituden der reflektierten Welle  $A_{0,r}$  und der einfallenden Welle  $A_{0,e}$  ist, oder durch das *Reflexionsvermögen* (den *Reflexionsgrad*)  $R$  als Verhältnis der zugehörigen Intensitäten (die proportional zum Quadrat der Amplituden sind):

$$r = A_{0,r}/A_{0,e} \quad (7-32a)$$

und

$$R = I_{\text{refl}}/I_{\text{ein}} = r^2. \quad (7-32b)$$

Bei Schallwellen hängt das Reflexionsvermögen u. A. von der Härte der reflektierenden Wand ab. Der Hall in Marmorsälen ist daher wesentlich größer als in holzgetäfelten Räumen.

Entsprechend definieren wir für den durch die Grenzfläche durchgelassenen, gebrochenen Teil der Intensität der einfallenden Welle das *Transmissionsvermögen* (den *Transmissionsgrad*):

$$T = I_{\text{durch}}/I_{\text{ein}}. \quad (7-32c)$$

Tritt die Welle in ein absorbierendes Medium ein, so bestimmt Gl. (7-32c) die In-

tensität unmittelbar hinter der Grenzfläche; sie nimmt dann auf dem weiteren Weg durch die Probe gemäß dem Absorptionsgesetz Gl. (7-25) weiter ab. Dies wird durch das *Absorptionsvermögen* (den *Absorptionsgrad*) beschrieben:

$$A = I_{\text{abs}}/I_{\text{ein}}, \quad (7-32d)$$

wobei  $I_{\text{ein}}$  nun die Intensität nach Reflexionsverlust ist.

Der Energieerhaltungssatz liefert eine Beziehung zwischen diesen Größen: Wird die Welle nicht absorbiert, so muss die Summe aus der reflektierten und der durchgelassenen Intensität gleich der einfallenden Intensität sein:  $R + T = 1$ . (Geben wir  $R$  und  $T$  in Prozent an, so erhalten wir  $R + T = 100\%$ ). Absorbiert aber der reflektierende Stoff zusätzlich, dann gilt:  $R + T + A = 1$ .

Allgemein werden  $R$ ,  $T$  und  $A$  durch den *Wellenwiderstand*  $Z$  (Gl. 7-16) bestimmt, der die an der Grenzfläche zusammentreffenden Medien charakterisiert. Beispielsweise ist bei senkrechtem Einfall ( $\alpha_1 = 0$ ) der Reflexionskoeffizient gegeben durch

$$r = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2), \quad (7-33)$$

wobei  $Z_1$  und  $Z_2$  die Wellenwiderstände der beiden aneinandergrenzenden Medien sind. Diese Gleichung gilt für beliebige Arten von Wellen, wenngleich  $Z$  für jede Wellenart anders definiert ist. Für Schallwellen z. B. ist  $Z$  das Produkt aus der Dichte  $\rho$  des schalleitenden Mediums und der zugehörigen Schallgeschwindigkeit  $c$  (Gl. (7-15) und (7-16)). Im Falle von Lichtwellen wird  $Z$  durch den Brechungsindex  $n$  des Mediums (Kap. 18.3.1 und 19.3.3) bestimmt.

Bei nicht-senkrechtem Einfall und bei absorbierenden Stoffen sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter.

## 7.10 Stehende Wellen

Stehende Wellen sind ein spezielles Beispiel für Interferenz von Wellen, die sich, aus entgegengesetzten Richtungen kommend, überlagern. Ein besonders einfacher Fall ist die Überlagerung von eindimensionalen Wellen gleicher Frequenz auf einem Seil oder einem Stab. Ein langes, an einem Ende an einer Mauer festgeknüpftes Seil wollen wir am freien Ende periodisch auf und ab bewegen. Dabei läuft eine transversale Welle längs des

**Reflexion von Schallwellen** In einem Konzertsaal gibt es unzählige Schall-Echos, die wegen der längeren Ausbreitungswege gegen den direkt zum Hörer gelangenden Schall bis zu einigen Sekunden zeitlich verzögert sein können und dadurch für den *Nachhall* des Raumes charakteristisch sind. Die Schallreflexionen entscheiden also über die gute oder schlechte Akustik eines Saales.

Am Beispiel der Schallwelle wollen wir nun den Reflexionsvorgang genauer betrachten.

Wegen der stark unterschiedlichen elastischen Deformation (siehe Kap. 5.2.2) von Gasen und festen Stoffen unter dem Einfluss von Kräften ist die Amplitude einer Schallwelle in Luft wesentlich größer als in einer festen Wand.

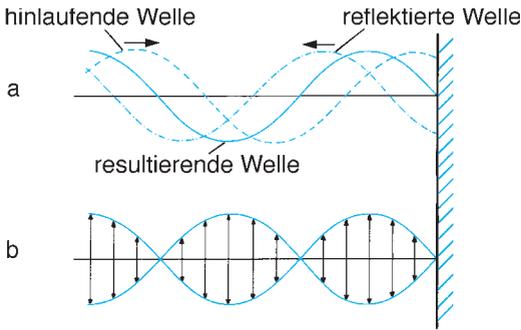
Unmittelbar an der reflektierenden (fast) starren Wand können die Luftmoleküle daher kaum ausgelenkt werden; hier ist also zu allen Zeiten die Amplitude der Schallwelle (fast) Null. Auch die von der eindringenden Welle verursachten Auslenkungen der Atome innerhalb der Wand sind gering. Dies alles hat zur Folge, dass bei der Reflexion an der festen Wand die *Phasenkonstante* der Welle sprunghaft um den Wert  $\pi$  verändert wird, ein Phänomen, das man als *Phasensprung bei der Reflexion am dichteren Medium* bezeichnet. In Kap. 7.9 wird der Phasensprung am Beispiel einer Seilwelle erläutert werden.

Eine Reflexion tritt auch auf, wenn die Welle im dichteren Medium – z. B. in der Wand – verläuft und auf die Grenzfläche zum dünneren Medium – z. B. zur Luft – auftrifft. Das Reflexionsvermögen ist in beiden Fällen gleich! Wesentlicher Unterschied zwischen der Reflexion am dichteren und am dünneren Medium ist aber, dass die Phasenkonstante der Welle bei Reflexion am dünneren Medium unverändert bleibt, hier also kein Phasensprung auftritt.

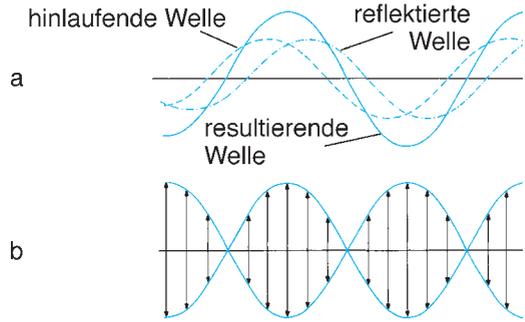
Die Bezeichnungen *dichteres* bzw. *dünneres* Medium im Zusammenhang mit der Reflexion und Brechung von Wellen haben nur bei Schall mit der *Dichte* des Materials zu tun; bei anderen Arten von Wellen ist nur gemeint, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle im „dichteren“ Medium kleiner ist als im „dünneren“.

Seils, wird am festgebundenen Ende reflektiert – und zwar mit dem in Kap. 7.8 beschriebenen Phasensprung um  $\pi$  – und die reflektierte Welle überlagert sich der hinlaufenden (Abb. 7.18).

Den Phasensprung können wir uns hier folgendermaßen veranschaulichen: Die auf das festgebundene Ende des Seils zulaufende Welle würde eine Auslenkung des Seilendes bewirken, die zeitlich zwischen  $+A_0$  und  $-A_0$  oszilliert, wenn das Seilende nicht festge-



**Abb. 7.18** (a) Hinlaufende und am festgebundenen Ende reflektierte Seilwelle und Superposition der beiden zur resultierenden Welle (Momentanbild); (b) stehende Welle (Verlauf der resultierenden Amplitude). Die Pfeile zeigen die sich mit dem Ort ändernden Maximalauslenkungen.



**Abb. 7.19** (a) Hinlaufende und am freien Ende reflektierte Seilwelle und Superposition der beiden (Momentanbild); (b) stehende Welle (Verlauf der resultierenden Amplitude). Die Pfeile zeigen die sich mit dem Ort ändernden Maximalauslenkungen.

bunden und die Ausbreitung der Welle nicht behindert wäre. Da aber das Seilende an der Mauer fixiert ist, muss die aus hin- und zurücklaufender Welle resultierende Auslenkung dort zu allen Zeiten Null sein. Bei Überlagerung zweier Wellen, hier der hin- und der rücklaufenden, kann aber, wie in Kap. 7.6 gezeigt, nur dann die resultierende Auslenkung dauernd Null sein, wenn die beiden Wellen um den Phasenwinkel  $\pi$  (oder, allgemeiner,  $\pi$ ,  $3\pi$ ,  $5\pi$  usw.) gegeneinander verschoben sind.

Anders liegen die Verhältnisse bei einer Welle, die an einem *freien* Ende des Seils, oder allgemeiner gesagt, die an der Grenze zu einem dünneren Medium reflektiert wird. Beispiele sind die im Wasser gegen die Wasseroberfläche anlaufende Schallwelle oder die elastische Welle auf einem in der Mitte festgehaltenen Stab, dessen Enden frei schwingen können. Dort besteht keine Notwendigkeit, dass die Auslenkung der resultierenden Welle Null ist, und deshalb wird hier die einlaufende Welle ohne Phasensprung reflektiert (Abb. 7.19).

Die Überlagerung von hin- und rücklaufender Welle in einem beliebigen Abstand  $x$  vom festgebundenen Seilende ergibt folgende resultierende Amplitudenfunktion (wobei wir der Einfachheit halber annehmen wollen, dass die Welle vollständig reflektiert worden sei, so dass die Amplituden von hin- und rücklaufender Welle gleich sind)

$$A(t, x) = A_0 \sin(\omega t - kx) + A_0 \sin((\omega t + kx) + \pi). \quad (7-34)$$

Die entgegengesetzte Laufrichtung beider Wellen ist in den verschiedenen Vorzeichen im Argument der Sinus-Funktion enthalten. Mit der im Anhang A5 angegebenen trigonometrischen Beziehung

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin((\alpha + \beta)/2) \cos((\alpha - \beta)/2)$  können wir der Amplitudenfunktion der Gl. (7-34) eine andere Form geben:

$$A(t, x) = 2A_0 \sin(\omega t + \pi/2) \cos(-kx - \pi/2) = 2A_0 \cos(\omega t) \sin(kx). \quad (7-35)$$

Die Amplitudenfunktion der resultierenden Welle am Ort  $x$  sieht nun ganz anders aus als die der hinlaufenden Welle, denn in Gl. (7-35) stehen Ort  $x$  und Zeit  $t$  nicht mehr im Argument derselben Sinus-Funktion, sondern das örtliche und zeitliche periodische Verhalten der Welle treten *getrennt* in zwei verschiedenen trigonometrischen Funktionen auf. Dies hat wesentliche Konsequenzen; fassen wir nämlich das Produkt  $2A_0 \cdot \sin(kx)$  als neue Amplitude  $A'_0$  auf, so haben wir an allen Orten des Seils eine einheitliche, durch  $\cos(\omega t)$  beschriebene Schwingung, deren Amplitude  $A'_0$  jedoch bezüglich des Ortes  $x$  sinusförmig *moduliert* ist. An den Orten  $x$ , wo  $A'_0$  Null ist, ist die Auslenkung zu allen Zeiten Null. Diese Orte nennen wir *Schwingungsknoten*; sie liegen an den Stellen  $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$ . An allen anderen Orten  $x$  ist  $A(t, x)$  nur zu den Zeiten  $t$  gleich Null, bei denen  $\cos(\omega t)$  gleich Null wird. An Stellen, wo der Sinus in  $A'_0$  die Werte  $+1$  oder  $-1$  annimmt, wird die Amplitude maximal werden. Dort befinden sich *Schwingungsbäuche*; sie liegen bei  $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \dots$ . Die Abstände zwischen benachbarten Knoten *oder* zwischen be-

nachbarten Bäuchen betragen also jeweils  $\lambda/2$ , zwischen aufeinanderfolgenden Knoten und Bäuchen  $\lambda/4$ . Wir sehen, dass die Knoten und Bäuche bei dieser Welle räumlich festliegen, d. h., die Maximalauslenkungen *laufen nicht* wie bei der üblichen Welle längs der Ausbreitungsrichtung; daher nennt man die durch Gl. (7-35) beschriebene Welle eine *stehende Welle*.

Der Name „stehende Welle“ scheint ein Widerspruch in sich zu sein, aber wir müssen berücksichtigen, dass sie durch Überlagerung zweier sich ausbreitender, „laufender Wellen“ entsteht, und erst dadurch ortsfeste Strukturen wie Knoten und Bäuche zustande kommen.

Während die Schwingungsamplitude  $A_0$  einer laufenden, ebenen Welle an allen Orten gleich ist (wenn wir von Absorption absehen), und sich von Ort zu Ort die Phasenkonstante der zugehörigen Schwingung periodisch ändert, ist es bei der stehenden Welle gerade umgekehrt: Die Phasenkonstante der Schwingung ist für alle Orte gleich (in Gl. (7-35) ist sie Null), während die Amplitude  $A_0$  periodisch mit dem Ort variiert.

Was geschieht nun, wenn wir auch das zweite Ende des Seils befestigen und das Seil zu Schwingungen anregen? In diesem Fall laufen zwei Wellen in entgegengesetzter Richtung entlang des Seils, werden an den beiden Enden reflektiert (mit Phasensprung  $\pi$ ) und überlagern sich. Eine stehende Welle kann sich jetzt nurmehr für bestimmte Wellenlängen ausbilden, denn wegen der zwei Halterungen muss an jedem Ende des Seils ein Knoten liegen. Mit Hilfe von Gl. (7-35) können wir herausfinden, welche stehenden Wellen diese Bedingung erfüllen: Es sind dies die Wellen, bei denen der Abstand zwischen zwei bestimmten Knoten gleich der Seillänge  $L$  ist. Sind diese um die Strecke  $n \cdot \lambda/2$  voneinander entfernt (der Abstand zweier benachbarter Knoten ist ja gleich  $\lambda/2$ ), so ist

$$n \frac{\lambda}{2} = L \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (7-36a)$$

Für die Darstellung solcher stehender Wellen eines Seils können wir auf Abb. 6.14c zurück-

greifen, denn sie sehen genauso aus wie die Eigenschwingungen eines an beiden Enden fest eingespannten Stabes. Nur haben wir jetzt ein anderes Modell, nämlich das der Interferenz zweier laufender Wellen, zur Erklärung herangezogen.

Im anderen Fall, dass ein Ende des Seils frei und das andere fest eingespannt ist, haben die nun erzeugbaren stehenden Wellen am einen Ende einen Schwingungsbauch und am anderen einen Knoten, und es gilt für die Resonanz-Wellenlängen:

$$n \frac{\lambda}{4} = L \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (7-36b)$$

Stehende Wellen auf einem schwingungsfähigen System endlicher Größe haben also spezielle, diskrete Wellenlängen und Frequenzen, die im Falle eindimensionaler Wellen durch die Gleichungen (7-36a) und (7-36b) festgelegt sind. Diese stehenden Wellen sind also zugleich *Eigenschwingungen* des schwingungsfähigen Systems (Kap. 6.6.2).

Gl. (7-36a) gilt übrigens für ein Seil oder einen Stab sowohl mit zwei *freien* oder zwei fest *eingespannten* Enden. Wir werden zeigen, dass stehende Wellen auf Saiten (bei *Saiteninstrumenten*) oder in Luftsäulen in Hohlräumen (bei *Blasinstrumenten*) und deren Resonanzen für die Anregung von Klängen in Musikinstrumenten verantwortlich sind.

**Anwendung stehender Schallwellen: die Musikinstrumente** Die meisten Musikinstrumente basieren auf der Erzeugung stehender Wellen.

Auf einer Saite erzeugt, dienen sie bei den *Streichinstrumenten*, bei der Gitarre und beim Klavier zur Erzeugung von Klängen. Regt man die Saite einer Geige über Gleit- und Haftreibung der mit Kollophonium bestrichenen Haarbespannung des Bogens oder die Saite eines Klaviers durch Schlag mit einem Hammer an, so wird als *Ton* die Grundschwingung (mit  $n = 1$  in Gl. (7-36a)) erzeugt. Der Bogen verursacht also eine Resonanzanregung. Als *Resonator* wirkt dabei die Saite zusammen mit dem luftgefüllten Holzkörper des Instruments. Es ist wesentlich dieser Resonanzkörper, der die Schwingungen in Schallwellen in der umgebenden Luft umwandelt, die dann in die Umgebung abgestrahlt werden. Hält man die Saite mit dem Finger auf dem Griffbrett fest, dann wird dadurch die Länge  $L$  und nach Gl. (7-36a) auch die Wellenlänge  $\lambda$  verkürzt. Auf diese Weise lassen sich größere Frequenzen  $\nu$  (siehe Gl. (7-6)), also höhere Töne erzeugen.

Eine andere Möglichkeit, die Tonhöhe zu ändern, hat der Geiger, in dem er die Saite fester spannt; dadurch ändert sich zwar die Wellenlänge nicht (bei  $n = 1$ :  $\lambda/2 = L$ ), aber mit erhöhter elastischer Spannung wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  der Wellen in der Saite vergrößert und nach Gl. (7-6) damit auch die Frequenz  $\nu$ .

Neben den Grundschwingungen lassen sich auch die Oberschwingungen ( $n = 2, 3, \dots$  in Gl. (7-36a)) anregen, wenn man die Saite an den Stellen  $L/2$ ,  $L/3$  usw. leicht andrückt und dadurch dort einen Schwingungsknoten erzwingt (*Flageolett-Töne*).

Auch die Klangerzeugung in *Blasinstrumenten* beruht auf stehenden Wellen. In einer von einem Rohr (z. B. einer Klarinette) eingeschlossenen Luftsäule, dem *Resonator*, werden durch Auslenkung der Gasmoleküle (über das Anblasen des Mundstücks) longitudinale Schallwellen erzeugt, die dann nach außen abgestrahlt werden. Die Klangfarbe von Blasinstrumenten wird in erster Linie durch die Rohrform und das Material (Blech oder Holz) der jeweiligen Instrumente beeinflusst. Aber auch die Öffnungen und die Form des Mundstücks üben eine klangformende Wirkung aus. Zu den Blasinstrumenten gehört auch die Orgel. Orgelpfeifen sind normalerweise an einem Ende offen und am anderen abgeschlossen. Eine stehende Welle hat dann einen *Knoten der Auslenkung* am geschlossenen Ende und einen *Bauch* am offenen Ende, wo die Schallabstrahlung nach außen am stärksten ist. Daher gilt Gl. (7-36b), und die Frequenz des Grundtones ist halb so groß wie bei der beidseitig geschlossenen oder der beidseitig offenen Pfeife, für die beide Gl. (7-36a) gilt. Die Variation des Druckes in der stehenden Welle verläuft umgekehrt: An den Orten, wo die Gasmoleküle mit der Maximalauslenkung schwingen (*Schwingungsbau*) ist die Druckschwankung Null (*Druckknoten*); sie ist hingegen am größten, wo ein *Schwingungsknoten* liegt, und die Moleküle nicht ausgelenkt werden (*Druckbauch*). An den Orten der Schwingungsbäuche liegen also Druckknoten, an den Orten der Schwingungsknoten liegen Druckbäuche.

**Resonanz** Klänge von Musikinstrumenten entstehen also durch Anregung stehender Wellen, von denen Schallwellen in die umgebende Luft abgestrahlt werden. Gemeinsam ist allen Instrumenten, dass die Klänge durch *Resonanz* erzeugt werden, d. h., dass die Eigenschwingungen des Instruments (und nicht etwa erzwungene Schwingungen) angeregt werden. Üblicherweise wird die Klangerzeugung durch einen Resonanzkörper, z. B. den Geigencorpus, zusätzlich verstärkt.

Durch eine feste Kopplung mit einer äußeren periodischen Kraft (z. B. über eine sich hin und her bewegendende Schubstange) könnten wir im Prinzip eine eingespante Saite auch zu erzwungenen Schwingungen bei Frequenzen außerhalb der Resonanz (d. h. bei einer von der Eigenfrequenz abweichenden Frequenz) anregen. Dann laufen auf der Saite Wellen hin und her, die sich mehr oder weniger durch Interferenz auslösen, wobei sich keine ortsfesten Knoten oder Bäuche ausbilden, und daher die entstehenden Amplituden klein bleiben. Nur dann, wenn die Wellenlänge mit Gl. (7-36a) verträglich ist, wird daraus eine stehende Welle, deren Amplitude durch die erregende Kraft immer weiter aufgeschaukelt wird: Es entsteht also durch den Resonanzvorgang eine große Amplitude, und das schwingungsfähige Gebilde wirkt als *Resonator*. Als Resonatoren fungieren beispielsweise auch (wie wir oben gesehen haben) der luftgefüllte Hohlraum einer Pfeife oder der Mund- und Kehlkopfraum beim Sprechen oder Singen.

Die äußere periodische Kraft kann auch durch eine auf den Resonator auftreffende Schallwelle realisiert werden. Von Caruso erzählt man, er habe Weingläser zum Zerspringen gebracht, indem er den Resonanzton der Glaskörper sang.

Resonanzerscheinungen spielen auch bei anderen als mechanischen bzw. akustischen Wellen eine wichtige Rolle. So beruht z. B. die Anregung einer Fernsehantenne durch elektromagnetische Wellen ebenso auf Resonanz wie die Anregung von Materie durch Absorption von Lichtwellen.

## 7.11 Schallempfindungen: Akustik der Musik

Das Ohr empfindet die Frequenz einer Schallwelle als Tonhöhe; die Intensität und damit die Amplitude registriert es als Lautstärke (siehe Gl. (7-18)). Darüber hinaus vermag es die Zusammensetzung von Klängen zu erkennen, sei es die Beimischung von Obertönen zum Grundton (die Klangfarbe) oder die Mischung verschiedener Klänge zu *Akkorden*. Unempfindlich dagegen ist das Ohr, wie wir in Kap. 7.5 sahen, gegen Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen im Klang enthaltenen Tönen.

Beachten Sie, dass zumeist im allgemeinen Sprachgebrauch in der Musik das als *Ton* bezeichnet wird, was in der Akustik als *Klang* definiert ist! Entsprechend werden Klänge durch den in ihnen enthaltenen Grundton gekennzeichnet. Man spricht vom *Ton* a auf dem Klavier, obwohl der *Klang* des Klaviers mit dem Grundton der Frequenz  $\nu_0 = 440$  Hz gemeint ist.

Im Rahmen der traditionellen Musik wurden aus dem Tonspektrum des gesamten Hörbereichs bestimmte Töne ausgewählt und in *Tonleitern* angeordnet. Diese Tonleitern sind in *Oktaven* gegliedert. Der Frequenzumfang jeder Oktave reicht von einer tiefsten Frequenz

$\nu_1$  bis zur Frequenz  $\nu_2 = 2\nu_1$ . Jede Oktave der *chromatischen Tonleiter* enthält zwölf *Halbtöne*. Kompositionen traditioneller Musik bauen jedoch nicht auf dieser Tonleiter auf, sondern auf sieben Tönen, die für die *Dur*- und die *Moll-Tonleitern* speziell daraus ausgewählt werden. Anstelle des Frequenzspektrums verwendet man zur Darstellung dieser Töne die *Notenschrift*. In ihr tragen alle Töne Namen, die dem Alphabet entnommen sind (Abb. 7.20). Alle um eine oder mehrere Oktaven voneinander entfernten Töne tragen dieselbe Bezeichnung. (Als Beispiel für den Ton a siehe Abb. 7.6.) Um die zwölf verschiedenen Töne der chromatischen Tonleiter festzulegen, wurden zwei Systeme eingeführt, die *reine Stimmung* und die *temperierte Stimmung*.

Die (musikalischen) Töne der *reinen Stimmung* findet man am einfachsten mit dem *Monochord*, einem Holzkasten mit darüber gespannter Saite. Ist deren Länge gleich  $L$ , so hat der Grundton dieses Instrumentes nach Gl. (7-36a) die Wellenlänge  $\lambda_0 = 2L$  und mit Gl. (7-6) die Frequenz  $\nu_0 = c_{\text{Saite}}/\lambda_0$ . Obertöne kann man erzeugen, indem man die Monochordsaite anzupft und zugleich an einer bestimmten Stelle berührt, wodurch dort ein Schwingungsknoten erzwungen wird. Diese Art der Anregung unterscheidet sich von der bei Streichinstrumenten dadurch, dass sich eine stehende Welle auf *beiden* Teilen der durch den Knoten geteilten Saite ausbildet. (Bei Streichinstrumenten sind dies die *Flageolett-Töne*.)

Hält man die Saite in der Mitte fest, dann entsteht der 1. Oberton mit halber Wellenlänge  $\lambda_1 = \lambda_0/2$  und doppelter Frequenz  $\nu_1 = 2\nu_0$ . Andere Obertöne ergeben sich, wenn die Saite bei  $1/3L$ ,  $1/4L$ ,  $1/5L$  usw. festgehalten wird. Die zugehörigen Frequenzverhältnisse  $\nu_0:\nu_1:\nu_2 \dots$  sind dann  $1:2:3 \dots$  usw. Die Namen der *Frequenzintervalle* zwischen einigen benachbarten Tönen und ihre Frequenzverhältnisse sind in Tab. 7.4 zusammengestellt.

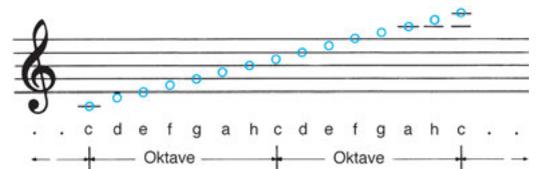
Reine Töne im Sinne einer harmonischen Welle mit einer einzigen Frequenz lassen sich mit keinem Musikinstrument erzeugen (wenn man von elektronischen Geräten einmal absieht) obwohl der Musiker von Tönen spricht; vielmehr entstehen stets Klänge mit einer durch das Instrument und die Spielweise gekennzeichneten Klangfarbe. Dies beruht auf der Beimischung von Oberschwingungen, die gleichzeitig mit der Grundschwingung angeregt werden. Am Monochord können wir die dadurch entstehenden Obertöne einfach überblicken. Zupfen wir die Monochordsaite sehr kräftig an, so werden die möglichen Eigenschwingungen der Saite mit mehr oder weniger großer Stärke zugleich angeregt. Zupft man nur leicht an, so entsteht ein weniger greller d. h. tonähnlicher Klang mit geringerer Obertonbeimischung.

Die *Intervalle*, d. h., Frequenzabstände der Obertöne zum Grundton ( $n=1$ ) sind beim ersten Oberton ( $n=2$ ) die *Oktave* auf dem Grundton, beim zweiten Oberton ( $n=3$ ) die *Quint* über dem ersten Oberton, beim dritten Oberton ( $n=4$ ) die *Quart* über dem zweiten Oberton usw. Diese Folge von Resonanztönen nennt man die *Obertonreihe*, und ihre Frequenzen sind zugleich die der Summanden in der *Fourier-Reihe*, Gl. (7-28). Nach dem Satz von Fourier (Kap. 6.5.2 und 7.5) lässt sich daher jeder Klang in diese Obertöne zerlegen. Die Klänge einer auf dem Ton a angeregten Geige und einer Oboe unterscheiden sich im wesentlichen durch die Intensität der Obertöne. Je intensiver diese sind, desto heller und härter klingt das Instrument. Bei HiFi (high-fidelity)-Phonogeräten dient der große Frequenzbereich (bis ca. 25 kHz) nicht dazu, so hohe (Grund-)Töne zu übertragen, sondern mittels der hohen Obertöne die Klangwiedergabe zu verbessern. Die Klangfarbe wird jedoch durch das Obertonspektrum erst bestimmt, wenn der Einschwingvorgang (Kap. 6.4) nach dem Einsetzen der Anregung abgeklungen ist. Bei kurzen Klängen wird dieser Zustand oft gar nicht erreicht (z. B. beim Klavier), und dann sind der Einschwingvorgang und die darin enthaltene Mischung von Frequenzen mit verantwortlich für den Klangcharakter.

Werden (musikalische) Töne gleichzeitig erzeugt, so entstehen *Akkorde* (z. B. der *Dreiklang* aus Grundton–Terz–Quinte). Physikalisch gesehen, stellen also Musikstücke Aufeinanderfolgen von Akkorden dar.

Aus den Intervallen, die zwischen den Obertönen des Monochords auftreten, lassen sich nun die verschiedenen Tonleitern (*Dur*, *Moll*) aufbauen. Die 7 Haupttöne der *Dur-Tonleitern* z. B. bilden mit dem Grundton die Intervalle *Große Sekunde*, *Terz*, *Quart*, *Quint*, *Sext* und *Septime*. Das nächstfolgende Intervall ist dann die *Oktave* (Abb. 7.20), und es wiederholt sich die Tonfolge, nun um eine Oktave höher. In Tab. 7.4 sind die Frequenzverhältnisse der Intervalle zusammengestellt.

Auf jedem dieser Töne kann man wieder eine Tonleiter aufbauen, indem man z. B. Monochorde anderer Längen  $L$  verwendet. Die meisten gleichnamigen Töne aus verschiedenen Tonleitern unterscheiden sich dann aber, wenn auch geringfügig, in ihren Frequenzen. So entsteht bei der *reinen Stimmung* für die verschiedenen Tonleitern eine riesige Zahl von Tönen unterschiedlicher Frequenzen. Um ihre Zahl zu reduzieren, teilt man bei der *temperierten Stimmung* die Intervalle anders ein, und zwar so, dass jede Oktave der *chromatischen Tonleiter* in 12 Intervalle mit gleichem Frequenzverhältnis



**Abb. 7.20** Beispiel einer Tonleiter in Notenschrift mit Bezeichnung der Töne über zwei Oktaven (C-Dur Tonleiter).

unterteilt ist, und die Frequenzen benachbarter Halb-  
töne stets im Verhältnis  $\nu_n : \nu_{(n+1)} = 1 : \sqrt[12]{2} = 1 : 1,0595$   
zueinander stehen. Auf diese Weise stimmen die Töne  
gleichen Namens aus verschiedenen Tonleitern in ihren  
Frequenzen exakt überein und lassen sich einfacher mit  
Musikinstrumenten erzeugen. Ihre Intervalle weichen  
aber von denen der reinen Stimmung (wenn auch prak-  
tisch kaum hörbar) ab.

Beispielsweise ergeben sieben dieser Halbtoninter-  
valle eine Quint; die Frequenz verhält sich dann aber  
zu der des Grundtones nicht mehr genau wie 3:2  
(wie bei der reinen Stimmung), sondern wie  
 $\nu_n : \nu_m = (\sqrt[12]{2})^7 : 1 = 2,996 : 2$ . Die aus zwölf Halbtö-  
nen aufgebaute Oktave entspricht aber der der reinen  
Stimmung:  $(\sqrt[12]{2})^{12} : 1 = 2 : 1$ .

Mit den Vereinbarungen der reinen oder temperier-  
ten Stimmung sind zwar die Beziehungen zwischen  
den Tönen geregelt, ihre Frequenzen ergeben sich da-  
raus aber erst, wenn wenigstens die Frequenz eines To-  
nes absolut festgelegt ist. Dazu definiert man interna-  
tional den *Kammerton a* und setzte dessen Frequenz  
1939 auf  $\nu = 440$  Hz fest. Heute werden vielfach auch  
andere Werte zwischen 432 und 443 Hz zur Stimmung  
gewählt.

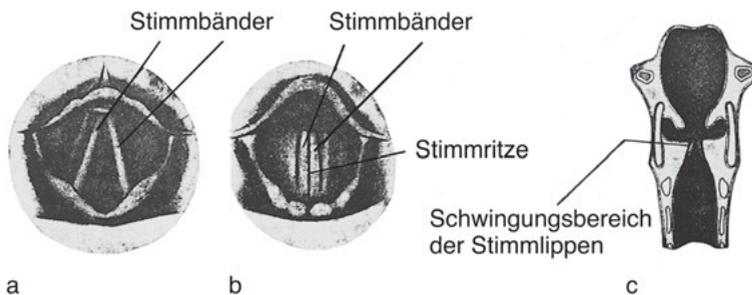
Werden mehrere Töne gleichzeitig erzeugt, so emp-  
findet das Ohr den entstehenden *Akkord* als um so  
harmonischer, je einfacher das Zahlenverhältnis zwi-  
schen deren Frequenzen ist. (Die Quint mit  
 $\nu_n : \nu_m = 3:2$  klingt angenehmer als die Septime mit  
 $\nu_n : \nu_m = 15:8$ .)

## 7.12 Stimme und Gehör beim Menschen

**Stimme** Wichtigster Teil des menschlichen  
Stimmorgans ist die spaltförmige *Stimmritze*,  
die von zwei schwingungsfähigen Membran-  
en, den *Stimmbändern* begrenzt wird. Ober-  
halb befindet sich der *Resonanzraum* des  
Kehlkopfes mit seiner Verbindung zur Ra-  
chen-, Mund- und Nasenhöhle. Unterhalb  
sind die miteinander verbundenen Lufträume  
von Trachea, Bronchien und Lungenalveolen.  
Wie Abb. 7.21a zeigt, ist bei normaler At-  
mung die Stimmritze weit geöffnet, so dass  
Ein- und Ausatemluft ungehindert passie-  
ren können. Bei *Stimmgebung* rücken ent-  
sprechend Abb. 7.21b die Stimmbänder zu-  
sammen, die Atemmuskulatur bewirkt eine  
Erhöhung des Luftdrucks und damit eine  
entsprechend hohe Geschwindigkeit der  
durch die Stimmritze hindurchströmenden  
Luft. Dies führt wegen der Elastizität der

Stimmbänder zur leichten Erweiterung der  
Stimmritze, damit zu einem Druckabfall, und  
die Stimmritze verengt sich wieder. In dem  
Wechselspiel zwischen der Elastizität der  
Stimmbänder, dem Druck und der Strö-  
mungsgeschwindigkeit der Luft werden die  
Stimmbänder und zugleich die Luft im Reso-  
nanzraum zu Schwingungen angeregt, wie es  
in Abb. 7.21c schematisch dargestellt ist. Da  
das Stimmorgan akustisch an die Luft des  
Außenraumes angekoppelt ist, wird Schall  
abgestrahlt.

Die Frequenz der Schwingungen der Stimmbänder  
kann man durch Anspannung der Kehlkopfmuskulatur  
variieren. Wegen der unterschiedlichen Länge der  
Stimmbänder (im Mittel 18,2 mm bzw. 12,6 mm) ist  
der Variationsbereich bei Männern und Frauen un-  
terschiedlich. Es gibt jedoch innerhalb der beiden Ge-  
schlechter wiederum beträchtliche individuelle Abwei-  
chungen von den Mittelwerten. Die tiefstmögliche



**Abb. 7.21** Stimmerzeugung: (a) Kehlkopfeneingang bei ruhiger Atmung, (b) bei Stimmgebung, (c) halb-  
schematischer Längsschnitt durch den Kehlkopf mit der Darstellung der Stimmlippen-(oder Stimmbän-  
der-)Schwingung.

Frequenz beim Bass liegt unter 100 Hz, während die höchstmögliche beim Koloratur-Sopran etwa 1500 Hz beträgt. (Die Königin der Nacht singt in der *Zauberflöte* ihren höchsten Ton bei 1470 Hz.)

Den mit den Stimmbändern erzeugten Tönen sind Obertöne kaum beigemischt. Die Klangfarbe der Stimme wird erst durch die Form der Resonanzräume, des Rachens und der Nasenhöhle also, und insbesondere durch die Mundstellung erzeugt. Beim Sprechen von stimmhaften Lauten spielen die Stimmbänder eine wesentliche Rolle bezüglich der Grundfrequenz der angeregten Schallwelle. Bei den stimmlosen Lauten sind an der Schallerzeugung vor allem die mit der Atemluft angeblasenen Hohlräume und der enge Querschnitt in Rachen-, Mund- und Nasenhöhle beteiligt.

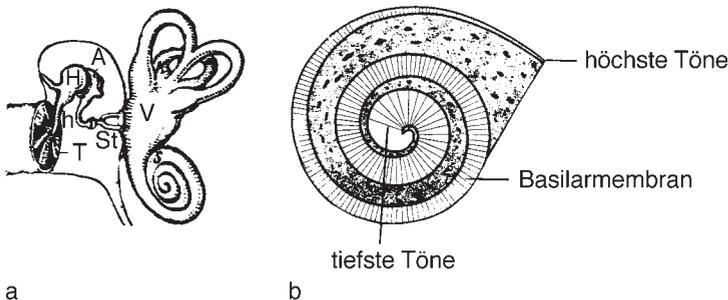
**Gehör** Der Weg des Schalls von der Aufnahme bis ins Innere des Ohrs (Abb. 7.22a) erfolgt zunächst auf zwei physikalisch hochkomplexen, getrennten Bahnen. Die eine läuft über Gehörgang, Trommelfell, Gehörknöchelchen und ovales Fenster zum inneren Ohr. Neben dieser *Luftleitung* müssen wir auch die *Knochenleitung* betrachten, bei der die Schallwellen über Schwingungen der Schädelknochen zu den Sinneszellen des *Cortischen Organs* gelangen. Jedoch wird ein Ton über die Knochenleitung i. A. etwa 30 dB schwächer gehört als über die Luftleitung, d. h., die Knochenleitung ist im Wesentlichen nur für Schwerhörige von Bedeutung, deren Mittelohr geschädigt ist. Auch bei Hörgeräten wird die Knochenleitung einbezogen.

Bei *Luftleitung* überträgt das Trommelfell die Schall-schwingungen über die im Mittelohr in der Paukenhöhle liegenden Gehörknöchelchen Hammer, Amboss und

Steigbügel auf das ovale Fenster des Labyrinths und damit auf die im Labyrinth befindliche Perilymphe, indem diese zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden. Da das ovale Fenster bzw. die Fußplatte des Steigbügels eine wesentlich kleinere Fläche hat als das Trommelfell, und zudem die Gehörknöchelchen noch teilweise als Hebel wirksam sind, ist der Druck der Schallwellen in der Perilymphe etwa 20mal größer als am Trommelfell. Damit kommt dem Mittelohr eine Anpassungsfunktion bei der Übertragung vom Medium Luft zum wässrigen Medium der Perilymphe zu. Die Eigenfrequenz der Übertragungsstrecke im Mittelohr liegt zwischen 1 und 3 kHz. Dies ist auch der Bereich für die Schallwahrnehmung, in dem das Ohr am empfindlichsten ist, da Frequenzen nahe oder bei der Eigenfrequenz am besten übertragen werden. Bei großen Lautstärken vermag das Ohr seine Empfindlichkeit um bis zu 15 dB herabzusetzen, indem die Bewegung der Hörknöchelchen durch Muskelspannung gedämpft wird. Dies sind die physikalischen Gründe, die zu der dem Weber-Fechner'schen Gesetz (Gl. 7-18; Tab. 7.3) folgenden Empfindlichkeit des Ohres führen.

Die Umsetzung der mechanischen Schwingungen in Aktionspotentiale (Kap. 15.1.1), die zum Zentralnervensystem geleitet werden, erfolgt in der Ohrschnecke im Innenohr, die in Abb. 7.22b vereinfacht skizziert ist. Sie besteht aus einem spiralförmig aufgewickelten Kanal, wobei die Basilar-membran in der Schnecke eine große Zahl von Querfasern enthält, von denen die längsten (0,5 mm) in der Schneckenkuppel und die kürzesten (0,08 mm) am Anfang der Schneckengänge liegen. Durch die unterschiedlichen Längen werden die Querfasern von Wellen verschiedener Wellenlängen unterschiedlich angeregt. Damit erfolgt eine räumliche Zuordnung der Frequenzen zu gewissen Orten der Basilar-membran und auch zu verschiedenen Fasern der daran ansetzenden Hörnerven.

Für das *Richtungshören* nützt der Organismus die unterschiedliche Laufzeit des Schalls



**Abb. 7.22** (a) Mittelohr mit Trommelfell T, Hammer H, dessen Stiel h, Amboss A und Steigbügel St, Labyrinth mit Vorhof V und Schnecke S. (b) Ohrschnecke (Cortisches Organ).

zu den beiden Ohren aus. Der Unterschied in der Laufzeit bestimmt sich aus Ohrabstand und Schallgeschwindigkeit. Die Schwelle für das Richtungshören liegt bei Winkeln von  $3^\circ$  bis  $5^\circ$ , d. h., es können noch Differenzen der Laufzeiten zu den beiden Ohren von  $10^{-5}$  s im Zentralnervensystem verarbeitet werden.

Das *Entfernungshören*, (d. h. die Fähigkeit, aus dem Schallsignal die Entfernung zur Schallquelle abzuschätzen), ist beim Menschen nur schwach ausgeprägt. Es geschieht im wesentlichen über die Frequenzabhängigkeit der Schalldämpfung auf dem Weg zum Ohr.

**Auf dem Gehör basierende medizinische Diagnosemethoden** Ebenso wie man durch Klopfen feststellen kann, ob ein Fass leer oder voll ist, kann man aus den Schallsignalen beim Beklopfen der Körperoberfläche Informationen über den Zustand der darunterliegenden Körperpartien gewinnen. Das entstehende Geräusch wird durch ein kompliziertes Zusammenwirken von Resonanzen und von frequenzabhängigen Reflexions- und Absorptionsvorgängen erzeugt. Diese *Perkussion* genannte Methode wird in der Medizin besonders angewandt, um erste Informationen über

krankhafte Veränderungen im Bauch- und Brustbereich zu erhalten.

Die Geräusche, die durch Herz oder Lunge im Körper selbst erzeugt werden, hört man außen wegen der starken Schallreflexion an der Körperoberfläche (s. auch Kap. 7.8) kaum. Zu ihrer Verstärkung verwendet man das *Stethoskop*. Es besteht aus einer Metallglocke zur Schallaufnahme, deren Form so gewählt ist, dass das Geräusch durch Resonanz verstärkt wird. Durch verschieden starken Andruck auf die Körperoberfläche lässt sich die Resonanzfrequenz verändern. Der Schall wird dann durch Schläuche weitergeleitet und dem Ohr zugeführt. Eine solche Führung der Schallwellen verhindert, dass sich die Wellen in den ganzen Außenraum ausbreiten und dabei ihre Intensität abnimmt (s. Gl. (7-3)). Die Lautstärke ist daher etwa so groß, als würde man das Ohr direkt auf den Körper auflegen.

Diese Methode der Schall-Leitung durch Rohre oder Schläuche wurde übrigens auch in Großflugzeugen zur Übertragung von Musik etc. verwendet, um Störungen der Bordelektronik durch zusätzliche elektronische Übertragungssysteme zu vermeiden. Analog dazu lassen sich auch Lichtwellen führen (s. Lichtleiter, Kap. 19.3.6).

## 7.13 Ultraschall

Der Ultraschall mit Frequenzen jenseits der oberen Hörschwelle von 20 kHz hat aufgrund seiner technischen und medizinischen Anwendungen zunehmend Bedeutung erlangt. Er wird beispielsweise durch einen Quarzkristall erzeugt, der mit elektrischen Kontakten versehen ist und durch ein elektrisches Hochfrequenz-Wechselfeld zu mechanischen Schwingungen (je nach Kristallgröße von 20 kHz bis 100 MHz) angeregt werden kann. (Diese, auch in einigen anderen Stoffen neben Quarz gefundene Eigenschaft nennt man *piezoelektrischen Effekt*, vgl. hierzu Kap. 14.7.7). Die zugehörigen Wellenlängen in Luft reichen dann von  $10^{-2}$  m bis  $10^{-6}$  m.

Der *Schwingquarz* wirkt am effektivsten bei derjenigen Frequenz, bei der er in mechanische Resonanz-

schwingungen gerät. Diese Eigenschwingung ist nach Gl. (7-36a), die auch hier anwendbar ist, von den Außenmaßen, insbesondere der Plattendicke abhängig: Je dünner die Kristallplatte ist, um so höher ist die Eigenfrequenz.

Die Schwingungsfrequenzen sind derart präzise konstant, dass Schwingquarze in Präzisionsuhren (*Quarzuhren*) als Taktgeber verwendet werden.

In der Technik können Werkstücke mit Ultraschall auf Fehler im Gefüge, wie z. B. Risse untersucht werden, ohne dass sie dabei zerlegt oder zerstört werden müssen (*zerstörungsfreie Werkstoffprüfung*). Gemessen werden dazu die an den Fehlern entstehenden Streuwellen.

Mit Ultraschall lassen sich auch gut Pulver und Flüssigkeiten mischen und fein verteilte Emulsionen herstellen. Im Ultraschallgefäß (*Ultraschallbad*) können Gegenstände ohne

mechanische Hilfsmittel gereinigt werden. Solche Geräte haben in Laboratorien heute ihren festen Platz. In der Zahnarzt-Praxis wird z. B. Zahnstein mit Ultraschall entfernt.

Es ist sogar gelungen, zur Materialprüfung *Ultraschall-Mikroskope* zu bauen. Sie arbeiten bei Frequenzen um 100 MHz und lassen bis zu 5  $\mu\text{m}$  kleine Inhomogenitäten im Inneren von Material erkennen. (Die eigentliche Vergrößerung wird allerdings nicht akustisch, sondern optisch vorgenommen, und zwar mit Hilfe eines das Schallfeld abstrahierenden fokussierten Laserstrahls.)

In der Medizin hat die *Ultraschalltechnik* sowohl in der Diagnostik als auch in der Therapie vielseitige Bedeutung. So kann man mit Ultraschall innere Organe abbilden, und man erhält dabei ähnliche Informationen wie bei der Röntgendiagnostik. Ultraschalldiagnostik wird zunehmend wichtiger, weil sie im Gegensatz zur Röntgendiagnostik strahlungsunschädlich ist.

Wir wollen daher im folgenden Abschnitt auf dieses Diagnoseverfahren näher eingehen, zumal dies die Gelegenheit bietet, die Grundlagen der Schallausbreitung nochmals zusammenzufassen.

### Ultraschall und Stoßwellen in der Medizin

Zur Diagnostik verwendete Ultraschallintensitäten ( $\sim 1 \text{ mWcm}^{-2}$ ) sind unschädlich. Physiologische Effekte treten erst bei höheren Leistungen auf. Da Ultraschall bis in tiefliegende Gewebeschichten einzudringen vermag, bewirkt die Absorption seiner Energie, dass dort Wärme entwickelt wird. (Mit Infrarot-Bestrahlung kann man nur die Körperoberfläche erwärmen.) Bei Intensitäten von ca.  $1 \text{ Wcm}^{-2}$ , die man durch Bündelung der Wellen lokalisieren kann, wird die Temperatur des Gewebes um einige Grad erhöht (*Ultraschall-Diathermie*).

Durch das Zusammenspiel dieser Wärmewirkung mit der durch Druckschwankungen im Ultraschall-Feld bedingten mechanischen *Mikromassage* des Gewebes kann eine Reihe komplizierter chemischer Vorgänge in den

Gewebezellen therapeutisch gesteuert werden. Man könnte hierzu im Prinzip auch Hörschall verwenden, aber Ultraschall hat einen entscheidenden Vorteil: Die bei gleichen Maximalauslenkungen der Moleküle des Gewebes übertragene Leistung ist bei Ultraschall um Größenordnungen höher als bei Hörschall (Gl. (7-15a)). So ist die Intensität von Ultraschall einer Frequenz von 1 MHz um das  $10^6$ -fache höher als bei Hörschall mit 1 kHz und gleicher Auslenkungsamplitude. Entsprechend größer ist auch die Wärmeentwicklung im zu behandelnden Organ. Bei  $35 \text{ W cm}^{-2}$  beträgt die Schalldruckamplitude 10 bar, d. h. das Zehnfache des Atmosphärendrucks! Zudem kann man Ultraschall wegen seiner kleinen Wellenlängen auf kleine Raumbereiche bündeln, d. h., in kleinen Objekten große Ultraschall-Intensitäten konzentrieren. Diese können ausreichen, um beispielsweise Nierensteine zu zertrümmern (*Lithotripter*). Weiches Gewebe wird erst bei Intensitäten der Größenordnung  $1 \text{ kW cm}^{-2}$  zerstört.

Als Rüstzeug für das Verständnis der verschiedenen Ultraschallmethoden benötigen wir Gl. (7-32a) bzw. Gl. (7-33) für das Reflexionsvermögen und Gl. (7-32c) für das Transmissionsvermögen sowie Gl. (7-17) für die Dämpfung von Wellen.

Als *Ultraschallsender* dient ein *Schwingquarz* (auch *Transducer* genannt). Er vermag aber nicht nur als Sender zu wirken, sondern auch als Empfänger, denn umgekehrt erzeugt er mit dem piezoelektrischen Effekt elektrische Wechselspannungen, wenn er von einer Schallwelle getroffen wird und in deren Takt zu mechanischem Mitschwingen angeregt wird.

Für die im Folgenden beschriebenen Methoden verwendet man zumeist keine lang ausgedehnten Wellenzüge, sondern kurzdauernde, schnell einsetzende und wieder abklingende Wellenzüge, sog. *Ultraschall-Pulse*, die aber doch so lang sind, dass sie mehrere Wellenlängen enthalten. Schickt man einen solchen Puls durch eine Körperpartie, so wird er auf vier verschiedene Weisen beeinflusst, die alle zu Diagnosezwecken genutzt werden:

1. Er wird gemäß Gl. (7-25) von unterschiedlichen Substanzen unterschiedlich absorbiert.

**Tab. 7.5** Geschwindigkeit, Wellenimpedanz und Dämpfungskonstante von Schallwellen für einige in der Medizin wichtige Substanzen. (Bei hohen Frequenzen werden diese Größen frequenzabhängig.)

Substanz	Schallgeschwindigkeit $c$ (m s <sup>-1</sup> )	Schallimpedanz $Z$ (kg s m <sup>-2</sup> )	Dämpfungskonstante $\delta$ (m <sup>-1</sup> )
Luft	$3,4 \cdot 10^2$	$4,3 \cdot 10^2$	$\sim 0$
Wasser	$14,8 \cdot 10^2$	$1,48 \cdot 10^2$	$14,8 \cdot 10^2$
Muskeln	$15,8 \cdot 10^2$	$1,64 \cdot 10^2$	13
Knochen	$40,4 \cdot 10^2$	$7,68 \cdot 10^2$	170

Einige Zahlenwerte sind in Tab. 7.5 angegeben. Eine Messung der Intensitätsabnahme zwischen Sender und Empfänger gibt also Aufschluss über die durchlaufene Substanz.

2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  des Ultraschallpulses hängt ebenfalls von der Art der durchlaufenen Substanz ab (Tab. 7.5) und damit auch die Laufzeit  $\tau$ , für die sich  $\tau = \sum s_i/c_i$  ergibt, wenn die Welle nacheinander verschiedene Substanzen durchläuft und  $s_i$  die Dicke der  $i$ -ten Substanz bedeutet. (Allgemein gilt: Laufzeit = Laufstrecke/Geschwindigkeit.)

Gibt man den Senderpuls und den Empfängerpuls auf ein Oszilloskop, so ist die Laufzeit direkt aus der gegenseitigen Verschiebung der beiden Impulse auf dem Schirm abzulesen. Es ist üblich, nicht einen einzelnen Puls sondern eine periodische Pulsfolge (400–1000 Impulse pro Sekunde) zu verwenden, damit man das Oszilloskop triggern kann (vgl. hierzu Kap. 16.1.4). (Die Laufzeiten liegen bei einigen  $\mu$ s, so dass der Empfängerpuls lange vor dem nächstfolgenden Senderpuls registriert wird.)

3. Der Puls wird gemäß Gl. (7-32a) bzw. (7-33) an Grenzflächen, an denen sich die Wellenimpedanz  $Z$  ändert, mehr oder weniger stark reflektiert: Es entstehen *Echos*. Entsprechend den Zahlenwerten der Tab. 7.5 reflektieren beispielsweise bei 1 MHz die Grenzflächen zwischen Muskel und Knochen ca. 40% der Pulsintensität. Registriert man das Echo, so lässt sich aus der Laufzeit die Lage der Grenzfläche im Körper bestimmen, denn es gilt: Laufstrecke = Laufzeit  $\times$  Geschwindigkeit.

4. Bewegt sich das reflektierende Objekt, so kommt der *Doppler-Effekt* ins Spiel, und nach Kap. 7.3 wird die Frequenz der reflektierten Welle gegenüber der der Primärwelle verän-

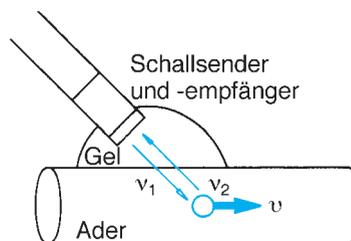
dert. Auf diese Weise lassen sich die Bewegung des Herzens oder der Blutfluss in einzelnen Gefäßabschnitten messen (Abb. 7.23).

**Bildaufnahme-Verfahren mittels Ultraschall (Sonografie).** Das Untersuchungsverfahren der Sonografie ist der *Optischen Kohärenztomografie* (Kap. 17.12.2) verwandt. Dort wird jedoch Laserlicht anstelle des Ultraschalls verwendet. Zur Lokalisierung von Strukturen im Körper werden drei Registriermethoden angewandt:

a) Beim sog. *A-scan* wird die oben (unter 3.) geschilderte Pulsechomethode ausgenutzt, wobei der Schwingquarz auf einer bestimmten Stelle der Körperoberfläche fest aufliegt. Damit lassen sich Hindernisse (z. B. ein Hirntumor) in ihrem Abstand von der Körperoberfläche nachweisen.

b) Verschiebt man den Schwingquarz auf der Körperoberfläche und registriert nacheinander die verschiedenen Echos, so lässt sich die seitliche Ausdehnung der Hindernisse feststellen; man erhält auf diese Weise ein zweidimensionales Bild von Form und Größe (*B-scan*). Ein Beispiel zeigt Abb. 7.24.

c) Nimmt man solche B-scan-Bilder aus allen möglichen Richtungen auf, so kann man daraus im Prinzip das räumliche, dreidimensionale Bild des reflektierenden Hindernisses rekonstruieren (ähnlich wie der Bau-



**Abb. 7.23** Blutfluss-Messung über den Doppler-Effekt von Ultraschallwellen.  $\nu_1$  und  $\nu_2$  sind die Frequenzen der einfallenden und der am bewegten Objekt, einem Blutkörperchen, reflektierten und/oder gestreuten Welle. (Das Gel dient zur Verbesserung der Schallankopplung, da es die Änderungen der Wellenimpedanz an den Grenzflächen und damit die Reflexion herabsetzt. Schallsender und Empfänger sind im Schallkopf zusammengefasst.)

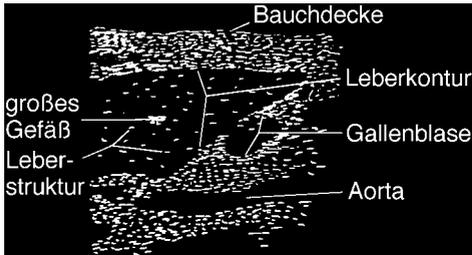


Abb. 7.24 Ultraschallbild der Leber.

meister aus den zweidimensionalen Grundriss-, Aufsichts- und Seitenansichts-Plänen des Architekten das dreidimensionale Bauwerk errichten kann). Zur Rekonstruktion ist allerdings neben einer riesigen Menge von Messdaten eine komplizierte mathematische Auswertung erforderlich; sie kann nur mit einem leistungsfähigen Computer vorgenommen werden. Diese Methode, die *Computer-Tomographie*, wird nicht nur bei der Ultraschalldiagnose, sondern z. B. auch bei der Bildaufnahme mittels Kernresonanz (Kap. 21.1.3) bzw. Röntgenstrahlen (Kap. 21.3.4) angewendet.

Das Struktur-Auflösungsvermögen der Ultraschall-Bilder ist durch die Wellenlänge  $\lambda$  begrenzt (vgl. Kap. 20.3.3); Strukturen kleiner als  $\lambda$  sind nicht auszumachen. Im Prinzip sollte daher die Frequenz möglichst groß sein. Nun steigt aber mit der Frequenz die Absorption im biologischen Gewebe, so dass man — als Kompromiss zwischen Auflösungsvermögen und Durchstrahlbarkeit — Frequenzen zwischen 1 und 5 MHz verwendet, die Wellenlängen von ca. 0,5 mm entsprechen. In der dadurch bedingten Begrenzung der Detail-Auflösung liegt ein wesentlicher Nachteil gegenüber der Röntgendiagnostik.

Setzt man aus Tab. 7.5 die Werte der Schallimpedanz  $Z$  von Luft und Gewebe in Gl. (7-33) ein, so stellt man folgendes fest: Bei Übertragung aus Luft werden bereits 99,9% der auffallenden Schallintensität an der Körperoberfläche reflektiert, dringen also praktisch gar nicht erst in den Körper ein. Daher ist zwischen Schwingquarz und Körper ein Übertragungsmedium erforderlich. Dazu kann eine Flüssigkeit oder ein Gel dienen (s. Abb. 7.23). Bei Verwendung von Wasser wird beispielsweise die reflektierte Intensität auf unter 1% gesenkt.

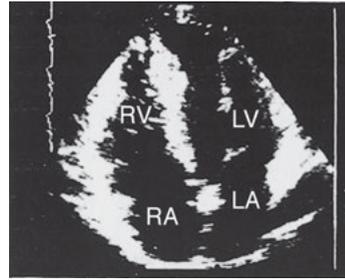
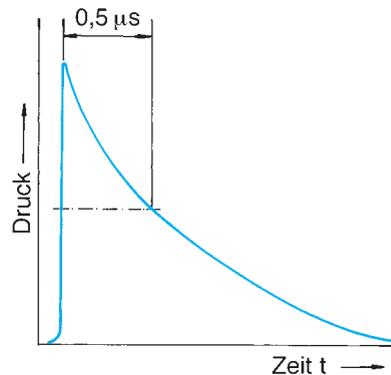
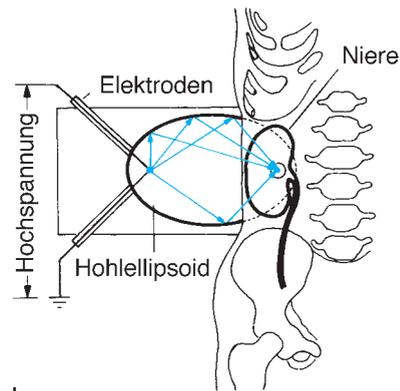


Abb. 7.25 Vierkammerblick bei sektorförmiger Aufnahme des Herzens. RV: rechter Vorhof; LV: linker Vorhof; RA: rechter Ventrikel; LA: linker Ventrikel.

Ein spezielles Beispiel der Ultraschalldiagnose ist die *Echokardiographie*. Von einem Schallkopf aus werden fächerförmig Ultraschallstrahlen durch das Herz gesandt und die dadurch erhaltenen Ultraschallzeilen im B-scan (siehe oben) zweidimensional aneinanderge-



a



b

Abb. 7.26 (a) Zeitlicher Verlauf einer Stoßwelle; (b) räumliche Anordnung bei der Lithotripsie.

reht. Somit erhält man die Darstellung eines Querschnitts durch das Herz, in der die echoproduzierenden Grenzflächen des Herzens als helle, die Hohlräume des Herzens als dunkle Bereiche erscheinen. Das Aneinanderreihen von etwa 100 untereinander liegenden Ultraschallzeilen in einem Sektor mit ca. 80 Grad Öffnungswinkel lässt Wände und Klappen des ausgeloteten Herzquerschnitts in der exakten räumlichen Anordnung erscheinen. Die sich ergebende Abbildung repräsentiert einen tortenähnlichen Ausschnitt (Sektor) aus dem Herzen. Es werden in schneller Reihenfolge solche Querschnittsbilder aufgenommen (25 bis 30 pro Sekunde), wodurch die Bewegung des Herzens und der Klappen innerhalb des Sektors in natürlicher Geschwindigkeit dargestellt wird. Welches Querschnittsbild des Herzens man erhält, hängt davon ab, wo der Ultraschallkopf aufgesetzt wird. Wird er dort aufgesetzt, wo man die Herzspitze fühlt, dann erhält man den sog. *Vierkammerblick*, wie er in Abb. 7.25 dargestellt ist.

**Lithotripter** Mechanische Druckwellen in Form von *Stoßwellen* lassen sich zur Zertrümmerung von Nierensteinen therapeutisch anwenden. Stoßwellen werden z. B. durch einen elektrischen Unterwasserfunken erzeugt. Anders als gewöhnlich in der Medizin angewendete Ultraschallwellen besitzen Stoßwellenimpulse ein breites, kontinuierliches Frequenzspektrum. Die explosionsartige Druckausbreitung bei der Funkenbildung läuft im Wasser mit Überschallgeschwindigkeit

ab. Dabei entsteht eine extrem steile Anstiegsflanke im Zeitverlauf der erzeugten Stoßwelle mit hoher Druckamplitude bis zu 1 kbar (Abb. 7.26a). Da das Wasser, in dem die Stoßwellen erzeugt werden, ähnliche akustische Eigenschaften hat wie biologisches Gewebe, gibt es kaum Energieverluste beim Eintritt der Stoßwelle in den Körper des Patienten, der im Wasser gelagert ist oder durch ein Gel kontaktiert wird. Zur optimalen Ausnutzung der Energie der Stoßwelle wird der Funke im Brennpunkt eines Ellipsoid-Hohlspiegels gezündet, in dessen zweitem Brennpunkt sich der zu zertrümmernde Nierenstein befindet. Die von einem Brennpunkt ausgehende Ultraschall-Welle wird durch Reflexion dann im anderen Brennpunkt fokussiert (Abb. 7.26b). Die Einjustierung des Patienten erfolgt über zwei senkrecht zueinander angeordnete Röntgenanlagen. Die Patientenliege ist so gestaltet, dass sie den Patienten exakt lagert, aber für die Stoßwellen und die Röntgenkontrolle einen freien Durchtritt lässt. Die Auslösung der Stoßwellen wird durch die R-Zacke des EKG (Abb. 14.34) getriggert, um Interaktionen zwischen Stoßwellen und Herzaktion zu vermeiden. Die Stoßwelle wird also in der refraktären Phase des Herzens ausgelöst, in der dieses nicht stimulierbar ist. Bei mehrfacher Beaufschlagung der Nierensteine mit Stoßwellen werden diese sukzessive in sandartige bis stecknadelgroße Stücke zersprengt. Nennenswerte Einwirkungen der Stoßwellen auf das Nierengewebe sind nicht beobachtet worden.



## 8. Wärme und Temperatur

### 8.1 Einleitung

Aus dem Kapitel über das *molekulare Bild der Aggregatzustände* (Kap. 5.1.2) wissen wir:

*Wärme* ist verknüpft mit der ungeordneten Bewegung, der *Wärmebewegung* der Atome oder Moleküle, und *Temperatur* ist ein Maß für deren kinetische Energie.

Gasteilchen bewegen sich, wenn sie nicht gerade auf ein Nachbar teilchen prallen, nach allen Richtungen frei und ungeordnet durch den ihnen zur Verfügung stehenden Raum. Die Atome oder Moleküle der festen Stoffe dagegen besitzen feste Gleichgewichtslagen, um die sie Schwingungen ausführen. Die Flüssigkeiten nehmen eine Zwischenstellung ein. Die gesamte in einem Körper gespeicherte Energie der Wärmebewegung nennen wir die *Wärmeenergie* oder *Wärmemenge*, die der Körper enthält. Zum Wärmeinhalt trägt nur der Anteil der ungeordneten Bewegung bei, nicht aber eine gleichsinnige Bewegung aller Teilchen infolge einer Bewegung der Substanz als Ganzes.

Der Schluss könnte nahe liegen, Wärme sei ein Problem der Kinematik und folglich die Wärmelehre nur ein Sondergebiet der Mechanik. Dem steht aber im Wege, dass es aus-

sichtslos ist, die Bewegung der riesigen Zahl von Atomen und Molekülen in einer normalen Probe ( $6 \cdot 10^{23}$  pro mol) detailliert beschreiben zu wollen. Praktisch möglich ist einzig eine statistische Behandlung, die auf makroskopische Mittelwerte führt. Diese fällt aber insofern aus dem Rahmen der Mechanik von Einzelteilchen, als deren Basisgrößen Länge, Masse und Zeit keine geeignete Darstellung des kollektiven Phänomens der ungeordneten Bewegung von Teilchen in einem Stoff ermöglicht. Diese lässt sich jedoch übersichtlich beschreiben, wenn man für die Wärmelehre eine weitere Basisgröße, die *absolute Temperatur*  $T$  mit der SI-Einheit *Kelvin* (K) einführt.

Die Temperatur ist als Mittelwert definiert und somit nur auf einen aus vielen Bausteinen bestehenden Stoff, nicht aber auf die individuelle Bewegung eines einzelnen Atoms oder Moleküls anwendbar.

Später werden noch weitere Größen wie etwa Druck (Kap. 10.1) besprochen, die auf dem Durchschnittsverhalten einer Vielzahl gleicher Teilchen in statistischen Gleichgewicht beruhen. Die Beschreibung von Zuständen solcher Ensembles mit diesen, als makroskopisch bezeichneten Größen ist Inhalt der *Thermodynamik*.

### 8.2 Wärmeenergie/Wärmemenge

Um die Temperatur eines Stoffes zu erhöhen bzw. zu erniedrigen, muss ihm Wärmeenergie zugeführt bzw. entzogen werden. Häufig geschieht das dadurch, dass der Stoff mit einem anderen von höherer (bzw. tieferer) Temperatur in Berührung gebracht oder mit diesem

vermischt wird. Mischt man beispielsweise 1 kg Wasser von 300 K mit 1 kg Wasser von 340 K, so erhält man nach kurzer Durchmischungszeit 2 kg Wasser mit der *einheitlichen* Temperatur von 320 K. Diesem Versuch liegt ein Gesetz zugrunde, welches besagt, dass

Wärmeenergie beim thermischen Kontakt vom Körper der höheren Temperatur  $T_2$ , zu dem der tieferen Temperatur  $T_1$  übertragen wird, und dass der Wärmeübergang erst dann beendet ist, wenn sich in beiden Körpern gleiche Temperatur eingestellt hat. Bei nicht zu großen Temperaturänderungen erweist sich die übertragene *Wärmemenge*  $Q$  als proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand. Es ist üblich, die von einem System aufgenommene Wärmemenge positiv, die abgegebene Wärmemenge aber negativ zu zählen.

Als Einheit für die Wärmemenge  $Q$  verwendet man die Energieeinheit des SI, das Joule (J).

Vor der Einführung des SI wurde für die Energieform Wärme eine spezielle Einheit, die Kalorie (cal), verwendet. Die zur Erwärmung von 1 g Wasser um 1 K (genau: von 287,65 K auf 288,65 K) erforderliche Wärmemenge wurde 1 cal genannt und das Tausendfache davon als Kilokalorie (kcal) bezeichnet. Der Umrechnungsfaktor zwischen beiden Einheiten der Energie, das sog. *Wärmeäquivalent*, ist gegeben durch: 1 cal = 4,187 Joule.

### 8.3 Wärmekapazität

Die Wärmemenge  $Q$ , die nötig ist, um eine beliebige Substanz der Masse  $m$  um 1 K zu erwärmen, nennen wir deren *Wärmekapazität*  $C$ .

Die Wärmekapazität hängt ab von der Art der Substanz (chemische Zusammensetzung, Aggregatzustand etc.) und ist proportional zu ihrer Masse; ihre SI-Einheit ist  $\text{J K}^{-1}$ :

$$C = cm. \quad (8-1)$$

Den Quotienten  $c = C/m$  bezeichnen wir als *spezifische Wärme* (*spezifische Wärmekapazität*). Er gibt diejenige Wärmemenge an, die pro Masseneinheit einer Substanz zu deren Erwärmung um 1 K erforderlich ist. Als Einheit ergibt sich somit für  $c$ :

$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$  (bzw.  $\text{cal kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ).

Statt auf 1 kg als Masseneinheit können wir auch auf die Stoffmenge 1 mol beziehen und erhalten dann die *Molwärme* (*molare Wärmekapazität*)  $C_{\text{mol}}$  mit der Einheit  $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$  (oder  $\text{cal mol}^{-1} \text{K}^{-1}$ ).

Insgesamt gilt also für die Wärmemenge  $Q$ , die nötig ist, um die Masse  $m$  eines Stoffes (mit der spezifischen Wärme  $c$ ) von  $T_1$  auf  $T_2$  zu erwärmen:

$$Q = mc(T_2 - T_1) = C(T_2 - T_1). \quad (8-2)$$

Die spezifische Wärme der Stoffe hat bei verschiedenen Temperaturen unterschiedliche Werte,  $c$  ist also von  $T$  abhängig (Tab. 8.1). Bei nicht zu großen Temperaturänderungen (kleiner etwa 100 K) können wir diese Abhängigkeit bei vielen Stoffen vernachlässigen und mit konstantem  $c$  rechnen.

Sind mit der Erwärmung eines Körpers 1 durch Kontakt mit einem anderen Körper 2, der wärmer ist, weder Arbeitsaufwand noch chemische Reaktionen verbunden, so gilt der Energiesatz (Kap. 4.1) in der speziellen Form: Die Summe der Wärmeenergien beider Körper ist während des Wärmeaustausches konstant; die Wärmemenge, die Körper 1 aufnimmt, ist

**Tab. 8.1** Spezifische Wärmekapazitäten  $c$  (in  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) von Flüssigkeiten und Festkörpern bei verschiedenen Temperaturen

Äther	20 °C	$2,250 \cdot 10^3$	
	0 °C	$4,218 \cdot 10^3$	
	Wasser	20 °C	$4,182 \cdot 10^3$
		40 °C	$4,179 \cdot 10^3$
		60 °C	$4,185 \cdot 10^3$
Eis	80 °C	$4,197 \cdot 10^3$	
	-10 °C	$2,303 \cdot 10^3$	
	-30 °C	$1,884 \cdot 10^3$	
Glas	0 °C	$0,494 \cdot 10^3$	
	20 °C	$0,837 \cdot 10^3$	
	Fe	20 °C	$0,452 \cdot 10^3$
Cu	20 °C	$0,377 \cdot 10^3$	
Ag	20 °C	$0,235 \cdot 10^3$	
Pb	20 °C	$0,130 \cdot 10^3$	

gleich der von Körper 2 abgegebenen. Genau genommen gilt dies nur, wenn der Wärmeaustausch in einem abgeschlossenen System abläuft, also keine Wärmeenergie mit der Umgebung ausgetauscht wird. Um Wärmeaustausch bei Wärmeexperimenten möglichst klein zu halten, verwendet man Gefäße mit guter Wärmeisolierung (*Kalorimeter*).

In der Bilanz der beteiligten Wärmeenergien muss die Erwärmung des Gefäßes mitberücksichtigt werden, wozu man dessen Wärmekapazität  $C_{\text{Kalorimeter}}$  kennen muss:

$$C_2(T_2 - T_4) = C_1(T_4 - T_1) + C_{\text{Kalorimeter}}(T_4 - T_3). \quad (8-3)$$

$T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  = Temperaturen von Körper 1, Körper 2 und Kalorimeter vor dem Wärmeaustausch;  $T_4$  = einheitliche Endtemperatur, oft auch Mischungstemperatur genannt.

## 8.4 Temperaturskalen

Als Basisgröße der Wärmelehre wird die Temperatur  $T$  eingeführt. Ihre SI-Einheit ist *Kelvin* (K); sie ist durch den Tripelpunkt des Wassers (Kap. 1.1.2 und 13.3.7.6) festgelegt.

Der Tripelpunkt des Wassers ist sehr genau einstellbar und beträgt 273,16 K (siehe Abb. 13.6).

Nur geringfügig (0,01 K) weicht davon die Definition der *absoluten Temperaturskala* ab. Sie ist festgelegt durch den Eispunkt (273,15 K; das ist die Gleichgewichtstemperatur von Eis und Wasser bei einem Druck von  $p = 101325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$ ) und den Dampfunkt (373,15 K; das ist die Gleichgewichtstemperatur von Wasser und gesättigtem Dampf bei  $p = 101325 \text{ Pa}$ ). Diese Temperaturspanne wird mit Hilfe einer (von den thermischen Eigenschaften der zur Temperaturmessung verwendeten Stoffe) unabhängigen Messmethode festgelegt, die sich auf den Nutzeffekt der sogenannten *idealen Wärmekraftmaschine*

Mit Gl. (8-1) und (8-3) lässt sich aus einem Wärmeaustauschexperiment die spezifische Wärme  $c_1$  eines Körpers 1 bestimmen, wenn  $C_2$  und  $C_{\text{Kalorimeter}}$  bekannt sind. Häufig wird als Substanz 2 Wasser verwendet und der Versuch in einem Mischungskalorimeter durchgeführt.

Unter den festen und flüssigen Körpern besitzt das Wasser die höchste spezifische Wärme (Tab. 8.1). Dies ist für das Klima bedeutungsvoll, denn die ungeheuren Wassermengen der Meere mit ihrer enormen Wärmekapazität verhindern große Temperaturunterschiede zwischen Tag und Nacht und zwischen den verschiedenen Jahreszeiten. So betragen die jahreszeitlichen Temperaturschwankungen im ozeanischen Klima der Färöer-Inseln etwa 8 K, im kontinentalen Klima von Sibirien am gleichen Breitengrad aber 62 K.

Die hohe spezifische Wärme des Wassers ist auch wichtig für die Temperaturregulation des menschlichen Organismus, der zu etwa 70 Prozent aus Wasser besteht. Er besitzt demnach eine große Wärmekapazität, und zur Veränderung seiner Temperatur sind entsprechend große Wärmemengen erforderlich.

gründet. Das Verhältnis der durch eine solche Maschine aufgenommenen bzw. abgegebenen Wärmemengen  $Q_1$  und  $Q_2$  wird dabei dem Verhältnis der beiden zugehörigen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  der Maschine gleichgesetzt:

$$\frac{T_1}{T_2} = -\frac{Q_1}{Q_2}. \quad (8-4)$$

(Das negative Vorzeichen in Gl. (8-4) zeigt an, dass die Wärmemenge  $Q_2$  abgegeben wird.) Genaueres dazu in Kap. 12.3.

Die so entstandene Skala heißt *thermodynamische Temperaturskala*. Sie verknüpft die Temperatur eines Stoffes mit seinem (inneren) Energiegehalt.

Neben der SI-Einheit Kelvin wird noch häufig die Temperatureinheit *Grad Celsius* ( $^{\circ}\text{C}$ ) verwendet. Die *Celsius-Skala* ist so festgelegt, dass der Eispunkt der Temperatur  $0^{\circ}\text{C}$  und der Siedepunkt des Wassers der Temperatur  $100^{\circ}\text{C}$  entspricht; die Intervallteilung stimmt mit der Kelvin-Skala überein.

Also ist eine Temperaturdifferenz von  $1\text{ }^\circ\text{C}$  gleich der von  $1\text{ K}$ .

Die Temperatur  $t$  der Celsius-Skala ergibt sich aus der Kelvin-Skala durch Verschiebung um  $273,15^\circ$ :

$$t = T - 273,15\text{ K}. \quad (8-5)$$

In angelsächsischen Ländern findet die *Fahrenheit-Skala* Anwendung. Für die Umrechnung der absoluten Temperatur  $T$  und der Celsius-Temperatur  $t$  in Fahrenheit-Temperatur  $t_F$  gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} t_F &= 1,8 (T - 273,15\text{ K}) + 32\text{ K}, \\ t_F &= 1,8t + 32\text{ }^\circ\text{C}. \end{aligned} \quad (8-6)$$

Also entspricht der in Celsius-Graden gemessenen Körpertemperatur von  $37\text{ }^\circ\text{C}$  eine Fahrenheit-Temperatur von ungefähr  $100\text{ }^\circ\text{F}$ .

## 8.5 Temperatur-Messgeräte

Viele physikalische Stoffgrößen zeigen ausgeprägte Abhängigkeiten von der Temperatur. So sind zum Beispiel die Länge eines Stabes oder das Volumen einer Flüssigkeit, der Druck eines Gases und der elektrische Widerstand eines Metalldrahtes von der Temperatur abhängig. Auf diesen Abhängigkeiten beruht die Wirkungsweise von Temperatur-Messgeräten (*Thermometern*).

### 8.5.1 Ausdehnungsthermometer

Innerhalb nicht allzu großer Temperaturbereiche wachsen Volumen bzw. Druck von Gasen (Kap. 9.2) und die Abmessungen fester und flüssiger Körper (Kap. 13.1) linear mit der Temperatur an.

Beim *Gas thermometer* wird die Temperatur indirekt über den Gasdruck  $p$  bestimmt. Der durch Temperaturerhöhung bei konstant gehaltenem Volumen bewirkte Druckanstieg berechnet sich nach dem 2. *Gay-Lussac'schen Gesetz* (vgl. Kap. 9.2) aus der Temperatur  $t$  (in  $^\circ\text{C}$ ) bzw.  $T$  (in K) und dem bei  $0\text{ }^\circ\text{C}$  herrschenden Gasdruck  $p_0$ :

$$p = p_0 \left( 1 + \frac{t}{273,15\text{ K}} \right) = p_0 \frac{T}{273,15\text{ K}}. \quad (8-7)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Dimensionen von  $t$  und  $T$  gleich sind, und sich die Einheiten  $^\circ\text{C}$  und K deshalb gegenseitig herauskürzen.

Mit dem zum Beispiel durch ein Flüssigkeitsmanometer gemessenen Gasdruck (Abb.

8.1) ist nach Gl. (8-7) die Temperatur  $T$  bestimmt.

Die sich dabei für  $T$  ergebende Temperaturskala ist praktisch mit der thermodynamischen Temperaturskala identisch.

Von den *Flüssigkeitsthermometern* waren die mit Quecksilber (Hg) gefüllten lange Zeit die wichtigsten. An ein Hg-gefülltes Gefäß ist eine Kapillare angeschmolzen, in die hinein das Hg sich bei Erwärmung ausdehnt (Abb. 8.2a). Die Steighöhe ist ein Maß für die Temperatur. Hg-Thermometer werden von  $-38\text{ }^\circ\text{C}$  bis etwa  $+300\text{ }^\circ\text{C}$  verwendet, und es lassen sich Ablesegenauigkeiten von  $0,01\text{ }^\circ\text{C}$  erreichen. Heute verwendet man Flüssigkeitsthermometer mit organischen Flüssigkeiten. Im Gegensatz zu Hg sind diese Flüssigkeiten

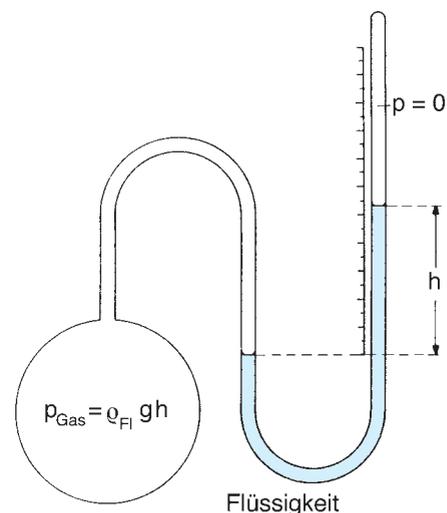
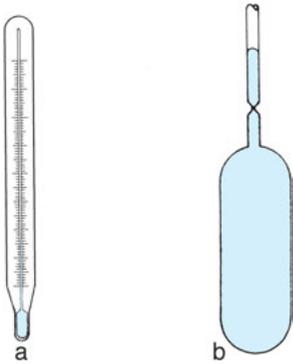


Abb. 8.1 Gasthermometer.



**Abb. 8.2** Quicksilberthermometer. (a) Gesamtansicht, (b) Verengung der Kapillare beim Fieberthermometer.

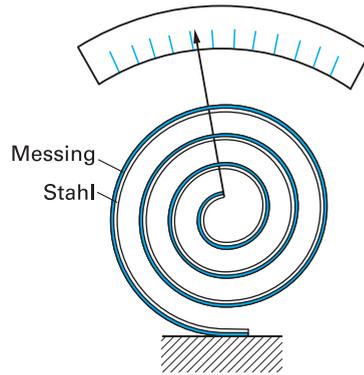
nicht giftig. Einige haben zudem den Vorteil, auch für Temperaturbereiche unter  $-38\text{ }^{\circ}\text{C}$  verwendet werden zu können. Die Messgenauigkeit dieser Thermometer ist zumindest um eine Zehnerpotenz geringer als die der Hg-Thermometer.

Stimmt ein Hg-Thermometer bei  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  und  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  mit der thermodynamischen Temperaturskala überein, so sind Temperaturanzeigen bei  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$  um etwa  $\frac{1}{10}\text{ }^{\circ}\text{C}$  zu hoch, weil sich der Ausdehnungskoeffizient (vgl. Kap. 13.1) des Hg selbst geringfügig mit der Temperatur ändert.

Das *Fieberthermometer* ist ein spezielles Flüssigkeitsthermometer zur Messung der Körpertemperatur. Mit ihm werden Temperaturen in der Nähe der Körpertemperatur (Messbereich  $30\text{--}42\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) bis auf  $\frac{1}{10}\text{ }^{\circ}\text{C}$  genau gemessen. Zur besseren Ablesung wird bei diesem Thermometer die maximale Anzeige fixiert, so dass die Ablesung erst nach der Messung zu erfolgen braucht.

Dies erreicht man (Abb. 8.2b) durch eine Verengung am unteren Ende der Kapillare. Bei Erwärmung wird die Flüssigkeit infolge ihrer Volumenausdehnung durch den Engpass in die Kapillare hineingepresst. Beim Abkühlen reißt der Flüssigkeitsfaden an dem Engpass ab; die Flüssigkeitssäule hält so die maximale Temperaturanzeige aufrecht. Vor der nächsten Messung muss erst die Flüssigkeit aus der Kapillare herausgeschleudert werden (Herunterschlagen der Anzeige des Thermometers).

Von den auf der Ausdehnung fester Metalle beruhenden Ausdehnungsthermometern ist



**Abb. 8.3** Bi-Metall-Thermometer.

das *Bi-Metall-Thermometer* das gebräuchlichste. Der temperaturempfindliche Teil, ein meist spiralförmig gewickelter Blechstreifen, besteht aus zwei Metallen mit unterschiedlichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten (siehe Kap. 13.1), die zusammengelötet oder aufeinander genietet sind (Abb. 8.3). Wird das eine Ende des Streifens an einem festen Zapfen gelagert und das andere Ende an einer drehbaren, mit einem Zeiger versehenen Achse befestigt, dann wird diese und damit der Zeiger bei einer Temperaturänderung gedreht. Die Messgenauigkeit beträgt etwa 1% des Skalenumfanges. Bi-Metall-Streifen werden auch benutzt, um bei Erreichen einer bestimmten Temperatur einen elektrischen Kontakt zu öffnen oder zu schließen und so eine automatische Temperaturregelung (bei Etagenheizungen, bei elektrischen Heizkissen, bei Bügeleisen, Kühlschränken usw.) herzustellen.

## 8.5.2 Thermoelement

Berühren zwei verschiedene Metalle M1 und M2 einander, so entsteht im unmittelbaren Kontaktbereich durch Übertritt von Elektronen von einem zum anderen Metall eine *Kontaktspannung*  $U_{12}$  (siehe Kap. 15.1.1).  $U_{12}$  hängt von der Temperatur ab. Ein Thermoelement besteht aus zwei verschiedenen Metalldrähten, die so zusammengelötet sind,

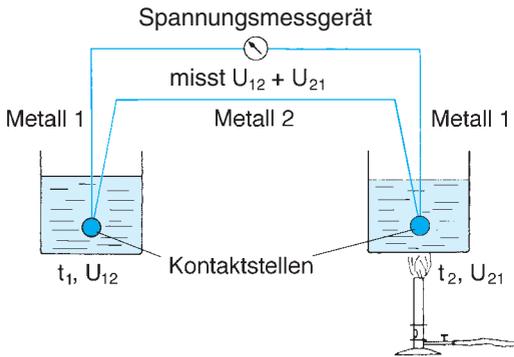


Abb. 8.4 Thermoelement.

dass, wie in Abb. 8.4 gezeigt, zwei Kontaktstellen entstehen. Sind beide Kontaktstellen auf gleicher Temperatur, dann sind die beiden Kontaktspannungen  $U_{12}$  und  $U_{21}$  von gleichem Betrag und einander entgegengesetzt, so dass sie sich gegenseitig aufheben. Im Stromkreis existiert keine resultierende Spannungsquelle, und demnach fließt durch das Messgerät kein Strom. Werden die beiden Lötstellen jedoch auf unterschiedliche Temperaturen  $t_1$  bzw.  $t_2$  gebracht, dann ist die Summe  $U_{12} + U_{21}$  von 0 verschieden, und die als *Thermospannung* bezeichnete Summenspannung erzeugt in dem Kreis einen Strom, der durch das Messgerät angezeigt wird. Zur Temperaturmessung hält man eine der beiden Lötstellen auf konstanter Temperatur (z. B. auf  $t_1 = 0\text{ °C}$  durch Eintauchen in schmelzendes Eis). Die andere Lötstelle wird an die Stelle gebracht, deren Temperatur  $t_2$  zu messen ist. Die Empfindlichkeit gebräuchlicher Thermoelemente liegt bei etwa  $10^{-5}$  Volt/Grad, die von Eisen-Konstantan z. B. bei  $5 \cdot 10^{-5}$  Volt/Grad. Die Vorzüge solcher Thermometer sind ihre große Empfindlichkeit, kleine Wärmekapazität und damit schnelle Anzeige, und ihr großer Anwendungsbereich ( $-270\text{ °C}$  bis  $2000\text{ °C}$ ). Thermoelemente müssen sorgfältig geeicht werden, da ihre Empfindlichkeit stark temperaturabhängig ist.

### 8.5.3 Widerstandsthermometer

Widerstandsthermometer beruhen auf der Änderung des elektrischen Widerstandes  $R$  (genauer, des spezifischen Widerstandes  $\rho$  (Kap. 14.5.2)) eines elektrischen Leiters mit der Temperatur. Bei geeigneter Eichung ist der Zahlenwert von  $R$  daher ein Maß für die Temperatur. Zur Erhöhung der Messempfindlichkeit von  $R$  und damit von  $t$  bedient man sich zumeist der Wheatstone'schen Brücke (siehe Kap. 16.1.6). Häufig verwendet wird das Platin-Widerstandsthermometer. Es ermöglicht so genaue Messungen, dass mit ihm die Temperaturskala zwischen  $-183,97\text{ °C}$  (Sauerstoff-Siedepunkt) und  $630,5\text{ °C}$  (Antimon-Erstarrungspunkt) festgelegt wird. Seine Reproduzierbarkeit und Genauigkeit beträgt bei sorgfältiger Messung bis zu  $10^{-4}$  Grad. Bei tiefen Temperaturen (bis 1 Kelvin) werden neben Thermoelementen Kohle-Widerstandsthermometer verwendet.

### 8.5.4 Digitalthermometer

Spezifischer Widerstand  $\rho$  eines elektrischen Leiters bzw. Leitfähigkeit  $\sigma$  eines Halbleiters (Kap. 15.2.4) sind temperatursensitive Messgrößen. In *elektronischen Thermometern*, z. B. zur Messung der Körpertemperatur, wird eine Spannung gemessen. Die Thermometer sind entsprechend  $\rho$  bzw.  $\sigma$  am Temperatursensor proportional zur Temperatur einstellt. Der als Temperatursensor wirkende elektrische Leiter bzw. Halbleiter ist dabei Teil eines stromdurchflossenen Leiterkreises. Beim Digitalthermometer wird die kontinuierliche Änderung der Temperatur nicht analog sondern digital angezeigt, d. h., die elektrische Spannung, obwohl auch sie sich kontinuierlich ändert, wird nur schrittweise abgemessen, so dass sich die Gesamthöhe des Signals durch Abzählen der in ihm enthaltenen Einzelschritte ergibt (Kap. 16.1.2). Das Zählergebnis, umgerechnet auf die Temperatur, wird dann mit Leuchtziffern angezeigt.

## 9. Ideale Gase

### 9.1 Zustandsgrößen, Zustandsgleichung

Der ideale Gaszustand (das *ideale Gas*) wird durch zwei Eigenschaften charakterisiert:

1. Der Durchmesser der Atome oder Moleküle ist vernachlässigbar klein gegenüber dem mittleren Abstand zum nächsten Nachbarn.
2. Die Teilchen üben – außer beim Zusammenstoß – keinerlei Wechselwirkung aufeinander aus.

Alle realen Gase nähern sich dem idealen Gaszustand bei hohen Temperaturen und niedrigen Drucken; bei Edelgasen genügen dazu bereits Zimmertemperatur und Atmosphärendruck.

Der Zustand einer vorgegebenen Menge eines idealen Gases wird durch *Zustandsgrößen* oder *Zustandsvariablen* beschrieben; dies sind Temperatur  $T$ , Druck  $p$  und Volumen  $V$ . Bei einer gegebenen Gasmenge sind diese thermodynamischen Zustandsgrößen nicht unabhängig voneinander veränderbar, sondern sie sind durch die *Zustandsgleichung idealer Gase* miteinander verknüpft:

$$pV = nRT. \quad (9-1)$$

### 9.2 Zustandsänderungen

Zu einfachen Beziehungen zwischen zwei Zustandsgrößen gelangt man, wenn bei der Zustandsänderung eines idealen Gases die dritte Zustandsgröße konstant gehalten wird. Die grafischen Darstellungen dieser Beziehungen nennt man *Zustandsdiagramme*.

Bei *isothermen Zustandsänderungen* bleibt die Temperatur konstant ( $T = \text{konst.}$ ) und wir erhalten aus Gl. (9-1) das nach *Boyle-Mariotte* benannte Gesetz:

$$pV = \text{konst.} \quad (9-4)$$

Hierbei ist  $n$  die in mol (Kap. 1.1.2) gemessene Stoffmenge. Die Konstante  $R$ , die *allgemeine Gaskonstante*, hat den Zahlenwert:

$$R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}. \quad (9-2)$$

Der thermodynamische Zustand eines Gases ist demnach eindeutig bestimmt, wenn außer  $n$  und  $R$  zwei der Zustandsvariablen bekannt sind. Damit man zur Charakterisierung einer Gasmenge nicht alle drei Größen ( $T$ ,  $p$  und  $V$ ) angeben muss, hat man die sogenannten *Normalwerte* eingeführt. Hierunter versteht man eine Temperatur von  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  ( $0^\circ\text{C}$ ) und einen Druck von  $p_0 = 101325 \text{ Pa}$  (760 Torr; 1 atm). Setzt man Normalwerte voraus, so genügt zur Charakterisierung einer Gasmenge die Angabe des Volumens. Bei Experimenten geht man umgekehrt so vor, dass man das bei einem Druck  $p_1$  und einer Temperatur  $T_1$  gemessene Volumen  $V_1$  in ein Volumen  $V_0$  bei dem Druck  $p_0$  und der Temperatur  $T_0$  umrechnet:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}; \quad V_0 = \frac{p_1 V_1 T_0}{T_1 p_0}. \quad (9-3)$$

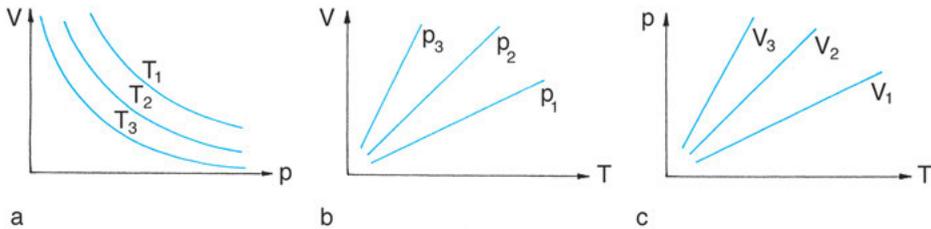
$$T_0 = 273,15 \text{ K}, \quad p_0 = 101325 \text{ Pa}.$$

Unter Normalbedingungen beträgt das *molare Volumen*, d. h. das Volumen, das ein Mol eines idealen Gases einnimmt,  $22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$ .

Stellt man den Zusammenhang zwischen  $p$  und  $V$  bei konstantem  $T$  grafisch dar, so erhält man die in Abb. 9.1a gezeichneten Hyperbeln, die man als *Isothermen* der betreffenden Gasmenge bezeichnet.

Bei *isobaren Zustandsänderungen* bleibt der Druck konstant. Folglich ergibt sich aus Gl. (9-3)  $V = V_0 T/T_0$ , oder mit Gl. (8-5):

$$V = V_0 \left( 1 + \frac{t}{273,15 \text{ K}} \right). \quad (9-5)$$



**Abb. 9.1** (a) Isothermen des idealen Gases,  $T_1 > T_2 > T_3$ . (b) Isobaren des idealen Gases,  $p_1 > p_2 > p_3$ . (c) Isochoren des idealen Gases,  $V_1 > V_2 > V_3$  (alle Kurven schematisch).

Diesen Zusammenhang bezeichnet man auch als *1. Gay-Lussac'sches Gesetz* (vgl. Abb. 9.1b).

Der Faktor  $\lambda = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$  hat in Gl. (9-5) die Bedeutung des *thermischen Volumen-Ausdehnungskoeffizienten* (vgl. Gl. (13-2) in Kap. 13.1). Dieser ist für alle Gase im idealen Gaszustand gleich.

Zustandsänderungen mit konstant bleiben-

dem Volumen ( $V = \text{konst.}$ ) werden als *isochore Zustandsänderungen* (vgl. Abb. 9.1c) bezeichnet. Für sie gilt eine der Gl. (9-5) analoge Beziehung, nämlich das *2. Gay-Lussac'sche Gesetz*:

$$p = p_0 \left( 1 + \frac{t}{273,15 \text{ K}} \right). \quad (9-6)$$

### 9.3 Adiabatische Zustandsgleichungen

Ändert sich der thermodynamische Zustand eines Gases *adiabatisch*, d. h. ohne dass Wärmeenergie durch die Wände des Gefäßes, in dem sich das Gas befindet, an die Umgebung abgegeben oder von außen aufgenommen wird, so erfolgen Änderungen der drei Zustandsgrößen  $p$ ,  $V$  und  $T$  stets so, dass gilt:

$$pV^\kappa = \text{konst.} \quad (9-7)$$

Diesen Zusammenhang bezeichnen wir als *adiabatische Zustandsgleichung*. Sie lässt sich

unter Verwendung anderer Zustandsgrößen auch folgendermaßen ausdrücken:

$$TV^{(\kappa-1)} = \text{konst.} \quad (9-8)$$

oder

$$Tp^{(\frac{1}{\kappa}-1)} = \text{konst.} \quad (9-9)$$

Der *Adiabaten-Exponent*  $\kappa$  ist eine für die Gasart charakteristische Konstante. (Bei  $\text{O}_2$ :  $\kappa = 1,3$ ; bei He:  $\kappa = 1,5$ .)

### 9.4 Zustandsgleichung von Gasgemischen

Befinden sich mehrere verschiedene ideale Gase in demselben Gefäß, dann breitet sich jedes über das ganze Volumen aus, als ob die anderen nicht vorhanden wären. Der Gesamtdruck des Gasgemisches ist dann die Summe der Teildrücke  $p_i$  der einzelnen Gase (*Dalton'sches Gesetz*):

$$p = \sum_i p_i. \quad (9-10)$$

Für jede Komponente  $i$  gilt die Zustandsgleichung

$$p_i V = n_i RT,$$

wobei  $n_i$  die in mol gemessene Stoffmenge des  $i$ -ten Gases bedeutet. Als *Zustandsgleichung von Gasgemischen* erhalten wir demnach:

$$pV = \sum_i p_i V = \sum_i n_i RT. \quad (9-11)$$

Auch unsere Umgebungsluft und damit die Atemgase stellen ein Gasgemisch dar. Die eingeatmete Luft hat je nach Luftfeuchtigkeit einen unterschiedlichen Wassergehalt, während die trockenen Bestandteile in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen: 20,93% O<sub>2</sub>, 0,03% CO<sub>2</sub> und 79,04% N<sub>2</sub> und Edelgase. Die ausgeatmete Luft ist wegen des vorausgegangenen Kontaktes mit den Lungenalveolen mit Feuchtigkeit gesättigt. Bei einer Temperatur von 37 °C entspricht das einem Wasserdampfdruck von 6276 Pa (=47,06 Torr). Die Zusammensetzung der trockenen Bestandteile der ausgeatmeten Luft ist abhängig von der Intensität der Atmung. Im Mittel können wir mit 16% O<sub>2</sub>, 4% CO<sub>2</sub>, 80% N<sub>2</sub> und, in geringen Mengen, Edelgasen rechnen.

Um Gasvolumina miteinander vergleichen zu können, müssen sie auf einheitliche Bedingungen umgerechnet werden. In der Physiologie am gebräuchlichsten sind die Standardbedingungen STPD (Standard Temperature

and Pressure, Dry: 0 °C, 101,32 kPa = 760 mm Hg, trocken) und BTPS (Body Temperature and Pressure, Saturated: 37 °C, 101,32 kPa = 760 mm Hg, wasserdampfgesättigt). Das STPD ist der Normzustand des trockenen Gases bei 0 °C und das BTPS der des wasserdampfgesättigten Gases bei Körpertemperatur. Wird in einem Experiment z. B. bei einer Temperatur von 20 °C und 740 mm Hg ein trockenes Gasvolumen von 2,5 l bestimmt, so lässt sich dieses folgendermaßen (siehe Gl. (9-3)) auf die Standardbedingung STPD umrechnen:

$$V_{\text{STPD}} = \frac{2,5 \cdot 740 \cdot 273,15}{760 \cdot 293,15} \text{ l} = 2,27 \text{ l}.$$

Entsprechend würde sich für  $V_{\text{BTPS}}$  ergeben:

$$V_{\text{BTPS}} = \frac{2,5 \cdot 740 \cdot 310,15}{(760 - 47,06) \cdot 293,15} \text{ l} = 2,75 \text{ l}.$$

47,06 mm Hg ist der Wasserdampfdruck bei 37 °C.

## 10. Kinetische Gastheorie

Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Zustandsgleichungen der idealen Gase geben das Verhalten einer riesigen Zahl von Atomen oder Molekülen wieder. Wir können daraus zunächst nichts entnehmen über das Verhalten einzelner Moleküle. Es war für die physikalische Erkenntnis ein bedeutender Schritt, dass man mit der *kinetischen Gastheorie* den makroskopischen Größen  $p$  und  $T$  die Mittelwerte mechanischer Größen der Moleküle zuordnen konnte. Damit wurde insbesondere der Begriff der Tem-

peratur erst richtig deutbar. In dieser Theorie geht man von folgenden Voraussetzungen aus:

1. Das Gas sei im idealen Gaszustand.
2. Die Moleküle befinden sich in ungeordneter translatorischer Bewegung (Wärmebewegung).
3. Die Zusammenstöße von Molekülen untereinander und mit der Behälterwand sind elastisch und befolgen die Erhaltungssätze für Energie und Impuls des mechanischen elastischen Stoßes (siehe Kap. 4.3).

### 10.1 Gasdruck

Nach der kinetischen Gastheorie wird der Druck eines Gases auf die Behälterwand durch die elastischen Stöße der Moleküle auf die Wand verursacht. Die ungeordnete Bewe-

gung der Moleküle stellen wir uns vereinfacht so vor, dass je ein Drittel der Moleküle sich in einer der drei Raumrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  bewegt, davon zum Beispiel ein Sechs-

Auch unsere Umgebungsluft und damit die Atemgase stellen ein Gasgemisch dar. Die eingeatmete Luft hat je nach Luftfeuchtigkeit einen unterschiedlichen Wassergehalt, während die trockenen Bestandteile in einem konstanten Verhältnis zueinander stehen: 20,93% O<sub>2</sub>, 0,03% CO<sub>2</sub> und 79,04% N<sub>2</sub> und Edelgase. Die ausgeatmete Luft ist wegen des vorausgegangenen Kontaktes mit den Lungenalveolen mit Feuchtigkeit gesättigt. Bei einer Temperatur von 37 °C entspricht das einem Wasserdampfdruck von 6276 Pa (=47,06 Torr). Die Zusammensetzung der trockenen Bestandteile der ausgeatmeten Luft ist abhängig von der Intensität der Atmung. Im Mittel können wir mit 16% O<sub>2</sub>, 4% CO<sub>2</sub>, 80% N<sub>2</sub> und, in geringen Mengen, Edelgasen rechnen.

Um Gasvolumina miteinander vergleichen zu können, müssen sie auf einheitliche Bedingungen umgerechnet werden. In der Physiologie am gebräuchlichsten sind die Standardbedingungen STPD (Standard Temperature

and Pressure, Dry: 0 °C, 101,32 kPa = 760 mm Hg, trocken) und BTPS (Body Temperature and Pressure, Saturated: 37 °C, 101,32 kPa = 760 mm Hg, wasserdampfgesättigt). Das STPD ist der Normzustand des trockenen Gases bei 0 °C und das BTPS der des wasserdampfgesättigten Gases bei Körpertemperatur. Wird in einem Experiment z. B. bei einer Temperatur von 20 °C und 740 mm Hg ein trockenes Gasvolumen von 2,5 l bestimmt, so lässt sich dieses folgendermaßen (siehe Gl. (9-3)) auf die Standardbedingung STPD umrechnen:

$$V_{\text{STPD}} = \frac{2,5 \cdot 740 \cdot 273,15}{760 \cdot 293,15} \text{ l} = 2,27 \text{ l}.$$

Entsprechend würde sich für  $V_{\text{BTPS}}$  ergeben:

$$V_{\text{BTPS}} = \frac{2,5 \cdot 740 \cdot 310,15}{(760 - 47,06) \cdot 293,15} \text{ l} = 2,75 \text{ l}.$$

47,06 mm Hg ist der Wasserdampfdruck bei 37 °C.

## 10. Kinetische Gastheorie

Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Zustandsgleichungen der idealen Gase geben das Verhalten einer riesigen Zahl von Atomen oder Molekülen wieder. Wir können daraus zunächst nichts entnehmen über das Verhalten einzelner Moleküle. Es war für die physikalische Erkenntnis ein bedeutender Schritt, dass man mit der *kinetischen Gastheorie* den makroskopischen Größen  $p$  und  $T$  die Mittelwerte mechanischer Größen der Moleküle zuordnen konnte. Damit wurde insbesondere der Begriff der Tem-

peratur erst richtig deutbar. In dieser Theorie geht man von folgenden Voraussetzungen aus:

1. Das Gas sei im idealen Gaszustand.
2. Die Moleküle befinden sich in ungeordneter translatorischer Bewegung (Wärmebewegung).
3. Die Zusammenstöße von Molekülen untereinander und mit der Behälterwand sind elastisch und befolgen die Erhaltungssätze für Energie und Impuls des mechanischen elastischen Stoßes (siehe Kap. 4.3).

### 10.1 Gasdruck

Nach der kinetischen Gastheorie wird der Druck eines Gases auf die Behälterwand durch die elastischen Stöße der Moleküle auf die Wand verursacht. Die ungeordnete Bewe-

gung der Moleküle stellen wir uns vereinfacht so vor, dass je ein Drittel der Moleküle sich in einer der drei Raumrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  bewegt, davon zum Beispiel ein Sechs-

tel in positiver und ein Sechstel in negativer  $x$ -Richtung. Auf eine Gefäßwand, die senkrecht zur  $x$ -Richtung steht, bewegt sich also ein Sechstel aller Moleküle zu. Weiter vereinfachend wollen wir vorerst annehmen, der Geschwindigkeitsbetrag  $v$  aller Moleküle sei gleich. Während einer Sekunde erreichen von den Molekülen mit dieser Flugrichtung diejenigen die Wand, die in einer Säule der Länge  $x = v$  (m/s) 1 (s) enthalten sind.

Das betrachtete Gasvolumen  $V$  enthalte  $N$  Moleküle, d. h. pro Volumeneinheit  $\bar{n} = N/V$  Moleküle. Also ist die Zahl der Stöße auf die Flächeneinheit der betrachteten Wand pro Sekunde:

$$z = \bar{n} \frac{v}{6}, \text{ mit der Dimension: } \frac{\text{Zahl der Stöße}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}.$$

Jeder Stoß erfolgt so, wie in Kap. 4.3 ausgeführt, dass das Molekül beim senkrechten Aufprall und der nachfolgenden Reflexion den Im-

puls  $p' = 2mv$  auf die starre Wand überträgt. Also wird durch alle Stöße pro Flächeneinheit und Zeiteinheit der Gesamtimpuls

$$z(2mv) = \frac{\bar{n}mv^2}{3} \quad (10-1)$$

übertragen. In Kap. 2.2.8 haben wir gesehen, dass die Kraft  $F$  gleich der zeitlichen Änderung des Impulses ist ( $F = dp'/dt$ ). Damit ist unsere Größe *Impuls pro Zeit und Flächeneinheit* gleichzusetzen mit der *Kraft pro Flächeneinheit*, d. h. dem Druck  $p$ :

$$p = \frac{\bar{n}mv^2}{3}. \quad (10-2)$$

Somit ist der Druck im Gas auf die ungeordnete Bewegung der Gasteilchen zurückgeführt. (Im SI-System müssen sowohl Impuls als auch Druck mit dem Buchstaben  $p$  bezeichnet werden. Zur Unterscheidung haben wir hier den Impuls mit  $p'$  bezeichnet.)

## 10.2 Kinetische Energie und Temperatur

Erweitern wir Gl. (10-2) mit dem Gasvolumen  $V$ , so erhalten wir:

$$pV = \frac{Nmv^2}{3}. \quad (10-3)$$

Mit Gl. (9-1) haben wir die Zustandsgleichung der idealen Gase kennengelernt. Vergleichen wir die beiden Gln. (9-1) und (10-3), so ergibt sich:

$$\frac{Nmv^2}{3} = nRT. \quad (10-4)$$

Gl. (10-4) besagt:

Die mittlere kinetische Energie  $mv^2/2$  der ungeordneten *thermischen Bewegung* der

Gasteilchen ist proportional zur absoluten Temperatur  $T$  des Gases:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3nRT}{2N} = \frac{3kT}{2}. \quad (10-5)$$

Dividieren wir die Zahl  $N$  der Moleküle durch die Stoffmenge, so erhalten wir  $N/n = N_A$ , wobei  $N_A$  die Zahl der Moleküle pro mol angibt. Sie hat den Wert  $6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  und heißt *Avogadro-(oder Loschmidt-)Konstante*. Die Konstante  $k$  in Gl. (10-5) ergibt sich damit zu  $k = nR/N = R/N_A$ . Sie wird als *Boltzmann-Konstante* bezeichnet und hat den Wert  $k = 1,3805 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ .

## 10.3 Freiheitsgrade und Gleichverteilungssatz

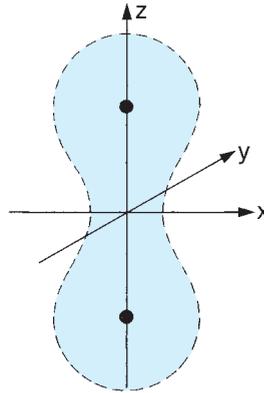
Die Translationsbewegung der Gasteilchen kann in allen Raumrichtungen erfolgen. In einem Koordinatensystem  $(x, y, z)$  lässt sich die

Geschwindigkeit  $\vec{v}$  als Vektor darstellen, dessen Länge (siehe Anhang)  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

beträgt. Also können wir die kinetische Energie als Summe der Anteile in den 3 Koordinatenrichtungen darstellen:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} v_x^2 + \frac{m}{2} v_y^2 + \frac{m}{2} v_z^2.$$

Durch Stöße ändert sich die Richtung jedes Teilchens fortlaufend, wobei keine der Koordinatenrichtungen vor den anderen bevorzugt ist. Über lange Zeit betrachtet sind daher die Mittelwerte für die 3 Anteile der kinetischen Energie gleich groß.



**Abb. 10.1** Hantel-Modell eines zwei-atomigen Moleküls mit zwei Rotationsfreiheitsgraden.

dadurch noch zwei *Freiheitsgrade der Rotation* hinzu.

Wird jeder der 3 Koordinatenrichtungen ein sog. *Freiheitsgrad der Translation* zugeordnet, dann kann die mittlere kinetische Energie auf diese drei Freiheitsgrade aufgeteilt werden. So entfällt also nach Gl. (10-5) auf jeden Freiheitsgrad als mittlere Energie der Translationsbewegung pro mol  $\frac{1}{2} RT$  bzw. pro Molekül  $\frac{1}{2} kT$ .

Dieser Befund lässt sich experimentell sehr gut für einatomige Gase wie He oder Ar bestätigen; bei zwei- und mehratomigen Gasen wie  $N_2$  und  $O_2$  jedoch zeigen sich wesentliche Abweichungen. Diese sind dadurch bedingt, dass bei mehratomigen Molekülen zugeführte Wärmeenergie die Moleküle außer zur Translation auch zur Rotation anregen kann.

Betrachten wir hierzu ein wie in Abb. 10.1 orientiertes zweiatomiges Molekül. Da die Atommassen im Wesentlichen auf die Kerne konzentriert sind, wird das Trägheitsmoment und damit die Rotationsenergie bei Drehung um die z-Achse (Gl. (2-13)) verschwindend klein. Rotationsenergie wird aber benötigt für Rotation um die x- und die y-Achse. Zu den 3 Freiheitsgraden der Translationsbewegung kommen bei zweiatomigen Molekülen

Im *Gleichverteilungssatz* wird nun das Ergebnis für die Translationsbewegung verallgemeinert. Er besagt, dass der Wärmeinhalt eines Stoffes pro Freiheitsgrad und mol den Wert  $\frac{1}{2} RT$  annimmt. Daher beträgt der Wärmeinhalt pro mol für ein aus zweiatomigen Molekülen bestehendes Gas  $\frac{5}{2} RT$ . Bei drei- und mehratomigen Molekülen (deren Atome nicht linear, sondern räumlich angeordnet sind) tritt ein dritter Freiheitsgrad der Rotation hinzu. Der entsprechende Wärmeinhalt pro mol beträgt somit  $3RT$ .

Bei hohen Temperaturen können zwei- und mehratomige Gas-Moleküle zusätzlich zu Schwingungen ihrer Atome gegeneinander angeregt werden, denen weitere Freiheitsgrade, die *Schwingungsfreiheitsgrade*, zugeordnet werden. In diesem Fall verteilt sich die Wärmeenergie auf kinetische und potentielle Energie, so dass die Verhältnisse wesentlich komplizierter werden.

## 10.4 Geschwindigkeitsverteilung

Den vorangehenden Kapiteln lag die vereinfachende Annahme zugrunde, dass sich alle Moleküle mit gleicher Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Ein Molekül bewegt sich mit gerad-

linig gleichförmiger Geschwindigkeit jedoch nur so lange, bis es auf ein zweites Teilchen prallt. Dabei ändern sich i. A. sowohl die Beträge als auch die Richtungen der Geschwin-

digkeiten beider Stoßpartner. Die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen bezeichnen wir als *freie Flugzeit*, die dabei zurückgelegte Strecke als *freie Weglänge*. Da beide von Stoß zu Stoß verschieden sein können, gibt man die Mittelwerte über eine sehr große Zahl von Stößen, also die *mittlere freie Flugzeit*  $\tau$  bzw. die *mittlere freie Weglänge*  $\lambda$  an. Beispielsweise beträgt  $\lambda$  in  $N_2$ -Gas bei  $10^5$  Pa ( $\cong 1$  atm)  $\lambda = 6,5 \mu\text{m}$ .

Diese Modellvorstellung konnte schon sehr früh experimentell nachgewiesen werden: Beobachten wir ein unter dem Mikroskop gerade noch sichtbares Teilchen, das in einer Flüssigkeit oder in einem Gas schwebt, so sehen wir, dass dieses Teilchen niemals in Ruhe ist, sondern eine dauernde Bewegung ausführt, die um so lebhafter ist, je kleiner das Teilchen und je höher die Temperatur (*Brown'sche Molekularbewegung*).

Alle Moleküle ändern also mit der Zeit ihre Geschwindigkeit. Sinnvoll ist es daher nur anzugeben, welcher Bruchteil der Moleküle zu einem bestimmten Zeitpunkt Geschwindigkeiten innerhalb eines Intervalles zwischen  $v$  und  $v + dv$  besitzen. Zwar sind es in jedem Zeitintervall andere Moleküle, der Bruchteil der Moleküle, die diesem Intervall zugeordnet sind, bleibt aber unverändert. Die Verteilung der Moleküle auf die verschiedenen Geschwindigkeitsintervalle der Breite  $dv$  zwischen  $v = 0$  und  $v = \infty$ , die *Geschwindigkeitsverteilung* also, wird durch die *Boltzmann'sche Verteilungsfunktion* beschrieben:

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (10-6)$$

Dabei bedeuten  $dN$  die Zahl der Moleküle im Geschwindigkeitsintervall zwischen  $v$  und

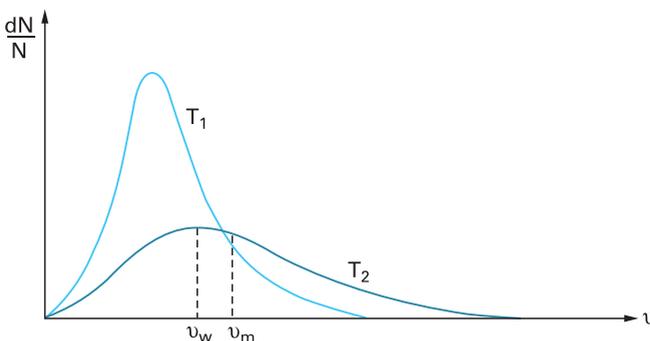
$v + dv$ ,  $N$  die Gesamtzahl aller Moleküle,  $k$  die Boltzmann-Konstante und  $m$  die Molekülmasse. Der Verlauf der Verteilungsfunktion ist in Abb. 10.2 für zwei verschiedene Temperaturen grafisch dargestellt. Die meisten Moleküle haben eine Geschwindigkeit nahe  $v_w$ . Dort hat die Kurve ein Maximum. Diese Geschwindigkeit  $v_w$  wird als die *wahrscheinlichste Geschwindigkeit* bezeichnet. Sowohl sehr kleine als auch sehr große Geschwindigkeiten ( $v \ll v_w$  und  $v \gg v_w$ ) kommen nur selten vor. Mit zunehmender Temperatur ( $T_2 > T_1$ ) steigt der Zahlenwert von  $v_w$  an, aber die Verteilung aller Geschwindigkeiten wird breiter.

Berücksichtigen wir in einer genaueren Berechnung für den Druck in Kap. 10.1 die Geschwindigkeitsverteilung, so tritt an die Stelle der einheitlichen Geschwindigkeit  $v$  nicht etwa die wahrscheinlichste Geschwindigkeit  $v_w$ , sondern eine *mittlere Geschwindigkeit*  $v_m$ , die wegen der unsymmetrischen Form der Verteilungsfunktion um 22% höher ist:  $v_m = 1,22v_w$ . (Diese Geschwindigkeit entsteht durch quadratische Mittelung:  $v_m^2 = \sum_i v_i^2 / N$ .)

Mit  $v_m$  in Gl. (10-5) erhalten wir für die *mittlere* (translatorische) kinetische Energie der Wärmebewegung eines Moleküls:

$$\frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{3}{2} kT. \quad (10-7)$$

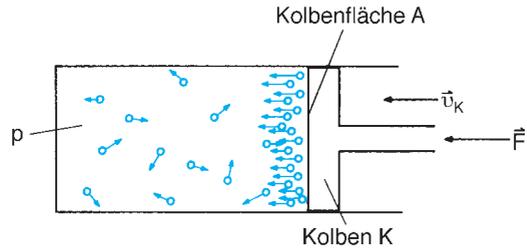
Ein Zahlenbeispiel: Bei Zimmertemperatur beträgt  $v_m$  von  $N_2$ -Molekülen etwa 500 m/s. Dieser Wert liegt über der Schallgeschwindigkeit in Luft von ca. 330 m/s.



**Abb. 10.2** Geschwindigkeitsverteilung zweier auf  $T_1$  bzw.  $T_2$  erwärmter Gase ( $T_2 > T_1$ ).

## 10.5 Volumenarbeit

Durch einen Kolben soll ein in einem Zylinder befindliches Gas komprimiert werden (Abb. 10.3). Dazu muss auf den Kolben die Kraft  $\vec{F}$  wirken, wodurch der Kolbendruck  $p_K = F/A$  ( $A =$  Querschnittsfläche des Kolbens) auf das Gas entsteht. Dem wirkt der Gasdruck  $p$  entgegen, und stets stellt sich dasjenige Volumen ein, bei dem gilt:  $p = p_K$ .



**Abb. 10.3** Temperaturerhöhung eines Gases durch Umsetzen geordneter kinetischer Energie in ungeordnete kinetische Energie. Die Pfeile der Gasteilchen zeigen ihre Bewegung an. Der Druck im Innern des Gases ist konstant.

Indem wir den Kolben um eine infinitesimal kleine Strecke  $ds$  verschieben, verrichten wir am Gas die Volumenarbeit

$$dW = F ds = pA ds = p dV. \quad (10-8)$$

Erfolgt dieser Vorgang adiabatisch, d. h. ohne dass von außen Wärme zugeführt oder abgezogen wird, dann wird die Temperatur des Gases im Kolben erhöht. Dies lässt sich folgendermaßen anschaulich verstehen: Der in Abb. 10.3 in den gasgefüllten Zylinder hineinbewegte Kolben K schiebt einzelne Gasmoleküle vor sich her und überträgt kinetische Energie auf sie. Diejenigen Moleküle, die sich unmittelbar vor der Kolbenfläche  $A$  befinden, erfahren also eine zunächst geordnete zusätzliche Bewegung. Durch Stoßprozesse mit anderen Molekülen und der Gefäßwand wird diese geordnete Bewegung rasch in ungeordnete, d. h. Wärmebewegung umge-

wandelt und auf die Umgebung übertragen. Die kinetische Energie der ungeordneten Molekularbewegung nimmt also zu, und dies bedeutet eine Temperaturerhöhung.

Würden wir dem Gas eine Wärmemenge  $dQ$  zuführen, dann könnte es Volumenarbeit verrichten. Dabei würde wegen der Wärmezufuhr der Gasdruck geringfügig über den Außendruck  $p_K$  ansteigen, und das Gas könnte — bei freier Verschiebbarkeit des Kolbens — sein Volumen vergrößern. Auf diese Weise würde die zugeführte Wärmemenge  $dQ$  in mechanische Arbeit  $p dV$  (gegen die äußere Kraft  $\vec{F}$ ) umgewandelt werden.

## 10.6 Wärmekapazität von Gasen

Der Energieinhalt pro mol und Freiheitsgrad eines idealen Gases ergab sich in Kap. 10.3 zu  $\frac{1}{2} RT$ .

Als molare Wärmekapazität  $C_{\text{mol}}$  folgt, unter Anknüpfung an Kap. 8.3, für ein Gas mit  $z$  Freiheitsgraden:

$$C_{\text{mol},V} = \frac{dQ}{dT} = \frac{z}{2} R. \quad (10-9)$$

Der Index  $V$  soll darauf hinweisen, dass die Temperaturänderung bei konstantem Volumen vorgenommen wird.

Nur unter dieser Bedingung wird die *gesamte* zugeführte Wärme zur Temperaturerhöhung des Gases verwendet. Im anderen Fall, wenn bei konstant gehaltenem Druck ( $p = \text{konst.}$ ) die Wärmemenge  $dQ$  dem Gas zugeführt wird, muss zusätzlich zur Temperaturerhöhung des Gases auch noch mechanische Arbeit (Volumenarbeit) der Gl. (10-8) gegen den äußeren Druck verrichtet werden. Demnach ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (10-8) die Differenz

$$C_{\text{mol,p}} dT - C_{\text{mol,v}} dT = p dV.$$

Die Volumenarbeit  $p dV$  berechnen wir für  $p = \text{konstant}$  aus der Zustandsgleichung (9-1)

$$p dV = nR dT,$$

und erhalten als Differenz der molaren Wärmekapazitäten ( $n = 1$ ):

$$C_{\text{mol,p}} - C_{\text{mol,v}} = R. \quad (10-10)$$

Dieser aus dem Modell des idealen Gaszustandes folgende Zusammenhang stimmt näherungsweise mit experimentellen Ergebnissen überein (Tab. 10.1).

Allgemein ergeben sich aus Gln. (10-9) und (10-10) für atomare und molekulare Gase folgende molare Wärmekapazitäten:

Einatomige Gase ( $z = 3$ ):

$$C_{\text{mol,p}} = \frac{5}{2} R, \quad C_{\text{mol,v}} = \frac{3}{2} R;$$

Zweiatomige Gase ( $z = 5$ ):

$$C_{\text{mol,p}} = \frac{7}{2} R, \quad C_{\text{mol,v}} = \frac{5}{2} R;$$

Dreiatomige Gase ( $z = 6$ ):

$$C_{\text{mol,p}} = 4R, \quad C_{\text{mol,v}} = 3R.$$

**Tab. 10.1** Spezifische Wärmekapazitäten  $c_p$  und  $c_v$  (in  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) und molare Wärmekapazitäten  $C_{\text{mol,p}}$  und  $C_{\text{mol,v}}$  (in  $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$  bzw. in Vielfachen von  $R$ ) von zweiatomigen Gasen bei ca.  $0^\circ \text{C}$

Gas	$c_p$	$c_v$	$C_{\text{mol,p}}$	$C_{\text{mol,v}}$
$\text{O}_2$	0,917	0,657	29,35 (3,53 R)	21,02 (2,53 R)
$\text{N}_2$	1,038	0,741	29,09 (3,50 R)	20,72 (2,49 R)
$\text{H}_2$	14,236	10,095	28,51 (3,43 R)	20,11 (2,43 R)

Die in Gl. (10-5) erfolgte Verknüpfung der Energie der Teilchenbewegungen mit der Temperatur eines (idealen) Gases und die daraus resultierenden Betrachtungen der Wärmekapazität der Gase in Bezug auf die Freiheitsgrade der Bewegung lässt sich auch auf Festkörper anwenden. In Kap. 8.1 hatten wir die Wärme fester Stoffe mit den Schwingungen ihrer Bausteine, etwa im Kristallgitter, um ihre Gleichgewichtslagen verbunden. Daraus ergeben sich für die potentielle und die kinetische Energie von Schwingungen entlang jeder der drei Raumachsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  insgesamt sechs Freiheitsgrade und somit an Energie  $3kT$  pro Teilchen. Für ein Mol eines Festkörpers ist demnach die Energie  $E_{\text{mol}} = N_A 3kT = 3RT$  und damit die spezifische molare Wärmekapazität  $C_{\text{mol}} = 3R$ . Nimmt man aus Tabelle 8.1 z. B. die spezifische Wärmekapazität von Silber ( $c_{\text{Ag}} = 0,235 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) und multipliziert diesen Wert mit der relativen Atommasse 107 (Summe von Protonen und Neutronen im Atomkern) so erhält man für  $C_{\text{mol}} = 25,24 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \sim 3R$  (mit  $R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$  aus Gl. (9-2)). Dieser als Dulong-Petit'sche Regel bezeichnete Zusammenhang gilt allgemein für metallische Festkörper in guter Näherung bei Temperaturen  $> 20^\circ \text{C}$ .

Wendet man das Bild der in den Freiheitsgraden der Bewegung gespeicherten Wärmeenergie auf die Werte von  $c$  in Tabelle 8.1 für Flüssigkeiten an, so wird klar, dass in ihnen noch weitere Freiheitsgrade der Energieaufnahme verfügbar sein müssen.

## 11. Reale Gase, Van der Waals'sche Zustandsgleichung

Das Modell des idealen Gases beruht auf zwei Vereinfachungen (Kap. 9.1): Erstens wird das Eigenvolumen der Moleküle als beliebig klein angenommen, und zweitens bleiben die Wechselwirkungskräfte zwischen den Gasteilchen unberücksichtigt. Bei hohen Temperaturen und niedrigen Drucken beschreibt dieses Modell das Verhalten wirklicher Gase richtig, es versagt aber außerhalb dieses Bereiches. So würde aus der Zustandsgleichung (Gl. (9-1)) folgen, dass bei konstan-

tem Druck das Volumen eines Gases beim Nullpunkt der absoluten Temperatur gleich Null wäre. Tatsächlich kann es jedoch nicht unter eine durch das *Eigenvolumen* aller Moleküle bestimmte Grenze verringert werden. Außerdem lässt das Modell der idealen Gase die Möglichkeit zum Übergang in den flüssigen Zustand (*Kondensation*) nicht zu, der ja durch die Wechselwirkungskräfte zwischen den Molekülen verursacht wird. In wirklichen Gasen erzeugen diese Wechselwir-

$$C_{\text{mol,p}} dT - C_{\text{mol,v}} dT = p dV.$$

Die Volumenarbeit  $p dV$  berechnen wir für  $p = \text{konstant}$  aus der Zustandsgleichung (9-1)

$$p dV = nR dT,$$

und erhalten als Differenz der molaren Wärmekapazitäten ( $n = 1$ ):

$$C_{\text{mol,p}} - C_{\text{mol,v}} = R. \quad (10-10)$$

Dieser aus dem Modell des idealen Gaszustandes folgende Zusammenhang stimmt näherungsweise mit experimentellen Ergebnissen überein (Tab. 10.1).

Allgemein ergeben sich aus Gln. (10-9) und (10-10) für atomare und molekulare Gase folgende molare Wärmekapazitäten:

Einatomige Gase ( $z = 3$ ):

$$C_{\text{mol,p}} = \frac{5}{2} R, \quad C_{\text{mol,v}} = \frac{3}{2} R;$$

Zweiatomige Gase ( $z = 5$ ):

$$C_{\text{mol,p}} = \frac{7}{2} R, \quad C_{\text{mol,v}} = \frac{5}{2} R;$$

Dreiatomige Gase ( $z = 6$ ):

$$C_{\text{mol,p}} = 4R, \quad C_{\text{mol,v}} = 3R.$$

**Tab. 10.1** Spezifische Wärmekapazitäten  $c_p$  und  $c_v$  (in  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) und molare Wärmekapazitäten  $C_{\text{mol,p}}$  und  $C_{\text{mol,v}}$  (in  $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$  bzw. in Vielfachen von  $R$ ) von zweiatomigen Gasen bei ca.  $0^\circ\text{C}$

Gas	$c_p$	$c_v$	$C_{\text{mol,p}}$	$C_{\text{mol,v}}$
$\text{O}_2$	0,917	0,657	29,35 (3,53 R)	21,02 (2,53 R)
$\text{N}_2$	1,038	0,741	29,09 (3,50 R)	20,72 (2,49 R)
$\text{H}_2$	14,236	10,095	28,51 (3,43 R)	20,11 (2,43 R)

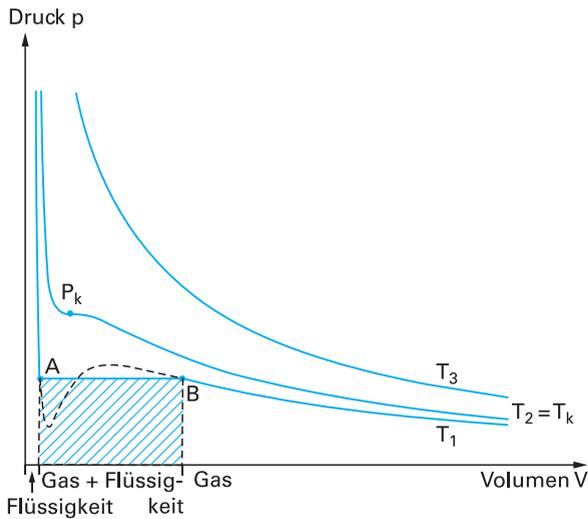
Die in Gl. (10-5) erfolgte Verknüpfung der Energie der Teilchenbewegungen mit der Temperatur eines (idealen) Gases und die daraus resultierenden Betrachtungen der Wärmekapazität der Gase in Bezug auf die Freiheitsgrade der Bewegung lässt sich auch auf Festkörper anwenden. In Kap. 8.1 hatten wir die Wärme fester Stoffe mit den Schwingungen ihrer Bausteine, etwa im Kristallgitter, um ihre Gleichgewichtslagen verbunden. Daraus ergeben sich für die potentielle und die kinetische Energie von Schwingungen entlang jeder der drei Raumachsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  insgesamt sechs Freiheitsgrade und somit an Energie  $3kT$  pro Teilchen. Für ein Mol eines Festkörpers ist demnach die Energie  $E_{\text{mol}} = N_A 3kT = 3RT$  und damit die spezifische molare Wärmekapazität  $C_{\text{mol}} = 3R$ . Nimmt man aus Tabelle 8.1 z. B. die spezifische Wärmekapazität von Silber ( $c_{\text{Ag}} = 0,235 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ) und multipliziert diesen Wert mit der relativen Atommasse 107 (Summe von Protonen und Neutronen im Atomkern) so erhält man für  $C_{\text{mol}} = 25,24 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1} \sim 3R$  (mit  $R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$  aus Gl. (9-2)). Dieser als Dulong-Petit'sche Regel bezeichnete Zusammenhang gilt allgemein für metallische Festkörper in guter Näherung bei Temperaturen  $> 20^\circ\text{C}$ .

Wendet man das Bild der in den Freiheitsgraden der Bewegung gespeicherten Wärmeenergie auf die Werte von  $c$  in Tabelle 8.1 für Flüssigkeiten an, so wird klar, dass in ihnen noch weitere Freiheitsgrade der Energieaufnahme verfügbar sein müssen.

## 11. Reale Gase, Van der Waals'sche Zustandsgleichung

Das Modell des idealen Gases beruht auf zwei Vereinfachungen (Kap. 9.1): Erstens wird das Eigenvolumen der Moleküle als beliebig klein angenommen, und zweitens bleiben die Wechselwirkungskräfte zwischen den Gasteilchen unberücksichtigt. Bei hohen Temperaturen und niedrigen Drucken beschreibt dieses Modell das Verhalten wirklicher Gase richtig, es versagt aber außerhalb dieses Bereiches. So würde aus der Zustandsgleichung (Gl. (9-1)) folgen, dass bei konstan-

tem Druck das Volumen eines Gases beim Nullpunkt der absoluten Temperatur gleich Null wäre. Tatsächlich kann es jedoch nicht unter eine durch das *Eigenvolumen* aller Moleküle bestimmte Grenze verringert werden. Außerdem lässt das Modell der idealen Gase die Möglichkeit zum Übergang in den flüssigen Zustand (*Kondensation*) nicht zu, der ja durch die Wechselwirkungskräfte zwischen den Molekülen verursacht wird. In wirklichen Gasen erzeugen diese Wechselwir-



**Abb. 11.1** Zustandsdiagramm eines realen Gases für verschiedene Temperaturen,  $T_1 < T_2 = T_K < T_3$ . Die ausgezogenen Kurven stellen die Isothermen eines realen Gases (z. B.  $\text{CO}_2$ ) dar; die punktierten Kurventeile entsprechen der *van der Waals'schen* Zustandsgleichung. Für  $T_3 > T_K$  ergibt sich die Isotherme des idealen Gases; d. h., bei hohen Temperaturen und niedrigen Drucken verhält sich ein reales Gas nahezu wie ein ideales Gas.

kungskräfte durch gegenseitige Anziehung der Moleküle einen zusätzlichen Druck, den *Binnendruck*, der zum Außendruck zu addieren ist. Er wird um so größer, je geringer der Molekülabstand, d. h. das Gasvolumen ist.

Eigenvolumen und Binnendruck können durch Korrekturglieder in der Zustandsgleichung idealer Gase berücksichtigt werden. Dadurch erhält man als *Zustandsgleichung für ein Mol eines realen Gases*:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = RT$$

(*van der Waals-Gleichung*). (11-1)

Die Größen  $a$  und  $b$  sind von der Natur des betrachteten realen Gases abhängige Konstanten. Durch  $a/V^2$  wird der Binnendruck zum Außendruck  $p$  hinzu addiert. Durch das sogenannte *van der Waals'sche Kovolumen*  $b$  wird der Einfluss des Eigenvolumens ( $b \approx 4$ fache des Eigenvolumens der Moleküle) auf das gesamte Gasvolumen  $V$  berücksichtigt.

Die Gaskonstante  $R$  ist dieselbe wie beim idealen Gas; sie wird daher auch als *allgemeine Gaskonstante* bezeichnet. In Abb. 11.1 sind schematisch das  $pV$ -Zustandsdiagramm nach Gl. (11-1) und Messergebnisse an realen Gasen eingezeichnet. Man sieht deutlich, dass Gl. (11-1) die experimentellen Befunde

sowohl im Bereich kleiner als auch großer Volumina richtig beschreibt, nicht aber im schraffierten Zwischenbereich.

Beginnen wir bei einer Temperatur  $T_1$  unterhalb der *kritischen Temperatur*  $T_K$  (siehe weiter unten) mit der isothermen Kompression eines realen Gases, so erhöht sich sein Druck (Bereich rechts von B). Dann aber bleibt bei weiterer Volumenverringerung der Druck bis zum Punkt A konstant. Von B ab beginnt sich das Gas zu verflüssigen, zu *kondensieren*. Das heißt, aus dem Gas entsteht zunehmend Flüssigkeit. Es können also Gas (Dampf) und Flüssigkeit als Aggregatzustände (Phasen) desselben Stoffes im Gleichgewicht existieren (*Koexistenzbereich*). Erst wenn das Gas vollständig in Flüssigkeit umgewandelt ist (Bereich links von A), steigt bei weiterer Kompression wieder der Druck, jetzt aber viel schneller, da die Kompressibilität der Flüssigkeit erheblich geringer ist als beim Gas (Tab. 5.2).

Sowohl im Bereich der Gasphase als auch der Flüssigkeitsphase beschreibt die Zustandsgleichung Gl. (11-1) das Verhalten richtig, im Koexistenzbereich jedoch nicht. Dort liefert sie einen S-förmigen Verlauf, im Gegensatz zum Experiment, das hier eine waagerechte Gerade für die Isotherme ergibt.

**Übersättigung und Siedeverzug** Durch geeignete Versuchsbedingungen lassen sich sowohl bei A als

auch bei B kleine Stücke der van der Waals'schen S-Kurve experimentell verifizieren.

Fehlen, wenn man den Punkt B erreicht, *Keime*, an denen die Kondensation des Gases einsetzen kann, so verzögert sich diese, und der Existenzbereich der rein gasförmigen Phase erstreckt sich geringfügig über B hinaus (*Übersättigung* des Gases). Bringt man in diesen übersättigten Zustand künstlich Kondensationskeime, so tritt die Kondensation schlagartig ein (künstlicher Regen durch Ag-Jodid-Kristalle; Nebelspuren in der *Wilson-Nebelkammer* durch Kondensation an Ionen, die als Keime wirken). Übersättigung kann auch erreicht werden, wenn die Temperatur eines Gases an der Grenze des Koexistenzbereiches abgesenkt wird und aus Mangel an Kondensationskeimen der gasförmige Zustand erhalten bleibt (*Unterkühlung*).

Andererseits kann man eine Flüssigkeit unter besonderen Versuchsbedingungen auf Drucke knapp un-

terhalb des zu Punkt A gehörigen Druckes bringen, ohne dass Verdampfung auftritt (*Siedeverzug*). Auch hier ist das Fehlen geeigneter Keime die Ursache. In der *Blasenammer* wird in diesem Zustand die Verdampfung von flüssigem Wasserstoff durch Ionen als Keime ausgelöst und so wird deren Weg durch Dampfbläschen sichtbar gemacht.

**Kritischer Punkt** In Abb. 11.1 sind zu verschiedenen Temperaturen gehörende Isothermen eingezeichnet. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Koexistenzbereich mit steigender Temperatur immer enger wird. Bei einer bestimmten Temperatur  $T_K$  verschwindet er ganz. Oberhalb dieser *kritischen Temperatur* ist also eine Koexistenz und damit die Verflüssigung des Gases auch mit beliebig hohen Drucken nicht mehr möglich. Der Punkt  $P_K$  im Zustandsdiagramm wird der *kritische Punkt* genannt; die zugehörigen Zustandsgrößen  $p_K$  und  $V_K$  heißen *kritischer Druck* und *kritisches Volumen*.

## 12. Hauptsätze der Wärmelehre

Von *R. Mayer* wurde 1842 zum erstenmal die Wärme als spezielle Form der Energie in das Prinzip der Erhaltung der Energie einbezogen. Auf das Gebiet der Wärmelehre angewandt, bezeichnet man den Energieerhaltungssatz als den *1. Hauptsatz der Wärmelehre*. Er besagt, dass die verschiedenen Formen der Energie ineinander umgewandelt werden können.

Der 1. Hauptsatz gestattet jedoch keine Aussage darüber, welche Energieumwandelun-

gen in der Natur wirklich ablaufen, inwieweit beispielsweise Wärmeenergie in Arbeit umgewandelt werden kann. Diese Frage hängt sehr eng mit derjenigen nach der Richtung der in der Natur ablaufenden Vorgänge zusammen. Antworten hierzu ergeben sich aus dem *2. Hauptsatz der Wärmelehre* und dem hieraus entwickelten Begriff der *Entropie*.

### 12.1 Innere Energie

Als *innere Energie*  $U$  eines Gases bezeichnet man die gesamte im Gas gespeicherte Energie. Diese umfasst sowohl die Wärmemenge als auch die im Gas gespeicherte mechanische oder elektrische Energie.

Auch die Bindungsenergie von Molekülen, Flüssigkeiten oder Festkörpern ist eine Form der inneren Energie und auch die in Kap. 13.3.7.1 behandelten *latenten Wärmen* (*Verdampfungs-* und *Schmelzwärme*) müssen bei

Änderungen der inneren Energie berücksichtigt werden.

Die innere Energie ist in gewissem Sinne vergleichbar mit der potentiellen Energie, die wir in der Mechanik kennengelernt haben. In beiden Fällen handelt es sich um die Speicherung von Energie, die man zumindest teilweise dazu benutzen kann, um Arbeit zu verrichten. Genau wie die potentielle Energie ist auch die innere Energie nur bis auf eine Konstante festgelegt, da nur ihre Änderung und nicht ihr Betrag messbar ist.

auch bei B kleine Stücke der van der Waals'schen S-Kurve experimentell verifizieren.

Fehlen, wenn man den Punkt B erreicht, *Keime*, an denen die Kondensation des Gases einsetzen kann, so verzögert sich diese, und der Existenzbereich der rein gasförmigen Phase erstreckt sich geringfügig über B hinaus (*Übersättigung* des Gases). Bringt man in diesen übersättigten Zustand künstlich Kondensationskeime, so tritt die Kondensation schlagartig ein (künstlicher Regen durch Ag-Jodid-Kristalle; Nebelspuren in der *Wilson-Nebelkammer* durch Kondensation an Ionen, die als Keime wirken). Übersättigung kann auch erreicht werden, wenn die Temperatur eines Gases an der Grenze des Koexistenzbereiches abgesenkt wird und aus Mangel an Kondensationskeimen der gasförmige Zustand erhalten bleibt (*Unterkühlung*).

Andererseits kann man eine Flüssigkeit unter besonderen Versuchsbedingungen auf Drucke knapp un-

terhalb des zu Punkt A gehörigen Druckes bringen, ohne dass Verdampfung auftritt (*Siedeverzug*). Auch hier ist das Fehlen geeigneter Keime die Ursache. In der *Blasenammer* wird in diesem Zustand die Verdampfung von flüssigem Wasserstoff durch Ionen als Keime ausgelöst und so wird deren Weg durch Dampfbläschen sichtbar gemacht.

**Kritischer Punkt** In Abb. 11.1 sind zu verschiedenen Temperaturen gehörende Isothermen eingezeichnet. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Koexistenzbereich mit steigender Temperatur immer enger wird. Bei einer bestimmten Temperatur  $T_K$  verschwindet er ganz. Oberhalb dieser *kritischen Temperatur* ist also eine Koexistenz und damit die Verflüssigung des Gases auch mit beliebig hohen Drucken nicht mehr möglich. Der Punkt  $P_K$  im Zustandsdiagramm wird der *kritische Punkt* genannt; die zugehörigen Zustandsgrößen  $p_K$  und  $V_K$  heißen *kritischer Druck* und *kritisches Volumen*.

## 12. Hauptsätze der Wärmelehre

Von *R. Mayer* wurde 1842 zum erstenmal die Wärme als spezielle Form der Energie in das Prinzip der Erhaltung der Energie einbezogen. Auf das Gebiet der Wärmelehre angewandt, bezeichnet man den Energieerhaltungssatz als den *1. Hauptsatz der Wärmelehre*. Er besagt, dass die verschiedenen Formen der Energie ineinander umgewandelt werden können.

Der 1. Hauptsatz gestattet jedoch keine Aussage darüber, welche Energieumwandlun-

gen in der Natur wirklich ablaufen, inwieweit beispielsweise Wärmeenergie in Arbeit umgewandelt werden kann. Diese Frage hängt sehr eng mit derjenigen nach der Richtung der in der Natur ablaufenden Vorgänge zusammen. Antworten hierzu ergeben sich aus dem *2. Hauptsatz der Wärmelehre* und dem hieraus entwickelten Begriff der *Entropie*.

### 12.1 Innere Energie

Als *innere Energie*  $U$  eines Gases bezeichnet man die gesamte im Gas gespeicherte Energie. Diese umfasst sowohl die Wärmemenge als auch die im Gas gespeicherte mechanische oder elektrische Energie.

Auch die Bindungsenergie von Molekülen, Flüssigkeiten oder Festkörpern ist eine Form der inneren Energie und auch die in Kap. 13.3.7.1 behandelten *latenten Wärmen* (*Verdampfungs-* und *Schmelzwärme*) müssen bei

Änderungen der inneren Energie berücksichtigt werden.

Die innere Energie ist in gewissem Sinne vergleichbar mit der potentiellen Energie, die wir in der Mechanik kennengelernt haben. In beiden Fällen handelt es sich um die Speicherung von Energie, die man zumindest teilweise dazu benutzen kann, um Arbeit zu verrichten. Genau wie die potentielle Energie ist auch die innere Energie nur bis auf eine Konstante festgelegt, da nur ihre Änderung und nicht ihr Betrag messbar ist.

Für ein Mol eines idealen Gases lässt sich die Änderung der inneren Energie  $U$ , die mit einer Temperaturänderung vom Zustand 1 ( $T_1$ ) zum Zustand 2 ( $T_2$ ) bei konstant gehaltenem Volumen  $V$  verbunden ist (*isochore* Zustandsänderung), mit Gl. (10-9) angeben:

$$U_2 - U_1 = \int_1^2 C_{\text{mol},V} dT \\ = C_{\text{mol},V}(T_2 - T_1). \quad (12-1a)$$

Die Änderung der inneren Energie ergibt sich hier aus dem Produkt der Molwärme und der Temperaturänderung.

Für Systeme unter konstantem Druck  $p$  und deren Veränderungen (*isobare* Zustandsänderungen) ist eine andere Größe, die *Enthalpie*  $H$  geeignet. Sie ist definiert als Summe von innerer Energie und Volumenarbeit:

$$dH = C_{\text{mol},p} dT = dU + p dV. \quad (12-1b)$$

Bei einer Stoffumwandlung oder der Bildung einer chemischen Verbindung ist die Enthalpie der Endprodukte,  $H_{\text{end}}$ , i. A. nicht gleich der Summe der Enthalpien der Ausgangsstoffe  $H_{\text{anfang}}$ . Die Differenz  $\Delta = H_{\text{end}} - H_{\text{anfang}}$  nennt man *Wärmetönung*. Ist  $\Delta$  größer als Null, so erfolgt der Prozess unter Wärmeaufnahme (*endothermer* Prozess), im anderen Fall wird Wärme frei (*exothermer* Prozess). Ein exothermer Vorgang ist die Verdauung von Nahrungsmitteln, ein endothermer das Verdampfen von Wasser (s. auch Kap. 13.3.7.2, 13.3.7.3).

## 12.2 Der 1. Hauptsatz der Wärmelehre

Nach Definition der Größen *Wärmemenge*  $Q$ , *Volumenarbeit*  $W$  und *innere Energie*  $U$  können wir jetzt den 1. Hauptsatz der Wärmelehre formulieren. Er lautet:

Die Summe der einem System von außen zugeführten Wärme  $dQ$  und der an ihm verrichteten Arbeit  $dW$  ist gleich der Zunahme der inneren Energie  $dU$  des Systems:

$$dU = dQ + dW. \quad (12-2)$$

Dem 1. Hauptsatz zufolge kann Wärmeenergie nicht aus nichts entstehen oder spurlos verschwinden, sondern nur zu Lasten oder zu Gunsten einer anderen Energieform. Durch

Einbeziehung der Wärme  $Q$  in das Energieprinzip erhält der bereits aus der Mechanik bekannte Energieerhaltungssatz eine umfassendere Bedeutung. Der 1. Hauptsatz lässt sich nicht nur für ideale Gase, sondern für die innere Energie beliebiger Stoffe in beliebigen Aggregatzuständen angeben.

Eine andere Formulierung des 1. Hauptsatzes ist:

Ein *perpetuum mobile* 1. Art ist unmöglich.

Dieser Satz sagt aus, dass man keine periodisch arbeitende Maschine konstruieren kann, die mehr Arbeit verrichtet, als sie Energie in Form von Wärme verbraucht (*perpetuum mobile* 1. Art). Aus dem Energiegesetz folgt, dass ein solches *perpetuum mobile* auch unter Einbeziehung aller anderen Energieformen (z. B. chemischer oder elektrischer Energie) unmöglich ist.

## 12.3 Reversible und irreversible Prozesse

Nach dem 1. Hauptsatz sind alle Energieformen ineinander umwandelbar, wenn nur ihre Summe unverändert bleibt. Es zeigt sich jedoch, dass in der Natur nicht alle diese Umwandlungsprozesse auch beobachtet werden.

So ist die Umwandlung von potentieller Energie in Wärme (und Verformungsenergie) — etwa beim vom

Dach fallenden Dachziegel — ein alltäglicher Vorgang, seine Umkehrung aber, die Anhebung des Ziegels auf das Dach unter Abkühlung der Erde und des Ziegels ist bislang nicht beobachtet worden.

Ein reibend bewegter Körper verliert kinetische Energie durch Umwandlung in Reibungswärme, die Umkehrung dieses Vorganges, die Beschleunigung des Körpers bei gleichzeitiger Abkühlung der reibenden Umgebung ist jedoch ebenfalls nie beobachtet worden.

Ein 3. Beispiel ist der Wärmefluss in einem an einem Ende erhitzten Stab. Er erfolgt stets zum kalten Ende hin, wodurch ein Temperatenausgleich bewirkt wird; nie fließt Wärme in umgekehrter Richtung, wodurch das kalte Ende kälter und das warme Ende des Stabes wärmer würde.

Offensichtlich können manche Prozesse in der Natur nur in *einer* Richtung, nicht aber umgekehrt erfolgen. Man nennt sie *irreversibel* (nicht umkehrbar). Vielfach sind solche Prozesse irreversibel, bei denen andere Energieformen in Wärme umgewandelt werden.

Die Wärme nimmt unter den Energieformen eine besondere Stellung ein, da es nicht möglich ist, Wärme vollständig in andere Energieformen zu verwandeln.

Ein Energie-Umwandlungsprozess, der in beiden Richtungen erfolgen kann, wird als *reversibel* (umkehrbar) bezeichnet. Ein Beispiel ist etwa der Wechsel zwischen kinetischer und potentieller Energie beim ungedämpften Fadenpendel (Kap. 6.1).

Ein weiteres Beispiel für einen reversiblen Energie-Umwandlungsvorgang ist der *Carnot'sche Kreisprozess*. Er ist ein idealisiertes Modell zur Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit, wie sie typisch ist für Wärmekraftmaschinen (Dampfmaschine, Benzinmotor usw.).

Die verschiedenen Zustandsänderungen, die ein (ideales) Gas beim Carnot'schen Kreisprozess erfährt und die im Idealfall unendlich langsam ablaufen sollen, damit sich das Gas dauernd im Gleichgewicht befindet, sind in Abb. 12.1 in einem  $p$ - $V$ -Diagramm gra-

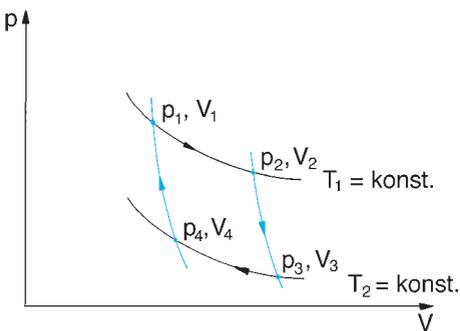


Abb. 12.1  $p$ - $V$ -Diagramm des Carnot'schen Kreisprozesses.

fisch dargestellt. Ein kompletter Kreislauf setzt sich demnach zusammen aus zwei isothermen und zwei adiabatischen Prozessen. Während der isothermen Änderungen soll das Gas mit genügend großen Wärmebädern in Kontakt sein, so dass durch vollständigen Wärmeaustausch ein isothermer Vorgang aufrecht erhalten wird. Für die vier Teilprozesse lässt sich jeweils die vom Gas nach außen abgegebene mechanische Arbeit berechnen. (Abgegebene Arbeiten werden dabei mit negativem Vorzeichen versehen.)

1. Isotherme Ausdehnung vom Zustand 1 ( $p_1V_1$ ) in den Zustand 2 ( $p_2V_2$ ). Da die Temperatur konstant ist, bleibt auch die innere Energie konstant. Nach dem Energieerhaltungssatz wird sämtliche vom Gas nach außen abgegebene Arbeit  $-A_1$  in Form von Wärmeenergie  $Q_1$  dem umgebenden Wärmebad entnommen. Gemäß Gl. (12-2) und Gl. (9-1) ist die abgegebene Arbeit  $-A_1$ :

$$-A_1 = Q_1 = \int_1^2 p dV = \int_1^2 nRT_1 \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{12-3}$$

2. Adiabatische Ausdehnung von 2 ( $p_2V_2$ ) nach 3 ( $p_3V_3$ ). Sie erfolgt ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung. Also ist die nach außen abgegebene Arbeit  $-A_2$  gleich der Abnahme der inneren Energie (Gl. (12-1)):

$$-A_2 = nC_{\text{mol},v}(T_1 - T_2). \tag{12-4}$$

3. Isotherme Kompression von 3 ( $p_3V_3$ ) nach 4 ( $p_4V_4$ ). Hierbei wird dem Gas Arbeit zugeführt. Die entsprechende Wärmemenge  $-Q_3$  wird an das Wärmebad abgegeben:

$$A_3 = -Q_3 = nRT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \tag{12-5}$$

4. Adiabatische Kompression von 4 ( $p_4V_4$ ) nach 1 ( $p_1V_1$ ). Dieser Schritt ist genau die Umkehrung von Schritt 2:

$$A_4 = nC_{\text{mol},v}(T_1 - T_2). \tag{12-6}$$

Es wird dem Gas die gleiche Arbeit  $A_4 = -A_2$  zugeführt, die beim Schritt 2 vom Gas nach außen abgegeben wurde.

Durch Addition der vier Teilprozesse lässt sich die insgesamt von dem Gas abgegebene Arbeit ermitteln. Da  $-A_2 = A_4$  braucht man bei dieser Bilanz nur die beiden isothermen Teilprozesse zu berücksichtigen:

$$-A = -A_1 + A_3 = nR \left( T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} \right). \tag{12-7}$$

Nach Gl. (9-8) gilt:  $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$  und  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}$ .

Hieraus ergibt sich durch Division:

$$\left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} \quad \text{oder} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \tag{12-8}$$

Damit lässt sich Gl. (12-7) umwandeln in:

$$-A = nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{12-9}$$

Dies ist die insgesamt beim Durchlaufen des Kreisprozesses von der Maschine abgegebene Arbeit.

Aus dem Wärmebad mit der Temperatur  $T_1$  wird also die Wärmemenge  $Q_1$  entnommen, und die (kleinere) Wärmemenge  $-Q_3$  wird an das Wärmebad mit der Temperatur  $T_2$  abgegeben. Den Quotienten aus abgegebener Arbeit und der dem Wärmebad entnommenen Wärme bezeichnen wir als *Wirkungsgrad*  $\eta$  des Kreisprozesses:

$$\eta = -\frac{A}{Q_1} = \frac{nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}}{nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (12-10)$$

Der Wirkungsgrad ist demnach um so größer, je größer die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Wärmebädern ist. Daher lässt man Wärmekraftmaschinen bei möglichst großen Temperaturdifferenzen arbeiten. Der

Wirkungsgrad kann aber nie gleich 1 werden, es sei denn  $T_2 = 0$ ; das heißt, dass auch mit dieser idealisierten Maschine niemals Wärme vollständig zur Verrichtung von Arbeit verwendet werden kann. Es wird während des Vorganges stets ein Teil der Wärmeenergie (der Anteil  $-Q_3$ ) vom warmen zum kalten Wärmebad überführt, also nicht genutzt. Dieses Beispiel betont die Sonderstellung der Wärmeenergie, die darin besteht, dass sie nicht vollständig in andere Energieformen umgewandelt werden kann.

Aus den Gl. (12-3), (12-5), (12-8) folgt weiter:

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_3}{T_2}; \quad (12-11)$$

das ist die Bezeichnung, die wir in Gl. (8-4) bereits zur Definition der thermodynamischen Temperaturskala verwendet haben. Die Größe  $Q/T$  bezeichnet man als *reduzierte Wärmemenge* oder *Entropie*.

## 12.4 Entropie

Diejenige Größe, die die Richtung von irreversiblen Zustandsänderungen festlegt, ist die *Entropie*  $S$ . Neben Temperatur, Druck, Volumen und Wärmemenge ist sie eine wesentliche Zustandsgröße der Wärmelehre.

Jedem System wird ein bestimmter Entropieinhalt  $S$  zugeordnet. Für eine *reversible Änderung* vom Zustand 1 zum Zustand 2 ergibt sich für die Änderung  $\Delta S_{\text{rev}}$  der Entropie:

$$\Delta S_{\text{rev}} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \quad (12-12)$$

mit der SI-Einheit  $\text{J K}^{-1}$ .

Die Größe  $dQ$  ist die zugeführte Wärmemenge und  $T$  die absolute Temperatur. Einen reversiblen Prozess können wir so führen, dass wir vom Zustand 1 zum Zustand 2 und auf beliebige Weise wieder zurück zum Zustand 1 kommen. Für einen solchen *Kreisprozess* gilt, dass die resultierende Änderung der Entropie Null ist:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} = 0.$$

Ein Beispiel: Lassen wir eine bestimmte Flüssigkeitsmenge bei der Temperatur  $T$  durch Wärmezufuhr verdampfen, und lassen wir bei derselben Temperatur anschließend durch Wärmeentzug die Gasmenge wieder

kondensieren, so hat sich die Entropie der Flüssigkeit bei diesem Kreisprozess nicht geändert.

Bei *irreversiblen* Zustandsänderungen lässt sich die Entropieänderung nicht durch eine einfache Beziehung entsprechend Gl. (12-12) angeben. Allgemein gilt aber, dass bei einem irreversiblen Prozess für den Übergang vom Zustand 1 zum Zustand 2 die Entropiezunahme stets größer ist als die nach Gl. (12-12) definierte Größe  $\int_1^2 dQ/T$ :

$$\Delta S_{\text{irrev}} > \Delta S_{\text{rev}}. \quad (12-13)$$

Allgemein gilt, dass bei reversiblen Zustandsänderungen in einem abgeschlossenen System die Gesamtentropie konstant bleibt (durch die Zustandsänderungen werden Entropiebeiträge nur ausgetauscht), wogegen bei irreversiblen Zustandsänderungen die Gesamtentropie im abgeschlossenen System stets wächst. Sie kann jedoch nie abnehmen.

Für das einfache Beispiel der Mischung zweier Flüssigkeiten unterschiedlicher Temperatur (irreversibler Prozess) wollen wir nachrechnen, wie groß der Entropiezuwachs beim Mischungsvorgang ist. Als Flüssigkeiten wählen wir 1 kg  $\text{H}_2\text{O}$  von 313,15 K ( $= 40^\circ\text{C}$ ) und 1 kg  $\text{H}_2\text{O}$  von 273,15 K ( $= 0^\circ\text{C}$ ); nach erfolgter Mischung (siehe Kap. 8.1) ergeben sich 2 kg  $\text{H}_2\text{O}$  von 293,15 K ( $= 20^\circ\text{C}$ ). Die zur Erwärmung bzw. Abkühlung um

$\Delta T$  benötigte bzw. abgegebene Wärmemenge beträgt nach Gl. (8-2)  $\Delta Q = mc \Delta T$  bzw. für infinitesimal kleine Temperaturintervalle  $dQ = mc dT$ . Mit Gl. (12-12) erhalten wir so den Entropiezuwachs:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{mc}{T} dT = mc \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (12-14)$$

Die Zustände 1 und 2 unseres Beispiels sind gekennzeichnet durch die Temperaturen  $T_1 = 273,15$  K (bzw. 313,15 K) und  $T_2 = 293,15$  K. Demnach ergibt sich für den Entropiezuwachs:

$$\begin{aligned} \Delta S &= 1 \cdot 4,18 \cdot 10^3 \left( \ln \frac{293,15}{273,15} + \ln \frac{293,15}{313,15} \right) \text{ J K}^{-1} \\ &= 19,5 \text{ J K}^{-1}. \end{aligned}$$

Neben der in Gl. (12-12) dargestellten Definition für die Entropie gibt es eine weitere Möglichkeit, die Entropie zu beschreiben:

Die Entropie  $S$  eines Systems ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein spezieller Zustand des Systems realisieren lässt.

Dieser Definition liegt zugrunde, dass ein Zustand eine um so höhere Wahrscheinlichkeit aufweist, je geringer die Ordnung innerhalb des Systems ist. In der Definition kommt zum Ausdruck, dass Entropie ein Maß für den *Ordnungsgrad des Systems* darstellt. Dies lässt sich an unserem Beispiel veranschaulichen: Der Zustand, bei dem alle Moleküle in einer Flüssigkeit im Mittel dieselbe thermische Geschwindigkeit besitzen, ist durch einen geringeren Ordnungsgrad (größere Unordnung) charakterisiert als derjenige Zustand, bei welchem die Moleküle je zur Hälfte zwei verschiedene mittlere thermische Geschwindigkeiten (zwei Flüssigkeiten mit verschiedenen Temperaturen) besitzen. Größere Unordnung bedeutet größere Entropie. Der Entropiezuwachs wird durch den Mischvorgang bewirkt. Der Mischvorgang ist also irreversibel.

## 12.5 Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre

In der Tatsache, dass sich Wassermengen verschiedener Temperatur von selbst so mischen, dass sich eine einheitliche Mischtemperatur einstellt, kommt ein allgemeingültiges Naturprinzip zum Ausdruck. Wir bezeichnen dieses Prinzip als den **2. Hauptsatz der Wärmelehre**:

Alle Vorgänge in einem abgeschlossenen System verlaufen in dem Sinne, dass sich Ordnung, soweit irgend möglich, in Unordnung umwandelt. Der Endzustand ist also immer derjenige, in dem der Ordnungszustand des Systems den niedrigsten Grad erreicht hat. Der 2. Hauptsatz besagt demnach, dass ein abgeschlossenes System einem Zustand mit maximaler Entropie zustrebt.

In anderen Worten: Von selbst verlaufen nur diejenigen Vorgänge, bei denen die Entropie wächst. Da die Umwandlung *gerichteter Bewegung* in *ungeordnete Wärmebewegung* stets eine Zunahme der Entropie bedingt, ist jetzt

verständlich, warum der in Kap. 12.3 erläuterte Vorgang der Abbremsung einer Bewegung durch Reibung nicht umkehrbar ist. Durch dieses Entropie-Prinzip werden irreversible Naturvorgänge einer bestimmten Richtung beschrieben, in der sie von selbst ablaufen.

Nach dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre wäre es z. B. möglich, durch eine Maschine dem Meer Wärme zu entziehen und diese völlig in mechanische Arbeit zu verwandeln, etwa um ein Schiff anzutreiben. Eine solche Maschine, die dadurch Arbeit verrichten kann, dass sie einem Wärmereservoir Wärmeenergie entzieht, nennt man ein *perpetuum mobile 2. Art*. Der 2. Hauptsatz verbietet jedoch diesen Vorgang. Man kann den 2. Hauptsatz daher auch formulieren:

Ein perpetuum mobile 2. Art ist unmöglich.

Es wird ausdrücklich betont: Der 2. Hauptsatz bezieht sich auf *abgeschlossene* Systeme (Kap. 4.1). In einem *offenen* System, das mit seiner Umgebung in Stoff- und Energieaustausch steht, kann durch Einflüsse von außen die Entropie auch abnehmen. Solche offenen Systeme sind z. B. lebende Organismen.

## 12.6 Energiebilanz beim lebenden Organismus

Jeder lebende Organismus stellt im physikalischen Sinne ein System dar, für das der 1. Hauptsatz der Thermodynamik und auch die Aussagen über die Reaktionswärmen (Kap. 13.3.7.3) voll gültig sind. Da jeder lebende Organismus mit seiner Umgebung im Austausch steht, kann er im physikalischen Sinne nur gemeinsam mit dieser Umgebung als abgeschlossenes System betrachtet werden. Da der Organismus einen hohen Ordnungsgrad aufweist, ist er thermodynamisch sehr instabil. Wir wissen bereits vom 2. Hauptsatz, dass thermodynamische Systeme um so unwahrscheinlicher sind, je höher ihr Ordnungsgrad, bzw. je kleiner ihre Entropie ist. Daher bedarf es einer ständigen Energiezufuhr, um die Ordnung aufrechtzuerhalten. Leistet der Organismus zusätzlich äußere Arbeit, zum Beispiel Muskelarbeit, so muss hierfür weitere Energie bereitgestellt werden.

Die Energiezufuhr erfolgt bei allen Lebewesen im Wesentlichen in Form von chemischer Energie, d. h. durch Nahrungsmittel aus energiereichen chemischen Verbindungen. Durch Oxidation (Verbrennung) dieser Verbindungen zu  $\text{H}_2\text{O}$  und  $\text{CO}_2$  wird Energie freigesetzt. Demnach ist die wichtigste Größe zur Charakterisierung von Nahrungsmitteln ihre Verbrennungswärme. Man gibt daher den *Nährwert* in Joule (früher in Kalorien) an. Allerdings kann der Organismus viele Substanzen nicht vollständig oxidieren, und man muss daher zwischen der physikalischen Verbrennungswärme (vgl. Kap. 13.3.7.3) bei vollständiger Oxidation und den physiologischen Brennwerten bei der im Organismus erfolgenden Oxidation unterscheiden. Der Nährwert von Nahrungsmitteln ist natürlich durch ihren physiologischen Brennwert gekennzeichnet. Befindet sich der Organismus in Ruhe, so verrichtet er keine *äußere* Arbeit, wenn wir von der geringfügigen Arbeit zur Beschleunigung der Atemluft

absehen. Alle innerhalb des Organismus erfolgenden Energieumsetzungen wie zum Beispiel die Arbeit des Herzens und der Atemmuskulatur enden letztlich in der Erzeugung von Wärme. Damit der Körper auf konstanter Temperatur bleibt, wird diese Wärme vollständig nach außen abgegeben. Aus der im Ruhezustand pro Zeiteinheit abgegebenen Wärmemenge kann man daher den gesamten Energieumsatz pro Zeit messen; er wird als *Grundumsatz* bezeichnet. Er ist notwendig, um den geordneten Zustand des Organismus aufrechtzuerhalten. Er liegt bei etwa  $8 \cdot 10^6$  Joule (2000 kcal) pro Tag. Verrichtet der Organismus zusätzlich eine äußere Arbeit  $W$  pro Tag, so muss der Energieumsatz um den Betrag  $W/\epsilon$  größer werden.  $\epsilon$  ist der *Wirkungsgrad* für die Umwandlung von chemischer in mechanische Energie durch den Organismus. Da der Wirkungsgrad  $\epsilon$  wesentlich kleiner als 1 ist, entsteht bei der Verrichtung von äußerer Arbeit zusätzliche, über den Grundumsatz hinausgehende Wärmeenergie, die ebenfalls nach außen abgeleitet werden muss. Durch gleichzeitige Messung der durch einen Muskel erbrachten mechanischen Arbeit und der entwickelten Wärme lässt sich der Wirkungsgrad  $\epsilon$  für die im Muskel durchgeführte chemisch-mechanische Energieumwandlung bestimmen. Er wurde zu 20% gemessen, d. h., 80% der eingesetzten chemischen Energie werden in Wärme umgewandelt.

Es ist ein Merkmal aller Lebewesen, dass sie in einem beständigen Austausch von Masse und Energie mit der Umgebung stehen. Dabei wird Nahrung aufgenommen und ihre nicht verwertbaren Bestandteile sowie Wärme werden wieder abgegeben, ohne dass sich das biologische System selbst verändert; es befindet sich also im Gleichgewicht. Dieser Gleichgewichtszustand wird durch den Begriff *Fließgleichgewicht* gekennzeichnet.

## 13. Thermodynamische Eigenschaften von Stoffen

### 13.1 Thermische Ausdehnung

Erwärmen wir einen festen oder flüssigen Körper, so ändern sich dessen Abmessungen. Beispielsweise vergrößert sich die Länge eines Stabes bei Erwärmung um  $\Delta T$  gemäß

$$l = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta T). \quad (13-1)$$

$\alpha$  heißt *linearer Ausdehnungskoeffizient* mit der Einheit  $\text{K}^{-1}$ .

$\alpha$  ist bestimmt durch die Art des Stoffes und dessen Aggregatzustand und ist selbst von der Temperatur abhängig, was jedoch nur bei größeren Temperaturintervallen ( $\Delta T \geq 100 \text{ K}$ ) berücksichtigt werden muss.

Temperatur-induzierte Längenänderungen fester Stoffe spielen ebenso wie die in Kap. 5.2.2 behandelten Druck- bzw. Zug-induzierten Ausdehnungen eine wichtige Rolle bei der Beurteilung ihrer Materialeigenschaften.

Für die Änderung des Volumens  $V$  gilt eine der Gl. (13-1) analoge Beziehung (die wir bereits bei idealen Gasen kennengelernt haben):

$$V = V_0(1 + \gamma \Delta T). \quad (13-2)$$

$\gamma$  wird als *kubischer Ausdehnungskoeffizient* bezeichnet. Näherungsweise gilt  $\gamma = 3\alpha$ ;  $\gamma$  ist wie  $\alpha$  ebenfalls nur in kleinen Temperaturintervallen als konstant anzusehen.

Die thermische Ausdehnung von Flüssigkeiten ist im allgemeinen um zwei Größenordnungen höher als die von Festkörpern. Einige Werte von  $\alpha$  und  $\gamma$  für feste und flüssige Stoffe sind in Tab. 13.1 zusammengestellt.

Die thermische Ausdehnung lässt sich bei festen Körpern im atomaren Bild des Kristalls, wie es in Kap.

**Tab. 13.1** Linearer Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  in  $\text{K}^{-1}$  für einige feste Stoffe und kubischer Ausdehnungskoeffizient  $\gamma$  in  $\text{K}^{-1}$  für einige Flüssigkeiten

	$\alpha$		$\gamma$
Glas	$0,090 \cdot 10^{-4}$	Wasser	$1,3 \cdot 10^{-4}$
Pt	$0,090 \cdot 10^{-4}$	Hg	$1,8 \cdot 10^{-4}$
Fe	$0,123 \cdot 10^{-4}$	Ethanol	$11,0 \cdot 10^{-4}$
Cu	$0,167 \cdot 10^{-4}$	Chloroform	$12,8 \cdot 10^{-4}$
Al	$0,239 \cdot 10^{-4}$	Ethylether	$16,2 \cdot 10^{-4}$

5.1.2. entwickelt wurde, erklären. In Abb. 5.6 wurde gezeigt, dass die Potentialkurve unsymmetrisch zur Gleichgewichtslage  $r_0$  verläuft. Erhöht man die Temperatur durch Wärmezufuhr, so steigt die mittlere Gesamtenergie, und die Amplituden der thermischen Schwingungen nehmen zu (die Umkehrpunkte A bzw. B der Schwingungen liegen auf der Potentialkurve, denn dort ist die Schwingungsenergie ausschließlich potentielle Energie). Da die Punkte B sich stärker zu großen Abständen verschieben, wenn Energie zugeführt wird, als die Punkte A zu kleineren Abständen, so verlagert sich die Gleichgewichtslage  $r_0$ , die Gitterkonstante also, bei zunehmender Temperatur zu größeren Werten. Das Kristallgitter dehnt sich aus. Die thermische Ausdehnung aller festen Körper beruht demnach auf der Unsymmetrie der Potentialkurve.

Das Wasser zeigt, bedingt durch seinen großen Anteil an Wasserstoffbrückenbindungen, bezüglich seiner thermischen Ausdehnung ein anomales Verhalten. Zwischen  $0^\circ\text{C}$  und  $4^\circ\text{C}$  dehnt es sich bei Erwärmung nicht aus, sondern zieht sich zusammen:  $\alpha$  ist negativ. Erst oberhalb von  $4^\circ\text{C}$  wird  $\alpha_{\text{H}_2\text{O}}$  wieder positiv. Die Dichte des Wassers ist also bei  $4^\circ\text{C}$  am größten. Diese Anomalie ist bedeutungsvoll für die im Wasser lebenden Organismen. Kühlt sich im Winter ein Gewässer infolge von Lufttemperaturen unter  $4^\circ\text{C}$  ab, so sinkt Wasser, das  $4^\circ\text{C}$  erreicht hat, wegen seiner größeren Dichte auf den Grund. Das unter  $4^\circ\text{C}$  abgekühlte Wasser bleibt dagegen an der Oberfläche und gefriert dort bei weiterer Abkühlung. Bei genügender Wassertiefe sinkt auf diese Weise die Temperatur auf dem Grund im Winter nicht unter  $4^\circ\text{C}$ , so dass die Gewässer nicht völlig gefrieren.

### 13.2 Wärmeübergang, Wärmetransport

Die Ausbreitung der Wärme erfolgt durch *Wärmestrahlung*, *Wärmeleitung* und *Konvektion*.

Alle Körper strahlen Wärme ab (Emission) und nehmen *Wärmestrahlung*, die von anderen Körpern ausgeht, auf (Absorption). Die Wärmestrahlung ist wie das Licht eine elekt-

romagnetische Strahlung, die wir in Kap. 17.9 behandeln werden. Durch sie kann Wärmeenergie auch im materiefreien Raum transportiert werden (Beispiel: die Sonneneinstrahlung durch den Weltraum auf die Erde). Welche Energie ein Körper durch Wärmestrahlung abgibt, ist nur von seiner Eigentemperatur abhängig, aber nicht von der Temperatur der Umgebung.

Die *Wärmeleitung* erfolgt nur in Materie und setzt ein Temperaturgefälle voraus. Sie ist ein Transportphänomen. Die Größe, die dabei transportiert wird, ist die thermische Energie der Atome oder Moleküle. Durch Wärmeleitung kann Wärme stets nur von heißen zu kälteren Bereichen transportiert werden. Sie stellt einen irreversiblen Vorgang dar, und der Fluss der Wärmeenergie vom heißen zum kälteren Bereich ist mit einer Zunahme der Entropie verbunden.

Wir betrachten als einfaches Beispiel einen Stab der Länge  $l$  und der Querschnittsfläche  $A$ . Seine beiden Enden seien mit Wärmereservoirs (z. B. mit Wasser gefüllte große Gefäße) verbunden, die sich auf den verschiedenen, festen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  befinden (Abb. 13.1). Dabei soll  $T_1$  größer sein als  $T_2$ . Wartet man genügend lange, dann bildet sich ein stationäres Temperaturgefälle  $(T_1 - T_2)/l$  in dem Stab.

Die pro Zeit durch den Querschnitt  $A$  hindurchströmende Wärmemenge  $Q/t$  ist dem Temperaturgefälle und dem Querschnitt  $A$  proportional:

$$\frac{Q}{t} = \frac{\lambda A(T_1 - T_2)}{l} \tag{13-3}$$

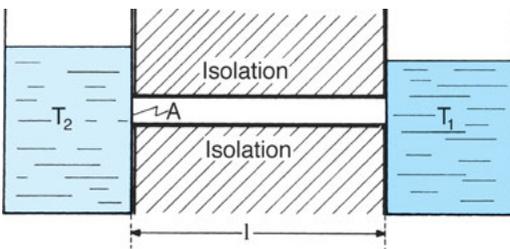


Abb. 13.1 Zur Definition der Wärmeleitfähigkeit ( $T_1 > T_2$ ).

Tab. 13.2 Wärmeleitzahlen  $\lambda$  in  $J m^{-1} s^{-1} K^{-1}$  einiger Stoffe bei  $0^\circ C$

Ag	427
Al	237
Pt	71
Glas	0,76
Wasser	0,56
Luft	0,026

$\lambda$  wird als *Wärmeleitfähigkeit*, *Wärmeleitfähigkeit* oder *Wärmeleitvermögen* bezeichnet, sie ist für das Material des Stabes charakteristisch. Ihre SI-Einheit ist  $J m^{-1} s^{-1} K^{-1}$ .

Schlechte Wärmeleiter sind Luft, Holz, Glas, Wasser, Styropor, etc. Besonders gute Wärmeleiter sind die Metalle (Tab. 13.2).

Bei Gasen findet man das überraschende Ergebnis, dass  $\lambda$  vom Druck und damit bei konstanter Temperatur von der Teilchendichte unabhängig ist, wenn der Druck nicht unter 10 Pa ( $\approx 10^{-1}$  Torr) sinkt. Unterhalb dieser Grenze wird  $\lambda$  mit abnehmendem Druck kleiner. Daher werden zur thermischen Isolierung spezielle Gefäße mit doppelten Wänden und evakuiertem Zwischenraum gebaut (Dewar-Gefäß, Thermosflasche).

Bei der Wärmeleitung wird die Wärmeenergie von Molekül zu Molekül durch Stöße weitergegeben. Darüber hinaus finden wir in Flüssigkeiten und Gasen eine andere, mit Materietransport gekoppelte Art des Wärmetransports, die *Konvektion*. Sie beruht auf der thermischen Volumenausdehnung, wodurch die Dichte erwärmter Schichten abnimmt. Diese wärmeren Schichten mit geringerer Dichte erfahren in kälterer Umgebung mit größerer Dichte einen Auftrieb und steigen nach oben, wogegen kalte Schichten im Schwerfeld nach unten sinken. Dadurch kann die in den wärmeren Schichten gespeicherte Wärmeenergie sehr schnell über große Entfernungen transportiert werden. (Zum Beispiel erwärmt sich ein Wasserkessel über einem Holzfeuer wegen der kleinen Wärmeleitfähigkeit von Luft nicht durch Wärmeleitung, sondern im Wesentlichen durch Konvektion.) Durch Behinderung der Konvektion lässt sich

die Wärmeisolierung wesentlich erhöhen (Wärmeisolation durch Bekleidung).

Im Allgemeinen tragen alle drei Mechanismen (Wärmestrahlung, -leitung und Konvektion) zum Wärmetransport in einer Heizanordnung (z. B. einem Heizkörper in Luft) bei. Zur einfachen Beschreibung des *gesamten* Vorgangs kann man sich der pauschalen Größe *Wärmeübergangszahl*  $\alpha_w$  bedienen. In ihr sind die verschiedenen Arten des Wärmetransportes sowie

die geometrischen Verhältnisse der betrachteten Heizanordnung berücksichtigt.  $\alpha_w$  ist von der Beschaffenheit der Oberflächen und den Strömungsverhältnissen in den beteiligten Medien abhängig. Die Wärmeübergangszahl ist definiert durch

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha_w O (T_1 - T_2), \quad (13-4)$$

wobei  $O$  die Oberfläche des Heizkörpers ist. Die SI-Einheit von  $\alpha_w$  ist  $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}$ .

## 13.3 Stoffgemische

Viele feste, flüssige und gasförmige Stoffe lösen sich in Flüssigkeiten, mit denen sie in Berührung gebracht werden. Die so entstandene *Lösung* ist gekennzeichnet durch eine vollständige Mischung der Teilchen der gelösten Substanz mit denen des Lösungsmittels. In vielen Fällen sind alle Mischungsverhältnisse möglich. Dies gilt insbesondere für Lösungen von Flüssigkeiten in Wasser. Manche Stoffe dagegen sind nur begrenzt löslich. Lösungen der höchstmöglichen Konzentration des gelösten Stoffes nennen wir gesättigt. Die *Sättigungskonzentration* hängt von der Temperatur der Lösung ab. Der Anteil einer festen Substanz, der nicht in Lösung gegangen ist, bildet den sogenannten *Bodenkörper*.

Das Verständnis von Lösungen und deren Eigenschaften ist für die Medizin von wesentlicher Bedeutung. Kann man doch den Orga-

nismus als eine Zusammensetzung verschiedener Flüssigkeitsräume betrachten, wobei das gesamte Stoffwechselsystem durch Eigenschaften der verschiedenen Flüssigkeitsräume und durch den Austausch von gelösten Stoffen zwischen diesen Räumen, dem Vasalraum, Extrazellularräum und Intrazellularräum bestimmt wird.

### 13.3.1 Gehaltsangaben von Lösungen

Der Gehalt einer Lösung lässt sich durch verschiedene Größen beschreiben (Tab. 13.3).

1. Die wichtigste Konzentrationsangabe ist die *Stoffmengenkonzentration*  $c_i$  oder kurz *Konzentration* (SI-Einheit:  $\text{mol m}^{-3}$ , übliche Einheit:  $\text{mol l}^{-1}$ ). Die Begriffe Molarität und molare Lösung sollen nicht mehr verwendet

**Tab. 13.3** Gehaltsangaben von Lösungen

Messgröße	Definition	Einheit
Stoffmengenkonzentration (Konzentration; früher: Molarität)	Stoffmenge eines gelösten Stoffes durch Volumen der Lösung	$\text{mol m}^{-3}$ (oder $\text{mol l}^{-1}$ )
Molalität	Stoffmenge eines gelösten Stoffes durch Masse des Lösungsmittels	$\text{mol kg}^{-1}$
Massenkonzentration	Masse eines gelösten Stoffes durch Volumen der Lösung	$\text{kg m}^{-3}$ (oder $\text{g l}^{-1}$ )
Stoffmengenanteil	Stoffmenge eines gelösten Stoffes durch Stoffmenge aller in der Lösung vorhandenen Stoffe	1
Massenanteil	Masse eines gelösten Stoffes durch Masse aller in der Lösung vorhandenen Stoffe	1
Volumenanteil	Volumen eines gelösten Stoffes durch Gesamtvolumen der Lösung	1

werden. Bei der Stoffmengenkonzentration wird die Stoffmenge des gelösten Stoffs auf das Volumen der Lösung, nicht des Lösungsmittels, bezogen.

2. Eine weitere Konzentrationsangabe ist die *Molalität*  $b_i$  (SI-Einheit: mol kg<sup>-1</sup>). Sie gibt die Stoffmenge des gelösten Stoffes bezogen auf die Masse des Lösungsmittels an. Bei verdünnten Lösungen ist der Zahlenwert der Konzentration in mol l<sup>-1</sup> und der Molalität in mol kg<sup>-1</sup> praktisch gleich.

3. Die *Massenkonzentration*  $\beta_i$  (SI-Einheit: kg m<sup>-3</sup>, übliche Einheit: g l<sup>-1</sup>) ist die Masse eines gelösten Stoffes bezogen auf das Volumen der Lösung.

4. Neben diesen Konzentrationsangaben lässt sich eine Lösung auch durch die Größen *Stoffmengenanteil*, *Massenanteil* und *Volumenanteil* angeben. Alle drei Größen haben die Dimension 1 und können auch in Prozent angegeben werden.

Der *Stoffmengenanteil*  $x_i$  (früher: Molenbruch) ist definiert als das Verhältnis der Stoffmenge  $n_i$  des gelösten Stoffes  $i$  zur gesamten Stoffmenge  $n_{\text{ges}}$  aller in der Lösung vorhandenen Stoffe:  $x_i = n_i/n_{\text{ges}}$ .

Der *Massenanteil*  $w_i$  gibt an, welche Masse  $m_i$  einer gelösten Substanz in der gesamten Masse  $m_{\text{ges}}$  der Lösung enthalten ist:  $w_i = m_i/m_{\text{ges}}$ .

Bei der Mischung verschiedener Flüssigkeiten und bei Gasgemischen wird die Angabe des *Volumenanteils*  $\varphi_i$  bevorzugt. Er ist das Verhältnis aus dem Volumen des gelösten Stoffes  $V_i$  vor der Mischung und dem Gesamtvolumen  $V_{\text{ges}}$  der Lösung oder der Mischung:  $\varphi_i = V_i/V_{\text{ges}}$ . Bei Gasen ist die Angabe des Volumenanteils nur dann sinnvoll, wenn  $V_i$  vorher auf *Normalbedingungen* ( $T = 273,15$  K,  $p = 101,325$  kPa = 1 atm) umgerechnet wurde. In der Medizin wird der Volumengehalt häufig bei der Analyse der Atemgase benutzt.

### 13.3.2 Echte Lösung, kolloidales System, grobe Dispersion

Bei Stoffgemischen (dispersen Systemen) unterscheiden wir je nach Zerteilungsgrad (Dispersionsgrad) zwischen *echten Lösungen*, *kolloidalen Systemen* und *grogen Dispersionen*. In echten Lösungen sind Stoffe als Atome, Ionen oder Moleküle (mit niedriger molarer Masse) gelöst. Bei ihnen findet keine Entmischung statt, wenn man sie über längere Zeit stehen

lässt. Sie sind stabil und bilden ein homogenes System. In kolloidalen und grobdispersen Systemen sind dagegen größere Bereiche nebeneinander vorhanden, die aus unterschiedlichen Materialien (kolloidale Teilchen bzw. Lösungsmittel) bestehen. Kolloidale Teilchen können zwischen 10<sup>2</sup> und 10<sup>10</sup> Atome oder Moleküle enthalten, wobei die Grenzen zu den echten Lösungen einerseits und den groben Dispersionen (mit noch größeren Teilchen) andererseits fließend sind.

Kolloidale Teilchen sind zu klein, um im Lichtmikroskop sichtbar zu sein, man kann sie aber durch das von ihnen gestreute Licht (Tyndall-Effekt, Kap. 18.5.2) oder mit dem Elektronenmikroskop (Kap. 20.4) nachweisen. Falls die Viskosität des Lösungsmittels nicht zu groß ist, unterliegen diese Teilchen einer intensiven Wärmebewegung (Brown'sche Molekularbewegung, Kap. 10.4), welche bei kleinen kolloidalen Teilchen in Flüssigkeiten oder Gasen die Sedimentation (Kap. 5.3.3.2.2) verzögert oder gar verhindert. In flüssigen Systemen ist eine Abscheidung dispergierter Stoffe aus der Flüssigkeit durch Zentrifugation (Kap. 5.3.3.2.2) möglich.

Ein besonderes Merkmal disperser Systeme ist die große Gesamtoberfläche (bzw. -grenzfläche) aller Teilchen. Je kleiner man bei konstanter Substanzmenge die Teilchen macht, um so größer wird die Gesamtoberfläche. Zum Beispiel wird durch Zerteilen eines kompakten Stoffes mit einem Volumen von 1 cm<sup>3</sup> in 100 nm bzw. 10 nm große Teilchen die Gesamtoberfläche auf das 10<sup>5</sup> bzw. 10<sup>6</sup>fache vergrößert. Chemische Prozesse, die bevorzugt an Grenzflächen ablaufen (z. B. heterogene Katalyse), werden daher zumeist in kolloidalen Systemen durchgeführt.

Wegen der hohen, in den Grenzflächen der Teilchen gespeicherten Grenzflächenenergie (Kap. 5.3.1) sind kolloidale Systeme nicht stabil. Ohne zusätzliche Stabilisierungsmaßnahmen (z. B. Bildung von Ionenschichten an den Grenzflächen in Hydrosolen) klumpen die Teilchen von selbst zusammen, wodurch die gesamte Grenzfläche verkleinert und ein Teil der gespeicherten Grenzflächenenergie freigesetzt wird (*Koagulation*, *Koaleszenz*).

Beispiele für Kolloide:

Aerosol	(feste Teilchen in Gas, z. B. Rauch)
Aerosol	(flüssige Teilchen in Gas, z. B. Nebel)
Sol	(feste Teilchen in Flüssigkeit, z. B. Ag in H <sub>2</sub> O (argentum colloidal))
Emulsion	(flüssige Teilchen in Flüssigkeit, z. B. Milch)
Schaum	(Gas in Flüssigkeit, z. B. Schlagsahne)
Disperse Festkörper	(feste Teilchen in fester Matrix, z. B. fotografisches Filmmaterial)

Beispiele für Makromoleküle in kolloidalen Systemen: Faserproteine (Keratin), Kugelproteine (Hämoglobin), Polymerknäuel

Kolloidale Systeme, speziell Eiweiße (Enzyme und Fermente), sind im biologischen Bereich von großer Bedeutung. So ist der Eiweißgehalt des Blutplasmas wichtig für die Steuerung des Wasseraustauschs in den Blutkapillaren, für die Konstanthaltung des pH-Wertes im Blut usw.

Für Materiepartikel, deren Größe in die Längenskala von Nanometern fällt, hat sich die Bezeichnung *Nanopartikel* eingebürgert. Durch die Nanostrukturierung lassen sich oftmals völlig neuartige Materialeigenschaften erzeugen.

### 13.3.3 Henry-Dalton'sches Gesetz

Gase sind in Flüssigkeiten bis zu einem gewissen Grad löslich (z. B. CO<sub>2</sub> in Sprudelwasser). Ihre Sättigungskonzentration hängt von Temperatur und Druck ab. Sie ist direkt proportional dem Druck des Gases über der Lösung. Dies ist in Worten ausgedrückt, der Inhalt des *Henry-Dalton-Gesetzes*. Dieser Zusammenhang gilt auch, wenn mehrere Gase (zum Beispiel Luft) in einer Flüssigkeit gelöst werden; die Konzentration einer Gaskomponente in der Lösung ist dann proportional ihrem Partialdruck über der Lösung.

Beim Durchgang von Blut durch die Lunge nimmt die Konzentration molekularen Sauerstoffs im Blut wegen des erhöhten O<sub>2</sub>-Partialdrucks in den Lungenalveolen schlagartig zu. Trotzdem würde der Sauerstofftransport im Blut auf der Basis eines in einer Flüssigkeit gelösten Gases bei weitem nicht ausreichen, um den Körper mit genügend Sauerstoff zu versorgen. Durch die chemische Bindung von O<sub>2</sub> an das Hämeisen im Hämoglobin kann jedoch die Menge des transportierten molekularen Sauerstoffes bis fast auf das Hundertfache der im Plasma gelösten Sauerstoffmenge gesteigert werden.

### 13.3.4 Hydratation, Solvatation

Den Lösungsvorgang ionogener Festkörper oder elektrisch polarer Moleküle in Wasser bezeichnet man als *Hydratation*.

Die dabei entstehenden Hydrat-Komplexe (z. B. [Fe(H<sub>2</sub>O)<sub>4</sub>]<sup>++</sup>, [Fe(H<sub>2</sub>O)<sub>6</sub>]<sup>+++</sup>) sind gekennzeichnet durch elektrostatische Wechselwirkung zwischen Festkörperionen (z. B. Fe<sup>++</sup>, Fe<sup>+++</sup>) oder Molekülen einerseits und Wasserdipolen (H<sub>2</sub>O) andererseits.

Wird anstelle des Wassers ein anderes Lösungsmittel verwendet, dessen Moleküle ebenfalls ein elektrisches Dipolmoment besitzen (z. B. Alkohol), spricht man allgemein von *Solvation* und *Solvat-Komplexen*.

Solvat-Komplexe (Hydrate, Alkoholate usw.) sind um so beständiger, je größer das elektrische Dipolmoment des Lösungsmittels und je kleiner der Abstand ist, bis zu dem sich der Dipol des Lösungsmittelmoleküls dem Ion oder Molekül des zu solvatisierenden Stoffes nähern kann. Die Zahl (*Solvationszahl*) der direkt angelagerten Lösungsmitteldipole hängt von Größe und Ladung der Ionen oder Moleküle ab. Sie beträgt meist 4, 6 oder 8; darüber hinaus können sich weitere Dipole schwächer gebunden anlagern. Da das Solvat durch anziehende elektrostatische Wechselwirkung zwischen gelöstem Stoff und Lösungsmitteldipolen zustande kommt, wird bei der Solvatbildung *Solvationswärme* frei. Dies ist die Energie, die nötig wäre, um das Ion oder Molekül von seiner Solvathülle wieder zu befreien.

Eiweißstoffe neigen wegen ihrer elektrisch polarisierten Bestandteile zur Solvatation. Dies verhindert ihre gegenseitige Annäherung und damit ihre Ausflockung (*Koagulation*). Ihre Lösungen sind daher in geeigneten Lösungsmitteln beständig.

Kolloidale Metalle neigen dagegen nur wenig zur Solvatbildung. Sie lassen sich jedoch dadurch in beständige Kolloide verwandeln, dass ihnen solvatisierende Stoffe (sogenannte *Schutzkolloide* wie Gelatine) hinzugefügt werden, die eine Hülle bilden. Dadurch gelingt es, in der Medizin verwendete Kolloide über längere Zeiträume injektionsfähig zu erhalten.

### 13.3.5 Diffusion

Mischt man zwei verschiedene Flüssigkeiten oder Gase miteinander, so geschieht dies

hauptsächlich durch Verwirbelungen und Strömungen beim Einfüllvorgang (Mischung durch Konvektion). Überschichten wir die Stoffe vorsichtig, um die Konvektion zu vermeiden, so beobachten wir trotzdem eine mit der Zeit zunehmende Durchmischung. Sie kommt durch *Diffusion* zustande. Infolge der Wärmebewegung und der wiederholten Zusammenstöße der Moleküle untereinander breiten sich die Moleküle beider Substanzen gleichmäßig im ganzen Volumen aus. Höhere Temperatur, d. h. größere Molekulargeschwindigkeit, bewirkt eine größere Diffusionsgeschwindigkeit. Der Mischungsvorgang durch Diffusion findet erst ein Ende, wenn sich im gesamten Volumen einheitliche Konzentrationen aller Mischpartner eingestellt haben.

Durch Diffusion geht ein geordneter Zustand in einen ungeordneten über, es handelt sich also um einen irreversiblen Vorgang, der mit Entropieerhöhung verbunden ist.

Die Diffusion ähnelt in dieser Hinsicht der Wärmeleitung. Auch die formale Beschreibung der Diffusion durch das *1. Fick'sche Gesetz* ist derjenigen der Wärmeleitung analog (wir wollen hier infinitesimal kleine Größen verwenden):

$$\frac{dn}{dt} = -Dq \frac{dc}{dx} \quad (13-5)$$

Der Stoffmengenfluss  $\frac{dn}{dt}$  durch die Querschnittsfläche  $q$  ist also dem Konzentrationsgradienten  $\frac{dc}{dx}$  proportional. Die Proportionalitätskonstante  $D$  ist der *Diffusionskoeffizient* mit der SI-Einheit  $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ .

Die Diffusion ist bedeutsam für den Austausch von Gasen, Nährstoffen und Schlackenstoffen zwischen dem Blut und den verschiedenen Geweben. Der Übergang des Sauerstoffs beispielsweise von den Lungenalveolen bis zur Bindung an das Hämoglobin in den Erythrozyten erfolgt ebenso durch Diffusion wie derjenige in den Blutkapillaren vom Hämoglobin zu den Zellen der verschie-

denen Gewebe. Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Verteilung der Nährstoffe auf die Gewebe und beim Abtransport von  $\text{CO}_2$  zur Lunge und von Schlackenstoffen zur Niere. Da die Diffusion ein relativ langsamer Vorgang ist, kann sie für die Versorgung der Gewebe bei erhöhtem Bedarf zur limitierenden Größe werden.

### 13.3.6 Osmose

Poröse Trennwände, deren Porengröße so beschaffen ist, dass die Moleküle eines Lösungsmittels hindurch diffundieren können, nicht jedoch die Teilchen einer gelösten Substanz, nennen wir *semipermeabel* (halbdurchlässig). Befinden sich auf den beiden Seiten der semipermeablen Membran in dem in Abb. 13.2 gezeigten Gefäß zwei Lösungen gleicher Art, jedoch mit verschiedenen Konzentrationen des gelösten Stoffes ( $c_1 < c_2$ ), so stellen wir fest, dass der Flüssigkeitsspiegel im linken Steigrohr sinkt und im rechten entsprechend ansteigt. Der Grund für dieses Verhalten ist, dass das Lösungsmittel zu der Gefäßseite diffundiert, in der sich die Lösung mit der höheren Konzentration befindet. Dadurch wird der Konzentrationsunterschied zwischen beiden Flüssigkeiten verringert. Der Transport des Lösungsmittels durch die Trennwand dauert so lange an, bis der mit dem Höhenunterschied  $h$  auf der rechten Seite verbundene erhöhte hydrostatische Druck ein weiteres Eindringen des Lösungsmittels verhindert. Im Gleichgewicht ist die Differenz der hydrostatischen Drucke (siehe Gl. (5-13)) auf beiden Seiten entgegengesetzt gleich der Differenz der *osmotischen Drucke*  $\Delta p_{\text{osm}}$  in den Lösungen links

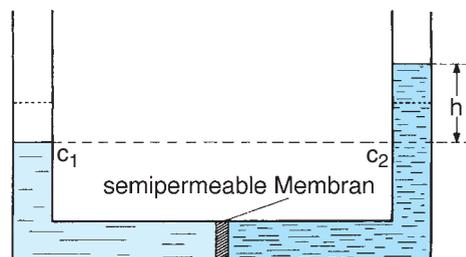


Abb. 13.2 Osmose ( $c_1 < c_2$ ).

und rechts von der Membran. Durch Messung von  $h$  lässt sich  $\Delta p_{\text{osm}}$  bestimmen.

Bei geringen Konzentrationen der gelösten Substanz lässt sich der osmotische Druck  $p_{\text{osm}}$  nach dem *van't Hoff'schen Gesetz* berechnen, das formal mit der Zustandsgleichung idealer Gase übereinstimmt:

$$p_{\text{osm}}V = nRT. \quad (13-6)$$

$n$  ist dabei die Stoffmenge des im Volumen  $V$  gelösten Stoffes.

Der osmotische Druck ist also nach Gl. (13-6) der Druck, den die gelösten Teilchen auf die für sie undurchlässige Wand ausüben würden, wenn das Lösungsmittel nicht vorhanden wäre und sich die Teilchen wie ein ideales Gas verhalten würden. Wesentlich ist, dass in Gl. (13-6) nur die Menge, nicht aber die chemische Natur der gelösten Stoffe eingeht.

Sind in einer Lösung mehrere Substanzen mit den Stoffmengen  $n_i$  vorhanden, so ergibt sich analog zu Gl. (9-11) der osmotische Gesamtdruck  $p_{\text{ges. osm}}$  als Summe der Einzeldrucke:

$$p_{\text{ges. osm}}V = \sum_i n_iRT. \quad (13-7)$$

Bei Stoffen, die in einem Lösungsmittel dissoziieren, sind für  $n_i$  die Stoffmengen der entstehenden Ionen und der verbleibenden undissoziierten Substanz einzusetzen. Außerdem ist zu beachten, dass nur diejenigen Teilchen effektiv zur Differenz der osmotischen Drucke ( $\Delta p_{\text{osm}} = p_{\text{osm}}^{\text{rechts}} - p_{\text{osm}}^{\text{links}}$ ) beitragen, für die die eingebaute Membran undurchlässig ist.

**Der osmotische Druck im Organismus** Da in allen Flüssigkeitsräumen des Organismus (Intrazellularraum, Extrazellularraum, Vasalraum) Moleküle und Ionen gelöst sind, ist entsprechend ihren Konzentrationen in diesen Flüssigkeitsräumen ein osmotischer Druck vorhanden. Alle Zellmembranen sind für Wasser und zum Teil auch für gelöste Stoffe permeabel. Im Gleichgewichtszustand hat der osmotische Gesamtdruck in allen Flüssigkeitsräumen den gleichen Wert von

$7 \cdot 10^5$  Pa ( $\approx 7$  Atmosphären). Dies besagt jedoch nicht, dass in allen Flüssigkeitsräumen die Konzentrationen der verschiedenen Moleküle und Ionen gleich sind, es besagt nur, dass die Summe der Konzentrationen aller gelösten Stoffe, die in Gl. (13-7) zum osmotischen Druck beitragen, gleich sind. Einzelne Ionenarten sind in den Flüssigkeitsräumen mit beträchtlich unterschiedlichen Konzentrationen enthalten. So ist im Intrazellularraum die Konzentration des Kaliums etwa 30mal so groß wie im Extrazellularraum, und für Natrium ist das Konzentrationsverhältnis gerade umgekehrt.

Wegen der Konstanz des osmotischen Gesamtdrucks im ganzen Körper können seine Auswirkungen am intakten Organismus nicht beobachtet werden. Sie lassen sich jedoch eindrucksvoll an einzelnen Zellen, z. B. an Erythrozyten sichtbar machen, die man dem Organismus entnimmt und in Lösungen verschiedener Konzentration bringt. Ist in der Lösung der osmotische Gesamtdruck geringer als in Erythrozyten (*hypotone Lösung*), so diffundiert zunächst Wasser durch die semipermeablen Zellwände in die Erythrozyten. Ist die Hypotonie genügend groß, so führt das Hineindiffundieren des Wassers zu einer Quellung der Zelle, und falls die Elastizitätsgrenze der Zellmembran überschritten wird, zum Platzen (Hämolyse). Dadurch, dass man feststellt, bei welcher Konzentration der Lösung die Erythrozyten platzen, überprüft man deren *osmotische Resistenz*, d. h. die Elastizität der Erythrozytenmembran. Bringt man Erythrozyten in eine Lösung, deren osmotischer Gesamtdruck größer ist als der der Blutzellen (*hypertone Lösung*), so hat dies einen Wasserverlust und damit ein Schrumpfen der Zellen zur Folge. Nur bei gleichem osmotischem Gesamtdruck in Zelle und Lösung (*isotone Lösung*) findet kein Wassertransport und damit auch keine Formveränderung der Erythrozyten statt. Werden Gewebeproben dem Organismus entnommen und für Experimente im nativen Zustand verwendet, so müssen sie demnach in isotoner Lösung aufbewahrt werden. Bei der Injektion von hypotonen bzw.

hypertonen Lösungen in den Organismus kommt es ebenfalls zu Formveränderungen der Organzellen. Um dies zu vermeiden, sollen nur isotone Lösungen injiziert werden. Eine solche ist z. B. die zum Blutplasma isosmotische Lösung von 9 g NaCl in 1 l Wasser; ihr osmotischer Druck beträgt 0,79 MPa und ist damit 7,9 mal größer als der normale Atmosphärendruck.

**Osmotische Arbeit der Niere** Die Niere ist im Organismus das wichtigste Organ zur Konstanthaltung des osmotischen Drucks. Hierbei wird durch die Niere jedoch nicht nur global der osmotische Druck geregelt. Vielmehr erfolgt die Ausscheidung der gelösten Stoffe aus dem Blutplasma selektiv. Es werden diejenigen Stoffe ausgeschieden, die für den Organismus Abfallprodukte darstellen, und von den für den Organismus wichtigen Substanzen diejenigen, von denen auf Grund der Nahrungszufuhr eine zu hohe Konzentration im Plasma vorliegt. Bei der Aufbereitung des Urins aus dem Plasma werden insbesondere die Abfallprodukte beträchtlich angereichert, was durch entsprechende osmotische Arbeit der Niere erreicht wird. Am mengenmäßig wichtigsten Abfallprodukt, dem Harnstoff, soll dies erläutert werden. In Plasma sind normalerweise  $0,005 \text{ mol l}^{-1}$  Harnstoff gelöst. Im Urin dagegen sind es im Mittel  $0,33 \text{ mol l}^{-1}$ . Bei einer Urinmenge von  $1,5 \text{ l}$  pro Tag entspricht also dessen Gehalt an Harnstoff demjenigen von ca.  $100 \text{ l}$  Plasma, d. h.  $0,5 \text{ mol}$  Harnstoff. Physikalisch entspricht dies dem folgenden Sachverhalt: Aus  $100 \text{ l}$  einer  $0,005$  molaren Harnstofflösung sind  $98,5 \text{ l}$  Wasser entgegen dem osmotischen Druck abzapressen. Dazu ist die folgende Volumenarbeit erforderlich:

$$\begin{aligned} W_{\text{osm}} &= - \int_{100}^{1,5} p \, dV \\ &= -0,5RT \int_{100}^{1,5} \frac{dV}{V} \\ &= 0,5RT (\ln 100 - \ln 1,5) \\ &= 5410 \text{ Joule} = 1,29 \text{ kcal} . \end{aligned}$$

## 13.3.7 Phasenübergänge

### 13.3.7.1 Umwandlungswärmen

Thermodynamische Zustandsänderungen eines Stoffes bewirken, dass sich die Wechselwirkungskräfte zwischen seinen Bausteinen (Atome, Ionen) ändern. Dies kann zur Folge haben, dass der Stoff von einem Aggregatzustand in einen anderen übergeht (Kap. 5.1.2). Aus diesem Grund verwandelt sich ein Festkörper bei Erwärmung in eine Flüssigkeit und bei weiterer Temperaturerhöhung in ein Gas. Diese Zustände eines chemisch einheitlichen Stoffes bezeichnet man auch als *Phasen* eines Stoffes. Zu den genannten können im Festkörper weitere unterschiedliche Phasen hinzukommen, z. B. wenn der Festkörper in verschiedenen Kristallstrukturen existieren kann.

Führen wir einem Stück Eis einen zeitlich konstanten Wärmestrom  $\left(\frac{Q}{t} = \text{konst.}\right)$  zu und messen wir seine Temperatur, so zeigt sich, dass die Temperatur entsprechend der Erhöhung der inneren Energie des Eises mit der zugeführten Wärmemenge steigt. Bei Erreichen der Schmelztemperatur  $T_{\text{sm}}$ , wenn also die Phasenumwandlung von Eis zu Wasser erfolgt, bleibt die Temperatur trotz weiterer Wärmezufuhr konstant (Abb. 13.3 und Tab. 13.4). Sie steigt erst wieder, wenn alles Eis in Wasser umgewandelt ist. Der gleiche Vorgang wird bei Erreichen der Siedetemperatur  $T_{\text{si}}$  beobachtet.

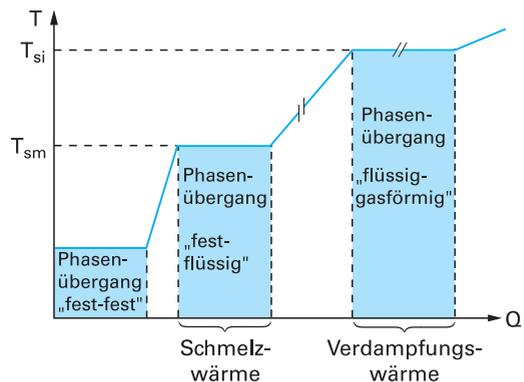


Abb. 13.3 Umwandlungswärmen.

**Tab. 13.4** Spezifische Umwandlungswärmen  $Q_U$  in  $\text{J kg}^{-1}$  von Wasser

Phasenübergang	$Q_U$
fest-flüssig (Schmelzen)	$3,35 \cdot 10^5$
fest-gasförmig (Sublimation bei $0^\circ\text{C}$ )	$\approx 26 \cdot 10^5$
flüssig-gasförmig (Verdampfen)	$22,6 \cdot 10^5$

Nach Abb. 13.3 ist offensichtlich Wärmeenergie erforderlich, um die Phasenübergänge *fest* – *flüssig* (Schmelzen) bzw. *flüssig* – *gasförmig* (Sieden) zu ermöglichen, ohne dass diese Wärmemengen eine Temperaturerhöhung bewirken. Man nennt diese Wärmemengen, die zur Umwandlung verschiedener Phasen ineinander erforderlich sind, *latente Wärmen* oder *Umwandlungswärmen*  $Q_U$ .

Bezogen auf die Masse bzw. die Stoffmenge der Substanz werden sie als *spezifische* bzw. *molare Umwandlungswärmen* bezeichnet. Dazu gehören die *spezifische Schmelzwärme* und die *spezifische Verdampfungswärme*. Die als Umwandlungswärmen bezeichneten Energien sind erforderlich, um gegen Bindungskräfte Arbeit zu verrichten, sei es, um beim Schmelzvorgang die Kristallstruktur aufzubrechen, oder um bei der Verdampfung die Abstände zwischen den Molekülen genügend zu vergrößern.

Neben den Umwandlungen *fest* – *flüssig* und *flüssig* – *gasförmig* ist auch die Phasenumwandlung *fest* – *gasförmig* möglich. Diesen Vorgang nennt man *Sublimation*, die dazu nötige latente Wärme pro kg Substanz die *spezifische Sublimationswärme*. Als Beispiel sei die Sublimation von festem  $\text{CO}_2$  (*Trockeneis*) genannt. In Näherung ist die Sublimationswärme gleich der Summe aus Schmelzwärme und Verdampfungswärme, denn zur Sublimation ist sowohl die Zerstörung der Festkörperstruktur als auch die Volumenvergrößerung beim Übergang zum Gaszustand erforderlich.

Zu den latenten Wärmen zählt auch die zur Umwandlung verschiedener Kristallstruk-

turen eines Festkörpers nötige Wärmeenergie (Phasenübergang *fest* – *fest*). Beispiele sind die Strukturumwandlungen von Eis bei ca.  $-80^\circ\text{C}$  und von Zinn bei ca.  $20^\circ\text{C}$  (*Zinnpest*).

Senken wir die Temperatur eines Gases, so wird die Kurve der Abb. 13.3 in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen. Die Verdampfungswärme, die als latente Wärme im Gas gespeichert ist, wird wieder an die Umgebung abgegeben, wenn das Gas die Siedetemperatur  $T_{\text{si}}$  erreicht und bei dieser Temperatur zur Flüssigkeit *kondensiert*. Derselbe Vorgang wiederholt sich, wenn die Schmelztemperatur  $T_{\text{sm}}$  erreicht wird und die Flüssigkeit bei dieser Temperatur *erstarrt*.

### 13.3.7.2 Lösungswärmen

Beim Lösen einer festen Substanz in einer Flüssigkeit wird die Gitterstruktur an der Phasengrenzfläche zwischen Festkörper und Flüssigkeit aufgebrochen, und die gelösten Teilchen breiten sich infolge der Wärmebewegung in der Flüssigkeit gleichmäßig aus. Lösen sich im speziellen Fall nur Ionen mit gleichnamiger elektrischer Ladung, dann können rüchtreibende Coulomb-Kräfte dem Lösungsvorgang Einhalt gebieten (vgl. Kap. 14.2.2). Ist zum Lösen Arbeit gegen die Kohäsionskräfte nötig, so wird der Flüssigkeit Energie entzogen, wodurch sich diese abkühlt. Dieser Effekt ist besonders ausgeprägt bei Ammoniumnitrat oder Salmiaksalz und Wasser. Umgekehrt gibt es Lösungsvorgänge, beispielsweise von Ätznatron oder Calciumchlorid in Wasser, bei denen Wärme entsteht. Dabei wird durch besonders starke Wechselwirkungen zwischen den gelösten Teilchen und den Teilchen des Lösungsmittels mehr Energie frei, als zur Auflösung des Kristallgitters nötig ist. Je nachdem, ob bei der Lösung eines Stoffes insgesamt Wärmeenergie verbraucht oder freigesetzt wird, nennt man die Lösungsreaktion *endotherm* oder *exotherm*. Verläuft der Lösungsvorgang endotherm, so wird er mit steigender Temperatur begünstigt, die Sättigungskonzentration des gelösten Stoffes nimmt mit der Temperatur

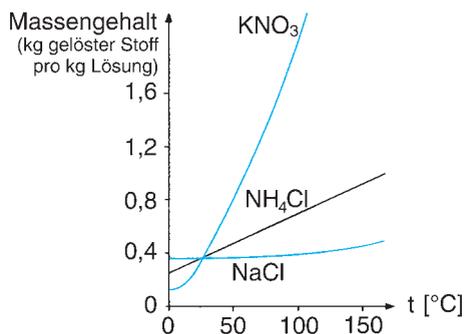


Abb. 13.4 Löslichkeitskurven für NaCl, NH<sub>4</sub>Cl und KNO<sub>3</sub> in H<sub>2</sub>O.

zu. Umgekehrt wird die Löslichkeit eines Stoffes, der sich unter Wärmeabgabe (exotherm) löst, mit zunehmender Temperatur sinken. Je mehr Wärme beim Lösen verbraucht bzw. frei wird, desto stärker wird sich die Löslichkeit bei Variation der Temperatur ändern, desto steiler verlaufen die sog. *Löslichkeitskurven* (Abb. 13.4). Die entstehende bzw. verbrauchte Wärme kann entweder auf die Masse oder die Stoffmenge der gelösten Substanz bezogen werden. Wir sprechen dann entweder von *spezifischer* oder *molarer Lösungswärme*.

### 13.3.7.3 Reaktionswärmen

Jede chemische Reaktion besteht darin, dass chemische Bindungen, d. h. Wechselwirkungen zwischen Atomen geändert werden. Diese Wechselwirkungen können bei den Reaktionsprodukten stärker oder schwächer sein als bei den Ausgangsstoffen. Entsprechend wird bei der Reaktion Energie mit der Umgebung ausgetauscht und zwar meist in Form von Wärmeenergie. Sie wird als *Bildungswärme* oder *Wärmetönung* der Reaktion bezeichnet, und man unterscheidet zwischen *exothermen* Prozessen (mit Wärmeentwicklung) und *endothermen* Prozessen (unter Wärmeaufnahme ablaufende Prozesse). Diese Bildungswärme lässt sich kalorimetrisch (Kap. 8.3) bestimmen, und in die Reaktionsformel symbolisch einbeziehen, indem wir z. B. für die exotherme Reaktion von Pb und S schreiben:



wobei die eckigen Klammern andeuten sollen, dass es sich um jeweils ein Mol fester Substanz handeln soll. Also haben 1 mol festen Bleis und 1 mol festen Schwefels zusammen einen um 7,7 kJ höheren Energieinhalt als 1 mol PbS. Der 1. Hauptsatz besagt nun, dass die Energiedifferenz immer dieselbe sein muss, wie auch die Reaktion abläuft, ob direkt oder über Zwischenstufen. Man kann also Teilreaktionen kalorimetrisch ausmessen und damit auf kompliziertere Reaktionen schließen, die der direkten Messung schwerer zugänglich sind. Ebenso kann man die Wärmetönung von Reaktionen durch Differenzbildung bestimmen.

Ein Beispiel: Will man die Bildungswärme einer organischen Verbindung ermitteln, so verbrennt man einmal die Verbindung und dann die Ausgangssubstanzen. Der Unterschied der bei den beiden Verbrennungen freiwerdenden Wärmemenge ist dann gleich der gesuchten Bildungswärme.

### 13.3.7.4 Dampfdruck

Ist ein Gefäß teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllt und verschlossen, so befinden sich auch in dem Raum über der Flüssigkeit Moleküle des flüssigen Stoffes, denn einige Flüssigkeitsmoleküle haben der Boltzmann'schen Geschwindigkeitsverteilung zufolge Geschwindigkeiten, die ausreichen, um gegen die Oberfläche anzulaufen und diese zu durchdringen, d. h. zu verdampfen. Ihre Zahl hängt nach Gl. (10-6) von der Temperatur der Flüssigkeit ab; sie steigt mit wachsender Temperatur. Da nur die schnellsten Moleküle, deren Translationsenergie sehr viel größer ist als die mittlere thermische Energie, die Flüssigkeit verlassen, kann sich der Rest der Flüssigkeit bei dem Verdampfungsvorgang merklich abkühlen; ihm wird *Verdampfungswärme* entzogen. Die Abkühlung infolge Verdampfung ist zu spüren, wenn man sich z. B. Äther über die Hand schüttet. Auf demselben Prinzip beruht die örtliche Anästhesierung, z. B. durch Äthylchlorid.

Treffen Moleküle aus der Gasphase wieder auf die Flüssigkeitsoberfläche, so können sie dort kondensieren. Sie werden also von der

Flüssigkeit wieder eingefangen. So stellt sich an der Oberfläche, bei konstanter Temperatur, ein dynamisches Gleichgewicht ein, indem ebenso häufig Moleküle aus der Flüssigkeit in den Gasraum gelangen, wie umgekehrt Moleküle aus dem Gas wieder kondensieren.

Für  $\text{H}_2\text{O}$  bei Raumtemperatur stellt sich dieses Gleichgewicht bei einem Druck des Dampfes über der Flüssigkeit (Sättigungsdampfdruck) von 2400 Pa ( $\approx 18$  Torr) ein. Pro Sekunde und  $\text{m}^2$  der Oberfläche passieren dann etwa  $10^{26}$  Moleküle die Oberfläche in Richtung Gas und ebenso viele kondensieren. Da aber pro  $\text{m}^2$  Oberfläche nur  $10^{19}$  Moleküle Platz haben, können wir ausrechnen, dass die Aufenthaltsdauer der Moleküle an der Oberfläche nur etwa  $10^{-7}$  s beträgt.

Die Zahl der in einem Gefäß pro Sekunde verdampfenden Moleküle und damit der *Sättigungsdampfdruck*  $p_s$  hängen nur von der jeweiligen Temperatur der Flüssigkeit ab, nicht aber vom äußeren Druck. Auch die Anwesenheit anderer Gase lässt den Sättigungsdampfdruck, d. h. den Partialdruck, unbeeinflusst. Wenn die Flüssigkeit schließlich vollständig verdampft ist, entsteht durch weitere Wärmezufuhr sogenannter *überhitzter* oder *ungesättigter* Dampf.

Befindet sich eine Flüssigkeit in einem offenen Gefäß, so werden die Moleküle in der Gasphase wegdiffundieren und nach und nach wird die gesamte Flüssigkeit verschwinden.

Den *Verdampfungsvorgang* an der Flüssigkeitsoberfläche unterscheiden wir vom *Siedevorgang*. Erhöht man die Temperatur einer Flüssigkeit in einem offenen Gefäß, so wird bei einer bestimmten Temperatur ihr Sättigungsdampfdruck gleich dem konstanten Außenluftdruck, und es können sich gegen den auf der Flüssigkeit lastenden Außendruck im Innern der Flüssigkeit Gasblasen bilden. Die Verdampfung von der Oberfläche bezeichnen wir als *Verdunsten*, und die Verdampfung aus dem ganzen Flüssigkeits-Innern nennen wir *Sieden*.

Die Verdunstung ist besonders bedeutsam für die Regelung der Körpertemperatur. Bei hohen Außentemperaturen, wenn also durch Wärmeleitung und Wär-

mestrahmung (vgl. Gl. (13-3)) nicht genügend Energie abgegeben werden kann, kommt es zur Absonderung von Schweiß. Bei dessen Verdunstung wird der Oberfläche des Körpers die entsprechende Verdunstungswärme entzogen, wodurch es zur Abkühlung kommt.

Die Siedetemperatur  $T_{\text{si}}$  hängt vom Außendruck ab, wobei dieser durch die Differenz von Gesamtdruck im Gasraum und Partialdruck der Flüssigkeit gegeben ist. Ist der Außendruck geringer als  $10^5$  Pa ( $\approx 1$  atm), so siedet Wasser bereits bei Temperaturen unter  $100^\circ\text{C}$ . In der Atmosphäre nimmt der Druck mit der Höhe ab, deshalb sinkt der Siedepunkt von Wasser alle 300 m um etwa  $1^\circ\text{C}$ . Auf der Zugspitze kocht Wasser daher schon bei etwa  $90^\circ\text{C}$ . Andererseits steigt  $T_{\text{si}}$ , wenn der Außendruck erhöht wird. Dies hat man sich früher z. B. in den Hochdruckdampfmaschinen zunutze gemacht; auch die Wirkung des *Schnellkochtopfes* beruht darauf, dass man durch größeren Druck den Siedepunkt des Wassers erhöht.

In der Atmosphäre stellt sich infolge der Verdunstung aus Gewässern, Erde und Pflanzen ein  $\text{H}_2\text{O}$ -Partialdruck ein, der geringer ist als der Sättigungsdampfdruck. Der Wasserdampfgehalt, den wir auch als *absolute Luftfeuchtigkeit* (SI-Einheit  $\text{kg}(\text{H}_2\text{O})/\text{m}^3$ ) bezeichnen, liegt also unter dem bei der herrschenden Temperatur maximal möglichen Wert. Wir können diesen Zustand auch durch die Angabe der *relativen Luftfeuchtigkeit* charakterisieren, indem wir angeben, wieviel Prozent von der maximal möglichen Luftfeuchtigkeit die bei der vorgegebenen Temperatur herrschende absolute Luftfeuchtigkeit beträgt.

Wie an der Phasengrenze *flüssig-gasförmig*, so wird auch über einem festen Körper ein Dampfdruck erzeugt, und zwar durch *Sublimation*. Für den Sättigungs-Sublimationsdruck gilt gleichermaßen, dass er von der Temperatur abhängt. Der Sublimationsdruck über einem festen Körper ist normalerweise wesentlich niedriger als der Dampfdruck über einer Flüssigkeit.

Zusammenfassend stellen wir fest: Die Zahl der pro Sekunde aus einer Oberflä-

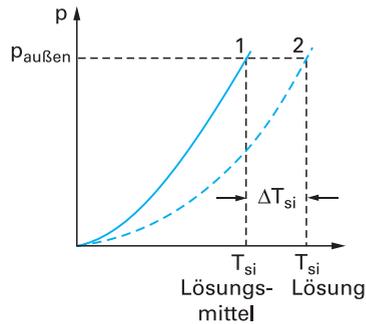
che austretenden Moleküle hängt nur von der Temperatur ab, die Zahl der rückkondensierenden jedoch vom Dampfdruck.

Sorgt man dafür, dass dieser Dampfdruck kleiner ist als der Sättigungsdampfdruck (bzw. Sättigungs-Sublimationsdruck), so wird der flüssige (feste) Stoff so lange verdampfen (sublimieren), bis er verschwunden ist.

Blasen wir über eine Tasse mit heißem Kaffee, so kühlt er nicht nur durch Konvektion mit der kälteren Atemluft ab, sondern auch, weil wir damit den Dampfdruck des verdunstenden Wassers herabsetzen. Technische Anwendung des Verdampfungsvorganges finden wir bei der Salzgewinnung, bei der  $\text{H}_2\text{O}$  aus Meerwasser durch Sonneneinstrahlung verdunstet oder Salzsole *eingekocht* wird. Die Sublimation wird technisch genutzt bei der *Gefriertrocknung* (Lyophilisation). Hierbei wird eine wasserhaltige Substanz (z. B. Kaffee, Milch, Proteine usw.) gefroren ( $-20$  bis  $-50^\circ\text{C}$ ), und dann wird durch Vakuumpumpen das sublimierende Wasser abgesaugt, bis die Trockensubstanz übrig bleibt. Vorteil der Gefriertrocknung gegenüber dem Einkochen ist, dass der Vorgang bei tiefen Temperaturen ablaufen kann und dabei wichtige Teile der Substanz unverändert erhalten bleiben (Eiweißgerinnung bei Temperaturen über ca.  $40^\circ\text{C}$ ). Die Gefriertrocknung dient auch als Verfahren für die Fixierung von Gewebeschnitten zur lichtmikroskopischen bzw. elektronenmikroskopischen Beobachtung. Wegen der besseren Erhaltung der Zellstruktur wird sie hierfür in zunehmendem Maße angewandt.

### 13.3.75 Dampfdruckerniedrigung, Siedepunktserhöhung und Gefrierpunktserniedrigung

Lösen wir einen nicht-flüchtigen Stoff (etwa: Salz) in einem Lösungsmittel (z. B. Wasser), so wird die Zahl der Moleküle des Lösungsmittels in der Flüssigkeitsoberfläche geringer; es können somit weniger Lösungsmittelmoleküle bei sonst gleichen Bedingungen aus der Oberfläche verdampfen. Andererseits wird die Rückkondensation von Lösungsmittelmolekülen aus der Gasphase in die Flüssigkeit nicht beeinflusst. Bei gleicher Temperatur ist deshalb der Dampfdruck des Lösungsmittels über einer Lösung geringer als über dem reinen Lösungsmittel. Der gelöste Stoff bewirkt also bei festgehaltener Temperatur eine *Dampfdruckerniedrigung*  $\Delta p$  des Lösungsmittels. Sie ist proportional zur Konzentration der gelösten Substanz. Da die Flüssigkeit bei



**Abb. 13.5** Siedepunktserhöhung  $\Delta T_{\text{si}}$  (im Diagramm stark übertrieben). (1) Dampfdruckkurve des Lösungsmittels, (2) Dampfdruckkurve der Lösung.

derjenigen Temperatur siedet, bei der ihr Dampfdruck gleich dem äußeren Luftdruck ist, hat die Erniedrigung des Dampfdruckes eine *Siedepunktserhöhung* zur Folge (siehe Abb. 13.5).

Von Raoult wurde gefunden, dass die Siedepunktserhöhung  $\Delta T_{\text{si}}$  bei niedrigen Konzentrationen des gelösten Stoffes zur Molalität  $b$  der Lösung (Kap. 13.3.1) proportional ist:

$$\Delta T_{\text{si}} = T_{\text{si, Lösung}} - T_{\text{si, Lösungsmittel}} = Ab. \quad (13-8)$$

Dabei ist  $A$  (*ebullioskopische Konstante*) für alle Lösungen *desselben* Lösungsmittels gleich, unabhängig von der Art des gelösten Stoffes. Bei Wasser als Lösungsmittel ergibt sich für die Konstante  $A$  der Wert  $0,5 \text{ K kg mol}^{-1}$ .

Infolge der gelösten Teilchen ist auch der Gefrierpunkt einer Lösung von dem des Lösungsmittels verschieden, und zwar ist er niedriger; eine Lösung zeigt also eine *Gefrierpunktserniedrigung*. Wir können uns vorstellen, dass die gelösten Atome als Fremdkörper die Ausbildung der regelmäßigen Gitterstruktur beim Gefrieren behindern, und dass daher die thermische Energie weiter herabgesetzt werden muss, damit dennoch die Kristallisation einsetzt. Beim Abkühlen gefriert zuerst das reine Lösungsmittel. An der Grenzfläche zwischen Lösung und festem Lösungsmittel wirken die gelösten Teilchen

mit, Lösungsmittelmoleküle aus dem festen Verband herauszulösen. Hieraus folgt, dass die *Schmelzwärme* der Lösung geringer sein muss als die des reinen Lösungsmittels. Dies bedeutet, dass der Schmelzvorgang in der Lösung bei niedrigerer Temperatur als im reinen Lösungsmittel einsetzt. Diese Erniedrigung des Schmelzpunktes (Gefrierpunktes) der Lösung gegenüber dem reinen Lösungsmittel ist nach Raoult wiederum proportional zur Molalität der Lösung:

$$\Delta T_{\text{sm}} = T_{\text{sm, Lösungsmittel}} - T_{\text{sm, Lösung}} = Bb. \quad (13-9)$$

Bei Wasser hat  $B$  (*kryoskopische Konstante*) den Wert  $1,86 \text{ K kg mol}^{-1}$ .

Das Messverfahren zur Bestimmung der Gefrierpunktniedrigung nennt man *Kryoskopie* (und die entsprechenden Geräte *Kryoskope*). Da die Gefrierpunktniedrigung ebenso wie der osmotische Druck von der Anzahl der gelösten Teilchen abhängt, lassen sich über ihre Messung das Molekulargewicht des gelösten Stoffes oder bei Berücksichtigung von Gl. (13-6) der osmotische Druck bestimmen. In der Medizin werden Kryoskope zur Messung des osmotischen Drucks von Blutseren benutzt.

Eine weitere praktische Anwendung der Gefrierpunktniedrigung sind *Kältemischungen*. In konzentrierten wässrigen Kochsalzlösungen liegt der Erstarrungspunkt bei  $-20^\circ\text{C}$ . Kältemischungen wendet man an, indem man z. B. im Winter Salz auf die Straßen streut, um deren Vereisung zu verhindern.

### 13.3.76 Koexistenz von Phasen, Phasengleichgewichte

Neben der Möglichkeit, dass eine Substanz nur in einem Aggregatzustand bzw. in einer Phase vorhanden ist, gibt es thermodynamische Zustände, d. h. bestimmte Werte von  $p$  und  $T$ , bei denen zwei Phasen im Gleichgewicht nebeneinander vorliegen.

Bei einem bestimmten Wert für Druck und Temperatur existieren sogar alle drei Aggregatzustände im Gleichgewicht nebeneinander. Dieser Punkt wird der *Tripelpunkt* ( $p_T, T_T$ ) genannt.

Dieses Verhalten lässt sich im  $p$ - $T$ -Zustandsdiagramm veranschaulichen. In Abb. 13.6 ist

es für  $\text{H}_2\text{O}$  dargestellt. Bei niedriger Temperatur aber genügend hohen Drucken liegt  $\text{H}_2\text{O}$  ausschließlich als Eis vor (gestrichelter Bereich), im Bereich mittlerer Drücke und Temperaturen existiert es in der flüssigen Phase (mit Wellenlinien bezeichneter Bereich), bei höheren Temperaturen dagegen nur in der Gasphase (gepunkteter Bereich). Fällt der  $p$ - $T$ -Zustand dagegen auf die Kurve (1), die *Sublimationskurve*, so kann das Eis sublimieren, es ist also mit der gasförmigen Phase im Gleichgewicht. Die Kurve (2), die *Schmelzkurve*, trennt die Bereiche fester und flüssiger Phase voneinander. Für alle Zustände, die durch  $p$ - und  $T$ -Werte auf dieser Kurve gekennzeichnet sind, stehen feste und flüssige Phase im Gleichgewicht. Schließlich kann der  $p$ - $T$ -Zustand auf die Kurve (3), die *Dampfdruckkurve* fallen, längs der die flüssige und gasförmige Phase koexistieren. Die Dampfdruckkurve endet beim *kritischen Punkt* ( $p_K, T_K$ ), den wir bereits bei der Diskussion der realen Gase kennengelernt haben (Kap. 11).

Im Schnittpunkt der Kurven (1), (2) und (3), dem sogenannten *Tripelpunkt*, sind alle drei Phasen miteinander im Gleichgewicht.

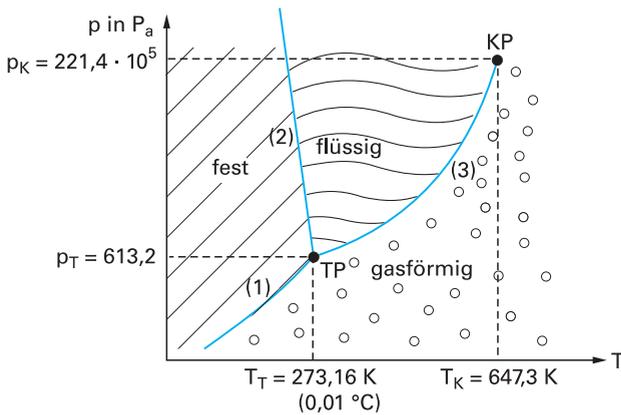
Die Koexistenzkurven gelten nur für Gleichgewichtszustände. Da es bei thermischen Prozessen oft sehr lange dauert, bis sich ein Gleichgewicht eingestellt hat, können während der Einstellungszeit unterschiedliche Phasen auch außerhalb der Koexistenzkurven nebeneinander existieren. Ein Beispiel ist der Eiswürfel in einem Getränk.

Die Steigung  $dp/dT$  der drei *Koexistenzkurven* bei einer vorgegebenen Temperatur  $T$  wird durch die *Clausius-Clapeyron'sche Gleichung* mit der zugehörigen molaren Umwandlungswärme  $Q_U$  verknüpft:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q_U}{T(V_a - V_b)}. \quad (13-10)$$

Hier bedeuten  $V_a$  und  $V_b$  die Volumina, die ein Mol eines Stoffes in den beiden Phasen a und b einnimmt. Auf der Schmelzkurve ist für die Umwandlungswärme  $Q_U$  die Schmelzwärme einzusetzen, auf der Dampfdruckkurve entsprechend die Verdampfungswärme.

Nähert man sich auf der Dampfdruckkurve dem kritischen Punkt (KP in Abb. 13.6), so geht die Verdamp-



**Abb. 13.6**  $p$ - $T$ -Zustandsdiagramm (Phasendiagramm) von Wasser. (1) Sublimationskurve, (2) Schmelzkurve, (3) Dampfdruckkurve.

fungswärme gegen Null; zugleich wird der Unterschied der Volumina der flüssigen und der gasförmigen Phase geringer. Am kritischen Punkt haben beide Phasen gleiche Dichte; daher ist oberhalb KP eine Unterscheidung zwischen Gas und Flüssigkeit nicht mehr sinnvoll. Auf eine Eigenheit des  $p$ - $T$ -Diagramms von  $H_2O$  sei hingewiesen: Die Schmelzkurve (2) ist leicht nach links geneigt. Physikalisch bedeutet dies, dass man aus dem festen Zustand nahe der Kurve durch Kompression in den flüssigen Zustand gelangt. Dieses Verhalten hängt mit der *Dichteanomalie* des Wassers (Kap. 13.1) zusammen. Durch Übergang in den flüssigen Zustand kann sich bei der Kompression das Volumen verringern.

Erfolgt der Verdampfungsvorgang an Luft, d. h. bei konstantem Außendruck, so müssen wir beachten, dass der Druck  $p$  im Phasendiagramm nicht den Außendruck, sondern den Partialdruck des Wasserdampfes angibt. Befinden wir uns auf der Verdampfungskurve bei einem Partialdruck, der kleiner ist als der Außendruck, so erfolgt die Verdampfung nur an der

Flüssigkeitsoberfläche, und wir nennen den Vorgang *verdunsten*. Bei Zunahme der Temperatur steigt der Sättigungsdampfdruck. Erreicht er den Wert des Außendrucks, so kann der Verdampfungsvorgang aus dem gesamten Flüssigkeitsvolumen durch Bildung von Dampfblasen erfolgen, weil jetzt der Dampfdruck in den Gasblasen gleich dem Außendruck ist. Diesen Vorgang haben wir als *Sieden* kennengelernt.

Betrachten wir das Beispiel die Herstellung von Trockeneis. Festes  $CO_2$  (Trockeneis) spielt als Kühlmittel im Labor eine große Rolle. Es entsteht, indem man aus einer unter Überdruck stehenden Flasche flüssiges  $CO_2$  ausströmen lässt (sie muss dazu auf dem Kopf stehen!). Die Abkühlung durch Verdampfung und adiabatische Ausdehnung ist so groß, dass  $CO_2$ -Schnee entsteht. Bei Normaldruck liegt der Gleichgewichtszustand des Trockeneises auf der Sublimationskurve;  $CO_2$  schmilzt also nicht wie normales Eis. Da die Schmelzkurve von  $CO_2$  leicht nach rechts neigt, lässt sich festes  $CO_2$  bei geeigneter, festgehaltener Temperatur unter Druckerniedrigung verflüssigen.



## 14. Elektrische und magnetische Größen

### 14.1 Vorbemerkung

Mit der Beschreibung elektrischer Phänomene betreten wir kein völlig neuartiges Feld von Naturerscheinungen. Vielmehr haben wir die elektrischen Kräfte bereits als die Ursache des atomaren (mikroskopischen) Aufbaues aller Materie kennengelernt und gesehen, dass es — genau genommen — die elektrischen Kräfte sind, die neben der Gravitationskraft die mechanischen und thermischen Eigenschaften der Stoffe bestimmen. Dass wir trotzdem von den elektrischen Ursachen bei den makroskopischen Theorien der Mechanik und Wärme absehen konnten, hat folgenden Grund:

Elektrische Ladungen können beiderlei Vorzeichen tragen. Da sich beim Aufbau makroskopischer Stoffe die elektrischen Ladungen beiderlei Vorzeichens gegenseitig kompensieren können — die Summe aller Ladungen dann also gleich Null ist —, sind makroskopische Körper meist elektrisch neutral. Bei ihrer Beschreibung durch makroskopische Größen (Elastizitätsmodul, Viskosität, Wärmeleitung, etc.) können wir daher deren

elektrische Ursachen außer acht lassen. Erst zur Erklärung im mikroskopischen Modell müssen diese herangezogen werden.

Nur wenn sich in makroskopischen Körpern die elektrischen Ladungen nicht vollständig kompensieren, also ein Ladungsüberschuss eines Vorzeichens besteht, beobachten wir an ihnen makroskopische Wirkungen elektrischer Kräfte. Da diese Ladungsüberschüsse normalerweise äußerst klein sind, erscheinen uns im Alltag die resultierenden elektrischen Kräfte — verglichen etwa mit den Gravitationskräften — nicht in der Stärke, die der Gesamtzahl der Ladungen ohne Berücksichtigung ihrer Vorzeichen entspräche. In den folgenden Kapiteln wollen wir uns hauptsächlich mit den makroskopischen Auswirkungen der elektrischen Kräfte, den Spannungen, Strömen, Widerständen etc. befassen. Dabei soll nach der Einführung von Ladung und Spannung die elektrische Stromstärke am Anfang stehen, da diese im Internationalen Einheitensystem (SI) als Basisgröße verwendet wird.

### 14.2 Ladung

#### 14.2.1 Ladungsmenge

Wie die Gravitationsladung (= schwere Masse), so ist auch die elektrische Ladung eine Eigenschaft der Materie. Träger dieser Ladungen sind Elementarteilchen (Kap. 21.1.1). Während elektrische Ladung stets an Masse gebunden ist, lässt sich dies nicht all-

gemein umkehren: Es gibt Elementarteilchen, die zwar Masse, jedoch keine elektrische Ladung besitzen (z. B. das Neutron). Die SI-Einheit der elektrischen „Ladungsmenge“ („Ladung“) ist *Coulomb* (C); sie ist, wie wir noch sehen werden (Kap. 14.4), identisch mit der SI-Einheit *Ampere Sekunde* (A s). Die durch einen Blitz zwischen Wolke

und Erde transportierte Ladungsmenge beträgt größenordnungsmäßig 1 C.

Träger der kleinsten bekannten negativen elektrischen Ladung ist das Elektron; man nennt diese Ladung die negative elektrische *Elementarladung*. Ihr Zahlenwert in SI-Einheiten:  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C. Das positiv geladene Proton trägt ebenfalls eine Elementarladung, jedoch positiven Vorzeichens.

Die Kraft zwischen den Ladungen geladener Elementarteilchen ist größer als diejenige zwischen ihren Massen. So ist die elektrische Kraft (Coulomb-Kraft) zwischen zwei Elektronen rund  $10^{42}$  mal größer als deren Massenanziehungskraft (Gravitationskraft bei gleichem Abstand). Die elektrischen Ladungen können im Gegensatz zu Gravitationsladungen unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Die elektrischen Wechselwirkungs-Kräfte können also sowohl anziehend als auch abstoßend sein. Als wesentliche Konsequenz aus dieser Tatsache wurde in der Vorbemerkung bereits die Möglichkeit erwähnt, dass elektrische Ladungen im Gegensatz zu Gravitationsladungen sich in ihrer Wirkung kompensieren können, so dass makroskopische, kondensierte Materie trotz ihrer großen Zahl von Elektronen und Protonen ebenso wie Atome *nach außen* elektrisch neutral erscheinen. Mit der elektrischen Ladung  $Q$  eines Körpers gibt man die Summe aller in ihm enthaltenen Elementarladungen an, wobei bei der Summenbildung die Ladungsvorzeichen zu berücksichtigen sind. Entzieht man einem elektrisch neutralen Atom eine negative Elementarladung (durch Wegnahme eines Elektrons), so ist der Rest, *Kation* genannt, nach außen hin Träger einer positiven elektrischen Elementarladung. Stellen  $Z_p$  bzw.  $Z_e$  die Zahlen positiver bzw. negativer Elementarladungen im Atom dar, so gilt für ein einfach (zweifach, dreifach ...) geladenes Kation:  $Z_p - Z_e = 1, 2, 3, \dots$

Erhält umgekehrt ein Atom ein zusätzliches Elektron und kann es dieses festhalten, so

besitzt es negative Überschussladung und wird als *Anion* bezeichnet. Je nach der Zahl der fehlenden oder überschüssigen Elektronen kann also ein Stoff positiv oder negativ geladen sein.

Ladungen können weder erzeugt noch vernichtet werden, d. h., die Summe aller Ladungen in einem abgeschlossenen System ist konstant. Dieses Gesetz wird als *Erhaltungssatz für die elektrische Ladung* bezeichnet.

**Kontinuierliche und gequantelte Größen** Die physikalischen Größen der klassischen Physik wie Energie oder elektrische Ladung sind, makroskopisch betrachtet, durchweg kontinuierlich veränderlich. Dies gilt nicht mehr in der mikroskopischen Welt der Atome bzw. Elementarteilchen. Hier erweisen sich, wie die Quantentheorie lehrt, Energie, Drehimpuls, elektrische Ladung usw. als physikalische Größen, die nur in endlichen Schritten geändert werden können; sie sind *gequantelt*. Sie sind diskontinuierlich, und für ihre kleinstmöglichen Mengen ist die Bezeichnung *Quant* oder *Elementar-Quantum* eingeführt worden. Das Quant der elektrischen Ladung ist die Elementarladung. Wegen begrenzter Messgenauigkeit ist es unmöglich, bei großen Ladungsmengen die diskontinuierliche Änderung durch Zugabe einzelner Elektronen zu messen. Lädt man zum Beispiel eine Kondensatorplatte mit  $10^{10}$  Elektronen auf, so gibt es keine Messmethode, die es gestatten würde, die Änderung der Gesamtladung zu messen, wenn ein einzelnes Elektron hinzukommt. Die Ladung erweist sich somit als quasi-kontinuierlich, und wir können im Rahmen der klassischen Elektrizitätslehre die Ladungsmenge  $Q$  als stetige veränderliche Größe ansehen, so lange sie sich aus einer großen Anzahl von Elementarladungen zusammensetzt.

Entsprechendes gilt übrigens, wie wir später sehen werden, für die Intensität des Lichtes. Sie ist im mikroskopischen Bild proportional der Anzahl von Lichtquanten pro Zeit und Fläche und damit eine diskontinuierliche, im makroskopischen Bild als Lichtenergie pro Zeit und Fläche aber eine kontinuierliche Größe. Ein weiteres Beispiel ist der radioaktive Zerfall. Hier kann sich die Zahl radioaktiver Atome nur in ganzzahligen Schritten ändern. Das makroskopische Zerfallsgesetz (Kap. 21.2.3) jedoch beschreibt den radioaktiven Zerfall als kontinuierlichen Vorgang.

## 14.2.2 Kraft zwischen elektrischen Ladungen

Als Kraft zwischen zwei Punktladungen haben wir bereits in Kap. 5.1.1 die *Coulomb-*

Tab. 14.1

Anordnung der Ladungen	Abstandsabhängigkeit der Kraft
 <p>zwei Punktladungen</p>	$F \sim \frac{1}{r^2}$
 <p>Punktladung vor ebener Metallplatte</p>	$F \sim \frac{1}{r^2}$
 <p>zwei Dipole</p>	$F \sim \frac{1}{r^4}$
 <p>zwei ebene, gegeneinander isolierte, parallele Metallplatten</p>	F unabhängig von r (bei nicht zu großem Abstand)

$(4\pi\epsilon_0)^{-1} = 8,987 \cdot 10^9 \text{ V m C}^{-1}$  besitzt ( $\epsilon_0$  wird in Gl. (14-32) definiert werden). Die Richtung des Kraftvektors  $\vec{F}$  weist längs der Abstandsgeraden.

Kraft kennengelernt:

$$F = \gamma \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \tag{14-1}$$

wobei  $Q_1$  und  $Q_2$  die Ladungsmengen und  $r$  den Abstand zwischen beiden Ladungen bedeuten, und die Konstante  $\gamma$  den Wert

Bei ausgedehnten geladenen Körpern findet man im Prinzip die resultierende Kraft dadurch, dass man alle zwischen den einzelnen Ladungen wirkenden Kräfte vektoriell addiert. Dabei kann, wie wir schon am Beispiel der Dipolkräfte (Kap. 5.1.1) gesehen haben, die Abhängigkeit der resultierenden Kraft vom Quadrat des Abstandes verloren gehen. Für die Wechselwirkung zwischen permanenten Dipolen gilt  $F \sim 1/r^4$ . Zwei gegeneinander isolierte ebene Platten (*Plattenkondensator*) mit den Flächen  $A$ , die mit der Ladung  $+Q$  bzw.  $-Q$  aufgeladen sind, ziehen sich gegenseitig mit einer resultierenden Kraft an, die unabhängig vom Abstand der Platten ist (Tab. 14.1), so lange dieser nicht zu groß wird.

## 14.3 Spannung

In der Mechanik haben wir *Spannungen*, wie die Zugspannung, die Druckspannung und die Oberflächenspannung kennengelernt. In der Elektrizitätslehre begegnet uns der Begriff der Spannung erneut, hat hier jedoch eine andere Bedeutung als in der Mechanik, wie wir in diesem Kapitel sehen werden.

### 14.3.1 Definition der Spannung

Zwei mit Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  elektrisch geladene Körper sollen sich im Abstand  $r_0$  gegenüberstehen. Verschieben wir nun den einen Körper längs der Strecke  $r$  entgegen der zwischen beiden Körpern wirkenden anziehenden Coulomb-Kraft  $\vec{F}$  (Gl. (14-1)), so muss dazu nach Gl. (3-2) die Verschiebungsarbeit  $W$  verrichtet werden:

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0 + \vec{r}} \vec{F} \, d\vec{r}. \tag{14-2}$$

Sie wird als potentielle Energie in dem aus den beiden Körpern gebildeten System gespeichert. Losgelassen, werden sich die beiden Körper aufgrund der Coulomb-Kraft wieder aufeinander zu bewegen, wobei die potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt wird.

Wollen wir nun den Einfluss der Ladung  $Q_2$  auf die potentielle Energie des Systems betrachten, so führen wir als neue physikalische Größe den Quotienten  $W/Q_1$ , ein:

$$U = \frac{W}{Q_1} = \frac{1}{Q_1} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0 + \vec{r}} \vec{F} \, d\vec{r}. \tag{14-3a}$$

$U$  bzw.  $W/Q_1$  wird als die *elektrische Spannung* bezeichnet und charakterisiert den Unterschied zwischen den potentiellen Energien des Systems bei den Abständen

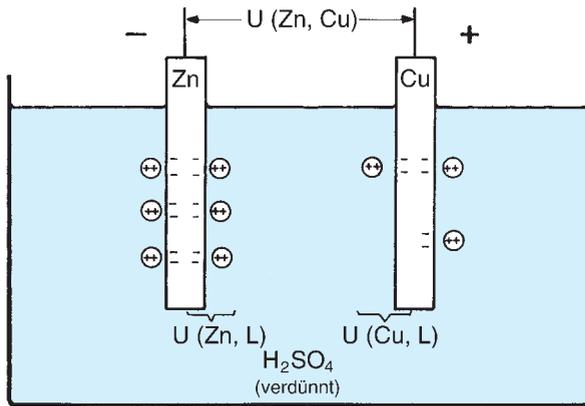


Abb. 14.1 Galvanisches Element.

$r_0$  bzw.  $r_0 + r$ ; daher auch die Bezeichnung *Potentialdifferenz*. Ihre SI-Einheit ist Joule/Coulomb und wird *Volt* (V) genannt.

Von der elektrischen Spannung leitet sich eine in der Atom- und Kernphysik häufig verwendete Energieeinheit ab:

Verschiebt man nämlich eine elektrische Elementarladung  $e$  gegen die Spannung  $U = 1$  V, so ist dazu die Energie

$$W = 1 \text{ V} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (14-3b)$$

erforderlich. Diesen Energiebetrag bezeichnet man als 1 *Elektronenvolt* (auch *e-Volt* oder *eV* genannt).

### 14.3.2 Spannungsquellen

*Galvanische Elemente* waren die ersten künstlichen Quellen elektrischer Energie. Das Prinzip eines galvanischen Elements als *Gleichspannungsquelle* beruht auf der unterschiedlichen *Lösungstension* (Löslichkeit) verschiedener Materialien in einem Elektrolyten.

Tauchen wir einen Metallstab in eine Flüssigkeit, dann gehen wegen der zwischen den Metallionen und Flüssigkeitsteilchen bestehenden Adhäsionskräfte einzelne positive Metallionen in Lösung (Solvatation, Kap.

13.3.4). Die Leitungselektronen bleiben aber im Metallstab zurück. Mit zunehmender Ladungstrennung baut sich daher zwischen dem Innern des Metalls und der Lösung eine elektrische Spannung auf.

Verschiedene Metalle, zum Beispiel Zink (Zn) und Kupfer (Cu), besitzen unterschiedliche Lösungstension, das heißt unterschiedliches Bestreben, in Lösung zu gehen. Aus diesem Grunde ist die Spannung zwischen Zn-Stab und Lösung  $U(\text{Zn}, \text{L})$ , verschieden von der zwischen Cu-Stab und Lösung,  $U(\text{Cu}, \text{L})$ . Damit entsteht eine Spannung zwischen Zn-Stab und Cu-Stab (Abb. 14.1); sie ergibt sich zu

$$U(\text{Zn}, \text{Cu}) = U(\text{Zn}, \text{L}) - U(\text{Cu}, \text{L}). \quad (14-4)$$

In  $\text{H}_2\text{O}$  ist die Lösungstension von Zn und Cu und damit die Spannung  $U(\text{Zn}, \text{Cu})$  sehr gering. Man kann sie vergrößern durch Zugabe von  $\text{H}_2\text{SO}_4$  und erhält dadurch einen Elektrolyten, der wesentlich effektiver ist. Die in Abb. 14.1 gezeigte Anordnung vermag also als Spannungsquelle zu dienen; man nennt sie ein *galvanisches Element*. Wegen der höheren Lösungstension des Zn gegenüber der des Cu ist verständlich, dass das Element seinen negativen Pol beim Zn hat. Diesen nennt man die negative Elektrode, den Cu-Stab die positive Elektrode.

Der Lösungstension entgegen wirkt die zwischen den gelösten Metallionen und den Elektroden sich aufbauende Coulomb-Kraft; sie ist um so größer, je mehr Ionen in Lösung gehen. Dadurch ist der Auflösung der

Metallelektroden – und auch der Ladungstrennung – eine Grenze gesetzt. Im Gleichgewicht stellen sich konstante Spannungen  $U$  (Zn, L),  $U$  (Cu, L) und  $U$  (Zn, Cu) ein.

Neben dem [Zn, Cu, H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>]-Element gibt es eine Vielzahl anderer galvanischer Elemente, zum Beispiel in der Autobatterie [Pb, PbO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>], oder die Elemente [Ag, Au, HNO<sub>3</sub>] usw. Das wohl am meisten verwendete galvanische Element ist die von Taschenlampen her bekannte *Trockenbatterie*. Ein Einzelelement (eine Zelle) einer solchen Batterie liefert eine Gleichspannung von 1,5 V. Ihre Elektroden bestehen aus Zink bzw. Kohlenstoff und liegen in einer feuchten, mit Ammoniumchlorid getränkten Füllmasse. Durch Hintereinanderschalten von  $n$  solcher Zellen erhält man Gesamtspannungen vom Betrag  $n \cdot 1,5$  V. – Inzwischen achten Zahnärzte darauf, dass derartige gesundheitsschädliche Praktiken unterbleiben.

**Spannungsreihe** Ordnet man verschiedene Elektrodenmaterialien nach abnehmender Lösungstension in einer Reihe, so ergibt sich die *Volta'sche Spannungsreihe*:

Al Zn Fe Cd Ni Pb H Cu Ag Hg Au Pt

Diese Reihenfolge besagt, dass irgendein Material, wenn man es in eine Elektrolytlösung bringt, gegenüber allen links von ihm stehenden Materialien eine geringere Lösungstension hat und daher die positive Elektrode wird, während es gegenüber allen rechts von ihm stehenden zur negativen Elektrode wird. Die Spannung eines galvanischen Elements ist daher um so größer, je weiter die beiden Elektrodenmaterialien in der Spannungsreihe voneinander entfernt sind. Als Folge dieser Spannungsreihe hat man z. B. im Mund von Patienten, denen Plomben von Metalllegierungen unterschiedlicher Lösungstension eingesetzt wurden, schon Spannungen bis zu 2 V nachgewiesen.

## 14.4 Strom

Verbinden wir Zn- und Cu-Stab, zwischen denen im galvanischen Element der Abb. 14.1 die Spannung  $U$  (Zn, Cu) liegt, durch einen Metalldraht (Abb. 14.2), dann fließen im Metall frei bewegliche Elektronen, die sog. *Leitungselektronen* (vgl. Kap. 15.2.4), vom negativen Zn-Pol zum positiven Cu-Pol, um die Ladungsunterschiede auszugleichen.

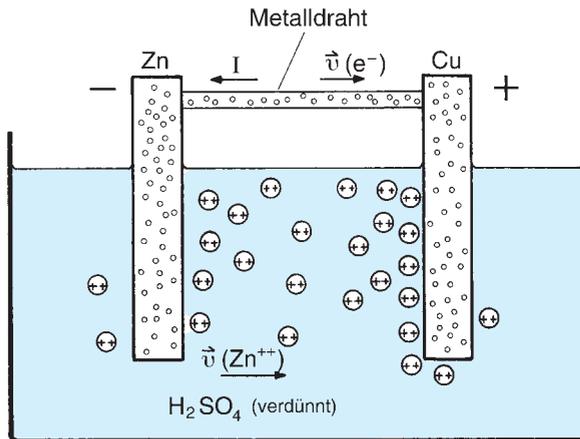
Galvanische Elemente liefern *Gleichspannung*, d. h. zeitlich konstante Spannung. Größenordnungsmäßig liegen die von galvanischen Elementen erzeugten Spannungen bei 1 V.

Dagegen liefert die an das elektrische Netz angeschlossene Steckdose zu Hause oder im Labor *Wechselspannung*, das heißt periodisch mit der Zeit sich ändernde Spannung (Kap. 14.9.2). Eine Periode dauert hier  $\frac{1}{50}$  s, und die Effektivspannung beträgt 230 V (Kap. 14.9.8). Wechselspannung wird mit der Dynamomaschine erzeugt (Kap. 16.2.1).

Auch in biologischen Organismen entstehen Spannungen. Im Prinzip handelt es sich dabei um schwache elektrolytische Elemente in Zellen oder deren Trennwänden (Membranen). Die *biologischen Spannungen* sind häufig zeitlich nicht konstant. Einigermaßen periodisch wiederkehrend sind zum Beispiel die Spannungssignale, die unser Herz beim Kontrahieren liefert und die in einem Elektrokardiogramm (EKG) aufgezeichnet werden können. Die Größenordnung biologischer Spannungen liegt bei 100 mV (vgl. Kap. 15.1 und 16.1.3). Bei *elektrischen Fischen* (Zitteraal, Zitterrochen, Zitterwels) ist eine Vielzahl biologischer Spannungsquellen hintereinander geschaltet, so dass sich eine Gesamtspannung bis zu 500 V aufsummiert, und die Tiere dadurch eine gefährliche Waffe besitzen.

Einen Ladungsfluss bezeichnen wir als *elektrischen Strom*  $I$ . Dabei ist die Größe von  $I$  gegeben durch die pro Zeit  $t$  durch den Leiterquerschnitt hindurchfließende Ladungsmenge  $Q$ :

$$I = \frac{Q}{t} \quad (14-5a)$$



**Abb. 14.2** Elektrischer Strom im Galvanischen Element [Zn, Cu,  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ]: negative Ladungen (Elektronen) fließen durch den Metalldraht und positive Ladungen ( $\text{Zn}^{++}$ -Ionen) durch die verdünnte Schwefelsäure vom Zn- zum Cu-Stab ( $\vec{v}$  ist die Geschwindigkeit der Ladungsträger).

Die *Stromstärke*  $I$  ist eine der sieben Basisgrößen des SI, mit der SI-Einheit *Ampere* (A). Bei zeitlich veränderlichen Strömen ist der *Momentanwert* der Stromstärke durch den Differentialquotienten  $I = dQ/dt$  definiert. Beziehen wir die Ladung, die pro Zeit  $t$  durch den Leiterquerschnitt hindurchfließt, auch auf die Fläche  $A$  des Leiterquerschnitts, dann erhalten wir die Stromdichte  $j$ :

$$j = \frac{I}{A}, \text{ mit der SI-Einheit } \text{Am}^{-2}. \quad (14-5b)$$

Außer dem Strom im Metalldraht fließt auch in der Lösung ein Strom. Dort sind Ionen die Ladungsträger. Da das Zn eine gegenüber dem Cu größere Lösungstension besitzt, wandern vornehmlich  $\text{Zn}^{++}$ -Ionen zur Cu-Elektrode.

Wenn ein  $\text{Zn}^{++}$ -Ion in Lösung geht, bleiben entsprechend der positiven Ladung des Ions zwei freibewegliche Elektronen im Zn-Stab zurück. Sie bewegen sich unter dem Einfluss der Spannung  $U$  (Zn, Cu) durch den Metalldraht zum positiven Cu-Stab. Gelangt nun ein  $\text{Zn}^{++}$ -Ion aus der Lösung zum Cu-Stab, so neutralisiert es sich, indem es an der Oberfläche des Cu-Stabes zwei Elektronen aufnimmt. Das neutrale Zn-Atom schlägt sich dann am Cu-Stab nieder. Damit ist ein  $\text{Zn}^{++}$ -Ion der Lösung entnommen, und es kann am Zn-Stab ein neues Ion in Lösung gehen, wobei zwei Elektronen zurückbleiben. Dieser Vorgang wiederholt sich, bis sich der Cu-Stab nach und nach mit einer metallischen Zn-Schicht überzieht. Danach ist das galvanische Element als *Ladungspumpe* verbraucht.

Die Leistungsfähigkeit eines galvanischen Elementes bei Stromfluss ist dadurch bestimmt, wie schnell Ladungen voneinander getrennt werden, das heißt, wieviele  $\text{Zn}^{++}$ -Ionen pro Sekunde in Lösung gehen können; dies hängt zum Beispiel von der Größe der Metallelektroden ab. In der Autobatterie (Kap. 15.2.3), einem Element mit Pb-PbO<sub>2</sub>-Elektroden, sind deshalb die Elektroden als Platten ausgebildet. Die Leistungsfähigkeit einer biologischen Spannungsquelle (Kap. 15.1) ist gegenüber einer solchen Batterie um den Faktor  $10^5$  bis  $10^6$  geringer.

Die durch den Draht zum Cu-Stab fließenden Leitungselektronen können wir mit einem Strommessgerät, einem *Amperemeter*, anzeigen. (Über die technische Funktionsweise von Strom- und Spannungsmessgeräten wird das Kap. 16.1 Auskunft geben.) Wird der Strom  $I$  durch eine Gleichspannung  $U$  hervorgerufen, so behält die dadurch bedingte Bewegung der Ladungsträger im Draht immer dieselbe Richtung bei. Als *Stromrichtung* ist vor ca. 200 Jahren (mangels besseren Wissens) die Flussrichtung der positiven Ladungsträger vom negativen zum positiven Pol der Spannungsquelle definiert worden; die Elektronen in einem Metalldraht fließen also stets entgegen der so definierten technischen Stromrichtung.

Legen wir an einen Leiter eine Wechselspannung, dann ändern die Leitungselektronen ihre Geschwindigkeit nach Betrag und Richtung, wie es ihnen die zeitlich sich ändernde Spannung  $U(t)$  aufzwingt. Entsprechend ändert sich auch die Stromrichtung (*Wechselstrom*).

## 14.5 Widerstand, Leitwert

### 14.5.1 Leiter, Nichtleiter

Alle Stoffe enthalten Ladungsträger in außerordentlicher Menge (Elektronen, Protonen oder Ionen). Das elektrische Verhalten der Stoffe hängt entscheidend davon ab, wie beweglich ihre Ladungsträger sind.

Stoffe mit mehr oder weniger frei beweglichen Ladungsträgern (Elektronen im Metall, Ionen in der Lösung des galvanischen Elements) bezeichnen wir als *Leiter*. Stoffe mit nahezu unbeweglichen Ladungsträgern bezeichnen wir als *Nichtleiter* oder *Isolatoren* (vgl. Kap. 15.2.4).

Beim Porzellan, das bekanntlich als Isolator bei Hochspannungsleitungen verwendet wird, sind alle Ladungsträger (Ionen und Elektronen) derart fest an ihre Plätze im Atomverband gebunden, dass nur äußerst große elektrische Kräfte die Bindungskräfte überwinden und die Ladungsträger über größere Entfernungen bewegen könnten. Je nach Zahl und Beweglichkeit der Ladungsträger in einem Stoff nennt man diesen Leiter, Halbleiter oder Nichtleiter.

Die beweglichen Elektronen in einem Leiter würden durch die elektrische Kraft, die beim Anlegen einer Spannung an den Leiter auf sie wirkt (Gl. (14-3)), gleichmäßig beschleunigt werden, wenn nicht der Leiter dem Elektronenfluss einen Reibungswiderstand entgegensetzen würde. Dieser Reibungswiderstand rührt zum Beispiel davon her, dass die elektrostatische Anziehung zwischen den positiven Ionen des Leiters und den negativen Leitungselektronen die Bewegung der Elektronen einschränkt. Ist die Reibungskraft ebenso groß wie die beschleunigende elektrische Kraft, so bewegen sich die Elektronen mit konstanter Geschwindigkeit. Somit hängt der elektrische Widerstand eines Körpers entscheidend von dieser Reibungskraft ab. — Die durch das Zusammenwirken von äußerer Kraft und Reibungskraft bedingte Bewegung mit konstanter Geschwin-

digkeit haben wir schon bei der in einer viskosen Flüssigkeit unter dem Einfluss der Schwerkraft fallenden Kugel kennengelernt (vgl. Kap. 5.3.3.2.2).

Die Spannung bewirkt ein Gefälle für den Fluss elektrischer Ladungen. Sie erfüllt damit eine Funktion ähnlich der Druckdifferenz bei laminarer Strömung von Flüssigkeiten. Dort wird die Stromstärke durch die Druckdifferenz (Kap. 5.3.3.2.2), die zwischen Rohrfang und -ende liegt und durch den Strömungswiderstand bestimmt. Ganz analog gilt für den elektrischen Fall:

Die elektrische Stromstärke  $I$  wird durch die elektrische Spannung  $U$  und den *elektrischen Widerstand*  $R$  bestimmt:  $U = RI$ . Die SI-Einheit des Widerstandes,  $\text{VA}^{-1}$ , trägt den Namen *Ohm* ( $\Omega$ ). Den Kehrwert von  $R$  bezeichnen wir als *Leitwert*, mit der SI-Einheit  $\text{AV}^{-1} = \text{Siemens}$  (S).

Wir können diesen Sachverhalt auch andersherum interpretieren: Fließt durch ein Leiterstück mit dem Widerstand  $R$  ein Strom  $I$  (weil eine Spannungsquelle angeschlossen ist), so nimmt die Potentialdifferenz entlang des Leiters kontinuierlich ab, oder anders ausgedrückt, so *fällt* an diesem Leiterstück die Spannung  $U$  ab (*Spannungsabfall*).

Im folgenden Kapitel beschreiben wir, wie sich Widerstand und Leitwert eines Stoffes aus seinen Materialeigenschaften bestimmen lassen.

### 14.5.2 Spezifischer Widerstand, spezifische Leitfähigkeit

Der elektrische Widerstand  $R$  eines Körpers hängt von seiner Dimensionierung (Länge  $l$ , Querschnitt  $A$ ) und vom Material, aus dem er besteht, ab:

$$R = \rho \frac{l}{A}. \quad (14-6)$$

Die Konstante  $\varrho$  bezeichnet man als den *spezifischen Widerstand* (die *Resistivität*) des betreffenden Materials, mit der SI-Einheit  $\Omega\text{m}$ .

Die Resistivität ändert sich mit der Temperatur:

$$\varrho(t) = \varrho_{20} [1 + \alpha(t - 20^\circ\text{C})]. \quad (14-7)$$

Die Größe  $\varrho_{20}$  gibt den Wert des spezifischen Widerstandes bei  $20^\circ\text{C}$  und  $(t - 20^\circ\text{C})$  die Temperaturdifferenz in  $^\circ\text{C}$  zu  $20^\circ\text{C}$  an. Der Temperaturkoeffizient  $\alpha$  (mit der Einheit  $^\circ\text{C}^{-1}$ ) ist wie  $\varrho_{20}$  eine Stoffkonstante. Z. B. bei Kohle und bei elektrolytischen Leitern ist  $\alpha$  negativ, d. h., ihr elektrischer Widerstand nimmt mit zunehmender Temperatur ab. Umgekehrt ist es bei Metallen: Dort steigt der Widerstand. Das unterschiedliche Temperaturverhalten von Metall- und Kohlewiderständen lässt sich mit folgendem einfachen Versuch experimentell nachweisen: Nach gleichzeitigem Einschalten einer Metallfadenglühlampe und einer Kohlefadenlampe beobachten wir rasches Aufleuchten des Metallfadens, während der Kohlefaden erst etwa nach einer Sekunde seine volle Lichtstärke zeigt, da sein Widerstand mit steigender Temperatur sinkt. (Eine physikalische Begründung der unterschiedlichen Temperaturabhängigkeiten von  $\varrho_{\text{Kohle}}$  und  $\varrho_{\text{Metall}}$  findet sich in Kap. 15.2.4.)

Tab. 14.2 enthält die spezifischen Widerstände und Temperaturkoeffizienten einiger Materialien. Die Zahlen hängen sehr von der Reinheit des Stoffes ab. Abgesehen von Silber (das sehr teuer ist), hat Kupfer den geringsten spezifischen Widerstand; es eignet sich daher gut zum Leitungsbau. Dennoch

**Tab. 14.2** Spezifischer Widerstand  $\varrho$  und Temperaturkoeffizient  $\alpha$

Material	$\varrho$ ( $\Omega\text{ m}$ ) bei $20^\circ\text{C}$	$\alpha$ ( $^\circ\text{C}^{-1}$ )
Ag	$1,6 \cdot 10^{-8}$	+0,004
Cu	$1,7 \cdot 10^{-8}$	+0,004
Au	$2,3 \cdot 10^{-8}$	+0,004
Al	$2,7 \cdot 10^{-8}$	+0,0047
Fe	$9 - 15 \cdot 10^{-8}$	+0,0045
Pt	$10,8 \cdot 10^{-8}$	+0,0035
Hg	$95,8 \cdot 10^{-8}$	+0,001
Kohle	$50 - 100 \cdot 10^{-8}$	-0,0008
Konstantan	$50 \cdot 10^{-8}$	0
$\text{H}_2\text{SO}_4$ (15%ig)	$184 \cdot 10^{-8}$	<0
KOH (15%ig)	$185 \cdot 10^{-8}$	<0
$\text{H}_2\text{O}$ (mehrfach destilliert)	$\approx 2 \cdot 10^5$	-
Glas, Porzellan	$> 10^{12}$	-
Kunststoffe	$> 10^{13}$	-

wird für Freileitungen heutzutage nur Aluminium verwendet. Da es nicht ganz die doppelte Resistivität, dafür aber weniger als ein Drittel der Dichte von Kupfer hat, kommt man bei einer Aluminium-Leitung mit weniger Material aus als bei einer Kupfer-Leitung.

Je kleiner  $\varrho$  ist, desto besser leitet der betreffende Stoff den elektrischen Strom. Man nennt daher den reziproken Wert von  $\varrho$  die *spezifische elektrische Leitfähigkeit*:

$$\sigma = \frac{1}{\varrho}, \quad (14-8)$$

mit der Dimension *Leitwert/Länge* und der SI-Einheit  $\text{S m}^{-1}$ .

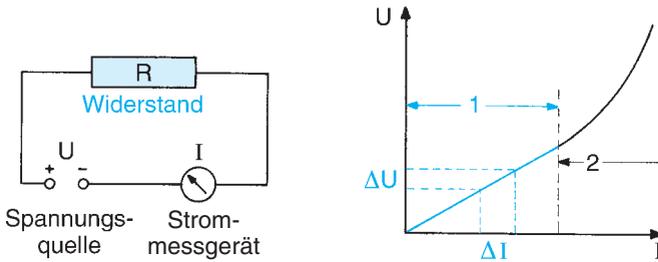
### 14.5.3 Strom-Spannungs-Kennlinie von Leitern

Variieren wir die an einem Leiter anliegende Spannung, so können wir die Änderung des Stromes messen. Entsprechend dem Stromstärke-Druckdifferenz-Diagramm für Flüssigkeiten (Abb. 5.32) tragen wir dann in einem Diagramm die Spannung  $U$  gegen den elektrischen Strom  $I$  auf und erhalten als Steigung dieser *Kennlinie* den elektrischen Widerstand  $R$ . In Abb. 14.3 haben wir einen elektrischen Leiter mit Widerstand  $R$  zwischen die Pole einer Spannungsquelle geschaltet und die zugehörige  $I$ - $U$ -Kennlinie gezeichnet. Aus den Achsenabschnitten  $\Delta U$  und  $\Delta I$  lässt sich der Widerstand  $R = \Delta U / \Delta I$  berechnen. Ist die  $I$ - $U$ -Kennlinie eine Gerade, so bedeutet das, dass der Widerstand einen konstanten Wert, unabhängig von den Größen von Strom und Spannung, besitzt.

Im speziellen Fall, wenn der Widerstand  $R$  bezüglich der Variablen  $U$  und  $I$  konstant und damit die Stromstärke proportional zur Spannung ist, nennt man die Beziehung

$$U = RI, \quad (14-9)$$

das *Ohm'sche Gesetz*. Widerstände mit dieser Eigenschaft (Bereich 1 in Abb. 14.3) heißen *Ohm'sche Widerstände*.



**Abb. 14.3** Strom-Spannungs-Kennlinie eines Leiters mit Widerstand  $R$ , welcher an eine Gleichspannungsquelle  $U$  angeschlossen ist und vom Strom  $I$  durchflossen wird. Bereich 1 ist der *Ohm'sche Bereich* mit  $R = \text{konstant}$ ; im Bereich 2 ist  $R$  nicht konstant.

**Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischer Feldstärke** Setzen wir in das durch Gl. (14-9) formulierte Ohm'sche Gesetz den durch Gl. (14-6) beschriebenen Widerstand ein, so erhalten wir

$$I = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l} U \quad \text{bzw.} \quad \frac{I}{A} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}.$$

Der Quotient  $I/A$  beschreibt die Stromdichte  $j$  (Gl. (14-5b)), und der Quotient  $1/\rho$  die Leitfähigkeit  $\sigma$  (Gl. (14-8)). Der Quotient aus Spannung  $U$ , die zwischen den Enden des Leiters der Länge  $l$  liegt, und der Länge  $l$  selbst wird als *elektrische Feldstärke*  $E$  bezeichnet; sie ist in jedem Stück des Leiters konstant (siehe hierzu Kap. 14.7). Mit den Quotienten  $I/A = j$ ,  $1/\rho = \sigma$  und  $U/l = E$  erhalten wir eine zu Gl. (14-9) äquivalente Formulierung des Ohm'schen Gesetzes:

$$j = \sigma E. \tag{14-10}$$

Bei konstanter Leitfähigkeit  $\sigma$  besteht also zwischen Stromdichte  $j$  und elektrischer Feldstärke  $E$  im (Ohm'schen) Leiter eine lineare Beziehung.

Abweichungen vom Ohm'schen Gesetz sind bei elektronischen Bauelementen wie der Halbleiterdiode (Kap. 15.2.4) oder bei manchen Widerständen zu finden, die sich beim Stromdurchgang zum Beispiel erwärmen und sich dadurch verändern. Diese Abweichungen machen sich in der Strom-Spannungs-Kennlinie durch nichtlinearen Kurvenverlauf bemerkbar (Bereich 2 in Abb. 14.3). Den durch die Steigung  $R = dU/dI$  in diesem nichtlinearen Bereich definierten Widerstand bezeichnen wir, um ihn vom konstanten Widerstand des Bereiches 1 zu unterscheiden, als *differentiellen* (Nicht-Ohm'schen) *Widerstand*.

## 14.6 Netzwerke

Beim Bau elektrischer Geräte sind oftmals komplizierte Kombinationen von elektronischen Bauteilen erforderlich. Der Schaltplan eines Fernsehapparates macht deutlich, dass dort hunderte solcher Bauteile zu einem *Netzwerk* zusammengeschaltet sind. Als Netzwerk bezeichnen wir eine aus mehreren verzweigten Leitern aufgebaute Schaltung. Soll in ihr Strom fließen, dann muss sie eine Spannungsquelle enthalten und zu einem Stromkreis geschlossen sein. Die Spannungsquelle dient dabei als Ladungspumpe.

### 14.6.1 Schaltbilder

Zur Skizzierung elektrischer Netzwerke wurde eine spezielle Bildschrift entwickelt, die

zur Anfertigung von *Schaltbildern* (Schaltplänen) dient. Die wichtigsten Symbole werden im Folgenden angegeben:

1. *Elektrische Leiter* werden durch Striche gekennzeichnet; sie sollen dem Stromtransport dienen, aber keinen Widerstand besitzen. Sofern der Widerstand einer Leitung wichtig ist, wird er im Schaltbild durch einen zusätzlichen Widerstand gekennzeichnet. Man ersetzt also den widerstandsbehafteten Leiter durch ein Leiter- und ein Widerstandssymbol:  $\text{---}\boxed{R}\text{---}$ . Verzweigungen von elektrischen Leitungen werden dargestellt durch  $\perp$  oder  $\lrcorner$ . Kondensatoren (Kapazitäten) kennzeichnet man mit  $\text{---}\text{||}\text{---}$  und Spulen (Induktivitäten) mit  $\text{---}\text{---}\text{---}$  oder  $\text{---}\blacksquare\text{---}$ .

2. *Spannungsquellen* werden allgemein durch die symbolische Darstellung ihrer Klemmen (Pole) gekennzeichnet:  $\text{⊕}$  Eine genauere Charakterisierung kann erfolgen durch die Angabe, ob es sich um eine Gleichspannung  $U_{\sim}$  oder eine Wechselspannung  $U_{\sim}$  handelt. Im angelsächsischen Sprachbereich werden statt der Symbole „–“ und „ $\sim$ “ die Bezeichnungen DC (*direct current*) bzw. AC (*alternating current*) verwendet.

Ein galvanisches Element wird auch dargestellt durch die Metallplatten im Elektrolyten:  $\text{⊖}|\text{⊕}$  oder  $\text{⊖}|\text{⊕}$ . Wollen wir verdeutlichen, dass in einer Batterie zur Erzeugung höherer Spannungen mehrere galvanische Zellen in Serie geschaltet sind, dann verwenden wir folgendes Symbol:  $\text{⊖}|\text{⊕}|\text{⊕}|\text{⊕}|\text{⊕}|\text{⊖}$ .

3. Für *Strom-* bzw. *Spannungsmessgeräte* verwenden wir das Zeichen:  $\text{⊖}(\text{A})\text{⊕}$ ; bei spezieller Kennzeichnung des Messbereichs:  $\text{⊖}(\text{mA})\text{⊕}$ ,  $\text{⊖}(\text{mV})\text{⊕}$  usw.

Mit diesen Zeichen können wir bereits einfache Stromkreise wie den in Abb. 14.3 gezeigten darstellen. Wichtig ist: Schaltpläne sollen nie die tatsächliche räumliche Anordnung der Bauelemente im Netzwerk wiedergeben, vielmehr steht die Übersichtlichkeit des Plans im Vordergrund.

## 14.6.2 Innenwiderstand einer Spannungsquelle

Im unbelasteten Zustand (ohne Stromfluss) liegt an den Polen einer Spannungsquelle eine bestimmte Spannung, die sogenannte *Leerlaufspannung* oder *Urspannung*  $U_0$  (früher *elektromotorische Kraft*, EMK, genannt). Für die Größe dieser Spannung ist unwesentlich, wie lange die Spannungsquelle braucht, um  $U_0$  aufzubauen. Schließen wir aber einen *Verbraucher* (eine *Last*, wie man häufig sagt) an die Spannungsquelle an, so dass Strom durch den Verbraucher fließt, dann ist für die Effektivität der Quelle entscheidend, wie schnell sie Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens zu trennen vermag. Kann sie ebenso viele Ladungen pro Sekunde trennen, wie

aufgrund des äußeren Stroms neutralisiert werden können, so bleibt die Spannung zwischen den Klemmen unverändert, andernfalls sinkt die Spannung zwischen den Anschlussklemmen. Um die bei der Belastung der Quelle sich einstellende Spannung von der Leerlaufspannung  $U_0$  zu unterscheiden, wird sie als *Klemmenspannung*  $U_K$  bezeichnet.

In einer Taschenlampenbatterie sinkt  $U_K$  bereits stark ab, wenn ein Strom von mehr als 1 A durch den Verbraucher fließt; bei einer leistungsstarken Autobatterie geschieht dies erst, wenn beim Anlassen kurzfristig Ströme von etwa 100 A fließen.

Die Wechselbeziehung zwischen Strom und Klemmenspannung der Quelle wollen wir mit Hilfe eines Ersatzschaltbildes für die Spannungsquelle erläutern. Hierzu führen wir den *Innenwiderstand* der Spannungsquelle  $R_i$  ein (Abb. 14.4). Wir ersetzen also die Quelle in Gedanken durch das Modell eines Innenwiderstandes  $R_i$  und einer fiktiven Quelle, die auch unter Belastung unverändert die Spannung  $U_0$  liefert. Sobald ein Strom  $I$  durch diese Anordnung fließt, wird infolge des Spannungsabfalls an  $R_i$  die Klemmenspannung  $U_K$  kleiner als  $U_0$ :  $U_K = U_0 - IR_i$ . Die Größe des Innenwiderstandes  $R_i$  kennzeichnet also, wie stark die Klemmenspannung  $U_K$  der Gleichspannungsquelle bei Belastung sinkt. Damit ist  $R_i$  ein Maß für die Effektivität der Spannungsquelle.

Einige Zahlenwerte: Eine Autobatterie besitzt einen Innenwiderstand von etwa  $10^{-2} \Omega$ , eine Taschenlampenbatterie etwa  $1 \Omega$ , eine biologische Spannungsquelle (Kap. 15.1) etwa  $100 \text{ M}\Omega$ . Der extrem hohe Innen-

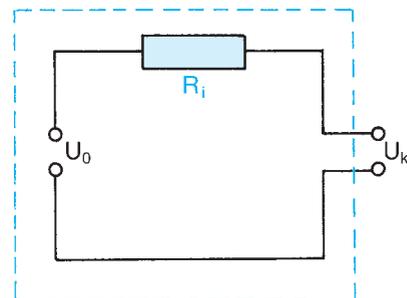
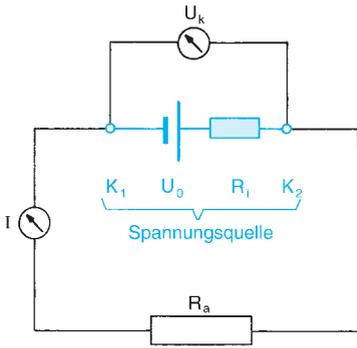


Abb. 14.4 Ersatzschaltbild einer Gleichspannungsquelle mit Innenwiderstand  $R_i$ .



**Abb. 14.5** Zur Definition von *Leerlauf* ( $R_a \gg R_i$ ) und *Kurzschluss* ( $R_a \ll R_i$ ) einer Spannungsquelle ( $K_1, K_2$ : Klemmen).

widerstand biologischer Spannungsquellen führt dazu, dass man diese Spannungen nicht mit herkömmlichen Spannungsmessgeräten messen kann, da der durch das Messgerät fließende Strom bereits ausreicht, um die Klemmenspannung praktisch auf Null absinken zu lassen (siehe hierzu Kap. 16.1.3).

Sind die Klemmen einer Spannungsquelle wie in Abb. 14.5 über einen elektrischen Leiter (mit Widerstand  $R_a$ ) miteinander verbunden, dann fließt in dem Stromkreis der Strom  $I$ . Der Gesamtwiderstand dieses Stromkreises ist, da die Widerstände  $R_i$  und  $R_a$  hintereinandergeschaltet sind, gegeben durch die Summe (siehe Kap. 14.6.3)

$$R = R_i + R_a.$$

Am Widerstand  $R_i$  erfolgt der Spannungsabfall:

$$U_i = IR_i. \quad (14-11)$$

Entsprechend gilt für den Spannungsabfall am äußeren Widerstand  $R_a$ :

$$U_K = IR_a. \quad (14-12)$$

Die Leerlaufspannung  $U_0$  teilt sich also auf in  $U_i$  und  $U_K$ :

$$U_0 = U_i + U_K. \quad (14-13)$$

Fassen wir diese Gln. zusammen, so ergibt sich für die Klemmenspannung  $U_K$

$$U_K = U_0 - IR_i = U_0 - \frac{U_0}{R} R_i = \frac{U_0}{R_i + R_a} R_a. \quad (14-14)$$

Der Gl. (14-14) entnehmen wir, dass die Klemmenspannung  $U_K$  linear mit der Strombelastung  $I$  sinkt. Je größer der äußere Widerstand  $R_a$  ist, um so kleiner ist  $I$ , und um so weniger sinkt  $U_K$  gegenüber  $U_0$  ab. Bei offenem Stromkreis ist  $R_a = \infty$  (*Leerlauf*), und an den Klemmen liegt  $U_0$ . Schließen wir umgekehrt die Pole durch einen Leiter mit  $R_a \ll R_i$ , verursachen wir also einen *Kurzschluss*, dann fällt  $U_K$  praktisch auf Null. Die Quelle wird mit der größtmöglichen Stromstärke

$$I \approx \frac{U_0}{R_i} \quad (14-15)$$

belastet, was ihr aber nicht zugemutet werden sollte, weil dann die elektrische Energie im Innern der Quelle verbraucht wird und diese unter Umständen zerstört.

### 14.6.3 Kirchhoff'sche Gesetze des elektrischen Stromes

Vergleichen wir die Leitungselektronen in einem System von elektrischen Leitern mit den Flüssigkeitsmolekülen in einem System von Röhren, so können wir die für die Flüssigkeitsströmung in Kap. 5.3.3.2.2 angegebenen Gesetze direkt auf die elektrische Stromleitung übertragen. Für die Verteilung eines Stromes auf die Leiter in einem Netzwerk gelten zwei Regeln, die *Knoten-* und die *Maschenregel*:

1. An jedem Verzweigungspunkt (Knoten) mehrerer Leitungen ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

2. In jedem geschlossenen Stromkreis (*Masche*) ist die Summe aller Spannungen der enthaltenen Spannungsquellen gleich der Summe aller Spannungsabfälle an elektronischen Bauelementen. (Dabei müssen die Vorzeichen der Spannungen beachtet werden.)

Wir wenden diese beiden Kirchhoff'schen Gesetze auf einige Schaltungen an:

1. Zwei *hintereinandergeschaltete Widerstände*  $R_1$  und  $R_2$  sind an eine Spannungsquelle mit der Ursprungspannung  $U_0$  (Innenwiderstand  $R_i$ ) angeschlossen (Abb. 14.6).

Nach dem 2. Kirchhoff'schen Gesetz gilt:

$$U_0 = I_0 R_i + I_0 R_1 + I_0 R_2. \quad (14-16)$$

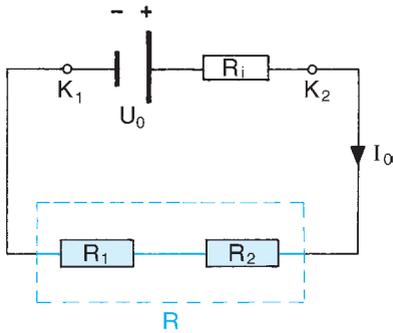
Bezeichnen wir den Gesamtwiderstand von  $R_1$  und  $R_2$  mit  $R$ , so gilt ebenfalls:

$$U_0 = I_0 R_i + I_0 R. \quad (14-17)$$

Durch Vergleichen der Gl. (14-16) und (14-17) erhalten wir:

$$R = R_1 + R_2. \quad (14-18)$$

Bei *in Reihe* geschalteten Widerständen ist also der Gesamtwiderstand gleich der Summe der Einzelwiderstände.



**Abb. 14.6** Hintereinanderschalten von Widerständen.

2. Zwei Widerstände,  $R_1$  und  $R_2$ , sind *parallel geschaltet* und an eine Spannungsquelle mit der Ursprungung  $U_0$  (Innenwiderstand  $R_i$ ) angeschlossen (Abb. 14.7).

Für die beiden Knoten a und b gilt nach dem 1. Kirchhoff'schen Gesetz:

$$I_0 = I_1 + I_2. \tag{14-19}$$

Wenden wir ferner das 2. Kirchhoff'sche Gesetz auf die beiden geschlossenen Teil-Stromkreise  $K_1 - a - R_1 - b - K_2$  und  $K_1 - a - R_2 - b - K_2$  an, dann erhalten wir:

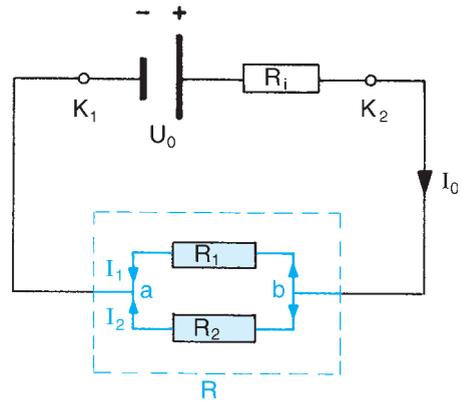
$$U_0 = I_0 R_i + I_1 R_1 \tag{14-20a}$$

und

$$U_0 = I_0 R_i + I_2 R_2. \tag{14-20b}$$

Bezeichnen wir den Gesamtwiderstand zwischen den Knoten a und b mit  $R$ , so können wir schreiben:

$$U_0 = I_0 R_i + I_0 R. \tag{14-20c}$$



**Abb. 14.7** Parallelschalten von Widerständen.

Aus den drei Gl. (14-20a), (14-20b) und (14-20c) folgt:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_0 R. \tag{14-21}$$

Einsetzen der aus Gl. (14-21) berechneten Teilströme  $I_1 = I_0 R/R_1$  und  $I_2 = I_0 R/R_2$  in Gl. (14-19) liefert:

$$I_0 = I_0 \frac{R}{R_1} + I_0 \frac{R}{R_2}. \tag{14-22}$$

Daraus erhalten wir:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{14-23}$$

Das Reziproke des Gesamtwiderstandes zweier parallel geschalteter Widerstände ist also gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände.

## 14.7 Elektrostatisches Feld

Von der Mechanik her kennen wir bereits den Unterschied zwischen Statik und Dynamik. In entsprechender Weise unterscheiden wir in der Elektrizitätslehre statische und dynamische Vorgänge. In diesem Kapitel behandeln wir die physikalischen Wirkungen eines zeitlich konstanten (*elektrostatischen*) Feldes. In den Kap. 14.8 und 14.9 werden

vornehmlich zeitabhängige elektrische (*elektrodynamische*) Größen betrachtet werden.

### 14.7.1 Kraftwirkung auf eine Ladung im Feld

Das Coulomb'sche Gesetz (Gl. (14-1)) beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei

Ladungen, nicht aber, auf welche Weise die Kraft über den Raum zwischen den Ladungen vermittelt wird. Dies geschieht über das *elektrische Feld*. Wir werden später sehen, dass sich die Kraftwirkung nur mit endlicher Geschwindigkeit (*Lichtgeschwindigkeit*) über das Feld im Raum ausbreiten kann. Ein elektrisches Feld wird bereits durch eine einzelne Ladung  $Q$  in dem sie umgebenden Raum erzeugt. Bringen wir eine weitere Ladung  $q$  in die Nähe von  $Q$ , dann überlagern sich die Felder von beiden, und so erfährt  $q$  im Feld von  $Q$  und, umgekehrt,  $Q$  im Feld von  $q$  eine Kraftwirkung. Verschieben wir  $q$  in der Umgebung von  $Q$ , so können wir für jeden Ort die Kraftwirkung messen.

Die *Feldstärke*  $\vec{E}$  des elektrischen Feldes um die Ladung  $Q$  definieren wir als den Quotienten aus der Kraft  $\vec{F}$  (die das Feld auf die Probeladung  $q$  ausübt) und der Ladung  $q$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (14-24)$$

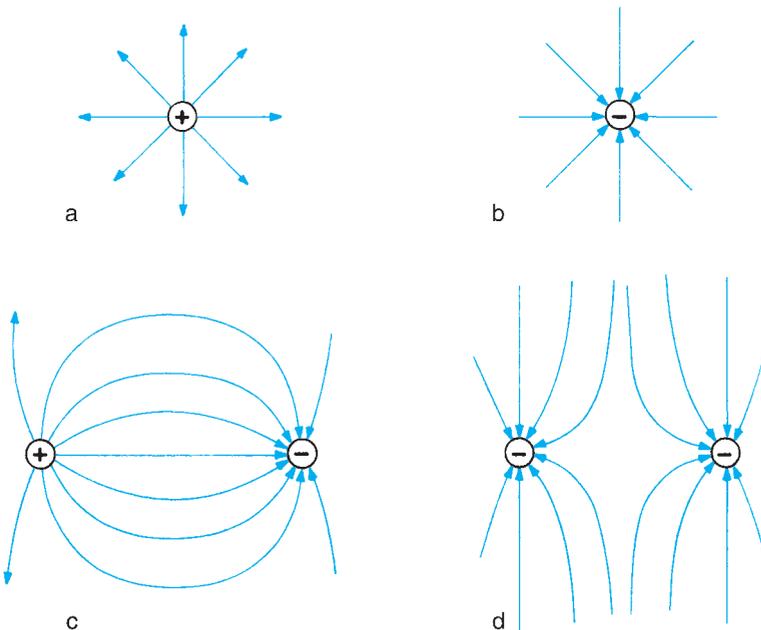
$\vec{E}$  ist eine Vektorgröße wie die Kraft  $\vec{F}$ , und  $q$  ist ein Skalar. Mit Gl. (14-1) erhalten wir für den Betrag der elektrischen Feldstärke in der Umgebung von  $Q$ :

$$E = \gamma \frac{Q}{r^2}. \quad (14-25)$$

Wie das Gravitationsfeld (Kap. 2.2.2.1) ist auch das elektrische Feld ein Vektorfeld.  $\vec{E}$  besitzt die Richtung von  $\vec{F}$ , wenn  $q$  positiv ist; die Richtung von  $\vec{E}$  ist der von  $\vec{F}$  entgegengesetzt, wenn  $q$  negatives Vorzeichen hat. Die Felder mehrerer Ladungen überlagern sich derart, dass sich deren Feldstärken in jedem Punkt des Raumes vektoriell addieren.

Wir können das elektrische Feld grafisch durch *Feldlinien* (Kraftlinien) veranschaulichen. Als Richtung der Feldlinien ist definiert worden, dass sie von positiven Ladungen ausgehen (Abb. 14.8a) bzw. auf negativen Ladungen enden (Abb. 14.8b).

Ist in einem Bereich des Raumes an jedem Punkt die Feldstärke nach Betrag und Rich-



**Abb. 14.8** Feldlinienverlauf (a) um eine positive Ladung, (b) um eine negative Ladung, (c) zwischen einer positiven und einer negativen Ladung und (d) zwischen zwei negativen Ladungen. (Bei (a), (b) und (d) ist angenommen, dass sich jeweils Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens in sehr großer Entfernung befinden, von denen die Feldlinien ausgehen bzw. auf denen sie enden.)

tung gleich, so ist das Feld dort homogen. Dann sind die Feldlinien parallele Geraden. Zwischen Punktladungen aber sind die Felder, wie die Abb. 14.8c und 14.8d zeigen, *inhomogen*.

Bewegen sich Ladungen in einem elektrischen Feld infolge der dadurch vermittelten Kraft, so fließt ein elektrischer Strom.

### 14.7.2 Arbeit und Energie im elektrischen Feld

In Kap. 14.3.1 wurde der Begriff der elektrischen Spannung über die Arbeit bei der Verschiebung zweier Ladungen gegeneinander eingeführt. Unter Verwendung des Feldbegriffes wollen wir diese Definition nun präzisieren.

Soll im Feld  $\vec{E}$  um die positive Ladung  $Q$  die negative Ladung  $q$  von  $Q$  wegverschoben werden, ist nach Gl. (3-1) und (14-24) die Arbeit

$$dW = \vec{F} d\vec{s} = q\vec{E} d\vec{s} = qE ds \cos(\vec{E}, d\vec{s}) \tag{14-26}$$

zu verrichten. Die Arbeit für einen endlich großen Weg, z. B. von einem Punkt a zu einem Punkt b, ergibt sich daraus zu:

$$W_{ab} = q_1 \int_a^b E ds \cos(\vec{E}, d\vec{s}). \tag{14-27}$$

Soll die Ladung  $q$  völlig von der Ladung  $Q$  getrennt werden, so muss sie unendlich weit von  $Q$  weggeschafft werden; erst dann ist die Coulomb-Kraft der Gl. (14-1) Null. Die dazu nötige Arbeit (praktisch genügt eine endliche, aber große Entfernung) ist:

$$W_{a\infty} = q \int_a^\infty E ds \cos(\vec{E}, d\vec{s}). \tag{14-28}$$

Die Größe  $\varphi_a = W_{a\infty}/q$  erhält einen eigenen Namen; wir nennen sie das *elektrische Potential* des Punktes a im elektrischen Feld.

Jedem Punkt im *Vektorfeld*  $\vec{E}$  ist demnach ein skalares Potential  $\varphi$  zugeordnet. Die *Potentialdifferenz* zwischen zwei Punkten a

und b

$$\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_b = \frac{W_{ab}}{q_1} \tag{14-29}$$

wird als *elektrische Spannung*  $U$  zwischen den Punkten a und b bezeichnet,

$$\Delta\varphi = U. \tag{14-30a}$$

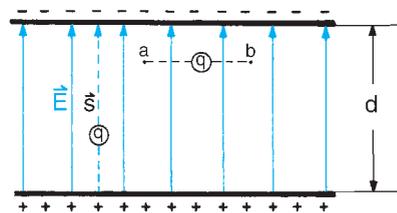
Die Spannung  $U$  zwischen den Punkten a und b ist also gleich der Arbeit, die aufzuwenden ist, um die Ladung  $q$  im elektrischen Felde  $\vec{E}$  von a nach b zu verschieben, dividiert durch diese Ladung. Der Energiezuwachs  $W_{ab}$ , den die Ladung dadurch erfahren hat, ist die *potentielle Energie* der Ladung im Punkt b gegenüber dem Punkt a. Wird der Abstand zwischen zwei Ladungen mit ungleichnamigen Ladungsvorzeichen vergrößert, dann erhöht sich dabei die potentielle Energie (denn die Coulomb-Kraft wirkt in diesem Falle anziehend), anderfalls, bei gleichnamigen Ladungen, wird die potentielle Energie erniedrigt.

Wir diskutieren zwei einfache Fälle:

1. In dem Feld zwischen zwei parallelen geladenen Metallplatten (*Plattenkondensator*, siehe Kap. 14.7.3) soll eine kleine Probeladung  $q$  von der einen Platte zur anderen Platte so verschoben werden, dass der Weg  $\vec{s}$  parallel zu  $\vec{E}$  ist (Abb. 14.9);  $q$  soll also entlang der elektrischen Feldlinien verschoben werden ( $\cos(\vec{E}, d\vec{s}) = \cos 0^\circ = 1$ ). Im Plattenkondensator ist  $\vec{E}$  überall konstant (homogenes Feld), und so ergibt sich aus Gln. (14-27) und (14-29) eine einfache Beziehung zwischen dem Feld  $\vec{E}$  und der Spannung  $U$  zwischen den Platten:

$$U = \int_0^d \vec{E} d\vec{s} = Ed. \tag{14-30b}$$

2. Verschieben wir dagegen die Ladung  $q$  senkrecht zu den elektrischen Feldlinien von a nach b (Abb. 14.9) so steht  $\vec{E}$  senkrecht auf  $\vec{s}$  ( $\cos(\vec{E}, d\vec{s}) = \cos 90^\circ = 0$ ). Für die Potentialdifferenz  $\Delta\varphi$  ergibt sich dann nach



**Abb. 14.9** Zur Berechnung der Spannung  $U$  zwischen den Platten eines Kondensators.

Gl. (14-27) zwischen den Punkten a und b der Wert Null.

Alle Punkte einer zur Richtung der Feldlinien *senkrechten* Fläche haben gleiches Potential und demnach gegeneinander die Spannung Null. Solche Flächen heißen *Äquipotentialflächen* ( $\varphi = \text{konstant}$ ). Im Plattenkondensator sind dies Ebenen parallel zu den Platten (Abb. 14.10a). Im Felde einer einzelnen Punktladung sind dies konzentrische Kugelflächen (Abb. 14.10b).

Bringen wir Ladung auf die elektrisch leitende Oberfläche einer Metallplatte, dann verschiebt sie sich so lange, bis alle Kräfte zwischen den Ladungsträgern im Gleichgewicht sind. Es besteht dann keine Potentialdifferenz mehr zwischen verschiedenen Punkten der Oberfläche. Die leitende Oberfläche eines Körpers ist demnach stets eine Äquipotentialfläche ( $\varphi = \text{konstant}$ ); auf ihr stehen die elektrischen Feldlinien senkrecht. Dies erklärt, wieso die Feldlinien im Kondensator, wie Abb. 14.11 zeigt, so verlaufen, dass sie senkrecht auf die Plattenoberfläche auftreffen.

Eine spezielle Äquipotentialfläche ist wegen der Leitfähigkeit der Erde die Erdober-

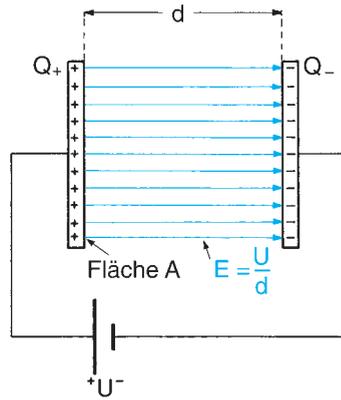


Abb. 14.11 Zur Definition der Kapazität.

fläche. Schließt man zum Beispiel das Metallgehäuse eines elektrischen Gerätes über einen Leiter an die Erde, so wird es Teil dieser Äquipotentialfläche, das Metallgehäuse wird dadurch *geerdet*. Häufig wird dem Potential an der Erdoberfläche willkürlich der Wert Null zugeordnet. Ein weiteres Beispiel für eine Äquipotentialfläche lernen wir in Kap. 14.7.5 in Form des *Faraday-Käfigs* kennen.

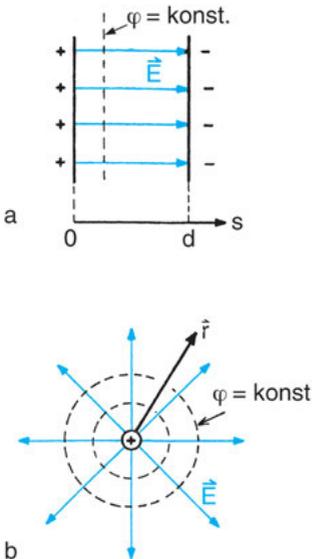


Abb. 14.10 Feldlinien- und Äquipotentialflächenverlauf ( $\varphi = \text{konst.}$ ) (a) in einem Plattenkondensator und (b) um eine Punktladung.

### 14.7.3 Kondensator und Kapazität

Ein *Kondensator* besteht im einfachsten Fall aus zwei gleich großen, gegeneinander isolierten Metallplatten (Abb. 14.11). Schließen wir die beiden Platten an die Klemmen einer Batterie mit Spannung  $U$  an, dann fließt auf die mit dem Minuspol der Batterie verbundene Platte eine negative Ladung  $Q_-$ , und auf der anderen Platte wird eine gleich große Zahl von Leitungselektronen abgezogen, wodurch die positive Ladung  $Q_+$  zurückbleibt. Insgesamt ist also die Ladungsmenge  $Q$  von der einen Platte zur anderen verschoben worden. Man sagt hierzu: Der Plattenkondensator ist *aufgeladen* und die Ladung des Kondensators hat den Betrag  $Q$ . Der Raum zwischen den Platten ist nach Gl. (14-30b) von einem elektrischen Feld der Feldstärke  $E = U/d$  erfüllt, wobei  $d$  der Plattenabstand ist. Die Feldlinien sind im Innern des Kon-

densators parallel und gleich dicht; das Feld ist also homogen. Genau gilt dies nur, sofern der Abstand  $d$  sehr viel kleiner als die Abmessungen der Fläche  $A$  der Platten ist. Wiederholt man das Experiment mit Kondensatoren unterschiedlicher Plattenabstände und Plattenflächen und mit verschiedenen Spannungen, so zeigt sich:

Die Ladung  $Q$  auf dem Plattenkondensator ist der Spannung  $U$  und der Fläche  $A$  direkt und dem Abstand  $d$  umgekehrt proportional:

$$Q \sim \frac{A}{d} U. \quad (14-31)$$

Im SI-System haben wir als Proportionalitätskonstante die *elektrische Feldkonstante*  $\epsilon_0 = 8,855 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1}$  zu verwenden und erhalten:

$$Q = \epsilon_0 \frac{A}{d} U. \quad (14-32)$$

Zur Abkürzung schreibt man auch

$$Q = CU \quad (14-33)$$

und nennt die Konstante  $C$  die *Kapazität* des Kondensators. Sie hängt — nach den letzten beiden Gleichungen — von der Anordnung der Kondensatorplatten ab.  $C$  hat die Einheit  $1 \text{ Coulomb Volt}^{-1} = 1 \text{ Farad (F)}$ .

Die Kapazität 1 F ist sehr groß; seit ca. 1990 sind Doppelschichtkondensatoren erhältlich, die Kapazitäten von einigen Farad aufweisen. Es ist aber üblich, die Kapazität gebräuchlicher Größe in Picofarad (pF), Nanofarad (nF) oder Mikrofarad ( $\mu\text{F}$ ) anzugeben.

Speziell für den Plattenkondensator erhalten wir:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (14-34)$$

Setzen wir zum Beispiel für  $d$  und  $A$  die Zahlenwerte  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $A = 100 \text{ cm}^2$  ein, so ergibt sich  $C = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 8,9 \text{ pF}$ . Hierbei ist vorausgesetzt, dass sich zwischen den Platten Vakuum befindet. Bringt man stattdessen einen nichtleitenden Stoff zwischen die Platten, so muss Gl. (14-34) abgeändert werden (Kap. 14.7.5).

Um größere oder kleinere Kapazitäten zu erhalten, kann man mehrere Kondensatoren in geeigneter Weise zusammenschalten. Dabei zeigt sich:

1. Bei *Hintereinanderschalten* zweier Kondensatoren ist der reziproke Wert der resultierenden Kapazität  $C_{\text{res}}$  gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten  $C_1$  und  $C_2$ :

$$\frac{1}{C_{\text{res}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (14-35)$$

Legen wir die Spannung  $U$  an, so lädt sich die Kombination mit der Ladung  $Q$  gemäß  $Q = C_{\text{res}}U$  auf. Die Gesamtspannung  $U = U_1 + U_2$  verteilt sich auf die beiden Kondensatoren gemäß den Einzel-Kapazitäten:  $Q = C_1 U_1$ ;  $Q = C_2 U_2$ . Daher ergibt sich

$$Q = C_{\text{res}} \left( \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \right), \text{ und daraus folgt Gl. (14-35).}$$

2. Bei *Parallelschaltung* addieren sich die Einzelkapazitäten zur resultierenden Gesamtkapazität:

$$C_{\text{res}} = C_1 + C_2. \quad (14-36)$$

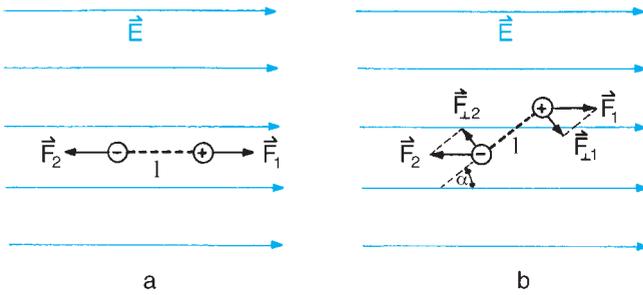
In diesem Fall verteilt sich die Gesamtladung  $Q$  entsprechend den Kapazitäten:  $Q = Q_1 + Q_2$  mit  $Q_1 = C_1 U$ ,  $Q_2 = C_2 U$ . So finden wir:  $Q = C_{\text{res}}U = (C_1 + C_2)U$ . Daraus folgt Gl. (14-36). Im Fall zweier gleicher Plattenkondensatoren ist die Parallelschaltung also gleichbedeutend mit einer Verdoppelung der Plattenflächen, die Serienschaltung mit einer Verdoppelung des Plattenabstandes.

## 14.7.4 Kräfte auf einen Dipol im Feld

Zwei Punktladungen  $Q_+$  und  $Q_-$  von gleichem Betrag aber entgegengesetztem Vorzeichen in festem Abstand  $l$  stellen einen *elektrischen Dipol* dar (den wir in Kap. 5.1.1 kennengelernt haben). Er wird durch das *Dipolmoment*  $\vec{m}$  mit dem Betrag

$$m = Ql, \text{ und der SI-Einheit C m} \quad (14-37)$$

charakterisiert.  $Q$  ist der Betrag der Ladungen. Die Richtung von  $\vec{m}$  weist längs der Verbindungsgeraden von der negativen zur positiven Ladung.



**Abb. 14.12** Kräfte auf einen elektrischen Dipol im homogenen elektrischen Feld. (a)  $\vec{m}$  parallel  $\vec{E}$ ; (b)  $\vec{m}$  bildet den Winkel  $\alpha$  mit  $\vec{E}$ .

1. Bringen wir den Dipol in ein homogenes elektrisches Feld, und zwar so, dass die Dipolachse parallel zum elektrischen Feld liegt (Abb. 14.12a), dann greift die Kraft  $\vec{F}_1 = Q_+ \vec{E}$  an der positiven Ladung  $Q_+$  und die gleich große, aber entgegengerichtete Kraft  $\vec{F}_2 = Q_- \vec{E}$  an der negativen Ladung  $Q_-$  an. Die resultierende Kraft  $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  ist Null; der Dipol ist in diesem Falle kräftefrei.

Im inhomogenen Feld dagegen sind die elektrischen Felder am Orte von  $Q_+$  bzw.  $Q_-$  verschieden, und es ergibt sich eine resultierende Kraft  $\vec{F}_{res}$  ungleich Null.

2. Schließt die Dipolachse mit den Feldlinien eines homogenen Feldes dagegen den Winkel  $\alpha$  ein (Abb. 14.12b), dann wirken wiederum die Kräfte  $\vec{F}_1 = Q_+ \vec{E}$  bzw.  $\vec{F}_2 = Q_- \vec{E}$  parallel bzw. antiparallel zum Feld. Die zur Dipolachse senkrechten Kraftkomponenten  $F_{\perp 1} = Q_+ E \sin \alpha$  und  $F_{\perp 2} = Q_- E \sin \alpha$  bilden nun ein an der Dipolachse  $l$  angreifendes Kräftepaar, dessen Drehmoment mit dem Betrag

$$M_{el} = F_{\perp} l = QEl \sin \alpha = mE \sin \alpha \quad (14-38)$$

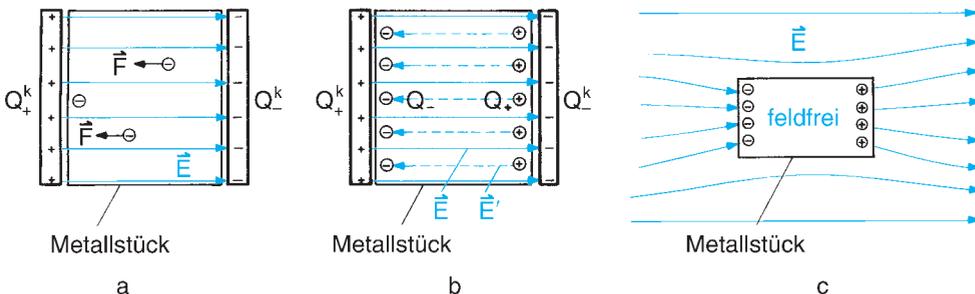
bestrebt ist, den Dipol in Feldrichtung einzustellen.

Im homogenen Feld dreht sich der Dipol dadurch so lange, bis  $\alpha = 0$  ist, wogegen in inhomogenen Feld zum Drehmoment noch eine resultierende Kraft hinzukommt, die eine zusätzliche Translationsbewegung des Dipols bewirkt.

### 14.7.5 Materie im Feld

Wir wollen nun untersuchen, wie sich Materie verhält, die wir in ein elektrisches Feld (z. B. in einen Plattenkondensator) bringen. Es wird sich zeigen, dass dabei elektrische Leiter anders auf das Feld reagieren als nichtleitende Stoffe.

**Leiter im Feld** Auf die in einem Metall mehr oder weniger frei beweglichen Elektronen wirkt im elektrischen Feld eines Plattenkondensators nach Gl. (14-24) die Kraft  $\vec{F} = -e\vec{E}$ . Dabei sollen sich Metall und Kondensatorplatten nicht berühren, damit kein Strom fließen kann. Die Elektronen wandern unter dem Einfluss von  $\vec{E}$  zur Oberfläche  $A$  des Metalls (Abb. 14.13a). Die positiven Metallionen sind dagegen nicht frei beweglich und bleiben an ihren Gitterplätzen. Es wird also durch das äußere elektrische Feld negative und positive Ladung getrennt, und dies geschieht so lange, bis die zwischen den Überschussladungen  $Q_+$  und  $Q_-$  auf den beiden Oberflächen des Metallstückes wirkende Coulomb-Kraft der ladungstrennenden



**Abb. 14.13** Elektrischer Leiter im elektrischen Feld.

Kraft des äußeren elektrischen Feldes das Gleichgewicht hält (Abb. 14.13b). Die Ladung  $Q_+$  ist dann entgegengesetzt gleich der auf der negativ geladenen Kondensatorplatte befindlichen negativen Ladung  $Q^k$ , und entsprechendes gilt für die Ladung  $Q_-$ .

Der Vorgang der Aufladung der Metalloberflächen im äußeren elektrischen Feld wird als *Influenz* bezeichnet, die Oberflächenladungen nennt man die *Influenzladungen*.

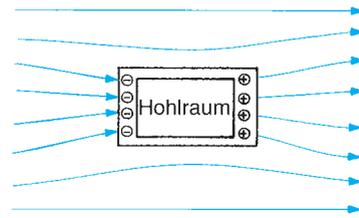
Da mit den Influenzladungen  $Q_+$  und  $Q_-$  ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  verknüpft ist, kann das stationäre Gleichgewicht auch folgendermaßen beschrieben werden: Die Ladungstrennung geht unter dem Einfluss des äußeren Feldes  $\vec{E}$  so lange weiter, bis das mit zunehmender Ladungstrennung größer werdende Gegenfeld  $\vec{E}'$  dem äußeren Feld  $\vec{E}$  entgegengesetzt gleich wird. Im Innern des Metallstückes herrscht dann also das resultierende elektrische Feld

$$\vec{E}_{\text{res}} = \vec{E} - \vec{E}' = 0, \quad (14-39)$$

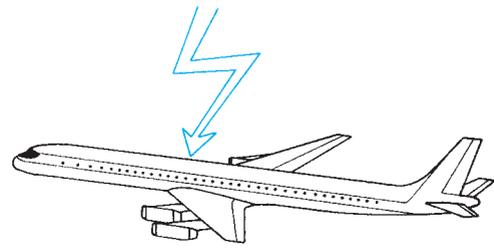
und zu weiterer Ladungsverschiebung besteht kein Anlass mehr. Gl. (14-39) bringt zum Ausdruck, dass jeder Leiter, der sich in einem äußeren elektrostatischen Feld befindet, in seinem Inneren feldfrei ist (Abb. 14.13c). Das ist gleichbedeutend damit, dass sich der gesamte Leiter trotz des äußeren Feldes auf konstantem Potential befindet.

### Abschirmung elektrischer Felder durch Leiter

An der Tatsache, dass jeder Leiter, der sich in einem elektrischen Feld befindet, in seinem Innern feldfrei ist, kann sich auch nichts ändern, wenn wir aus dem Innern des Metallstückes ein Stück ausschneiden, so dass ein Hohlraum entsteht (Abb. 14.14a). Dies kann man dazu nutzen, einen Raum von elektrischen Feldern völlig abzuschirmen. Man umgibt ihn dazu mit metallischen Wänden, auf deren Außenseite Influenzladungen entstehen. Eine derartige Anordnung nennen wir einen *Faraday-Käfig*. Lebenserhaltend ist das Prinzip des Faraday-Käfigs für Passagiere in einem Flugzeug oder Auto mit Metallka-



a



b

**Abb. 14.14** Abschirmung elektrischer Felder durch Leiter.

rosserie, die ohne Schaden bleiben, wenn es vom Blitz getroffen wird (Abb. 14.14b), weil sich die Ladungsmenge des Blitzes sofort auf der äußeren Metalloberfläche verteilt und damit das Innere feldfrei bleibt.

**Dielektrikum im Feld** Influenz wird, wie wir gesehen haben, durch freibewegliche Ladungsträger bewirkt; ein nichtleitender Stoff (*Dielektrikum*) dagegen enthält keine freibeweglichen Ladungen. Die in ihm enthaltenen Ladungsträger (Ionen und Elektronen) sind mehr oder weniger fest an Gleichgewichtslagen gebunden, um die sie sich im elektrischen Feld nur geringfügig verschieben können, wenn wir den Stoff zwischen die Platten eines geladenen Kondensators bringen. In jedem Teilchen (Atom, Molekül usw.) werden dabei durch das äußere Feld negative und positive Ladungsträger geringfügig gegeneinander verschoben, wobei aber insgesamt das Teilchen neutral bleibt (sofern es ohne Feld neutral war). Man sagt hierzu: Jedes Teilchen wird *polarisiert*; es wird zum elektrischen Dipol. Da dies bei allen Teilchen der Probe geschieht, heben sich die Wirkungen der Dipole im Innern der Probe auf, und übrig

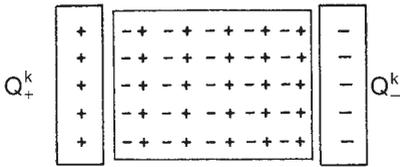


Abb. 14.15 Dielektrikum im Feld.

bleiben, wie Abb. 14.15 zeigt, für eine Wirkung nach außen die Dipole an den Oberflächen.

Als *Polarisation P des Dielektrikums* bezeichnen wir dessen auf die Volumeneinheit bezogenes elektrisches Dipolmoment,  $P = m/V$ .

Die aus der Polarisation resultierenden Ladungen  $\Delta Q_+$  und  $\Delta Q_-$  an den Oberflächen des Dielektrikums influenzieren gleich große zusätzliche Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens  $\Delta Q_-^k$  auf der negativen bzw.  $\Delta Q_+^k$  auf der positiven metallischen Kondensatorplatte (K steht für Kondensatorplatte). Die effektive Ladung auf den Kondensatorplatten wird also erhöht, indem aus der Spannungsquelle weitere Ladungen auf die Platten fließen; die Ladung im Kondensator nimmt infolgedessen insgesamt um  $\Delta Q$  zu:

$$Q' = Q + \Delta Q.$$

$Q$  war die Ladung des durch die Spannung  $U$  aufgeladenen Kondensators ohne Dielektrikum (Abb. 14.16a),  $Q'$  dagegen bezeichnet

die Ladung des Kondensators bei gleicher Spannung mit Dielektrikum (Abb. 14.16b). Schreiben wir Gl. (14-33) für die beiden Fälle an, so erhalten wir:

$$Q = CU \tag{14-40a}$$

und

$$Q' = C'U. \tag{14-40b}$$

$Q'$  ist größer als  $Q$ , d. h., die Kapazität des Kondensators hat sich durch Zugabe eines Dielektrikums vergrößert. Wir können diesen Zuwachs durch einen dimensionslosen Faktor  $\epsilon_{rel}$  ausdrücken, den wir *Dielektrizitätszahl* (oder *relative Dielektrizitätskonstante*) nennen:

$$C' = \epsilon_{rel}C. \tag{14-41a}$$

(Häufig wird mit ungenauem Sprachgebrauch  $\epsilon_{rel}$  einfach als Dielektrizitätskonstante oder *DK* bezeichnet.) Tab. 14.3 enthält einige Beispiele für die Dielektrizitätszahl  $\epsilon_{rel}$ . Die Kapazität des Plattenkondensators, die sich nach Gl. (14-34) zu  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$  ergeben hatte, verändert sich also durch das Dielektrikum:

$$C = \epsilon_{rel}\epsilon_0 \frac{A}{d}. \tag{14-41b}$$

Die Größe  $\epsilon = \epsilon_{rel}\epsilon_0$  bezeichnen wir als *absolute Dielektrizitätskonstante* mit der SI-Einheit  $F m^{-1}$ .

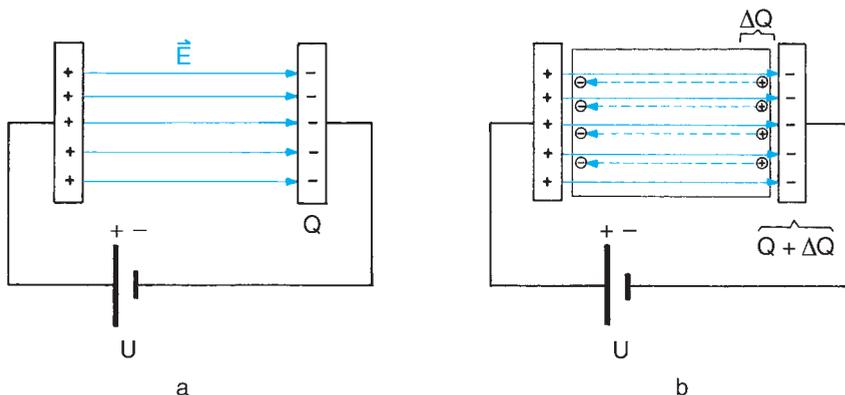


Abb. 14.16 Kondensator (a) ohne und (b) mit Dielektrikum.

**Tab. 14.3** Dielektrizitätszahlen  $\epsilon_{\text{rel}}$  (mit Gleichspannung gemessen)

Dielektrikum	Vakuum	Luft	Glas	Glimmer	Benzol	Nitrobenzol	Wasser
$\epsilon_{\text{rel}}$	1	$\approx 1$	4–7	4–8	2,3	36	81

### 14.7.6 Energieinhalt des elektrischen Feldes

Um einen Plattenkondensator aufzuladen, ist nach Gl. (14-29) die Arbeit  $W$  erforderlich, die als *elektrische Feldenergie* im Kondensator gespeichert wird:

$$W = \int_0^{U_{\text{max}}} Q' dU.$$

Dabei ist  $Q'$  die von *einer* Kondensatorplatte zur *anderen* durch Anschließen an eine Spannungsquelle verschobene Ladung, und  $dU$  ist die dadurch verursachte Änderung der Kondensatorspannung. Ist der Kondensator schließlich mit der Ladung  $\pm Q_{\text{max}}$  aufgeladen, so hat sich zwischen den Platten die Spannung  $U_{\text{max}}$  aufgebaut. Mit den Gl.n (14-40b) und (14-41b) folgt daraus:

$$W = \frac{1}{2} C U_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_{\text{rel}} \epsilon_0 \frac{A}{d} U_{\text{max}}^2. \quad (14-42)$$

Mit der für das homogene Feld des Plattenkondensators gültigen Beziehungen  $E = U/d$  ergibt sich für die *elektrische Feldenergie*  $q = W/V = W/Ad$ :

$$q = \frac{1}{2} \epsilon_{\text{rel}} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} DE. \quad (14-43)$$

Die als *Verschiebungsdichte* bezeichnete Größe  $\vec{D} = \epsilon_{\text{rel}} \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  setzt sich aus dem Feldbeitrag des Vakuums ( $\epsilon_0 \vec{E}$ ) und dem der Polarisation  $\vec{P}$  des Dielektrikums zusammen:  $\vec{P} = (\epsilon_{\text{rel}} - 1) \epsilon_0 \vec{E}$ . Auf Grund des starken permanenten elektrischen Dipolmomentes (Abb. 5.5) der Wassermoleküle ist Wasser extrem polarisierbar ( $\epsilon_{\text{rel}} = 81$ , Tab. 14.3).

### 14.7.7 Piezo- und Pyroelektrizität

Ein aus Ionen aufgebauter Kristall kann auch anders als durch Anlegen eines elektrischen Feldes polari-

siert werden. Wird er durch Zug oder Druck deformiert, so können in seinem Innern elektrische Dipole entstehen, was zur Folge hat, dass das Material polarisiert wird, und – wie bereits beim Dielektrikum beschrieben – dass sich die Oberfläche des Kristalls elektrisch auflädt (*Piezoelektrizität*). Dieses Verhalten zeigen besonders Quarz, Seignettesalz usw. Man verwendet den piezoelektrischen Effekt vielfach zur elektrischen Messung von mechanischem Zug und Druck.

Wird ein piezoelektrischer Kristall nicht mechanisch deformiert, sondern erwärmt, was ja auch eine Deformation (Ausdehnung) zur Folge hat, dann wird er dadurch ebenfalls polarisiert (*Pyroelektrizität*).

Bei der Umkehrung des piezoelektrischen Effekts wird durch elektrische Aufladung der Oberfläche z. B. eines Quarzplättchens dieses mechanisch deformiert. Wird die Aufladung periodisch umgepolt, dann wird der Quarz dadurch zu mechanischen Schwingungen angeregt. Stimmt deren Frequenz mit einer Eigenfrequenz des Quarzplättchens überein, dann schwingt es in Resonanz. *Schwingquarze* besitzen als Ultraschallsender und als Frequenzstabilisator in Quarzuhren große technische Bedeutung.

Eine weitere praktische Anwendung: Ein *lineares Stellelement* besteht aus einem Stapel von piezoelektrischen Scheiben mit elektrischen Kontakten. Legt man eine Spannung an, so verlängern oder verkürzen sich die Stapel, je nach Polung der Spannung. Auf diese Weise lassen sich Positionsänderungen von Objekten längs einer Achse reversibel und präzise (von weniger als einem Atomdurchmesser) vornehmen. Die atomare Strukturauflösung von Raster-Sonden-Mikroskopen (Kap. 20.5) wird durch den Einsatz piezoelektrischer Stellelemente ermöglicht.

## 14.8 Magnetfeld

Schon im Altertum war bekannt, dass sich Stücke bestimmten Eisenerzes (Magnet Eisenstein,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) gegenseitig anziehen oder, falls sie drehbar gelagert sind, eine bestimmte Ruhelage in Bezug auf die Nord-Süd-Richtung annehmen. Mit diesem *Magnetkompass* lernen wir eine weitere Kraft kennen, die *magnetische Kraft*. Diese Kraft

braucht nicht als prinzipiell neuartig neben die schon in Kap. 2.2.2 erwähnten Grundkräfte *Kernkräfte*, *elektromagnetische Kraft* und *Gravitationskraft* eingereiht werden, sondern stellt eine besondere Art der elektromagnetischen Kraft dar. Sie ist zwar erstmals an bestimmten Substanzen beobachtet worden, ihre Grundlagen sind jedoch besser im Zu-

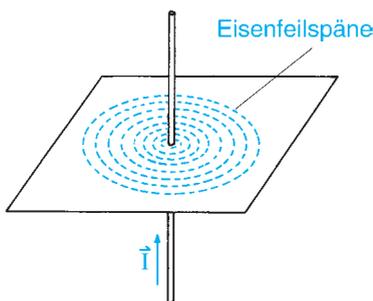
sammenhang mit stromdurchflossenen elektrischen Leitern zu verstehen. Wir wissen bereits, dass *elektrostatische* Kraft durch das elektrische Feld vermittelt wird, das sich zwischen ruhenden elektrischen Ladungen ausbildet. Die *magnetostatische* Kraft wirkt in Analogie dazu über magnetische Felder, welche entstehen, wenn elektrische Ladungen bewegt werden. Anders ausgedrückt:

Das elektrostatische Feld wird von der (zeitlich konstanten) Ladungsdichte, das magnetostatische Feld dagegen von der (zeitlich konstanten) Stromdichte erzeugt.

Magnetfelder können dabei von makroskopischen Strömen in elektrischen Leitern wie auch von Ringströmen der Elektronen auf ihren Bohr'schen Bahnen im Atom erzeugt werden. Nicht durch dieses klassische Bild lassen sich allerdings die magnetischen Eigenschaften erklären, die viele Elementarteilchen (Elektron, Proton, Neutron) besitzen, und die wir als *Spin* bezeichnen.

### 14.8.1 Feldstärke und magnetische Induktion

Sehr einfach lassen sich magnetische Kraftwirkungen in der Umgebung stromdurchflossener Leiter durch Eisenfeilspäne nachweisen. Steckt man einen stromdurchflossenen

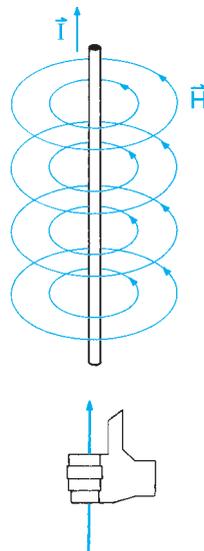


**Abb. 14.17** Nachweis des magnetischen Feldes, das durch einen stromdurchflossenen Leiter erzeugt wird, mit Eisenfeilspänen. Sie ordnen sich längs der Feldlinien an und machen diese dadurch sichtbar.

Draht durch ein Brettchen (Abb. 14.17) und streut Späne darauf, dann ordnen sie sich zu konzentrischen Kreisen um den Leiter als Achse an, wenn wir das Brett leicht erschüttern. Wir sehen durch dieses qualitative Experiment, dass der Raum um den Leiter von einem magnetischen Feld umgeben ist, in welchem sich die Eisenfeilspäne wegen ihrer magnetischen Eigenschaften, auf die wir im Folgenden noch näher eingehen werden, ausrichten und zu Ketten zusammenschließen, die dann die Feldrichtung anzeigen.

Das magnetische Feld lässt sich, ebenso wie das elektrische Feld, durch Feldlinien veranschaulichen. Um einen geraden, stromführenden Leiter bilden sie geschlossene, konzentrische Feldlinien.

Für die Richtung der Feldlinien eines geraden stromdurchflossenen Leiters gilt die *Rechte-Hand-Regel*: Wenn der gestreckte Daumen der rechten Hand die Richtung des Stromes  $\vec{I}$  angibt, dann zeigen die um den Daumen greifenden Finger die Richtung der magnetischen Feldlinien  $\vec{H}$  an (Abb. 14.18). Mit dieser Regel lässt sich auch das Feldlinienbild eines Kreisstroms (Abb. 14.19a) und einer langgestreck-



**Abb. 14.18** Magnetische Feldlinien  $\vec{H}$  um einen stromdurchflossenen Leiter (Rechte-Hand-Regel).

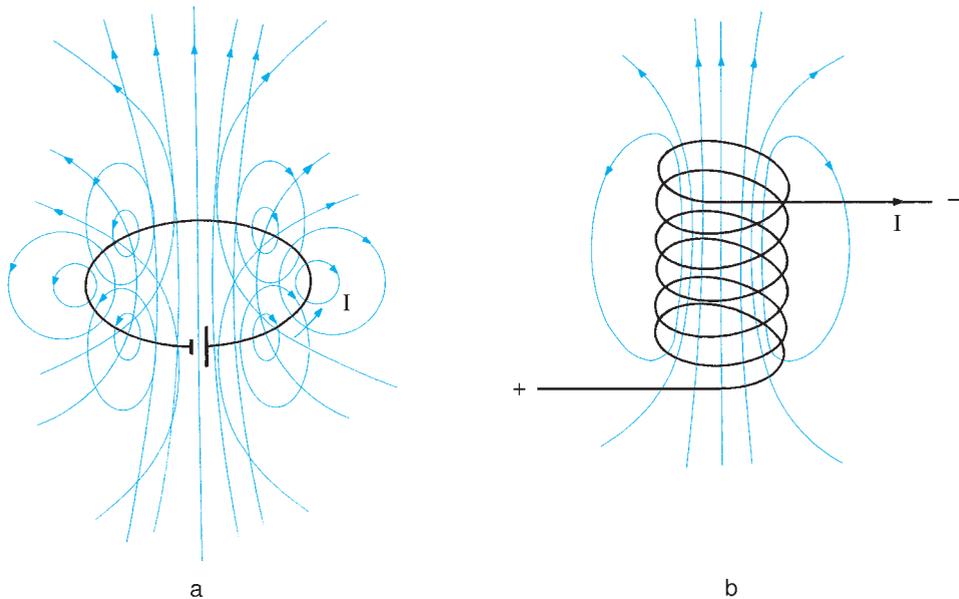


Abb. 14.19 Magnetische Feldlinien (a) um einen Kreisstrom, (b) in einer stromdurchflossenen Spule.

ten stromdurchflossenden Spule (Abb. 14.19b) konstruieren. Im Innern der Spule ist die Feldlinien-Dichte am größten und bei genügend langer Spule ist dort die Feldlinien-Dichte konstant, d. h. das Feld homogen.

Aus den Abb. 14.18 und 14.19 sehen wir, dass die durch elektrische Ströme erzeugten magnetischen Feldlinien stets geschlossen sind. Hierin unterscheiden sich elektrische und magnetische Felder ganz wesentlich:

Während elektrische Felder von elektrischen Ladungen ausgehen und auf elektrischen Ladungen enden, sind magnetische Feldlinien geschlossen; denn es gibt keine *magnetischen Ladungen*, von denen sie ausgehen oder auf denen sie enden könnten. Magnetische Körper stellen magnetische Dipole dar, deren beide Pole man „Nordpol“ bzw. „Südpol“ nennt.

Mangels besserer Kenntnis wurde den Enden der Kompassnadel, die sich im Magnetfeld der Erde in Nord-Süd-Richtung einstellt, je ein magnetischer Pol zugeordnet. Das zum geografischen Nordpol weisende Ende wurde magnetischer Nordpol und das zum geografischen Südpol weisende Ende wurde magnetischer Südpol genannt. Diese historische Zuordnung

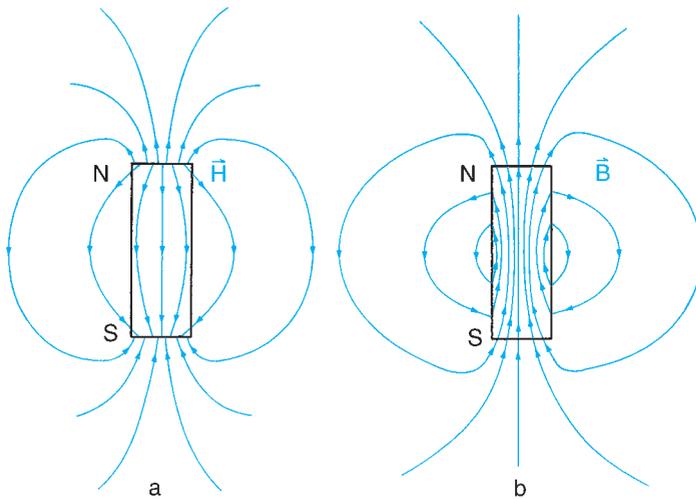
darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass es keine isolierten magnetischen Pole entsprechend den isolierbaren elektrischen Ladungen gibt, sondern nur magnetische Dipole. Dies lässt sich dadurch nachprüfen, dass man z. B. eine Kompassnadel, die je einen magnetischen Nord- und Südpol enthält, in Stücke zerbricht und dabei mit jedem Stück einen neuen magnetischen Dipol mit Nord- und Südpol erhält (Kap. 14.8.2).

Im Innern einer langen, dünnen Spule können wir mit einem *Magnetometer*, d. h. einem Messgerät für Magnetfelder, feststellen, dass die Kraftwirkung und damit die *magnetische Feldstärke*  $H$  vom Strom  $I$ , von der Spulenlänge  $l$  und der Windungszahl  $n$  der Spule abhängt.

Bei Verwendung von SI-Einheiten ergibt sich folgender Zusammenhang für die Feldstärke  $H$  im Innern der Spule und den messbaren Größen  $I$ ,  $l$  und  $n$ :

$$H = I \frac{n}{l}, \text{ mit der SI-Einheit } \text{A m}^{-1}. \quad (14-44)$$

Der äußere Feldlinienverlauf eines Permanentmagneten (Abb. 14.20a) ähnelt dem einer stromdurchflossenen Spule. Im Innern des Permanentmagneten jedoch weicht der Feld-



**Abb. 14.20** Feldlinienverlauf in einem Permanentmagneten: (a) die  $\vec{H}$ -Liniendichte ändert sich beim Durchgang durch Materie sprunghaft, (b)  $\vec{B}$ -Linien sind auch beim Durchgang durch Materie geschlossen.

linienverlauf von dem einer stromdurchflossenen Spule ab; die  $\vec{H}$ -Linien sind in Abb. 14.20a nicht mehr geschlossen. Dies hat damit zu tun, dass sich das effektive Feld in magnetischen Materialien von dem im Vakuum unterscheidet. Demnach ist es sinnvoll, zusätzlich zum Magnetfeld  $\vec{H}$  eine physikalische Größe zu definieren, die den magnetischen Zustand eines Materiestückes im Magnetfeld beschreibt. In Analogie zur *elektrischen Polarisation* ( $P$  = elektrisches Moment/Volumen) ist dies die *Magnetisierung* ( $J$  = magnetisches Moment/Volumen; mit der SI-Einheit  $\text{A m}^{-1}$ ). Genau wie die elektrische Polarisation  $\vec{P}$  den Beitrag des Dielektrikums zur Verschiebungsdichte  $\vec{D}$  zeigt (Kap. 14.7.6), so stellt  $\vec{J}$  den Beitrag des Magneten zum gesamten Magnetfeld  $\vec{H}_{\text{gesamt}}$  dar:  $\vec{H}_{\text{gesamt}} = \vec{H} + \vec{J}$ . Anstelle von  $H_{\text{gesamt}}$  verwendet man jedoch eine andere Größe,  $\vec{B}$ , die bis auf eine Konstante  $\mu_0$  mit  $\vec{H}_{\text{gesamt}}$  identisch ist.

*Magnetische Induktion*  $\vec{B}$  (mit der Einheit 1 Tesla (T) =  $1 \text{ V s m}^{-2}$ ) und magnetische Feldstärke  $\vec{H}_{\text{gesamt}}$  sind einander proportional. Im materiefreien Raum ( $\vec{J} = 0$ ) ist bei Verwendung von SI-Einheiten die *Induktionskonstante* (magnetische Feldkonstante)  $\mu_0$  die Proportionalitätskonstante:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (14-45)$$

$$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1}. \quad (14-46a)$$

Im materieerfüllten Raum ( $\vec{J} > 0$ ) gilt die Beziehung:

$$\vec{B} = \mu_{\text{rel}} \mu_0 \vec{H}. \quad (14-46b)$$

Hierbei berücksichtigt die *relative Permeabilität*  $\mu_{\text{rel}}$ , die als eine dimensionslose Materialkonstante auch *Permeabilitätszahl* genannt wird, die magnetischen Eigenschaften der Materie und beschreibt das Verhalten der Materie im magnetischen Feld in ähnlicher Weise wie die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_{\text{rel}}$  das Verhalten im elektrischen Feld (Kap. 14.7.5).

Wir nennen einen Stoff

- *diamagnetisch*, wenn  $\mu_{\text{rel}}$  kleiner als 1 ist;
- *paramagnetisch*, wenn  $\mu_{\text{rel}}$  nur wenig größer als 1 und unabhängig von der Feldstärke  $H$  ist;
- *ferromagnetisch*, wenn  $\mu_{\text{rel}}$  sehr groß gegen 1 (bis ca.  $10^6$ ) ist und zudem von der Feldstärke  $H$  abhängt:  $\mu_{\text{rel}} = \mu_{\text{rel}}(H)$ .

*Ferromagnete* sind z. B. Eisen, Kobalt, Nickel und Verbindungen, die diese Metalle enthalten. Sie spielen als Permanentmagnete eine große Rolle, da sie magnetisierbar sind. Sie werden z. B. als Weicheisenkerne in Transformatoren und elektrischen Maschinen verwendet. Die Magnetisierung kommt dadurch zustande, dass die ferromagnetischen Stoffe *Elementarmagnete* (magnetische Di-

pole) enthalten, die sich bei Anlegen eines äußeren Feldes mehr oder weniger in dessen Richtung einstellen. Sind alle Elementarmagnete ausgerichtet, dann hat  $B$  seinen Sättigungswert erreicht.

Vor Einführung des SI wurden häufig für magnetische Größen die folgenden Einheiten verwendet:

für  $H$ : 1 Oersted (Oe)  
 = 79,59 Newton Weber<sup>-1</sup> (N Wb<sup>-1</sup>)  
 = 79,59 Ampere Meter<sup>-1</sup> (A m<sup>-1</sup>),  
 für  $B$ : 1 Gauss (G) = 10<sup>-4</sup> Tesla (T).

### 14.8.2 Kräfte auf einen magnetischen Dipol

In Kap. 14.7.4 haben wir erfahren, dass ein elektrischer Dipol im äußeren homogenen elektrischen Feld durch das Drehmoment  $\vec{M}_{el}$  gedreht wird, bis die Dipolachse und die Richtung des äußeren Feldes einander so weit wie möglich parallel gerichtet sind. Bei einem magnetischen Dipol im äußeren homogenen Magnetfeld geschieht dasselbe. Ein Drehmoment  $\vec{M}_{mag}$  richtet den magnetischen Dipol parallel zu den Feldlinien des äußeren Feldes (Abb. 14.21). Im *Kompass* ist dieses Beispiel realisiert; dort ist die Kompassnadel (magnetischer Dipol) frei drehbar gelagert und stellt sich stets in die Richtung der Feldlinien des Erdmagnetfeldes ein. Analog zu Gl. (14-38) ist das Drehmoment  $M_{mag}$  durch das magnetische Dipolmoment  $m$  (mit der SI-Einheit A m<sup>2</sup>), das Feld  $B$  und den Winkel  $\alpha$  zwischen Dipolachse und  $B$  bestimmt:

$$M_{mag} = mB \sin \alpha. \tag{14-47}$$

Ist das Magnetfeld inhomogen, dann kommt – genau wie beim elektrischen Fall (Kap.

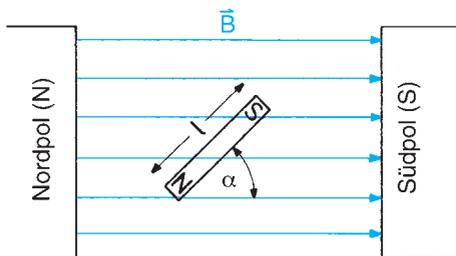


Abb. 14.21 Magnetischer Dipol im Feld  $\vec{B}$ .

14.7.4) – zum Drehmoment noch eine Kraft hinzu.

Da es keine voneinander isolierten magnetischen Pole gibt, sondern stets nur Nord- und Südpol gemeinsam, d. h. nur magnetische Dipole, lässt sich das magnetische Dipolmoment  $m_{mag}$  nicht wie das elektrische Dipolmoment ( $m_{el} = Ql$ ) darstellen.

Auch die Elektronen auf den Bohr'schen Bahnen der Atome besitzen ein magnetisches Moment, das in Einheiten des sogenannten *Bohr'schen Magnetons*  $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$  A m<sup>2</sup> angegeben wird. Hinzu kommt ein mit dem Elektronenspin  $S$  verknüpft magnetisches Moment, das für  $S = h/4\pi$  ( $h$  = Planck'sche Konstante) den Wert  $\mu_B$  annimmt. Die magnetischen Momente von Proton und Neutron sind wesentlich kleiner als das des Elektrons.

### 14.8.3 Lorentz-Kraft

Bewegte elektrische Ladungen sind, wie wir in Kap. 14.8.1 gesehen haben, stets von einem Magnetfeld umgeben. Bewegen sich die Ladungen in einem äußeren – etwa durch einen Permanentmagneten erzeugten – Feld  $B_a$ , so werden sich beide Felder einander überlagern. Das hat zur Folge, dass in dem durch Abb. 14.22 skizzierten Experiment das stromdurchflossene Drahtstück nach rechts verschoben wird. D. h., es wirkt eine Kraft.

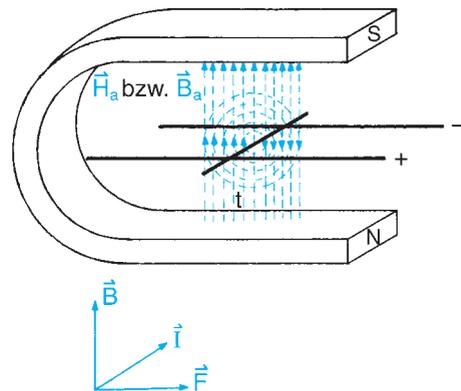


Abb. 14.22 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter. Auf die beiden festen Leiterdrähte ist ein Drahtstück quer aufgelegt, das durch die Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L$  nach rechts verschoben wird.

Bewegen sich elektrische Ladungen senkrecht zu einem Feld  $\vec{B}$ , so wirkt die resultierende Kraft, die *Lorentz-Kraft*  $\vec{F}_L$ , sowohl senkrecht zur Richtung des Stromes  $\vec{I}$  als auch senkrecht zu  $\vec{B}$  auf die Ladungsträger.

Der Betrag der Lorentz-Kraft auf eine einzelne bewegte Elementarladung  $e$  ist gegeben durch das Produkt aus magnetischer Induktion  $B$ , Ladung  $e$  und Geschwindigkeit  $v$  der Ladung:

$$F'_L = evB. \quad (14-48)$$

Die gesamte auf den stromdurchflossenen Leiter wirkende Lorentz-Kraft ergibt sich aus der Summe aller Teilkräfte  $F'_L$ . Bei  $n$  mit gleicher Geschwindigkeit  $v$  bewegten Ladungen  $e$  ist dies:

$$F_L = \sum_n F'_L = \sum_n evB = nevB. \quad (14-49)$$

Nehmen wir an, dass der Leiter von Gleichstrom der Stärke  $I$  durchflossen wird, dann lässt sich Gl. (14-49) umformen ( $nevB = QvB = QBl/t = IBl$ ), und wir erhalten für die

auf ein Leiterstück der Länge  $l$  wirkende Kraft  $F_L$ :

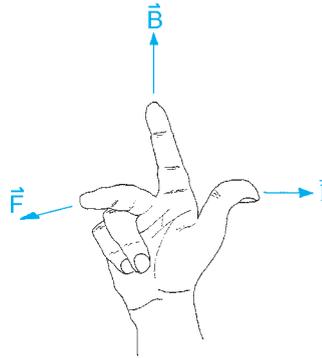
$$F_L = IBl. \quad (14-50)$$

Setzen wir in Gl. (14-50)  $B$  in  $V \text{ s m}^{-2}$ ,  $I$  in  $A$  und  $l$  in  $m$  ein, dann ergibt sich  $F_L$  in der Einheit Newton.

Bewegen sich die Ladungen im Leiter nicht senkrecht zur Magnetfeldrichtung, sondern unter einem beliebigen Winkel  $\alpha$ , so bewirkt nur die Komponente des Stromes senkrecht zum Magnetfeld eine Lorentz-Kraft, und wir erhalten für deren Betrag:

$$F_L = IBl \sin \alpha. \quad (14-51)$$

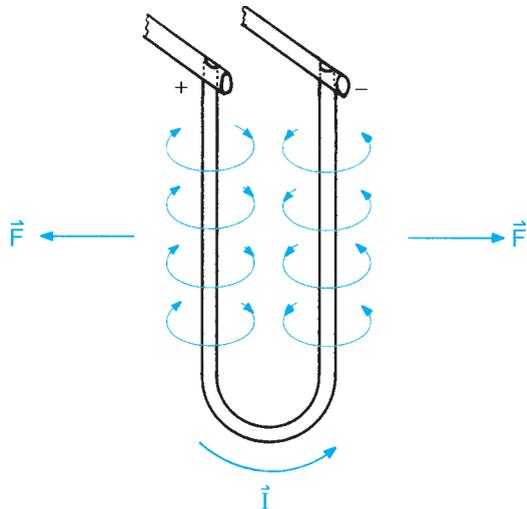
Die Richtungen der Vektoren  $\vec{F}$ ,  $\vec{I}$  und  $\vec{B}$  zueinander sind durch die *Dreifingerregel der rechten Hand* festgelegt:  $\vec{F}$ ,  $\vec{I}$  und  $\vec{B}$  stehen senkrecht aufeinander, wie durch Mittelfinger, Daumen und Zeigefinger der rechten Hand in Abb. 14.23 angedeutet. Der Zusammenhang zwischen  $\vec{F}$ ,  $\vec{I}$  und  $\vec{B}$  kann auch



**Abb. 14.23** Dreifinger-Regel der rechten Hand zur Festlegung der Richtung von  $\vec{F}$ ,  $\vec{I}$  und  $\vec{B}$  bei der Lorentz-Kraft.

durch das Vektorprodukt  $\vec{F} = l(\vec{I} \times \vec{B})$  beschrieben werden.

Wir wollen nun den in Abb. 14.22 skizzierten Versuch so abändern, dass  $\vec{B}_a$  selbst durch einen stromdurchflossenen Leiter erzeugt wird. Ein Beispiel zeigt die Anordnung in Abb. 14.24: Eine Batterie wird an einen Metalldraht so angeschlossen, dass die Zu- und Rückleitung parallel nebeneinander liegen, sich aber nicht berühren. Sobald Strom durch den Leiter fließt, stoßen die beiden von entgegengesetzt gerichteten Strömen



**Abb. 14.24** Zwei von entgegengesetzt gerichteten Strömen durchflossene Leiter stoßen einander ab.

durchflossenen Leiterstücke einander ab. Entsprechend gilt: Gleichgerichtete Ströme ziehen einander an.

In Kap. 1.1.2.4 haben wir diese Anordnung bereits kennengelernt; sie dient nämlich zur Festlegung der Basiseinheit der Stromstärke im SI.

Die Lorentz-Kraft wird z. B. in der Fernseh- röhre (Kap. 16.2.4) oder beim Elektronenmikroskop (Kap. 20.4) ausgenutzt, um Elektronenstrahlen in gewünschter Weise abzulenken. Da  $F_L$  der Gl. (14-48) stets senkrecht auf der momentanen Bewegungsrichtung der Elektronen steht, werden diese auf Spiralbahnen gezwungen. Obwohl ihre momentane Bewegungsrichtung durch die Lorentz-Kraft dabei ständig verändert wird, wird durch  $F_L$  dennoch keine Arbeit  $W$  an den Elektronen verrichtet, denn  $W$  ist nach Kap. 3.1 gegeben durch das Produkt aus Weg und Komponente der Kraft *längs* des Weges.

Weitere Anwendungen der Ablenkung von geladenen Teilchen im Magnetfeld finden wir beim *Massenspektrographen*, in dem Ionen und Molekülgruppen nach ihrer Masse und Ladung selektiert werden, und in *Teilchenbeschleunigern* (Kap. 21.3.2).

#### 14.8.4 Induktionsvorgänge

Bisher zeigte sich eine Verknüpfung zwischen elektrischem und magnetischem Feld dadurch, dass ein Magnetfeld durch den von einem elektrischen Feld verursachten Stromfluss entsteht. Umgekehrt kann ein elektrisches Feld durch ein Magnetfeld erregt werden; dazu ist aber notwendig, dass sich dieses Magnetfeld, genauer der *magnetische Fluss*  $\Phi$ , zeitlich ändert.

Die Erzeugung elektrischer Felder durch zeitlich veränderliche Magnetfelder bezeichnet man als *elektromagnetische Induktion*.

(Der physikalische Effekt der *elektromagnetischen Induktion* darf nicht verwechselt werden mit der physikalischen Größe *magneti-*

*sche Induktion* aus Kap. 14.8.1.) Um das *Induktionsprinzip* zu erläutern, führen wir den magnetischen Fluss  $\Phi$  ein. Er ist der  $B$ -Feldliniendichte proportional und wird durch das Skalarprodukt der magnetischen Induktion  $\vec{B}$  mit der Fläche  $\vec{A}$  angegeben, die von den Feldlinien durchsetzt wird. Der Vektor  $\vec{A}$  gibt die Größe der Fläche und die Richtung ihrer Flächennormalen  $\vec{n}$  (Senkrechten auf die Fläche) an:  $\vec{A} = A\vec{n}$ .

Wird die Fläche von den Feldlinien senkrecht durchdrungen, d. h. ist der Winkel zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{n}$  Null, dann ist der magnetische Fluss  $\Phi$  gegeben durch

$$\Phi = \vec{B}\vec{A} = BA \cos \alpha, \text{ und mit } \cos \alpha = 1:$$

$$\Phi = BA, \text{ mit der SI-Einheit}$$

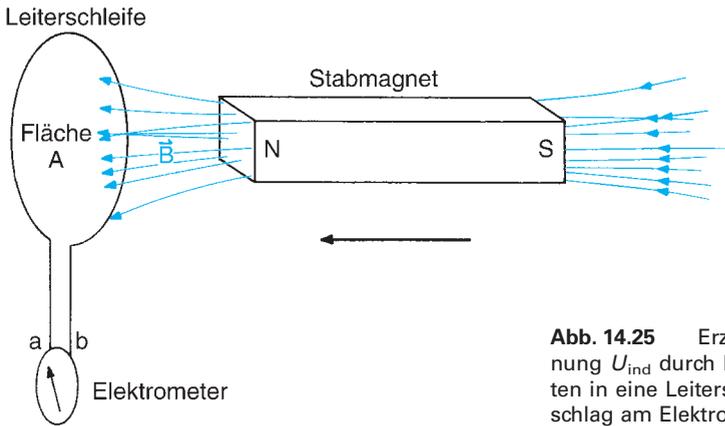
$$1 \text{ Tesla m}^2 = 1 \text{ Weber (Wb)}. \quad (14-52)$$

Löst man diese Gleichung nach  $B$  auf, dann wird klar, weshalb man die magnetische Induktion auch als *magnetische Flussdichte* bezeichnet.  $B$  ist der magnetische Fluss pro Querschnittsfläche  $A$ .

Einige einfache Versuche mit einem Stabmagneten und einer an ein *Elektrometer* angeschlossenen Leiterschleife (Abb. 14.25) zeigen, wie elektrische Felder erzeugt werden:

1. Nähern wir den Nord- oder Südpol des Magneten der Schleife, so zeigt das Elektrometer einen Ausschlag. Es ist also während der Bewegung des Stabmagneten Ladung in der Leiterschleife auf das Elektrometer transportiert worden. Das ist gleichbedeutend mit der Feststellung: *Zwischen den Leitenden a und b wurde eine Spannung U induziert*, die den Ladungstransport bewirkt. Verwenden wir bei gleichen Versuchsbedingungen einen Stabmagneten mit größerer magnetischer Induktion  $B$ , dann zeigt das Elektrometer einen größeren Ladungstransport an.

2. Wir können auch die Leiterschleife im Feld des Magneten drehen. Ist dann die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses  $d\Phi/dt$  in der Schleifenfläche  $A$  genauso groß wie im ersten Versuch, dann schlägt das Elektrometer ebenso weit aus wie zuvor.



**Abb. 14.25** Erzeugung einer Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}$  durch Hineinschieben eines Stabmagneten in eine Leiterschleife.  $U_{\text{ind}}$  wird durch den Ausschlag am Elektrometer angezeigt.

Aus diesen einfachen Induktionsversuchen folgt, dass die in einer Leiterschleife induzierte Spannung  $U_{\text{ind}}$  gleich ist der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses  $\Phi$  in der Leiterschleife. Die Messung zeigt, dass das Vorzeichen der induzierten Spannung der Änderung des magnetischen Flusses entgegengerichtet ist (siehe Kap. 14.8.7):

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (14-53)$$

Wird die Änderung von  $\Phi$  bei konstanter Fläche durch eine Änderung von  $\vec{B}$  erreicht (Beispiel 1), so können wir Gl. (14-53) auch in der Form schreiben:

$$U_{\text{ind}} = -\vec{A} \frac{d\vec{B}}{dt}. \quad (14-54)$$

Bei konstantem  $\vec{B}$  und einer zeitlichen Änderung von  $\vec{A}$  (Beispiel 2) ergibt sich:

$$U_{\text{ind}} = -\vec{B} \frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (14-55)$$

Gl. (14-55) ist die Grundlage für die Erzeugung von *Wechselspannungen* (Kap. 14.9). Wird nämlich eine Leiterschleife in einem Feld mit konstantem  $\vec{B}$  gedreht, so hängt der magnetische Fluß nach Gl. (14-52) nur vom Winkel  $\alpha$  zwischen der Flächennormalen und der Richtung der  $\vec{B}$ -Feldlinien ab. Ist die Drehgeschwindigkeit konstant, so ist  $\alpha = \omega t$ ,

und es ergibt sich:

$$\Phi = BA \cos \omega t,$$

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BA \sin \omega t = U_0 \sin \omega t. \quad (14-56)$$

Die durch die Drehbewegung der Leiterschleife erzeugte zeitabhängige Spannung ist also sinusförmig.

Die technische Ausführung eines solchen *Spannungsgenerators*, die *Dynamomaschine*, wird in Kap. 16.2.1 vorgestellt.

### 14.8.5 Selbstinduktion

Jeden stromführenden Leiter umgibt, wie wir gesehen haben, ein magnetisches Feld  $\vec{H}$ . Biegen wir den Leiter zu einer Schleife, so schließt diese den in Kap. 14.8.4 definierten magnetischen Fluß  $\Phi$  ein. Schalten wir in der Schleife einen Strom  $I$  ein oder aus, so baut sich ein  $\vec{H}$ - und  $\vec{B}$ -Feld auf oder ab und gibt Anlass zu einer zeitlichen Änderung des Flusses  $\Phi$ . Nach Gl. (14-54) ist dies aber gerade die Bedingung, unter welcher in der Leiterschleife eine Spannung induziert wird.

Da es die zeitliche Änderung des *eigenen* Stromes ist, die im Leiter die Spannung  $U_{\text{ind}}$  induziert, spricht man bei dieser Er-

scheinung von *Selbstinduktion*. Es gilt:

$$U_{\text{ind}} \sim \frac{dI}{dt}. \quad (14-57)$$

Die Proportionalitätskonstante ist die *Induktivität*  $L$  mit der SI-Einheit  $\text{V s A}^{-1}$ , die auch den Namen *Henry* (H) trägt. Wir erhalten so:

$$U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (14-58)$$

Das negative Vorzeichen in Gl. (14-58) berücksichtigt die Tatsache, dass  $U_{\text{ind}}$  der von außen angelegten Spannung entgegengerichtet ist, falls der Strom  $I$  eingeschaltet wird,  $dI/dt > 0$ , ihr aber gleichgerichtet ist, falls der Strom abgeschaltet wird,  $dI/dt < 0$ .

Die Induktivität  $L$  einer Leiterschleife oder Spule hängt von deren Bau und Material ab. Große Windungszahl  $n$ , großer Spulenquerschnitt  $A$  und kleine Spulenlänge  $l$  erzeugen eine große Induktivität. Bringt man in die Spule ein Material mit hoher Permeabilität, so wächst  $L$ . Allgemein gilt:

$$L = \mu_{\text{rel}} \mu_0 \frac{n^2 A}{l}. \quad (14-59)$$

### 14.8.6 Energieinhalt des magnetischen Feldes

Wird eine Spule mit  $n$  Windungen an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen, so steigt der Stromfluss wegen der entgegengerichteten induzierten Spannung nicht sprunghaft, sondern zeitlich verzögert auf seinen Endwert an. Während dieses Anstiegs wird auch der magnetische Fluss vom Wert Null auf seinen Endwert aufgebaut. Die beim Aufbau des magnetischen Flusses im Magnetfeld gespeicherte Energie wird dem Stromkreis entnommen. Sie kann mit Gl. (14-58) und Gl. (14-96) ausgedrückt werden durch das Produkt aus Stromstärke, induzierter Spannung und dem Zeitintervall  $dt$ :

$$dW = -I U_{\text{ind}} dt = IL \frac{dI}{dt} dt = LI dI. \quad (14-60)$$

Ist der Strom von Null auf den Wert  $I_{\text{max}}$  angewachsen, so beträgt die im Magnetfeld gespeicherte potentielle Energie:

$$W = \int_0^{I_{\text{max}}} LI dI = \frac{LI_{\text{max}}^2}{2}. \quad (14-61)$$

Diesen Ausdruck kann man mit Gl. (14-59) auch folgendermaßen umschreiben:

$$W = \frac{1}{2} \mu_{\text{rel}} \mu_0 \frac{n I_{\text{max}}}{l} \frac{n I_{\text{max}}}{l} l A. \quad (14-62)$$

Setzen wir Gl. (14-44) ein, dann erhalten wir daraus:

$$W = \frac{1}{2} \mu_{\text{rel}} \mu_0 H^2 V, \quad (V = l A = \text{Volumen der Spule}). \quad (14-63)$$

Damit ergibt sich für die *Energiedichte*  $\rho$  des *Magnetfeldes* im Innern der Spule:

$$\rho = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \mu_{\text{rel}} \mu_0 H^2 = \frac{1}{2} BH. \quad (14-64)$$

Der Vergleich der Gln. (14-43) und (14-64) zeigt die formale Analogie der elektrischen und magnetischen Feldenergiedichten. Beide werden uns in Kap. 17.2 im Zusammenhang mit der Feldenergie des elektromagnetischen Wellenfeldes wiederbegegnen.

### 14.8.7 Lenz'sche Regel

Die *Lenz'sche Regel* gibt Auskunft über die Richtung der durch Induktion oder Selbstinduktion erzeugten Spannungen und Ströme. Sie sind stets so gerichtet, dass sie der Ursache, durch welche sie erzeugt wurden, entgegenwirken. Da Induktion oder Selbstinduktion auf der Änderung eines bestehenden Zustandes beruhen, können wir die Wirkung von Induktion und Selbstinduktion auch so ausdrücken: Durch sie ist das System bestrebt, den bestehenden Zustand so lange wie möglich aufrechtzuerhalten. Dies ist eine Folge des Energiesatzes, was sich durch folgendes Beispiel veranschaulichen lässt: Ein langer Stabmagnet wird in eine feststehende Leiterschleife (Abb. 14.25) geschoben; dadurch wird in der Schleife ein Strom induziert, dessen Feld  $\vec{B}$  so gerichtet ist, dass der Stabmagnet in seiner Bewegung behindert wird. Wäre die Richtung von  $\vec{B}$  umgekehrt, so würde die Bewegung beschleunigt, wodurch der induzierte Strom und mit ihm das Magnetfeld wachsen würde, was wieder den Magneten beschleunigen würde, usw. Ohne äußere Kräfte würde dadurch die Bewegungsenergie des Magneten wachsen, im Widerspruch zum Energieerhaltungssatz.

### 14.8.8 Magnetfelder im menschlichen Körper

Obwohl die vom menschlichen Körper erzeugten magnetischen Felder sehr schwach sind ( $10^{-9}$  bis  $10^{-14}$  Tesla; zum Vergleich das Magnetfeld der Erde  $\approx 10^{-4}$  Tesla), ist es mit der jüngsten Entwicklung hochempfindlicher Magnetometer und feldfreier Labors (analog dem Faraday-Käfig zur Abschirmung elektrischer Felder) möglich, Magnetfelder bis herab zu Werten von  $10^{-14}$  Tesla zu messen. Die Aufnahme einer topografischen *Magnetfeldkarte* bestimmter Körperregionen liefert ähnlich wichtige diagnostische Informationen wie die entsprechende Vermessung elektrischer Potentiale. In diesem Zusammenhang wollen wir erläutern, wie die Magnetfelder im Körper entstehen.

1. Magnetfelder werden durch bewegte elektrische Ladungen erzeugt. Der Ladungsfluss von hauptsächlich  $\text{Na}^+$ -,  $\text{K}^+$ - und  $\text{Cl}^-$ -Ionen in Muskelgewebe und Nerven ist eine der Ursachen für das Vorhandensein von Magnetfeldern im und um den Körper. Von Herz und Gehirn ist bekannt, dass sie von Ionen-Strömen durchflossen werden. Die von diesen Strömen erzeugten elektrischen Spannungen können mit Elektroden auf der Haut vermessen werden. Wir erhalten so durch den Strom im Herzmuskel das Elektrokardiogramm (EKG) und durch die Gehirnströme das Elektroenzephalogramm (EEG). Dieselben Ströme erzeugen magnetische Felder, die mit einem empfindlichen Magnetometer aufgenommen das Magnetokardiogramm (MKG) bzw. das Magnetoenzephalogramm (MEG) ergeben. Die Aufnahme von MEG-Signalen, an vielen räumlich verteilten Punkten *außerhalb* des Schädels, bietet die Möglichkeit, Bereiche *im* Gehirn zu lokalisieren, die als Stromquelle für die Erzeugung des MEG verantwortlich sind. Mit dieser Methode gelingt es z. B., Epilepsie-Zentren im Gehirn nachzuweisen.

2. Neben den unter 1. erwähnten zeitabhängigen und relativ schwachen Magnetfeldern ( $10^{-9}$  bis  $10^{-14}$  Tesla) werden im und um den Körper zeitunabhängige stärkere Magnetfelder ( $\leq 10^{-8}$  Tesla) von ferromagnetischen Teilchen (z. B. Magnetit,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) hervorgerufen, die sich irgendwo im Körper festgesetzt haben. Durch die Aufnahme einer statischen Magnetfeldkarte lassen sich Menge, Verteilung usw. dieser Teilchen zum Beispiel in der Lunge von Grubenarbeitern nachweisen. Verwendet man magnetische Teilchen als Tracer, dann lassen sich Veränderungen der Lunge

bereits in einem viel früheren Stadium feststellen, als es durch Aufnahme eines Röntgen-Bildes möglich wäre.

3. *Magnetic-Particle-Imaging* (MPI, Bildgebung mittels superparamagnetischer Teilchen) ist eine Methode, bei der die Verteilung magnetischer Nano-Partikel im menschlichen Körper bestimmt wird. Sie bestehen vorzugsweise aus Eisenoxid, haben einen optimalen Kerndurchmesser von 30 nm und werden mit einem speziellen Überzug, z. B. Dextran, versehen damit sie nicht zusammen klumpen. Anders als bei der Magnetischen Resonanz Tomografie (MRT), wo der Einfluss eines äußeren Magnetfeldes auf die magnetischen Eigenschaften von körpereigenen Protonen gemessen wird (Kap. 21.1.3), wird beim MPI die Magnetisierung der in den Körper eingeschleusten Nano-Partikel (Kap. 5.1.2 und 5.4) detektiert. Dazu wird die Untersuchungsregion mit einem Gradientenfeld (dem sogenannten Selektionsfeld) und einem homogenen, zeitlich oszillierenden Magnetfeld (dem Anregungsfeld) belegt. Das Gradientenfeld erzeugt einen feldfreien Punkt (FFP) im Messvolumen, in dem die magnetischen Eisenoxid-Teilchen vom Anregungsfeld periodisch ummagnetisiert werden können. Außerhalb des FFPs sind die Partikel in Sättigung und reagieren nicht auf das Anregungsfeld. Aufgrund der nicht-linearen Magnetisierungseigenschaft der Partikel prägt die periodisch sich ändernde Magnetisierung der Partikel innerhalb des FFPs dem primär angelegten sinusförmig oszillierenden Magnetfeld Beiträge (Oberwellen) auf, die sich durch Fourier-Analyse (Kap. 6.5.2) extrahieren lassen und als Maß für die Konzentration der Partikel dienen. Bislang erreicht man im Experiment eine räumliche Auflösung von ca. 1 mm bei einer zeitlichen Auflösung von ca. 40 Bildern pro Sekunde. Diese bildgebende Methode befindet sich in der Entwicklung; ihr klinischer Einsatz ist bislang nicht etabliert, wird aber für folgende Anwendungsbeispiele als vielversprechend vorgeschlagen:

- Bei der Wächterlymphknotenbiopsie (Mammakarzinom) führt alternativ zur nuklearmedizinischen Methode anstelle der Verteilung radioaktiver Partikel die Verteilung magnetischer Partikel zum Auffinden der befallenen Lymphknoten ohne Strahlenbelastung.
- *In-vivo*-Bilder eines schlagenden Herzens sind bei Bildfrequenzen von 25 Bildern pro Sekunde realisierbar. Derartige Echtzeitaufnahmen des Herzens ermöglichen eine genauere Diagnostik z. B. der Herzklappenfunktion oder der Herzkranzgefäße ohne Strahlenbelastung, wie sie bei der CT geschieht. Diese Anwendung wurde an Mäuseherzen bereits erfolgreich erprobt.
- Kathederuntersuchungen lassen sich mit größerer Präzision durchführen, wenn mit magnetischen Nano-Partikeln beschichtete Katheder zum Einsatz kommen.

## 14.9 Zeitabhängige Spannungen und Ströme

### 14.9.1 Ein- und Ausschaltvorgänge

#### 14.9.1.1 Einschalt- und Ausschaltvorgang beim Kondensator

Bislang haben wir angenommen, dass nach Verbindung der Platten eines Kondensators mit einer Gleichspannungsquelle der Spannung  $U_0$  dieselbe Spannung  $U_0$  zwischen den Kondensatorplatten liegt. Auf welche Weise sich diese Spannung beim Verbinden der Platten mit der Spannungsquelle einstellt, wie also ein Kondensator *aufgeladen* wird, soll im Folgenden untersucht werden. Dazu betrachten wir den Schaltkreis der Abb. 14.26a. Durch den Schalter  $S_1$  (bei geöffnetem Schalter  $S_2$ ) legen wir an das aus dem Widerstand  $R$  und dem Kondensator  $C$  bestehende Netzwerk, an das sogenannte *RC-Glied*, die Spannung  $U_0$  an. Dann fließt ein Strom, so lange sich der Kondensator auflädt.

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel gilt, dass die Summe der augenblicklichen Spannungsabfälle am Widerstand,  $U_R = IR$ , und am Kondensator,  $U_C = Q/C$ , gleich sein muss der angelegten Spannung  $U_0$ :

$$U_0 = IR + \frac{Q}{C}. \quad (14-65)$$

Um den zeitlichen Verlauf des *Aufladevorganges* zu erhalten, differenzieren wir Gl. (14-65) nach der Zeit:

$$\frac{dU_0}{dt} = \frac{dI}{dt}R + \frac{dQ}{dt} \frac{1}{C}. \quad (14-66)$$

Die zeitliche Änderung der Klemmenspannung  $dU_0/dt$  ist Null, da wir  $U_0$  als Gleichspannung, d. h. zeitlich konstant vorausgesetzt haben. Da  $dQ/dt$  gerade gleich dem Strom  $I$  ist (Gl. (14-5a)), vereinfacht sich Gl. (14-66) zu:

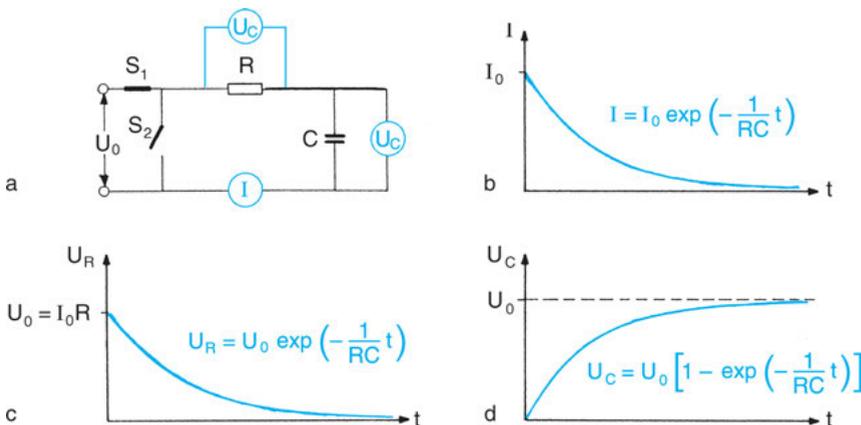
$$0 = \frac{dI}{dt}R + I \frac{1}{C} \quad \text{bzw.} \quad (14-67)$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt. \quad (14-68)$$

Wir können nun fragen, wie groß der Strom zur Zeit  $t$  ist. Dazu integrieren wir Gl. (14-68) und erhalten (siehe Anhang):

$$\int \frac{dI}{I} = \ln I = -\frac{1}{RC} t + K, \quad (14-69)$$

wobei  $K$  eine Integrationskonstante ist. Die Zeit  $t$  wollen wir vom Einschalten der Spannungsquelle an zählen. Zur Zeit  $t = 0$  fließe der Strom  $I_0$  durch den Widerstand  $R$ . Setzen wir die Anfangswerte  $t = 0$  und  $I = I_0$  ein, so



**Abb. 14.26** Aufladen eines Kondensators über einen Widerstand  $R$ : (a) Schaltkreis, (b) Aufladestrom  $I(t)$ , (c) Spannungsabfall  $U_R(t)$ , (d) Kondensatorspannung  $U_C(t)$ .

erhalten wir die Integrationskonstante  $K$ :

$$\ln I_0 = K. \quad (14-70)$$

Es ergibt sich schließlich:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{1}{RC} t. \quad (14-71)$$

Für den Aufladestrom  $I(t)$  finden wir, dass er exponentiell mit der Zeit abnimmt (Abb. 14.26b):

$$I = I_0 e^{-\frac{1}{RC} t}. \quad (14-72)$$

Das Produkt aus  $R$  und  $C$  bezeichnen wir als *Zeitkonstante*  $\tau$  des  $RC$ -Gliedes:

$$\tau = RC, \text{ mit der SI-Einheit s.} \quad (14-73)$$

Große Zeitkonstante bedeutet, dass der Aufladevorgang langsam vor sich geht.

Der Strom sinkt exponentiell mit der Zeit, wie dies Abb. 14.26b zeigt. Die Exponentialfunktion (sie wird im Anhang genauer diskutiert) gehört zu den wichtigsten in der Physik auftretenden Funktionen. Den genauen Wert Null erreicht  $I$  in Gl. (14-72) erst nach unendlich langer Zeit; näherungsweise (z. B. bis 99,9%) ist jedoch der Kondensator bereits in kürzerer Zeit aufgeladen, und diese Zeit ist abhängig von der Konstanten  $1/RC$  in der Exponentialfunktion. Dies ist auch anschaulich klar: Je größer einerseits die Kapazität  $C$  des Kondensators gewählt wird, desto länger dauert es, bis der Kondensator aufgeladen ist. Bei großem Widerstand  $R$  kann nur ein geringer Strom fließen, und auch dies führt dazu, dass der Kondensator nur langsam aufgeladen wird.

Für die am Kondensator zur Zeit  $t$  anliegende Spannung  $U_C$  erhalten wir:

$$U_C = U_0 - IR = U_0 - I_0 R e^{-\frac{1}{RC} t}, \quad (14-74a)$$

wobei die Größe  $I_0 R e^{-\frac{1}{RC} t}$  den zeitlichen Verlauf des am Widerstand  $R$  auftretenden Spannungsabfalles  $U_R$  darstellt. Die Spannung  $U_R$  sinkt also allmählich vom Wert  $U_0$  beim Einschalten ( $t = 0$ ;  $U_0 = I_0 R$ ) auf Null ab (Abb. 14.26c). Zugleich steigt die Spannung  $U_C$  am Kondensator von Null auf den Wert  $U_0$  an, und wir können für Gl. (14-74a) auch schreiben:

$$U_C = U_0 - U_0 e^{-\frac{1}{RC} t} = U_0 \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} t}\right). \quad (14-74b)$$

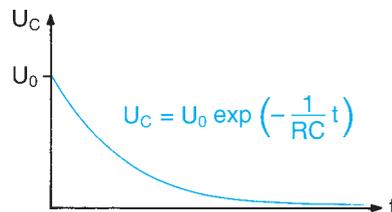
Das Zeitverhalten von  $U_C$  beim Aufladevorgang ist in Abb. 14.26d dargestellt.

Schließen wir in Abb. 14.26a den Schalter  $S_2$  und öffnen  $S_1$  gleichzeitig, nachdem der Kondensator vollständig aufgeladen ist ( $U_C = U_0$ ), so wird die Spannungsquelle von dem  $RC$ -Glied getrennt, und dieses wird zugleich kurzgeschlossen. Dann fließen die Elektronen von der negativ geladenen Kondensatorplatte zur positiv geladenen Platte; der Kondensator entlädt sich. Auch dieser *Entladevorgang* folgt einem Exponentialgesetz, und zwar gilt, wenn wir nun die Zeit  $t$  von dem Augenblick des Kurzschließens an zählen:

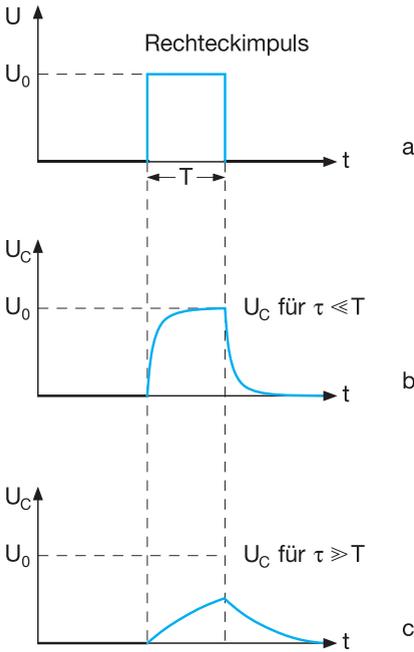
$$U_C = U_0 e^{-\frac{1}{RC} t}. \quad (14-75)$$

Der zeitliche Verlauf von  $U_C$  ist für diesen Fall in Abb. 14.27 wiedergegeben.

**Übertragung eines Spannungsimpulses durch ein  $RC$ -Glied** Wir wollen nun an das  $RC$ -Glied kurzfristig die Spannung  $U_0$  anlegen und dann wieder abschalten. Der zeitliche Verlauf der Spannung  $U$  hat dann die Form eines rechteckigen Spannungsimpulses (*Rechteckimpuls*, Abb. 14.28 a). Ist seine Dauer kurz, dann kann der Entladevorgang am Kondensator bereits einsetzen, bevor der Aufladevorgang abgeschlossen ist, und wir erhalten einen Spannungsverlauf  $U_C(t)$  am Kondensator, wie ihn die Abb. 14.28b, c wiedergeben. Sie zeigen das Verhalten eines  $RC$ -Gliedes beim Anlegen eines Spannungsimpulses unter den zwei Bedingungen, dass die Zeitkonstante  $\tau$  kleiner als die Dauer  $T$  des Impulses ist (Abb. 14.28b), bzw. dass  $\tau$  größer als  $T$  ist (Abb. 14.28c). Wir sehen: Je langsamer Auf- und Entladevorgang, bezogen auf die Impulsdauer  $T$ , sind, desto stärker wird der Rechteckimpuls der Spannungsquelle bei der Übertragung durch das  $RC$ -Glied verzerrt. Entsprechend wird auch die Spannung am Widerstand  $R$  beeinflusst.



**Abb. 14.27** Zeitlicher Verlauf der am Kondensator anliegenden Spannung  $U_C(t)$  während seiner Entladung.



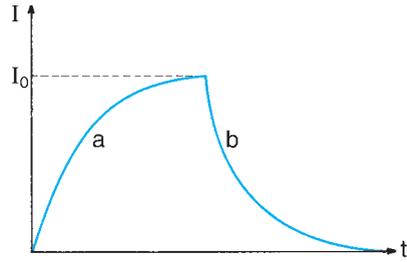
**Abb. 14.28** Übertragung eines Rechteckimpulses durch ein  $RC$ -Glied: (a) Rechteckimpuls  $U(t)$ , der von links auf das  $RC$ -Glied gegeben wird, (b) Kondensatorspannung  $U_C(t)$  (Antwortimpuls) für  $\tau \ll T$ , (c) Antwortimpuls für  $\tau \gg T$ , (hierbei ist zu beachten, dass die Entladung nicht wie bei (b) der Formel  $U_c = U_0 e^{-t/\tau}$  folgt, sondern  $U_c = U_0(1 - e^{-T/\tau}) e^{-t/\tau}$ , da die Entladung einsetzt, bevor der Kondensator ganz aufgeladen war).

### 14.9.1.2 Ein- und Ausschaltvorgang bei der Spule

Die Zeitkonstante  $\tau$  der Gl. (14-73) gibt an, wie schnell sich das elektrische Feld in einem Kondensator aufbaut. Auch der Aufbau des Magnetfeldes in einer Spule benötigt nach dem Einschalten des Stromes eine gewisse Zeit. Sie ist um so größer, je höher der Ohm'sche Widerstand der Spulenwicklung  $R$  ist. Legen wir die Spannung  $U_0$  an die Spule, so entsteht die Induktionsspannung der Gl. (14-58):  $U_{\text{ind}} = -L \, dI/dt$ . Die Größe des momentanen Stromes wird dann von der effektiven Spannung  $U_0 - L \, dI/dt$  bestimmt:

$$U_0 - L \frac{dI}{dt} = IR. \tag{14-76a}$$

Entsprechend dem Vorgehen im vorigen Kapitel können wir daraus die Zeitabhängigkeit



**Abb. 14.29** (a) Ein- und (b) Ausschaltverhalten des Stromes  $I(t)$  in einer Spule.

von  $I$  berechnen und erhalten

$$I = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{14-76b}$$

für den Anstieg des Stromes in der Spule nach dem *Einschalten* der Spannung ( $t = 0$ ).

Nach *Abschalten* der Spannung braucht es einige Zeit, bis der Strom auf Null abgeklungen ist, denn der Abbau des Magnetfeldes in der Spule bewirkt eine Induktionsspannung, die nach der Lenz'schen Regel (Kap. 14.8.7) nun der ursprünglich angelegten Spannung gleichgerichtet ist und so den Strom noch einige Zeit aufrecht erhält:

$$I = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}; \tag{14-76c}$$

$t$  zählt vom Moment des Abschaltens an.

Auch für die Spule ( $RL$ -Glied) können wir eine *Zeitkonstante*  $\tau$  einführen, denn die Größe  $L/R$  in Gl. (14-76c),

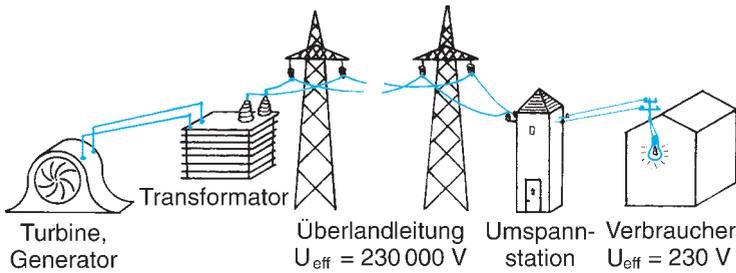
$$\tau = \frac{L}{R}, \tag{14-77}$$

hat die Dimension der Zeit.

Abb. 14.29 zeigt das durch Gl. (14-76b) bzw. (14-76c) beschriebene Ein- und Ausschaltverhalten des Spulenstromes  $I(t)$ .

### 14.9.2 Sinusförmige Wechselspannungen und Wechselströme

In der Praxis werden Wechselspannungen weitaus häufiger verwendet als Gleichspannungen. Unsere Haushalte werden nur mit



**Abb. 14.30** Transport elektrischer Energie vom Kraftwerk zum Verbraucher.

Wechselspannungen versorgt. *Wechselspannungen* und *-ströme* sind dadurch gekennzeichnet, dass sie sich nach Betrag und Richtung mit der Zeit periodisch ändern. Die Vorteile einer Wechselspannung gegenüber einer Gleichspannung liegen einmal darin, dass man ihre Größe mit Hilfe von Transformatoren (siehe Kap. 16.2.3) ohne große Energieverluste beliebig variieren kann und so beispielsweise in einem Fernsehgerät die 230 Volt Wechselspannung aus der Steckdose sowohl in 15000 Volt für die Beschleunigungsspannung als auch in 6 Volt für die Heizung der Kathode umwandeln kann. Hinzu kommt, dass Wechselspannungen verlustärmer transportiert werden können als Gleichspannungen, indem man sie auf hohe Spannungswerte transformiert und diese *Hochspannung* dann über Überlandleitungen schickt (Abb. 14.30). In den Umspannstationen am Ort des Verbrauchers wird diese Hochspannung von 230000 Volt wieder auf die üblichen 230 Volt heruntertransformiert und dem Verbraucher zugeführt. (Ein Rechenbeispiel hierzu werden wir bei der Besprechung der elektrischen Leistung in Kap. 14.9.8 geben.) Diese dem Versorgungsnetz zu entnehmende Spannung bezeichnet man auch als *Netzspannung*.

Übrigens lassen sich mittels geeigneter elektrischer Bauteile sowohl Wechselspannungen in Gleichspannungen als auch Gleichspannungen in Wechselspannungen umwandeln.

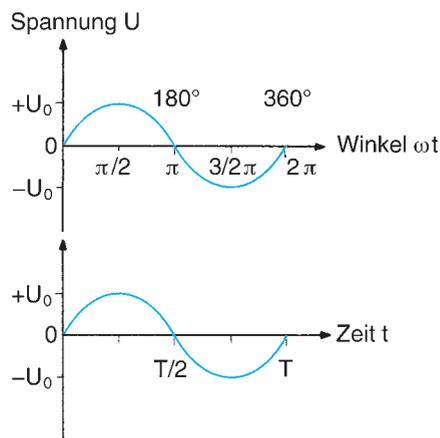
Galvanische Elemente liefern nur Gleichspannung. Wechselspannungen werden auf anderem Wege erzeugt; dazu dienen nach dem Induktionsprinzip (Kap. 14.8.4) arbei-

tende, rotierende Generatoren, sogenannte *Dynamomaschinen* (Kap. 16.2.1). Am einfachsten lassen sich durch diese Geräte Wechselspannungen erzeugen, deren Größe sich mit der Zeit periodisch wie eine Sinus-Kurve ändert:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) = U_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right). \quad (14-78)$$

Abb. 14.31 zeigt den zeitlichen Verlauf einer sinusförmigen Wechselspannung  $U(t)$ , wie man ihn mit einem Oszillographen (siehe Kap. 16.1.4) aufzeichnen kann. Für die grafische Darstellung können wir auf der Abszisse entweder die Variable  $\omega t$  (im Bogenmaß) auftragen oder die zugehörige Zeit  $t$ .

$U_0$  ist die Spannungsamplitude,  $\omega = 2\pi\nu$  die Kreisfrequenz und  $T (= 1/\nu)$  die Schwingungsdauer. Die Frequenz  $\nu$  der Netzspannung aus



**Abb. 14.31** Sinusförmige Wechselspannung  $U(t)$ .

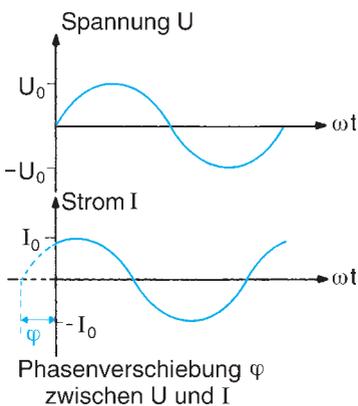
der Steckdose beträgt 50 Hz. Die Spannung  $U(t)$  wechselt also periodisch zwischen den Maximalwerten  $U_0$  und  $-U_0$ , wobei der eine Pol der Steckdose auf konstantem Erd-Potential (*Null-Leiter*) liegt, während das Potential des zweiten Pols zwischen  $+U_0$  und  $-U_0$  wechselt. Den Wert  $U_0/\sqrt{2}$  bezeichnet man als den *Effektivwert*  $U_{\text{eff}}$  der Wechselspannung (Kap. 14.9.8). Für das Netz in Deutschland gilt  $U_{\text{eff}} = 230$  Volt, in den USA  $U_{\text{eff}} = 117$  Volt.

Liegt die Spannung  $U(t)$  an einem Ohm'schen Widerstand  $R$ , so fließt ein Strom, der sich ebenfalls sinusförmig mit der Zeit ändert.

$$I(t) = \frac{1}{R} U(t) = \frac{U_0}{R} \sin(\omega t) = I_0 \sin(\omega t). \tag{14-79}$$

Wir werden aber in Kap. 14.9.5 sehen, dass Gl. (14-79) nicht mehr gilt, wenn der Wechselstromkreis neben Ohm'schen Widerständen auch kapazitive oder induktive Widerstände enthält. Dann nämlich besteht zwischen Strom und Spannung eine *Phasendifferenz*  $\varphi$ , d. h., die periodischen Verläufe von Strom und Spannung sind zeitlich gegeneinander verschoben (vgl. Abb. 14.32). Der durch die Spannung der Gl. (14-78) erzeugte Strom ist dann allgemein gegeben durch:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi). \tag{14-80}$$



**Abb. 14.32** Phasenverschiebung zwischen  $U(t)$  und  $I(t)$ , falls der Wechselstromkreis nicht ausschließlich Ohm'sche Widerstände enthält:  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ ;  $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$ . (In unserem Beispiel ist  $\varphi$  negativ.)

Die Phasendifferenz  $\varphi$  entspricht, wie in Kap. 6 gezeigt wurde, einer Zeitverschiebung  $\Delta t$ , im vorliegenden Fall zwischen dem Verlauf von Strom und Spannung um  $\Delta t = \varphi/\omega$ .

### 14.9.3 Dreiphasen-Spannung, Drehstrom

In der Technik besitzt eine weitere Art von Wechselstrom große Bedeutung:

Der *Drehstrom*. Er wird meist dann verwendet, wenn große elektrische Leistungen verbraucht werden, also für große Maschinen, starke Motoren usw. Er wird im Prinzip dadurch erzeugt, dass man nicht *eine* Spule im Magnetfeld des Generators (Kap. 16.2.1) rotieren lässt, sondern *drei* Spulen, die gegeneinander um je  $120^\circ$  gedreht angeordnet sind.

Die in den Spulen entstehenden Induktionsspannungen (s. Gl. (14-56)) sind dann um den Winkel  $120^\circ (\cong 2\pi/3)$  in der Phase gegeneinander verschoben:

$$U_1 = U_{0,1} \sin(\omega t), \tag{14-81a}$$

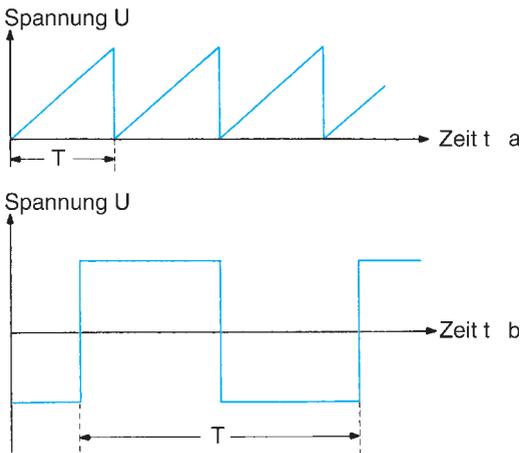
$$U_2 = U_{0,2} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right), \tag{14-81b}$$

$$U_3 = U_{0,3} \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right). \tag{14-81c}$$

Diese Kombination dreier Spannungen heißt *Dreiphasen-Spannung*, die zugehörigen Ströme *Dreiphasen-* oder *Drehstrom*.

Da zur Fortleitung der drei Ströme derselbe Null-Leiter verwendet werden kann, kommt man anstelle von sechs mit insgesamt vier Leitungen aus, nämlich dem Null-Leiter und den drei Phasen. Verbraucher können entweder zwischen jeder der Phasen und dem Null-Leiter angeschlossen werden oder zwischen je zwei der drei Phasen.

Im technischen Dreiphasen-Netz betragen die Effektivwerte der Teilspannungen der drei Phasen gegen den Null-Leiter jeweils 230 V; zwischen je zwei der drei Phasen liegt dann eine Spannung mit dem Effektivwert 400 V.

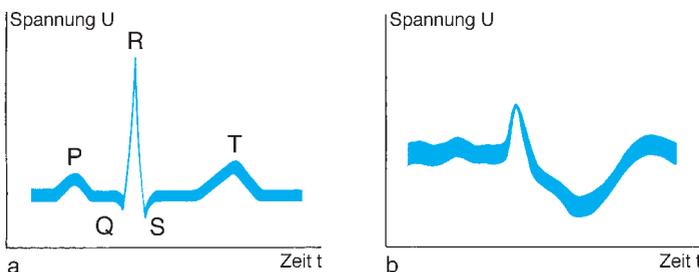


**Abb. 14.33** Nicht-sinusförmige Wechselspannungen: (a) Sägezahnspannung und (b) Rechteckspannung.

Es ist heute üblich, die Haushalte mit Dreiphasen-Spannung zu versorgen. Im Verteilerkasten, in dem sich Hauptsicherungen und Stromzähler befinden, werden daraus Teilspannungen mit 230 V Effektivspannung entnommen, die dann zu den Wandsteckdosen geführt werden. Stärkere Verbraucher, wie Elektroherd oder Waschmaschine, werden dagegen meist direkt mit dem Drehstrom betrieben, wozu man diese an spezielle, vierpolige Steckdosen anschließt.

#### 14.9.4 Nicht-sinusförmige Wechselspannungen, Spannungsimpulse

Wiederholt sich ein Spannungsverlauf periodisch, so sprechen wir von Wechselspannung, auch wenn die Spannung nicht sinusförmig ist. Folgen dagegen Spannungsimpulse



**Abb. 14.34** Darstellung der Periode des EKG (a) eines ruhenden gesunden Menschen, (b) eines Herzkranken.

in unregelmäßiger Folge aufeinander, so nennen wir dies eine *Impulsfolge*. Beispiele für nicht-sinusförmige Wechselspannungen sind die Sägezahnspannung und die Rechteckspannung (Abb. 14.33).

Biologische Spannungen sind durchweg nicht-sinusförmig, können aber periodisch sein, z. B. das EKG (Abb. 14.34a, b). (In Kap. 15.1.2 wird erläutert, wie ein EKG zustandekommt.)

Nicht-harmonische (d. h. nicht-sinusförmige) Spannungsverläufe lassen sich, wie dies in Kap. 6.5.2 schon für periodische mechanische Bewegungen gezeigt wurde, entsprechend dem *Satz von Fourier* als Summe von sinusförmigen Teilspannungen unterschiedlicher Frequenzen darstellen:

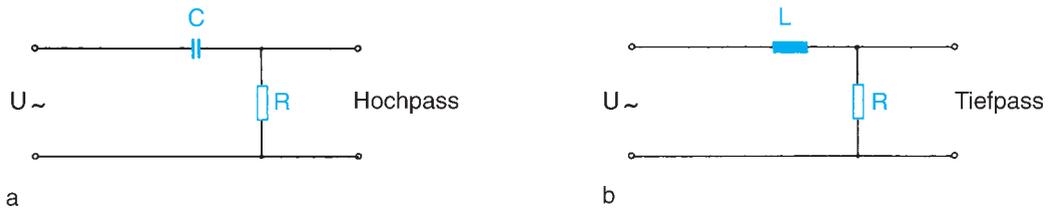
$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(n\omega t). \quad (14-82)$$

Diese Darstellung wird allgemein zur Analyse nicht-sinusförmiger Signale verwendet, in der Medizin z. B. zur Auswertung des EKG, EEG oder der zeitlichen Änderung der Blutfüllung der Herzkammern.

### 14.9.5 Wechselstrom-Kreise

#### 14.9.5.1 Kapazitiver Widerstand

Legt man eine Gleichspannung an einen Kondensator, so wird er, wie in Kap. 14.9.1 beschrieben, mit einer Zeitkonstanten  $\tau = RC$  aufgeladen und baut seine Ladung erst wieder ab, wenn die Gleichspannung abgeschaltet wird. Außer während der Auf- und Entladezeit der Größenordnung  $\tau$  fließt kein



**Abb. 14.35** Wechselstromwiderstände: (a)  $RC$ -Glied als Hochpass-Filter und (b)  $RL$ -Glied als Tiefpass-Filter.

merklicher Strom. Das heißt, der Kondensator hat für Gleichstrom praktisch einen unendlich hohen Widerstand. Dies ist auch anschaulich klar: Zwischen den beiden Platten des Kondensators besteht keine elektrisch leitende Verbindung.

Eine sinusförmige Wechselspannung der Kreisfrequenz  $\omega$  hingegen bewirkt, dass der Auf- und Entladungsvorgang sich mit der Frequenz  $\omega$  dauernd wiederholt, also dauernd Ströme in wechselnder Richtung fließen.

Wegen der Zeitverzögerung des Auf- und des Entladevorganges mit der Zeitkonstante  $\tau$  wirkt der Kondensator im Wechselstromkreis als ein endlicher Widerstand; seine Größe, der *kapazitive Wechselstromwiderstand*, ist gegeben durch

$$R_{\text{kap}} = \frac{1}{\omega C}. \quad (14-83)$$

Je höher  $\omega$  und je größer  $C$ , umso mehr Ladung fließt pro Zeiteinheit und um so kleiner ist  $R_{\text{kap}}$ . Bei  $\omega \rightarrow 0$  (Gleichstrom) dagegen wird  $R_{\text{kap}}$  unendlich groß.

Zwar behindert ein kapazitiver Widerstand den Wechselstromfluss, im Gegensatz zum Ohm'schen Widerstand wird dabei aber keine Energie verbraucht. Statt dessen wird elektrische Energie im Kondensator nur kurzfristig gespeichert. Der zufließende Strom baut ein elektrisches Feld auf. Kehrt aber der Wechselstrom sein Vorzeichen um, so wird das Feld wieder abgebaut, und der Kondensator gibt die gespeicherte Feldenergie (Kap. 14.7.6) wieder an die Spannungsquelle zurück. Dieser Vorgang wiederholt sich periodisch. Man nennt den Kondensator

einen *Blindwiderstand*, um ihn vom Ohm'schen *Wirkwiderstand* zu unterscheiden, der elektrische Energie in Wärme umwandelt (siehe Kap. 15.2.4). Beim kapazitiven Widerstand folgt die Spannung am Kondensator  $U_C$  um eine Phasenkonstante  $\varphi = 90^\circ$  verzögert dem Strom. So hat  $U_C$  sein Maximum, wenn die Ladung auf den Platten maximal ist, und das ist gerade dann erreicht, wenn der Strom wieder auf Null abgefallen ist.

Für die Hochfrequenz-(HF-)Technik ist der Kondensator ein wichtiges Hilfsmittel, um Gleichströme, die durch den Kondensator unterbrochen werden, von den überlagerten Wechselspannungen abzukoppeln.

Wird eine nicht-sinusförmige Wechselspannung an eine Serienschaltung von Ohm'schem und kapazitivem Widerstand, ein  $RC$ -Glied (Abb. 14.35a), gelegt, so wirkt der Kondensator für die in der Wechselspannung enthaltenen niederfrequenten sinusförmigen Anteile (siehe Gl. (14-83)) als größerer Widerstand als für die hochfrequenten Anteile. Die niederfrequenten Anteile werden also stärker geschwächt, die hochfrequenten können leichter passieren. Damit wird die Form des Wechselspannungs-Signals verändert, denn in Gl. (14-82) werden die Fourier-Komponenten verschieden stark geändert. Aus diesem Grund werden  $RC$ -Glieder auch als Frequenzfilter verwendet, die hochfrequente sinusförmige Anteile von niederfrequenten trennen (*Hochpass-Filter*).

### 14.9.5.2 Induktiver Widerstand

Auch eine aus einem Leiter gewickelte Spule stellt – und zwar zusätzlich zum Ohm'schen Widerstand  $R$  der Drahtwicklungen – einen Wechselstromwiderstand dar. Legt man eine Gleichspannung an eine solche Spule, so wird mit der Zeitkonstanten  $\tau = L/R$  ein Magnetfeld aufgebaut, das erst wieder zusammenbricht, wenn man die Gleichspannung abschaltet. In der Zwischenzeit fließt ein durch  $R$  begrenzter Gleichstrom. Eine Wechsel-

spannung bewirkt dagegen, dass sich in der Spule ein magnetisches Feld periodisch auf- und abbaut. Die magnetische Feldenergie wird dabei abwechselnd der Spannungsquelle entzogen und ihr wieder zugeführt. Daher stellt, wie der Kondensator, auch die Spule im Wechselstromkreis einen *Blindwiderstand* dar, man nennt ihn auch *induktiven Wechselstrom-Widerstand* oder *Drossel*.

Wie im Fall des kapazitiven Widerstandes sind auch hier Strom und Spannung gegeneinander in der Phase verschoben, denn das durch den sinusförmigen Wechselstrom in der Spule periodisch auf- und abgebaute Magnetfeld verursacht nach Gl. (14-58) eine cosinusförmige Induktionsspannung. Im induktiven Widerstand (ohne  $R$ ) eilt also die Spannung dem Strom um  $\varphi = 90^\circ$  voraus. Der zusätzliche Ohm'sche Widerstand bewirkt, dass  $\varphi < 90^\circ$  wird.

Die Größe des *induktiven Widerstandes* hängt von der Induktivität  $L$  der Spule ab:

$$R_{\text{ind}} = \omega L. \tag{14-84}$$

Wir sehen, dass sich  $R_{\text{ind}}$  bezüglich der Frequenz komplementär zum kapazitiven Widerstand verhält:  $R_{\text{ind}}$  wird mit zunehmender Frequenz größer; bei Gleichstrom hingegen verschwindet er. (Der Ohm'sche Widerstand  $R$  des Spulendrahtes bleibt jedoch unverändert.)

Aus diesem Grunde kann auch die Kombination von  $R$  und  $R_{\text{ind}}$ , das sogenannte *RL-Glied* (Abb. 14.35b), als Frequenzfilter dienen: Es lässt niederfrequente sinusförmige Anteile einer nicht-sinusförmigen Wechselspannung leichter passieren als hochfrequente. Man nennt es daher *Tiefpass-Filter*.

### 14.9.5.3 Wechselstromkreise mit Ohm'schem, kapazitivem und induktivem Widerstand

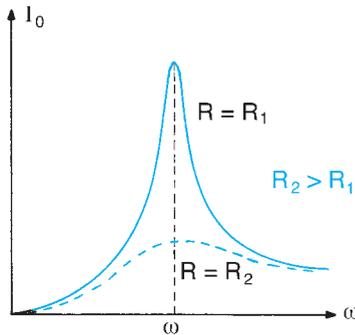
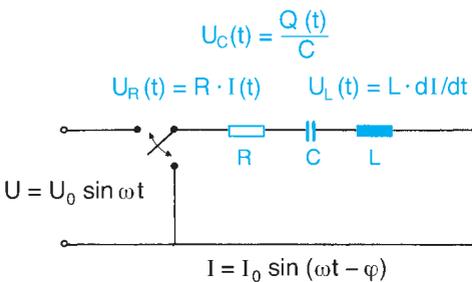
Schalten wir in einem Wechselstromkreis einen Ohm'schen Widerstand  $R$ , einen kapazitiven Widerstand  $1/\omega C$  und einen induktiven Widerstand  $\omega L$  in *Serie* (Abb. 14.36a), dann gilt auch für diesen Fall, dass Strom und Spannung gegeneinander in der Phase verschoben werden. Das bedeutet, dass das Verhältnis der Momentanwerte von Spannung und Strom zeitlich nicht konstant ist:

$$\frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} \frac{\sin(\omega t)}{\sin(\omega t - \varphi)}. \tag{14-85}$$

Wohl aber ist das Verhältnis der Amplituden  $U_0$  und  $I_0$  konstant, und daher wird dieses verwendet, um den sogenannten *Wechselstromwiderstand*  $R_{\sim}$ , auch *Impedanz* genannt, zu definieren:

$$R_{\sim} = \frac{U_0}{I_0}. \tag{14-86}$$

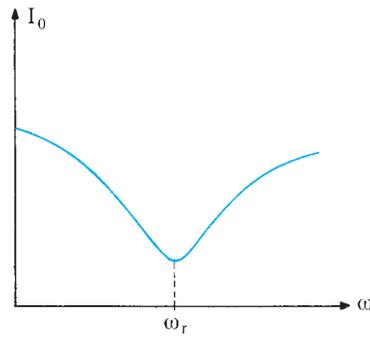
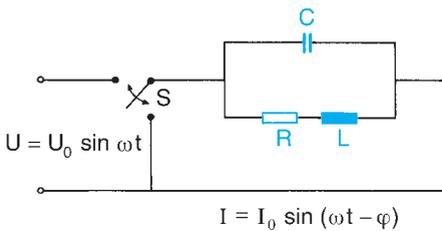
Das Problem ist nun, für ein vorgegebenes  $U_0$  den zugehörigen Wert  $I_0$  zu berechnen. Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel muss



a

b

**Abb. 14.36** Serienschaltung von Wechselstromwiderständen: (a) Schaltkreis, (b) Abhängigkeit der Wechselstromamplitude  $I_0$  von der Kreisfrequenz  $\omega$  für zwei verschieden große Ohm'sche Widerstände  $R = R_1$  bzw.  $R = R_2$ , aber unveränderter Kapazität  $C$  bzw. Induktivität  $L$ .



a

b

**Abb. 14.37** Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen: (a) Schaltkreis, (b) Abhängigkeit der Wechselstromamplitude  $I_0$  von der Kreisfrequenz  $\omega$ .

die Summe der Spannungsverluste an den hintereinander geschalteten Wechselstromwiderständen (siehe Gl. (14-65) und (14-76a)) gleich sein der Quellenspannung  $U$  in der Wechselstromquelle:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = U. \quad (14-87)$$

Differenzieren wir Gl. (14-87) nach der Zeit, so erhalten wir eine

Differentialgleichung zweiter Ordnung für den Strom:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dU}{dt}. \quad (14-88)$$

Setzen wir hier  $U = U_0 \sin(\omega t)$  und  $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$  ein, so ergibt sich für den Wechselstromwiderstand:

$$R_{\sim} = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (14-89)$$

Bei Gleichstrom-Kreisen genügt die Kenntnis des Widerstandes  $R$ , um den Strom aus der Spannung berechnen zu können. Bei Wechselstrom-Kreisen hingegen ist außer dem Wechselstromwiderstand auch die Phasenverschiebung wichtig. Von ihr hängt, wie wir später (in Gl. (14-104)) sehen werden, die Leistungsaufnahme des Stromkreises ab.

Für den Tangens des Phasenwinkels  $\varphi$  ergibt sich aus Gl. (14-88):

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (14-90)$$

Wir können nun Spezialfälle diskutieren:

1. Es sei  $L = 0$  und  $1/C = 0$ . Dann ist  $R_{\sim} = R$  und  $\tan \varphi = \varphi = 0$ .
2. Es sei  $1/C = 0$  und  $R = 0$ , d. h.,  $R_{\sim}$  sei rein induktiv. Dann ist  $\tan \varphi = \infty$ , d. h.  $\varphi = +90^\circ$ ; der Strom ist gegenüber der Spannung also um  $\pi/2$  verzögert.
3.  $R_{\sim}$  sei rein kapazitiv, d. h.  $L = 0$ ,  $R = 0$ . Dann ist  $\tan \varphi = -\infty$  und  $\varphi = -90^\circ$ ; der Strom eilt der Spannung um  $\pi/2$  voraus.

Für den Fall der in Abb. 14.37 skizzierten Parallelschaltung von Kapazität und Induktivität mit Ohm'schem Widerstand ergibt sich aus entsprechenden Überlegungen:

$$R_{\sim} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C} \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (14-91)$$

und

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}{R}. \quad (14-92)$$

### 14.9.6 Resonanz-Schwingkreise

Im *Serien-Schwingkreis* des vorigen Kapitels nimmt der Wechselstromwiderstand  $R_{\sim}$  der Gl. (14-89) bei konstantem Ohm'schem Widerstand  $R$  seinen kleinsten Wert an, wenn die Differenz der Blindwiderstände  $(\omega L - 1/\omega C)$  Null wird. Dies geschieht bei der *Resonanzfrequenz*

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (14-93)$$

Dann ist nach Gl. (14-89) der Wechselstromwiderstand  $U_0/I_0$  gleich dem Ohm'schen Widerstand  $R$ , und nach Gl. (14-90) ist der Phasenwinkel zwischen  $I$  und  $U$  gleich Null.

In Abb. 14.36b ist der Verlauf der Stromamplitude  $I_0$  bei fester Spannungsamplitude  $U_0$  in Abhängigkeit von der Frequenz der angelegten Wechselspannung für zwei verschieden große Ohm'sche Widerstände aufgetragen. Wir sehen, dass diese Kurve der Resonanzkurve der erzwungenen mechanischen Schwingung in Abb. 6.4 ähnelt. Tatsächlich handelt es sich um eine *erzwungene elektrische Schwingung*; die zugehörige freie Schwingung bei  $\omega = \omega_r$  beobachten wir, wenn wir durch den Schalter  $S$  in Abb. 14.36a die Spannungsquelle abkoppeln und den Spannungsverlauf im Kreis zum Beispiel mit einem Oszillographen verfolgen. Im mathematischen Formalismus der Differentialgleichung, Gln. (14-87) und (14-88), bedeutet dies, dass wir  $U$  und  $dU/dt$  gleich Null setzen und somit zur Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung gelangen, wie wir sie für mechanische Schwingungen bereits in Kap. 6.3 kennengelernt und gelöst haben.

Bei der freien elektrischen Schwingung werden periodisch zwei verschiedene Energieformen ineinander umgewandelt: Es sind dies die magnetische Feldenergie in der Spule (Kap. 14.8.6) und die elektrische Feldenergie im Kondensator (Kap. 14.7.6), die Schwingung ist jedoch gedämpft, weil der Ohm'sche Widerstand als Wirkwiderstand die Feldenergien zunehmend in Wärme umwandelt.

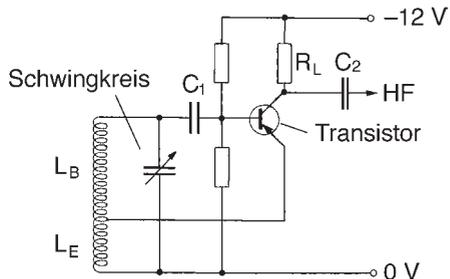
Der in Abb. 14.36a gezeigte *Serien-Schwingkreis* besitzt technische Bedeutung als selektiver Frequenzfilter. Da er aus einer Kombination von Hochpass-Filter und Tiefpass-Filter (Kap. 14.9.5) besteht, lässt er im Wesentlichen nur Ströme bei derjenigen Frequenz passieren, bei welcher sich die Wirkungen von Kapazität und Induktivität gegeneinander aufheben, also bei der Resonanzfrequenz  $\omega_r$  (Abb. 14.36b).

Auch bei Parallelschaltung von Spule und Kondensator (Abb. 14.37) können elektrische Schwingungen angeregt werden. In diesem *Parallel-Schwingkreis* ist die Resonanzfrequenz  $\omega_r$  dieselbe wie beim Serienschwingkreis (Gl. (14-93)), vorausgesetzt,  $C$  und

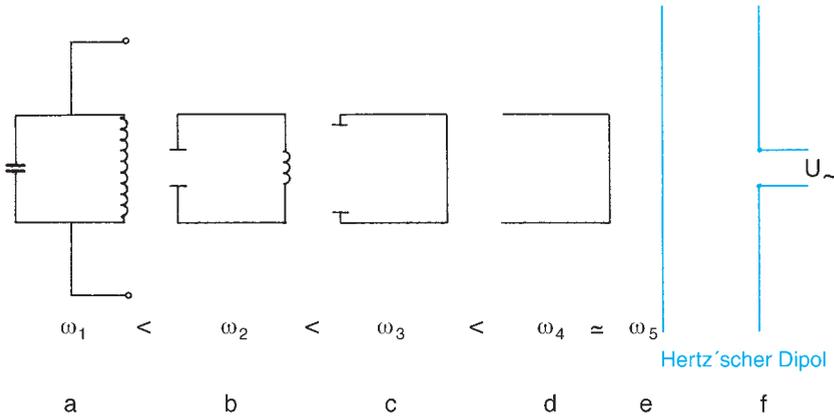
$L$  haben dieselben Werte. Auch hier *pendeln* elektrische und magnetische Feldenergien. Seine Eigenschaften als Frequenzfilter sind jedoch völlig andere: Wegen der Parallelschaltung können Ströme hoher Frequenz leicht den Hochpass-Filter des Kondensators passieren; Ströme niedriger Frequenz passieren den Tiefpass der Induktivität. Dagegen werden Ströme mit Frequenzen nahe der Resonanzfrequenz von beiden Filtern zurückgehalten; sie werden herausgefiltert (*Sperrkreis*).

In der Funktechnik dient speziell der geschlossene Parallel-Schwingkreis zur Erzeugung hochfrequenter elektromagnetischer Schwingungen, wie sie für die Ausstrahlung und den Empfang von Radiowellen erforderlich sind. Erst mit der *Rückkopplung* (Kap. 22) ist es möglich, geschlossene Schwingkreise trotz ihrer Dämpfung zu dauernden Schwingungen anzuregen. Dafür wird dem Kreis ein kleiner Teil seiner Energie entnommen, durch eine Elektronenröhre (Triode, Kap. 15.2.1) oder einen Transistor (Kap. 15.3.2) verstärkt und im richtigen Takt wieder zugeführt. Ist die so zugeführte Leistung (siehe Kap. 14.9.8) gleich der Verlustleistung (zu der neben den Ohm'schen Verlusten noch Verluste durch Abstrahlung einer angekoppelten Antenne kommen), so kann die Schwingung beliebig lange aufrechterhalten werden. Der rückgekoppelte Schwingkreis ist somit eines der grundlegenden Bauelemente von Sendern und Empfängern von Radio-, Fernseh-, Mikrowellen usw. (siehe auch Kap. 16.2.4).

**Induktive Rückkopplung mit dem Transistor** Die in der Spule  $L_E$  (vgl. Abb. 14.38) erzeugte Flussänderung  $d\Phi/dt$  induziert in der Spule  $L_B$  eine Spannung, die zugleich als Steuerspannung zwischen Basis und Emitter des Transistors dient. (Die Funktionsweise des Transistors wird in Kap. 15.3.2 beschrieben.) Dadurch wird der Emitterstrom gesteuert, so dass die Schwingung im Kreis im richtigen Takt dauernd neu angeregt wird. Zudem wird aber auch der Kollektorstrom gesteuert, der durch den Arbeitswiderstand  $R_L$  fließt. Der Spannungsabfall an  $R_L$  kann über den Kondensator  $C_2$  als Hochfrequenzsignal (HF) der Schaltung entnommen werden.



**Abb. 14.38** Induktive Rückkopplung mit einem pnp-Transistor.

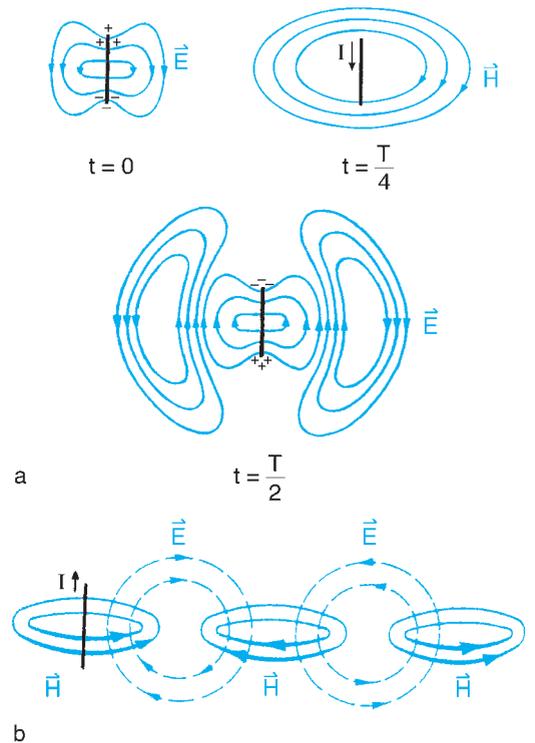


**Abb. 14.39** Entstehung eines Hertz'schen Dipols (einer Antenne) durch Übergang vom Schwingkreis (a) zum einfachen Leiterstück (e, f).  $\omega_i$  sind die entsprechenden Resonanzfrequenzen.

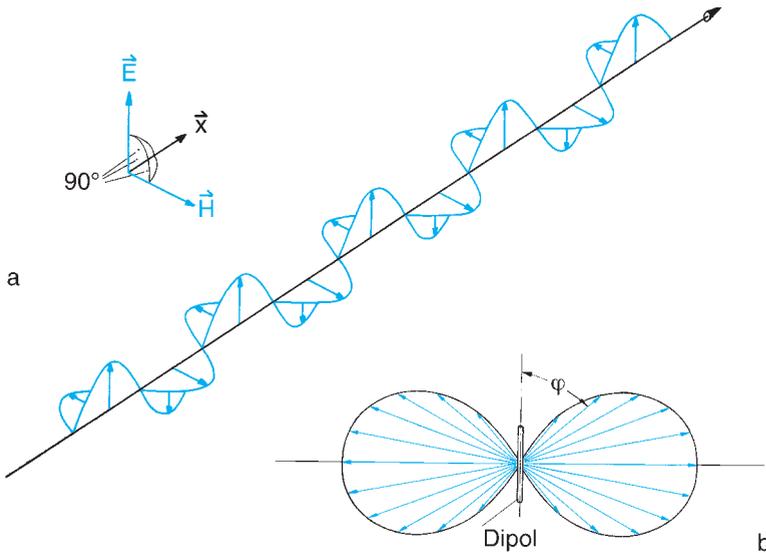
### 14.9.7 Elektromagnetische Wellen

Durch geeignete Wahl von Kapazität  $C$  und Induktivität  $L$  lassen sich nach Gl. (14-93) im Schwingkreis beliebige Frequenzen erzeugen. Dies kann, wie aus den Gln. (14-34) und (14-59) hervorgeht, durch spezielle Dimensionierung der Kapazität und Induktivität erreicht werden. Um Frequenzen größer als etwa  $10^8$  Hz zu erhalten, genügt im Prinzip bereits ein Stück leitender Draht, wenn man ihn durch geeignete Rückkopplung zu Schwingungen anregen kann. Dann sind Kapazität und Induktivität nicht mehr lokalisiert, sondern über den ganzen Draht verteilt. Man kann sich diesen sogenannten *Hertz'schen Dipol*, wie in Abb. 14.39 angedeutet, aus dem Parallel-Schwingkreis entstanden denken. Elektrische bzw. magnetische Felder, die im Schwingkreis (a) noch auf den Kondensatorzwischenraum bzw. den Spulenraum beschränkt waren, umgeben jetzt den gesamten Dipol, wenn Elektronen im Draht hin- und herfließen. Das elektrische Feld ist am größten, wenn sich die Elektronen an einem Ende des Drahtes gesammelt haben (Abb. 14.40a). Sie strömen zurück, und wenn im Moment des Ladungsausgleichs der Strom am größten ist, ist auch dessen Magnetfeld maximal. Die Elektronen fließen dann weiter und sammeln sich am anderen Drahtende,

wobei wieder das elektrische Feld (jetzt aber mit umgekehrtem Vorzeichen) anwächst; dieser Vorgang wiederholt sich periodisch.



**Abb. 14.40** (a) Entstehung elektromagnetischer Wellenfelder am Hertz'schen Dipol.  $T(=1/\nu)$  bedeutet die Schwingungsdauer. (b) Verkettung elektrischer und magnetischer Wechselfelder.



**Abb. 14.41** (a) Linear polarisierte elektromagnetische Welle zu einem Zeitpunkt  $t$ . (b) Strahlungscharakteristik eines Dipols. Die Länge der Vektoren gibt die unter dem Winkel  $\varphi$  vom Dipol abgestrahlte Strahlungsintensität  $S = C \sin^2 \varphi r^2$  an. Die Strahlungscharakteristik hat man sich rotationsymmetrisch zur Dipolachse vorzustellen.

Eine ganz wesentliche Eigenschaft des Schwingkreises ist, dass sich die Felder bei hohen Frequenzen vom Draht ablösen, wobei sich die elektrischen Feldlinien schließen, und sich mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen. Die elektrischen Felder wiederum erzeugen magnetische Felder mit geschlossenen Feldlinien, deren zeitliche Änderungen dann wieder elektrische Felder erzeugen, so dass eine Verkettung elektrischer und magnetischer Wechselfelder, sogenannte *elektromagnetische Felder*, entstehen (Abb. 40b). Der Hertz'sche Dipol (die Antenne) erzeugt also freie elektromagnetische Felder, die sich als elektromagnetische Wellen im Raum ausbreiten.

Der Dipol dient somit als *Sende-Antenne* für hochfrequente elektromagnetische Wellen. Nahe dem Dipol ist die Verteilung elektrischer und magnetischer Felder sehr kompliziert (*Nahfeld*), weitab hingegen (im *Fernfeld*) stellt sich eine transversale Welle ein, wobei elektrischer Feldvektor  $\vec{E}$  und magnetischer Feldvektor  $\vec{H}$  senkrecht aufeinander

stehen. In Abb. 14.41a ist besonders zu beachten, dass nun  $\vec{E}$ -Feld und  $\vec{H}$ -Feld gleichphasig sind, d. h. für eine herausgegriffene Ausbreitungsrichtung  $x$  gilt:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - kx); \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \sin(\omega t - kx), \quad (14-94)$$

während beide Felder im Nahfeld um  $T/4$  zeitlich gegeneinander verschoben aufeinander folgen.

Die von einem Dipol emittierte Strahlung ist am intensivsten in den Richtungen *senkrecht* zum Draht. Dagegen wird in Richtung des Dipols nichts abgestrahlt; von dort gesehen ist ja auch keine Ladungsverschiebung zu erkennen (*Strahlungscharakteristik*; Abb. 14.41b).

Der Dipol kann nicht nur als Sender, sondern auch als Empfangsantenne wirken. Wird er von einer elektromagnetischen Welle getroffen, so entstehen Ströme im Takt der Welle, die abgegriffen und (wie zum Beispiel im Radio, Kap. 16.2.4) verstärkt werden können.

Wir haben gesehen, dass sich mit Schwingkreisen elektromagnetische Wellen verschiedener Frequenzen  $\omega = 2\pi\nu$  erzeugen lassen.

	Wellenlänge in m	Frequenz in Hz	Energie in eV
Rundfunkwellen	$10^4$	$3 \cdot 10^4$	$1,25 \cdot 10^{-10}$
	Langwellen $10^3 = 1 \text{ km}$	$3 \cdot 10^5$	$1,25 \cdot 10^{-9}$
	Mittelwellen $10^2$	$3 \cdot 10^6$	$1,25 \cdot 10^{-8}$
	Kurzwellen $10^1$	$3 \cdot 10^7$	$1,25 \cdot 10^{-7}$
	$10^0 = 1 \text{ m}$	$3 \cdot 10^8$	$1,25 \cdot 10^{-6}$
	UHF Radar $10^{-1}$	$3 \cdot 10^9$	$1,25 \cdot 10^{-5}$
optische Wellen	Ultrakurzwellen $10^{-2} = 1 \text{ cm}$	$3 \cdot 10^{10}$	$1,25 \cdot 10^{-4}$
	$10^{-3} = 1 \text{ mm}$	$3 \cdot 10^{11}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$
	$10^{-4}$	$3 \cdot 10^{12}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$
	Oberfläche Mensch Wärme (IR) Strahlen $10^{-5}$	$3 \cdot 10^{13}$	$1,25 \cdot 10^{-1}$
	sichtbares Licht $10^{-6} = 1 \mu\text{m}$	$3 \cdot 10^{14}$	1,25
Röntgenstrahlen Gammastrahlen	Ultraviolette Strahlen $10^{-7}$	$3 \cdot 10^{15}$	$1,25 \cdot 10^1$
	$10^{-8}$	$3 \cdot 10^{16}$	$1,25 \cdot 10^2$
	weiche Röntgen- strahlen $10^{-9} = 1 \text{ nm}$	$3 \cdot 10^{17}$	$1,25 \cdot 10^3$
	harte Röntgen- strahlen $10^{-10} = 1 \text{ \AA}$	$3 \cdot 10^{18}$	$1,25 \cdot 10^4$
	ultraharte Röntgen- strahlen $10^{-11}$	$3 \cdot 10^{19}$	$1,25 \cdot 10^5$
	$10^{-12} = 1 \text{ pm}$	$3 \cdot 10^{20}$	$1,25 \cdot 10^6$
	$10^{-13}$	$3 \cdot 10^{21}$	$1,25 \cdot 10^7$
$10^{-14}$	$3 \cdot 10^{22}$	$1,25 \cdot 10^8$	

Abb. 14.42 Spektrum elektromagnetischer Wellen. (UHF = Ultrahochfrequenz; IR = Infrarot.)

Die Wellenlängen  $\lambda$ , die sich gemäß der Gleichung

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (14-95)$$

aus der Frequenz  $\nu$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  berechnen lassen, dienen als Maß, um das *Spektrum der elektronischen Wellen* grob in Langwellen, Mittelwellen, Kurzwellen, Ultrakurzwellen und Mikrowellen einzuteilen. Mit diesen durch Schwingkreise und Antennen zu erzeugenden Wellen ist aber das Spektrum der elektromagnetischen Wellen noch lange nicht erfasst.

Wie Abb. 14.42 zeigt, schließen sich zu kurzen Wellen hin die Infrarot- und Lichtwellen an, zu noch kürzeren Wellen folgen Ultraviolett-, Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlung.

Im Spektrum der elektromagnetischen Wellen, das sich über 18 Zehnerpotenzen erstreckt, erweist sich das sichtbare Licht als ein sehr eng begrenzter Bereich. Dass im Folgenden ein ganzer Abschnitt dennoch der *Optik*, d. h. im Wesentlichen dem sichtbaren Licht, gewidmet ist, hat seinen Grund darin, dass wir für diesen Spektralbereich mit dem Auge ein hochempfindliches Wahrnehmungsinstrument besitzen, und dass der größte Teil menschlicher Kommunikation auf optischem Wege erfolgt.

### 14.9.7.1 Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen

Im Vakuum, d. h. im materiefreien Raum, breiten sich elektromagnetische Wellen aller Frequenzen mit exakt derselben Geschwindigkeit, der *Vakuum-Lichtgeschwindigkeit*, aus. Ihr Zahlenwert ist

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$$

(näherungsweise  $3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$  oder  $300\,000 \text{ km s}^{-1}$ ).

Die Basiseinheit *Meter* ist durch  $c$  festgelegt (vgl. Kap. 1.1.2).

Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit ist zugleich die obere Grenze für alle Geschwindigkeiten, mit denen sich Energie oder Materie fortzubewegen vermögen. Diese von der Relativitätstheorie postulierte obere Grenze hat die in Kap. 2.1 und 3.2 beschriebene Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse bzw. Energie eines Körpers zur Folge. Aus ihr ergibt sich, dass jede Masse unendlich groß würde, wenn ihre Geschwindigkeit  $v$  den Wert  $c$  annähme. Nach dem Newton'schen Kraftgesetz (Gl. (2-2)) wäre dann auch eine unendlich große Kraft erforderlich, um diese Masse über die Geschwindigkeit  $v = c$  hinaus zu beschleunigen.

Die Existenz dieser Geschwindigkeit, die experimentell gesichert ist, hat überraschende Konsequenzen. Es gibt Elementarteilchen, die bei ihrem Zerfall  $\gamma$ -Strahlung aussenden. Selbst wenn sie bis nahe an die Lichtgeschwindigkeit heran beschleunigt werden (z. B.  $v = 0,999c$ ), strahlen sie in ihrer Bewegungsrichtung  $\gamma$ -Quanten mit einer Geschwindigkeit aus, die nicht etwa gleich  $c + 0,999c$ , sondern gleich  $c$  ist, ganz so, als würde die Strahlungsquelle ruhen (vgl. hierzu die Erläuterungen im Anschluss an Gl. (1-13)).

### 14.9.7.2 Ausbreitungsrichtung elektromagnetischer Wellen

Die meisten elektromagnetischen Wellen sind *Transversalwellen*. Im vorliegenden Fall stehen die Feldvektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  sowie die Ausbreitungsrichtung der im Wellenfeld enthaltenen Stromdichte  $\vec{S}$  senkrecht aufeinander. Nach den Gesetzen der Vektormultiplikation (siehe Anhang) folgt die als *Poynting-Vektor* bezeichnete Energiestromdichte  $\vec{S}$  aus dem Vektorprodukt

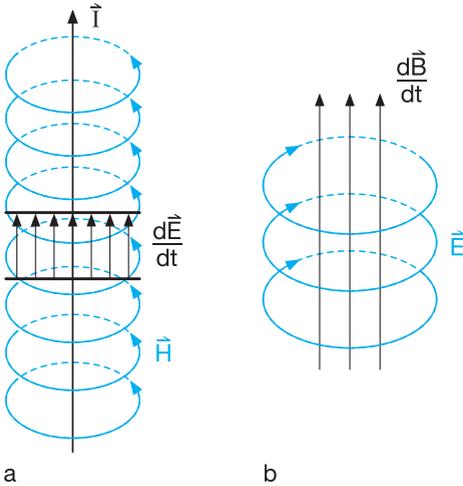
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Auf die Bedeutung des Betrages von  $\vec{S}$  als *Intensität* der elektromagnetischen Welle kommen wir in Kap. 17.2 zu sprechen.

### 14.9.7.3 Maxwell'sche Gleichungen

Die Verknüpfung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern ist von Maxwell in Form von Gleichungen zusammengefasst worden, deren mathematische Formulierung aber recht kompliziert ist, deshalb verzichten wir darauf, sie anzugeben und fassen ihren physikalischen Inhalt in Worte.

Ein magnetisches Wirbelfeld wird erzeugt, wenn ein elektrischer Strom fließt oder wenn sich (z. B. in einem Kondensator) ein elektrisches Feld zeitlich än-



**Abb. 14.43** Zu den Maxwell'schen Gleichungen: (a) Ein elektrischer Strom oder ein zeitlich sich änderndes elektrisches Feld erzeugen magnetische Wirbelfelder; (b) ein zeitlich sich änderndes Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.

dert. Als Wirbelfeld bezeichnet man ein Feld, das wie in Abb. 14.43a gezeigt, aus konzentrischen geschlossenen Feldlinien besteht.

Ein elektrisches Wirbelfeld wird erzeugt, wenn sich die magnetische Induktion eines Magnetfeldes zeitlich ändert (Abb. 14.43b).

Die Maxwell'schen Gleichungen gelten auch für die Felder im materiefreien Raum, sie beschreiben die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen (Kap. 14.9.7.2).

### 14.9.8 Leistung des elektrischen Stroms

Die Arbeit im elektrischen Feld haben wir bereits in Kapitel 14.7.2 kennengelernt: Wird die Ladung  $q$  vom Punkt a zum Punkt b, zwischen denen die Potentialdifferenz  $U$  liegt, verschoben, so wird dadurch nach Gl. (14-27) die Arbeit  $W_{ab} = qU$  verrichtet. Verbindet man nun die Punkte a und b durch einen elektrischen Leiter, so fließt ein Strom  $I$ , und in der Zeit  $t$  strömt die Ladungsmenge  $q = It$  von b nach a zurück. (Wir wollen annehmen, der Strom sei während dieser Zeit konstant.) Die als potentielle Energie in der Ladung  $q$  gespeicherte Arbeit wird dabei freigesetzt, indem sie z. B.

in Wärme umgewandelt wird und den Draht aufheizt. Die während der Zeit  $t$  verrichtete elektrische Arbeit ist:

$$W_{ab} = UIt. \quad (14-96)$$

Gl. (3-12) definiert die Leistung als den Quotienten aus Arbeit und Zeit. Für die elektrische Leistung ergibt sich somit aus Gl. (14-96):

$$P = UI, \quad \text{mit der SI-Einheit Watt (W)}. \quad (14-97)$$

Es gilt:  $1 \text{ W} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A}$ . Nach Gl. (14-97) lässt sich die Energieeinheit des SI daher auch angeben als:  $1 \text{ Joule} = 1 \text{ Ws}$ . Die im Alltag üblichere Kilowattstunde (kWh) ist das  $3,6 \cdot 10^6$ fache der Wattsekunde (Ws):  $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws}$ .

Der Zusammenhang zwischen Leistung, Spannung, Stromstärke und Widerstand lässt sich aus Gl. (14-97) ableiten, indem wir in diese das Ohm'sche Gesetz  $U = RI$  einsetzen:

$$P = \frac{U^2}{R} = I^2 R. \quad (14-98)$$

Hält man die Spannung  $U$  konstant, so wächst die verbrauchte Leistung mit abnehmendem Widerstand  $R$ . Bleibt hingegen der Strom konstant, steigt die Leistung proportional zu  $R$ .

Fließt der Strom in einem Draht mit dem Ohm'schen Widerstand  $R$ , so wird die in der Zeit  $t$  verbrauchte Energie vollständig in Wärmeenergie, die *Joule'sche Wärme* (siehe hierzu Kap. 15.2.4), umgewandelt, und der Draht erhitzt sich.

Eine Glühlampe mit dem Aufdruck 230 V, 60 W verbraucht die Leistung von 60 W zur Erhitzung der Glühwendel, wenn sie an 230 V angeschlossen wird. Von der weißglühenden Wendel werden ihrerseits nur etwa 5 W als Licht abgestrahlt. Glühlampen sind deshalb als Lichtquellen wenig effektiv (sie werden seit 2014 nicht mehr im Handel angeboten). Eine weitaus günstigere Lichtausbeute liefern LEDs (Kap. 17.12.1): Eine 10 W LED liefert etwa die gleiche Helligkeit wie eine 75 W Glühlampe.

Mit Gln. (14-97) und (14-98) wird nun auch verständlich, weshalb zum Transport elektrischer Leistung in

Überlandleitungen Hochspannung verwendet wird. Nehmen wir an, der Verbraucher benötigte eine Leistung von  $P = 2,3 \cdot 10^4$  W. Steht am Ende der Überlandleitung lediglich eine Spannung von 230 V zur Verfügung, so muss, um diese Leistung aufzubringen, durch sie ein Strom von  $I = P/U = 10^2$  A fließen. Steht aber eine Spannung von 230000 V zur Verfügung, so braucht für dieselbe Leistung durch die Überlandleitung nur ein Strom von 0,1 A zu fließen. In beiden Fällen geht in der Überlandleitung die Leistung  $P = I^2 R$  als Joule'sche Wärme verloren, wenn  $R$  der Widerstand der Leitung ist. Aus Gl. (14-98) sehen wir, dass im Fall der Hochspannung wegen des geringeren Stromes die Verlustleistung nur den  $10^{-6}$ ten Teil des Verlustes bei 230 V beträgt. Freilich kann ein normaler Verbraucher mit Hochspannungen dieser Größe nicht arbeiten, sie muss wieder heruntertransformiert werden, aber die geringeren Verluste während des Transportes machen diesen Aufwand und auch den Aufwand für besonders isolierte Hochspannungsmasten rentabel.

Für die allgemeine Definition der Leistung ist unerheblich, ob Gleich- oder Wechselspannung verwendet wird. Zur quantitativen Bestimmung der Leistung von Wechselstrom müssen wir jedoch berücksichtigen, dass sich  $U$  und  $I$  mit der Zeit ändern. Allgemein erhalten wir aus Gl. (14-97):

$$P = UI = U_0 \sin(\omega t) I_0 \sin(\omega t - \varphi). \quad (14-99)$$

Nach Gl. (14-99) ist die Leistung selbst eine Funktion der Zeit; wir bezeichnen den zu einer bestimmten Zeit  $t$  gehörenden Betrag  $P(t)$  als *Momentanleistung*.

Um zu einer Angabe über die während einer längeren Zeitdauer verbrauchte Leistung zu gelangen, muss der zeitliche *Mittelwert* der Momentanleistung berechnet werden.

Allgemein wird der *Mittelwert*  $\langle y \rangle$  einer Größe  $y$ , die von einer Variablen  $x$  abhängt, definiert durch

$$\langle y \rangle = \frac{\int y(x) dx}{\int dx}. \quad (14-100)$$

Für den einfachen Fall, dass die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen Strom und Spannung Null ist (also nur Ohm'sche Widerstände im Wechselstromkreis vorhanden sind) ergibt sich für die über eine Periodendauer  $T$  gemittelte elektrische Leistung:

$$\langle P \rangle = \int_0^T U_0 I_0 \sin^2(\omega t) dt \Big/ \int_0^T dt. \quad (14-101)$$

Dieses Integral ist mit den im Anhang angegebenen Formeln zu lösen; wir erhalten:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0. \quad (14-102)$$

Für den allgemeineren Fall, dass  $\varphi \neq 0$  (neben Ohm'schen Widerständen befinden sich im Wechselstromkreis auch induktive oder kapazitive Widerstände) ergibt sich für  $\langle P \rangle$ :

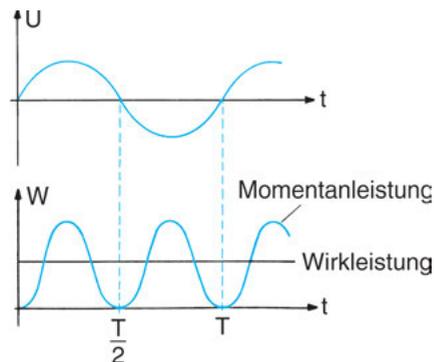
$$\langle P \rangle = U_0 I_0 \int_0^T \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) dt \Big/ \int_0^T dt. \quad (14-103)$$

Mit dem Additionstheorem für  $\sin(\alpha - \beta)$  (siehe Anhang) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= U_0 I_0 \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) \cos \varphi dt \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (14-104)$$

Der Mittelwert  $\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi$  ist die auf Dauer der elektrischen Spannungsquelle tatsächlich entzogene elektrische Leistung. Man nennt daher  $\langle P \rangle$  auch die *effektive Leistung* oder *Wirkleistung* der angelegten Wechselspannung.

Diese Leistung wird am Ohm'schen Widerstand in Wärmeenergie umgewandelt, was man sich z. B. bei elektrischen Heizkörpern oder Elektroherden zunutze macht. Sie wird, wie Gl. (14-104) zeigt, wesentlich bestimmt durch die Phasendifferenz  $\varphi$ ; ist  $\varphi = 0$ , dann ist der als *Leistungsfaktor* bezeichnete Faktor  $\cos \varphi$  gleich 1, und Gl.



**Abb. 14.44** Momentanleistung und Wirkleistung der an einen Verbraucher angelegten Wechselspannung  $U(t)$ .

(14-104) geht in Gl. (14-102) über. Die Momentanleistung schwankt um diesen von der Zeit unabhängigen Wert (Abb. 14.44) der Wirkleistung mit einer Frequenz, die doppelt so groß ist wie die von Spannung und Strom. Die Ursache hierfür liegt darin, dass auch Kondensator oder Spule Energie aus der Spannungsquelle entziehen, die allerdings nicht verbraucht, sondern periodisch wieder an die Quelle zurückgegeben wird. Diese Art der Leistung des elektrischen Wechselstromes bezeichnet man, um sie von der *Wirkleistung* zu unterscheiden, als *Blindleistung*. Von Kapitel 14.9.5 her wissen wir, dass bei geeigneter Wahl der Wechselstromwiderstände die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung den Betrag  $\varphi = \pm 90^\circ$  annehmen kann. In diesem Fall ist der Leistungsfaktor  $\cos \varphi$  gleich Null. Es wird also keine Wirkleistung abgegeben, sondern ausschließlich Blindleistung zwischen Spannungsquelle und Wechselstromkreis ausgetauscht. Der zeitliche Mittelwert der Wirkleistung ist in diesem Fall Null.

Um nun die Frage zu klären, wie groß eine Gleichspannung  $U_-$  und ein Gleichstrom  $I_-$  sein müssten,

um an einem Ohm'schen Widerstand  $R$  dieselbe Leistung zu verbrauchen wie die Wechselspannung  $U(t)$  und der Wechselstrom  $I(t)$ , setzen wir den Betrag der effektiven Leistung aus Gl. (14-102) gleich dem Betrag der Gleichspannungsleistung  $P_- = U_- I_-$ :

$$\frac{1}{2} U_0 I_0 = U_- I_- ,$$

oder mit dem Ohm'schen Gesetz

$$\frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \frac{U_-^2}{R} . \tag{14-105}$$

Hieraus folgt:  $U_0 = \sqrt{2} U_-$ , und entsprechend gilt

$$\frac{1}{2} I_0^2 R = I_-^2 R \quad \text{bzw.} \quad I_0 = \sqrt{2} I_- . \tag{14-106}$$

Häufig gibt man anstelle der Amplituden  $U_0$  und  $I_0$  zur Charakterisierung von Wechselspannung und Wechselstrom die Werte  $U_-$  bzw.  $I_-$  aus den Gl. (14-105) bzw. (14-106) an, die dann als *effektive Spannung*  $U_{\text{eff}}$  bzw. *effektive Stromstärke*  $I_{\text{eff}}$  bezeichnet werden.

Der Wert 230 V der Netzspannung wird als deren *Effektivwert*  $U_- = U_{\text{eff}}$  bezeichnet. Die Spannungsamplitude des Netzes ist demgemäß:

$$U_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V} . \tag{14-107}$$

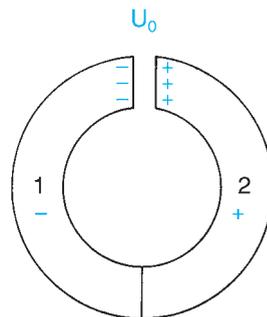
## 15. Mikroskopische elektrische Vorgänge

### 15.1 Biologische Potentiale

#### 15.1.1 Entstehung von Spannungen an Grenzflächen

1. In der Wärmelehre (Kap. 8.5.2) haben wir erfahren, dass die beim Berühren zweier verschiedener Metalle zustandekommende *Kontaktspannung* (Abb. 15.1) für die Wirkungsweise des Thermoelementes von Bedeutung ist. Durch die Berührungsfläche gehen einige Leitungselektronen von dem einen Metall (2) zu dem anderen (1) über, und zwar vom Metall mit der kleineren Austrittsarbeit zu dem mit der größeren Austrittsarbeit. Somit wird Metall (1) gegenüber Metall (2) negativ geladen, und die in der Berührschicht entstehende Spannung bezeichnen wir als Kontaktspannung. Diese Spannung verhindert, dass weite-

re Elektronen die Grenzfläche passieren. Da auch die Leitungselektronen eines Metalls an der ungeordneten Temperaturbewegung beteiligt sind und sich aufgrund ihrer hohen Be-



**Abb. 15.1** Kontaktspannung zwischen zwei sich berührenden Metallen.

(14-104) geht in Gl. (14-102) über. Die Momentanleistung schwankt um diesen von der Zeit unabhängigen Wert (Abb. 14.44) der Wirkleistung mit einer Frequenz, die doppelt so groß ist wie die von Spannung und Strom. Die Ursache hierfür liegt darin, dass auch Kondensator oder Spule Energie aus der Spannungsquelle entziehen, die allerdings nicht verbraucht, sondern periodisch wieder an die Quelle zurückgegeben wird. Diese Art der Leistung des elektrischen Wechselstromes bezeichnet man, um sie von der *Wirkleistung* zu unterscheiden, als *Blindleistung*. Von Kapitel 14.9.5 her wissen wir, dass bei geeigneter Wahl der Wechselstromwiderstände die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung den Betrag  $\varphi = \pm 90^\circ$  annehmen kann. In diesem Fall ist der Leistungsfaktor  $\cos \varphi$  gleich Null. Es wird also keine Wirkleistung abgegeben, sondern ausschließlich Blindleistung zwischen Spannungsquelle und Wechselstromkreis ausgetauscht. Der zeitliche Mittelwert der Wirkleistung ist in diesem Fall Null.

Um nun die Frage zu klären, wie groß eine Gleichspannung  $U_-$  und ein Gleichstrom  $I_-$  sein müssten,

um an einem Ohm'schen Widerstand  $R$  dieselbe Leistung zu verbrauchen wie die Wechselspannung  $U(t)$  und der Wechselstrom  $I(t)$ , setzen wir den Betrag der effektiven Leistung aus Gl. (14-102) gleich dem Betrag der Gleichspannungsleistung  $P_- = U_- I_-$ :

$$\frac{1}{2} U_0 I_0 = U_- I_- ,$$

oder mit dem Ohm'schen Gesetz

$$\frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \frac{U_-^2}{R} . \tag{14-105}$$

Hieraus folgt:  $U_0 = \sqrt{2} U_-$ , und entsprechend gilt

$$\frac{1}{2} I_0^2 R = I_-^2 R \quad \text{bzw.} \quad I_0 = \sqrt{2} I_- . \tag{14-106}$$

Häufig gibt man anstelle der Amplituden  $U_0$  und  $I_0$  zur Charakterisierung von Wechselspannung und Wechselstrom die Werte  $U_-$  bzw.  $I_-$  aus den Gl. (14-105) bzw. (14-106) an, die dann als *effektive Spannung*  $U_{\text{eff}}$  bzw. *effektive Stromstärke*  $I_{\text{eff}}$  bezeichnet werden.

Der Wert 230 V der Netzspannung wird als deren *Effektivwert*  $U_- = U_{\text{eff}}$  bezeichnet. Die Spannungsamplitude des Netzes ist demgemäß:

$$U_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V} . \tag{14-107}$$

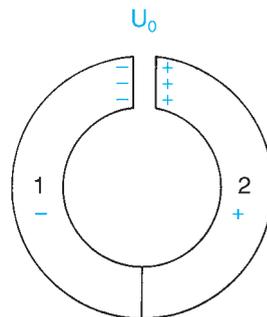
## 15. Mikroskopische elektrische Vorgänge

### 15.1 Biologische Potentiale

#### 15.1.1 Entstehung von Spannungen an Grenzflächen

1. In der Wärmelehre (Kap. 8.5.2) haben wir erfahren, dass die beim Berühren zweier verschiedener Metalle zustandekommende *Kontaktspannung* (Abb. 15.1) für die Wirkungsweise des Thermoelementes von Bedeutung ist. Durch die Berührungsfläche gehen einige Leitungselektronen von dem einen Metall (2) zu dem anderen (1) über, und zwar vom Metall mit der kleineren Austrittsarbeit zu dem mit der größeren Austrittsarbeit. Somit wird Metall (1) gegenüber Metall (2) negativ geladen, und die in der Berührschicht entstehende Spannung bezeichnen wir als Kontaktspannung. Diese Spannung verhindert, dass weite-

re Elektronen die Grenzfläche passieren. Da auch die Leitungselektronen eines Metalls an der ungeordneten Temperaturbewegung beteiligt sind und sich aufgrund ihrer hohen Be-



**Abb. 15.1** Kontaktspannung zwischen zwei sich berührenden Metallen.

weglichkeit im Metallgitter ähnlich den Atomen eines idealen Gases bewegen können, ist es nicht verwunderlich, dass bei hinreichender Temperatur einige unter ihnen beim Auftreffen auf die Berührungsschicht genügend kinetische Energie besitzen, um aus dem Metall heraus zu *verdampfen*, wobei sie allerdings jenseits der Berührungsschicht gleich wieder im anderen Metall *kondensieren*. (Den physikalisch äquivalenten Vorgang beim Austritt von Elektronen aus der Glühkathode in der Elektronenröhre werden wir in Kap. 15.2.1 als *Glühemission* kennenlernen.) Da die Anzahl der an der *Verdampfung* beteiligten Elektronen stark temperaturabhängig ist, wird klar, dass auch die Kontaktspannung von der Temperatur abhängt. Auf diesem Prinzip beruht die Wirkungsweise des Thermoelements, das wir bereits in Kap. 8.5.2 kennenlernten.

2. Aus dem Kapitel über Spannungsquellen ist uns bekannt, dass zwischen zwei Elektroden gleichen Materials (z. B. Ag), die in einen Elektrolyten eintauchen, keine elektrische Spannung auftritt; sie bilden kein galvanisches Element. Tauchen die beiden gleichen Elektroden jedoch in zwei Elektrolyte unterschiedlicher Ionen-Konzentration  $c_1$  bzw.  $c_2$ , so zeigt ein zwischen sie geschaltetes Voltmeter eine schwache Spannung, die *Konzentrationsspannung*, an (Abb. 15.2). Sie entsteht dadurch, dass im Elektrolyten mit geringerer Konzentration ( $c_1$ ) mehr  $\text{Ag}^+$ -Ionen von der Elektrode in Lösung gehen als im Elektrolyten mit stärkerer Konzentration ( $c_2$ ). Die Spannung  $U$  zwischen Elektrode und Elektrolyt ( $c_i$ ) ergibt sich aus:

$$U = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{c_i}{c_0}, \tag{15-1a}$$

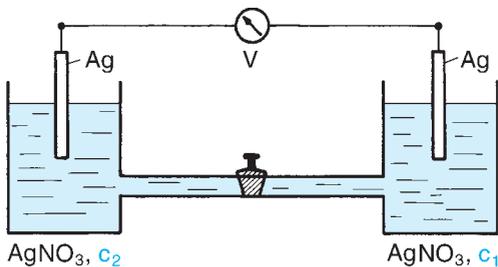


Abb. 15.2 Zur Konzentrationsspannung.

wobei  $R$  die allgemeine Gaskonstante,  $T$  die absolute Temperatur des Elektrolyten,  $F$  die Faraday-Konstante (Kap. 15.2.3),  $z$  die Ionenwertigkeit,  $c_i$  die Ionenkonzentration ( $c_1$  oder  $c_2$ ) und  $c_0$  eine für das Elektrodenmaterial spezifische Konstante bedeutet. Für die gesamte Konzentrationsspannung der in Abb. 15.2 skizzierten Anordnung folgt aus Gl. (15-1a) die als *Nernst'sche Gleichung* bekannte Beziehung

$$U_{12} = \frac{RT}{Fz} \left( \ln \frac{c_2}{c_0} - \ln \frac{c_1}{c_0} \right) = \frac{RT}{Fz} \ln \frac{c_2}{c_1}. \tag{15-1b}$$

Für  $\text{AgNO}_3$  ( $z = 1$ ) bei  $T = 291$  K erhalten wir  $RT/Fz = 0,025$  V. Ist zudem  $c_2$  doppelt so groß wie  $c_1$ , dann ist  $U_{12} = 0,017$  V.

3. Gl. (15-1b) gibt die tatsächliche Potentialdifferenz zwischen den beiden Elektroden nur näherungsweise an. Wenn der Hahn in Abb. 15.2 geöffnet wird, dann ist mitzuberücksichtigen, dass sich die beiden Elektrolyte durch Diffusion miteinander vermischen. Da im Allgemeinen die Beweglichkeiten (Kap. 15.2.3) von Anionen ( $b^-$ ) und Kationen ( $b^+$ ) verschieden sind, eilt die eine Ionenart der anderen voraus, bis das dadurch entstandene elektrische Feld die weitere Ladungstrennung aufhält. Das so entstandene *Diffusionspotential*  $U_D$  (das wie die anderen in diesem Kapitel besprochenen Potentiale eigentlich kein Potential, sondern eine Potentialdifferenz ist) hängt somit von  $b^-$  und  $b^+$  ab:

$$U_D = \frac{RT}{Fz} \frac{b^+ - b^-}{b^+ + b^-} \ln \frac{c_2}{c_1}. \tag{15-2a}$$

Mit  $b^+$  ( $\text{Ag}^+$ ) =  $6,5 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-1}/\text{Vm}^{-1}$  und  $b^-$  ( $\text{NO}_3^-$ ) =  $5,7 \cdot 10^{-4} \text{ ms}^{-1}/\text{Vm}^{-1}$  erhalten wir anstelle von Gl. (15-1b):

$$U_D = 0,025 \text{ V} (0,53 - 0,47) \ln \frac{c_2}{c_1}. \tag{15-2b}$$

4. Grenzen zwei Elektrolyte unterschiedlicher Konzentration nicht frei aneinander, sondern befindet sich zwischen beiden eine Membran, so wird das entstehende Diffusionspotential durch die Eigenschaften der Membran modifiziert (*Membranpotential*). Die größtmögliche Spannung entsteht dann, wenn nur eine

der beiden Ionenarten die Membran passieren kann, d. h. wenn die Permeabilität (Durchlässigkeit) der Membran für die eine Ionenart maximal und für die andere minimal ist:

$$U_{\text{Membr.}} = 0,025 \text{ V} \ln \frac{c_2}{c_1}. \quad (15-3)$$

Obwohl sich in unserem Organismus die Zellen im osmotischen Gleichgewicht mit dem Extrazellularraum befinden, ist die chemische Zusammensetzung der Elektrolyte innerhalb (i) und außerhalb (a) der Zellmembran sehr unterschiedlich. Der Extrazellularraum enthält hauptsächlich  $\text{Na}^+$ - und  $\text{Cl}^-$ -Ionen. Im Zellinnern machen diese dagegen weniger als 15% des Elektrolytgehaltes aus. Hier wird das Natrium weitgehend durch Kalium ersetzt, dessen Konzentration in der Zelle 30 bis 50mal größer ist als im Extrazellularraum. Die Zellmembran ist zwar für keine der erwähnten Ionenarten absolut undurchlässig, aber die Durchlässigkeit ist sehr unterschiedlich. Das Membranpotential wird deshalb außer durch Konzentrationen  $c_i$  auch durch die Permeabilitäten  $P_i$  für die Ionen bestimmt:

$$U_{\text{Membr.}} = 0,02 \text{ V} \ln \frac{P_{\text{K}}c_{\text{K}}^{\text{a}} + P_{\text{Na}}c_{\text{Na}}^{\text{a}} + P_{\text{Cl}}c_{\text{Cl}}^{\text{i}}}{P_{\text{K}}c_{\text{K}}^{\text{i}} + P_{\text{Na}}c_{\text{Na}}^{\text{i}} + P_{\text{Cl}}c_{\text{Cl}}^{\text{a}}}. \quad (15-4)$$

Da die Permeabilität für das Kalium wesentlich größer als für das Natrium ist, wird das Membranpotential vor allem durch den Einfluss des Kaliums bestimmt. Dadurch ist die Potentialdifferenz zu beiden Seiten der Zellmembran so gerichtet, dass das Innere der Zelle um etwa 80 mV negativ gegenüber dem Extrazellularraum erscheint. Da die Zellmembran lediglich eine Dicke von etwa  $5 \cdot 10^{-9}$  m (ca. 10 Atomdurchmesser) besitzt, hat die elektrische Feldstärke in der Membran den riesigen Wert von  $1,6 \cdot 10^7 \text{ V m}^{-1}$ .

Der Aufbau und die Aufrechterhaltung der Konzentrationsdifferenzen zu beiden Seiten der Membran, von denen das Membranpotential abhängt, wird durch energieliefernde chemische Prozesse ermöglicht. Sie bewirken einen Iontentransport, und daher spricht man

auch von einer *Natriumpumpe* und einer mit ihr gekoppelten Kaliumpumpe. Dieser Iontentransport wird als *aktiver Transport* bezeichnet, da er *gegen* ein Konzentrationsgefälle und bei den  $\text{Na}^+$ -Ionen sogar *gegen* ein elektrisches Potentialgefälle erfolgen muss. Die hierfür benötigte Energie wird durch die Spaltung von energiereichen Phosphatverbindungen, insbesondere von Adenosintriphosphat gewonnen. Neben diesem aktiven (energieverbrauchenden) Transport gibt es den *passiven Iontentransport*, der entsprechend dem Konzentrationsgefälle erfolgt. Dieser passive Transport hat seine Ursache darin, dass die Zellmembran nicht vollkommen dicht ist, sondern die Ionen durch Poren in der Membran, wenn auch in begrenztem Umfang, diffundieren können. Im Gleichgewicht werden durch den *aktiven Transport* pro Zeiteinheit genau so viele  $\text{K}^+$ -Ionen in die Zelle hineingepumpt, wie über den *passiven Transport* durch die Poren aus der Zelle herausdiffundieren. (Für die  $\text{Na}^+$ -Ionen gilt das Gleiche, nur in jeweils umgekehrter Richtung.) Dieses Fließgleichgewicht kann beispielsweise durch Stoffwechselgifte wie Dinitrophenol oder Cyanid verändert werden, denn die Gifte unterbinden die Energiegewinnung und damit auch den aktiven Transport, wodurch es zu einem Konzentrationsausgleich zwischen dem Zellinnern und dem Extrazellularraum kommt.

5. Nicht nur durch den Einfluss von Giften, sondern auch auf natürliche Weise sind Änderungen des Fließgleichgewichts möglich; insbesondere bei allen erregbaren biologischen Strukturen wie Nerven und Muskeln. Man kann sogar allgemein sagen, dass jede Erregung einer biologischen Struktur mit einer Änderung des Membranpotentials verbunden ist. Das während der Erregungszeit auftretende Membranpotential, das sich von dem beim nichterregten Zustand vorhandenen konstanten Potential sehr wesentlich unterscheidet, bezeichnet man als *Aktionspotential*. Bei der Erregung nimmt die geringe Permeabilität für  $\text{Na}^+$ -Ionen plötzlich um das etwa Hundertfache zu. Durch den dadurch hervorgerufenen starken  $\text{Na}^+$ -Einstrom

kommt es zur raschen Änderung des Membranpotentials. Die Vergrößerung der  $\text{Na}^+$ -Permeabilität der Zellmembran hält jedoch nur kurze Zeit an, so dass anschließend wieder der  $\text{K}^+$ -Einstrom überwiegt und sich das normale Ruhepotential einstellt. Um beispielsweise eine Nervenfasern zu erregen, genügt es, das Ruhepotential um einen Betrag von ca. 20 mV zu senken, d. h. die Membran zu depolarisieren. Durch die *Depolarisation* sinkt das Potential auf ca. 60 mV. (Unter bestimmten Bedingungen kann das Ruhepotential erhöht sein. Dies bezeichnet man als *Hyperpolarisation*; dann ist zur Erregung eine größere Depolarisation erforderlich.) Da nun bei Ausbildung eines Aktionspotentials auch die Umgebung der erregten Stelle depolarisiert wird, kommt es zur Weiterleitung des Aktionspotentials über die gesamte Nervenfasern. Weil die Ausbildung des Aktionspotentials durch stoffliche Änderungen (z. B.  $\text{Na}^+$ -Einstrom) hervorgerufen wird, ist für seine Entstehung und seine Ausbreitung eine längere Zeit notwendig, als wir sonst von elektrischen Übertragungen gewohnt sind. Die Übertragungsgeschwindigkeit von Aktionspotentialen liegt in der Größenordnung von  $10 \text{ m s}^{-1}$ . Sie ist eine der Ursachen für die Zeitspanne, die immer zwischen einem Reiz und seiner Beantwortung liegt.

### 15.1.2 Summenpotentiale

Treten die im vorigen Kapitel beschriebenen Aktionspotentiale gleichzeitig an mehreren Nerven- bzw. Muskelfasern auf, so kann man mittels geeigneter Elektroden von der Körperoberfläche die Überlagerung dieser verschiedenen Aktionspotentiale als *Summenpotential* ableiten. Derartige Summenpotentiale und ihre Registrierung haben als *Elektroenzephalogramm* (EEG), als *Elektromyogramm* und vor allem als *Elektrokardiogramm* (EKG) diagnostische Bedeutung erhalten.

Über die elementaren Erregungsprozesse im Gehirn, die dem EEG zugrunde liegen, bestehen noch viele Unklarheiten. In der Summe treten periodische Potentialschwän-

kungen auf, die mit Elektroden von der Kopfhaut abgegriffen und nach hoher Verstärkung registriert werden können. Aufgrund praktischer Erfahrungen werden die *EEG-Wellen* in verschiedene Frequenzbereiche eingeteilt (man sagt in der Praxis Wellen, obwohl es sich eigentlich um Potentialschwingungen handelt). Man unterscheidet dabei  $\alpha$ -Wellen (8–13 Hz),  $\beta$ -Wellen (13–30 Hz),  $\theta$ -Wellen (5–7 Hz),  $\delta$ -Wellen (0,1–4 Hz) und  $\gamma$ -Wellen (> 30 Hz). Den Potentialschwingungen des EEG ist eine zeitlich konstante Komponente überlagert, die man als *Bestandpotential* bezeichnet. Die Frequenz der EEG-Wellen ist nicht bei allen Individuen gleich, sondern hängt von Reifungsgrad und Aktivitätsniveau des Gehirns ab.

Das *Elektromyogramm* kann man bei der Erregung von Skelettmuskeln an der Körperoberfläche abgreifen. Dabei werden größere Bezirke eines Muskels oder sogar mehrere Muskeln erfasst. Wünscht man eine genauere Lokalisation, so sind Nadelelektroden erforderlich. Die Elektromyographie hat klinisch-diagnostische Bedeutung bei der Beurteilung von Nerven- und Muskelerkrankungen, sie hilft aber auch bei Bewegungsanalysen und gewährt Einblicke in die Wirkung von Training und Ermüdung.

Beim Herzen geht die Erregung vom Sinusknoten aus, d. h., dort treten bei der Kontraktion die ersten Aktionspotentiale auf, denen die der Vorhöfe und mit entsprechender Verzögerung die der gesamten Arbeitsmuskulatur der Kammern folgen. Wegen des zeitlich versetzten Auftretens der Aktionspotentiale in den verschiedenen Abschnitten des Herzens stellt das Summenpotential eine Wechselspannung dar, die charakteristisch für den Erregungsablauf im Herzen ist. Größe und Form der Wechselspannung sind zudem noch abhängig davon, an welchen Punkten der Körperoberfläche die Elektroden zur Ableitung der im Herzen entstehenden Potentialdifferenz aufgesetzt werden. Eine der möglichen Ableitungen ist das sogenannte *Extremitäten-EKG*, das von dem rechten Arm, dem linken Arm und dem linken Bein abgeleitet wird. Die Abnahme vom rechten

Arm und linken Arm heißt Ableitung 1, die vom rechten Arm und linken Bein Ableitung 2, und die vom linken Arm und linken Bein Ableitung 3. Ein normales Extremitäten-EKG zeigt Abb. 14.34a. Die P-Zacke repräsentiert die Erregung der Vorhofmuskulatur, die P-Q-Dauer bezeichnet die Zeit, die die Erregung braucht, um vom Sinusknoten bis zu den Endverzweigungen der Purkinjefasern zu gelangen. Im Zeitpunkt der R-Zacke ist das Summenpotential am größten, da jetzt die Erregung auf die Kammermuskulatur übergreift, die während der gesamten S-T-Strecke vollständig und gleichmäßig erregt ist.

Abweichungen von dieser Normalform treten immer dann auf, wenn irgendwelche Abnormitäten im Erregungsablauf eintreten. Dies ist beispielsweise bei dem in Abb. 14.34b gezeigten EKG nach Hinterwandinfarkt der Fall, bei dem größere Teile der Kammermuskulatur ausfallen. Dadurch kommt es zu einem negativen Summenpotential im Gebiet zwischen S und T, wo normalerweise das Summenpotential positiv ist (vgl. Abb. 14.34a).

Abweichungen vom normalen Verlauf der Erregung des Herzens treten vor allem dann auf, wenn der Sinusknoten als Schrittmacher ausfällt, oder die Überleitung zum Atrioventricularknoten gestört ist. Zwar übernimmt dieser dann die Schrittmacherfunktion, jedoch nur mit einer Frequenz von etwa 30 Erregungen pro Minute. Diese reduzierte Schlagfrequenz und das damit kleinere Herzminutenvolumen setzen die Leistungsfähigkeit dieser Patienten erheblich herab. Mit einem künstlichen *Herzschrittmacher* vermag ein solcher Patient ein nahezu normales Le-

ben zu führen. Ein Herzschrittmacher ist ein elektronischer Spannungsimpulsgeber, der das Herz zu normaler Schlagfrequenz anregt. Dies wird durch eine elektronische Schaltung bewirkt, die einen Schwingkreis und eine langlebige Batterie enthält und in einem flachen Gehäuse von einigen Zentimetern Durchmesser untergebracht ist. Dieses Gehäuse wird unterhalb des rechten Schlüsselbeins unter der Haut implantiert. Von ihm gehen Elektroden aus, die durch die Schultervene in den rechten Vorhof bzw. in die rechte Herzkammer eingeführt werden. Die einfachsten Schrittmacher sind starrfrequent (ca. 70 Impulse pro Min.) und arbeiten mit einer Elektrode, die am Boden der rechten Herzkammer anstößt. Der starrfrequente Schrittmacher hat den Nachteil, dass nicht auf verbliebene oder wiederkehrende Spontanaktivität bzw. auf unterschiedliche Belastung des Kreislaufes reagiert werden kann. Die Weiterentwicklung führte dazu, dass über zwei separate Elektroden im Vorhof bzw. in der Kammer Signale abgeleitet werden, die dann synchronisierend in den Zeitgeber-Schwingkreis des Schrittmachers eingreifen und eine Impulsunterdrückung bei ausreichender Spontanaktivität oder eine physiologisch optimale Impulsantwort bewirken. Die Frequenzvariabilität eines Schrittmachers ist im Hinblick auf die inzwischen auf mehr als zehn Jahre gestiegene Erwartungszeit der Schrittmacherbatterien von Bedeutung, denn wenn ein sechzigjähriger Patient mit einer Grundfrequenz von 70 Impulsen pro Min. auskommt, dann wird er normalerweise siebzig- oder achtzigjährig 80 Impulse pro Min. benötigen.

## 15.2 Mechanismen der Stromleitung

Es mag seltsam erscheinen: Wenn sich jemand auf einem Kunststoffstuhl durch Reibung elektrisch aufgeladen hat und anschließend durchs Zimmer geht, dann transportiert er elektrische Ladung und erzeugt damit einen elektrischen Strom. Der *Ladungstransport* wird zwar normalerweise durch eine

elektrische Spannung verursacht, aber wie unser Beispiel zeigt, kann Ladung auch durch mechanische Kraft bewegt werden. Über den Betrag der Stromstärke wissen wir von Gl. (14-5a) her, dass die im Zeitintervall  $\Delta t$  transportierte Ladung  $\Delta Q$  den Strom  $I = \Delta Q / \Delta t$  verursacht.

Im Folgenden wollen wir den Ladungstransport im Vakuum, in Gasen, in Elektrolyten und schließlich in Metallen und Halbleitern besprechen. Dabei sollte aber im Auge behalten werden, dass es viele Stoffe, die sog. Isolatoren gibt, in denen Stromleitung praktisch nicht auftritt.

### 15.2.1 Stromleitung im Vakuum

Im Vakuum können sich geladene Teilchen (Elektronen, Protonen, Ionen usw.) frei bewegen und verursachen so einen elektrischen Strom. Durch elektrische oder magnetische Felder kann man sie beschleunigen, ablenken oder bündeln. Technisch wird diese Möglichkeit vielfältig genutzt, so z. B. in der Elektronenröhre, der Oszillographenröhre, der Röntgenröhre und beim Elektronenmikroskop. Bei all diesen Geräten sind die Ladungsträger Elektronen. Es gibt aber auch technische Geräte, in denen Ströme durch andere Teilchen erzeugt werden. In der Elementarteilchenphysik untersucht man in den Vakuumkammern von Beschleunigern alle möglichen durch Stoßprozesse erzeugten Objekte, und in Massenspektrometern kann man Stoffe nach ihrer chemischen Zusammensetzung analysieren, indem man sie in Ionen aufspaltet und diese im Vakuum durch elektrische oder magnetische Felder ablenkt. Die Analyse beruht darauf, dass die Ablenkung von Ladung und Masse und damit von der chemischen Natur der Teilchen abhängt.

Im Folgenden wollen wir die Erzeugung und Beschleunigung von Elektronenstrahlen im Vakuum am Beispiel der *Elektronenröhre* erläutern. Sie besteht (Abb. 15.3) im Wesentlichen aus zwei Teilen, nämlich der Quelle der Elektronen und der Elektrodenanordnung zur Beschleunigung und zum Wiedereinfang. Betrachten wir zunächst die Elektronenquelle etwas genauer. Sie beruht auf dem Prinzip der *Glühemission*. Um aus dem geheizten Metallfaden der *Glühkathode*  $K$  Leitungselektronen vom Metall abzulösen, muss Arbeit – die sog. *Ablösearbeit* – verrichtet werden. Selbst bei Weißglut ist die *mittlere*

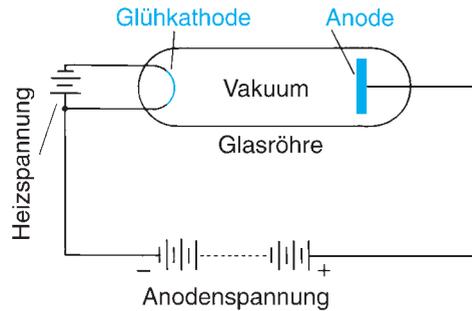


Abb. 15.3 Elektronenröhre (Diode).

kinetische Energie der Leitungselektronen zu niedrig, um diese Arbeit aufzubringen. Allerdings haben – ähnlich den Atomen in einem Gas – nicht alle Elektronen exakt dieselbe Energie; vielmehr weisen sie bezüglich ihrer thermischen Bewegung eine Geschwindigkeitsverteilung wie in Abb. 10.2 auf. Auch bei Zimmertemperatur gibt es also einige wenige Elektronen, deren kinetische Energie ausreicht, um die Ablösearbeit zu verrichten. Es sind die schnellsten Elektronen, die beim Anlauf gegen die Oberfläche die Anziehungskräfte der positiven Ionen überwinden können. Ihre Zahl wächst, wenn das Metall aufgeheizt wird, denn dadurch verschiebt sich die Verteilungskurve der Abb. 10.2 insgesamt zu höheren Geschwindigkeiten. Dieser Vorgang der Glühemission ist vergleichbar mit dem Verdunsten von Molekülen einer Flüssigkeit, deren Zahl ebenfalls, wie wir in Kap. 13.3.7 gesehen haben, mit der Temperatur wächst.

Die emittierten Elektronen können durch weitere Elektroden beschleunigt und je nach Zweck der Röhre gebündelt werden. In der *Diode* steht der *Kathode* die (positive) *Anode* gegenüber. Liegt zwischen beiden die Spannung  $U_A = x$  Volt, dann wird ein aus der Kathodenoberfläche (mit der Geschwindigkeit  $v_0 \sim 0$ ) austretendes Elektron zur Anode hin beschleunigt und erreicht dort die kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = mv^2/2 = x$  eV (siehe Kap. 14.3.1). Bei Elektronenröhren beträgt die Anodenspannung etwa  $10^2$  V, in Oszillographenröhren ca. 3000 V, in Schwarz-Weiß-Fernsehröhren ca. 10000 bis 15000 V, in Farbfernsehröhren ca. 20000 bis 25000 V und

in Röntgen-Röhren ca.  $10^4$  bis  $10^5$  V. Durch die Bewegung der Elektronen entsteht ein Strom, der *Anodenstrom*.

Prallen die Elektronen auf die Anode, so wird ihre kinetische Energie im Wesentlichen in Wärme umgesetzt, d. h., die Anode wird aufgeheizt. Ein geringer Teil trägt zur elektronischen Anregung des Anodenmaterials bei, was zur Emission von Röntgen-Strahlen führt (Kap. 21.3.1). Bei der Oszillographen- und der Fernsehröhre (Kap. 16) benötigt man aber den Elektronenstrahl außerhalb des Elektrodensystems, damit er auf den Bildschirm auftreffen und diesen zum Leuchten bringen kann. Dazu durchbohrt man die Anode, so dass der Großteil der beschleunigten Elektronen durch die Öffnung fliegt. In der Elektronenstrahlröhre des Oszillographen durchqueren sie dann Kondensatoren, werden in deren elektrischen Feldern abgelenkt und treffen schließlich auf den Leuchtschirm (Kap. 16.1.4).

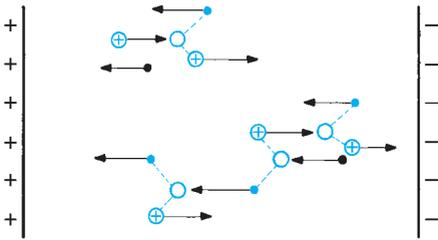
**Diode und Triode** Wird an die Elektronenröhre zwischen Kathode und Anode eine Wechselspannung angelegt, dann fließt ein Anodenstrom, so lange die Kathode gegenüber der Anode auf negativem Potential liegt. Bei Umpolung, d. h. wenn die Spannung zwischen Kathode und Anode ihr Vorzeichen ändert, ist der Anodenstrom Null, da dann die emittierten Elektronen durch das elektrische Feld zur Kathode zurückgetrieben werden. Die Elektronenröhre wirkt also als *Gleichrichter* (Röhrendiode) mit einer Strom-Spannungs-Kennlinie ähnlich der einer Halbleiterdiode (Abb. 15.10 und 15.11).

Die Triode ist eine Diode mit zusätzlicher Steuerelektrode. Damit ist gemeint, dass man den Strom zwischen Kathode und Anode (den Anodenstrom) durch diese Elektrode in seiner Stärke steuern kann, ohne große elektrische Leistung dafür zu verbrauchen. Sie besteht aus einem Metallnetz (Gitter) zwischen Kathode und Anode und wird negativ gegenüber der Kathode aufgeladen. Die von der Kathode kommenden Elektronen werden daher abgestoßen und nur ein Teil kann durch die Maschen des Netzes hindurch weiter zur Anode fliegen. Dieser Anteil hängt von der Größe der negativen Spannung am Gitter ab: Die Gitterspannung steuert also den Anodenstrom. Schwankungen der Gitterspannung werden so auf den Anodenstrom übertragen. Bei alten Rundfunkempfängern verstärkte man mit der Triode die schwachen Spannungen, die an der Empfangsantenne auftreten, indem man sie an das Steuergitter anlegte. Der Anodenstrom schwankt im Takt der Signale der elektromagnetischen Welle und treibt nach weiterer Verstärkung den Lautsprecher. Die

Triode dient also als *Verstärkeröhre* für elektrische Signale. Heutzutage verwendet man in Radios den Transistor (Abb. 15.12) als Verstärker. Die Wirkungsweise der Verstärkung mag auch folgendes Beispiel veranschaulichen: Die Wassermühlen früherer Zeiten wurden vom Mühlbach angetrieben. Die Stärke des Wasserstromes wurde gesteuert, indem man die Durchflussöffnung des Wehres im Bach veränderte. Dazu war nur geringer Aufwand nötig, er reichte aber aus, den ganzen Mühlenbetrieb zu beeinflussen. Analog dazu steuert man in der Triode den Durchfluss von Elektronen durch das Gitter mittels der Gitterspannung.

## 15.2.2 Stromleitung in Gasen

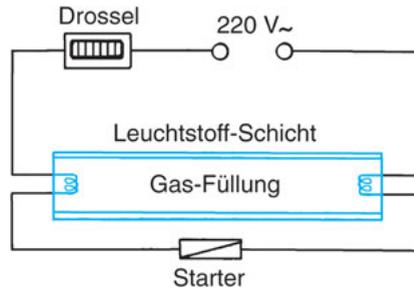
Um die Stromleitung in Gasen zu untersuchen, füllen wir eine Elektronenröhre mit Gas und betrachten die Wechselwirkung der zwischen Kathode und Anode beschleunigten Ladungsträger mit den Gasmolekülen. Wir können auch auf die Heizung der Kathode verzichten. Dann ist zwar der Strom wesentlich geringer, aber doch nicht ganz Null, da immer einige Gasmoleküle ionisiert sind, die im elektrischen Feld zwischen Kathode und Anode beschleunigt werden und beim Aufprall auf sie Elektronen herausschlagen. Im Gegensatz zur Stromleitung im Vakuum können nun die Elektronen nicht die ganze Strecke zwischen den Elektroden unbehindert durchfliegen, sondern werden nach einer von der Dichte des Gases abhängigen Strecke, der *freien Weglänge*, auf Gasmoleküle stoßen und beim Zusammenstoß ihre Bewegungsenergie teilweise oder ganz an diese abgeben. Bis zum nächsten Zusammenstoß kann ein Elektron dann erneut im elektrischen Feld beschleunigt werden. Der Zuwachs an kinetischer Energie zwischen 2 Stößen,  $\Delta E_{\text{kin}}$ , ist bestimmt durch die Potentialdifferenz (Beschleunigungsspannung), die über die Strecke einer freien Weglänge herrscht;  $\Delta E_{\text{kin}}$  lässt sich also dadurch vergrößern, dass man entweder die Gesamtspannung zwischen den Elektroden erhöht, oder aber die Gasdichte verringert und so die freie Weglänge vergrößert. Überschreitet die Potentialdifferenz längs der freien Weglänge einen bestimmten Grenzwert, so geschieht etwas Merkwürdiges: Plötzlich steigt der Strom rapide an. Das kommt davon, dass nun die kinetische Ener-



**Abb. 15.4** Lawinenartige Ladungsträgererzeugung durch Stoßionisation. (○ neutrales Molekül; ● Elektron; ⊕ positives Ion.)

gie eines Elektrons ausreicht, beim Aufprall auf ein neutrales Gasmolekül dieses zu ionisieren, indem z. B. ein Elektron aus der Elektronenhülle herausgeschlagen wird. Dazu muss natürlich die beim Stoß übertragene Energie größer sein als die Bindungsenergie (Ionisationsenergie) des Elektrons im Molekül. Durch diesen Vorgang der *Stoßionisation* werden aus dem primären Ladungsträger insgesamt drei Ladungsträger (Abb. 15.4), welche dann wieder im elektrischen Feld beschleunigt werden, bis sie 1. entweder im Gasraum oder an der Wand der Röhre mit anderen Ladungsträgern zusammentreffen und sich gegenseitig neutralisieren (*Rekombination*), oder 2. auf die Elektroden aufprallen und dort zusätzlich Ladungsträger heraus schlagen, oder 3. durch Stoß zusätzlich neutrale Gasmoleküle ionisieren, die dann wieder beschleunigt werden, usw. In kurzer Zeit wächst so die Zahl der Ladungsträger lawinenartig an und damit auch der Strom zwischen Kathode und Anode. Dieses Phänomen bezeichnen wir als *Gasentladung*, wobei *Entladung* andeutet, dass sich durch diesen Vorgang beispielsweise die Platten eines aufgeladenen Kondensators entladen können, ohne durch einen Metalldraht miteinander verbunden zu sein.

Bei der *unselbstständigen Gasentladung* nimmt diese zusätzliche Ladungsträgererzeugung mit Abnahme der Beschleunigungsspannung wieder ab, da dann mehr Ladungsträger rekombinieren als durch Stoßionisation neu erzeugt werden. Übersteigt die Beschleunigungsspannung einen bestimmten Wert, so entsteht die *selbstständige Gasentladung*, bei der jeder Ladungsträger auf seinem Weg zu



**Abb. 15.5** Leuchtstoffröhre mit Drossel zur Strombegrenzung und mit Starter zur primären Elektronenauslösung. (Beim Einschalten der 230 V-Netzspannung fließt zunächst kein Strom durch die Röhre, sondern durch den Starter und erwärmt zugleich die Elektroden der Röhre. Nach einigen Sekunden unterbricht ein Schalter im Starter den Stromfluss, wodurch in der Drossel durch Induktion ein Spannungstoß entsteht, der die Leuchtstoffröhre zündet.)

seiner Elektrode so viele neue Ladungsträger schafft, dass auch nach Abnahme der Spannung der Strom nicht mehr abbricht; dann entstehen mehr Ladungsträger als durch Rekombination verschwinden. In kurzer Zeit wächst dadurch der Strom zwischen Kathode und Anode so stark an, dass die an die beiden Elektroden angeschlossene Spannungsquelle praktisch kurzgeschlossen wird. Dies lässt sich nur vermeiden, indem man zur Strombegrenzung entweder einen Ohm'schen Widerstand oder – bei Anlegen einer Wechselspannung an die Elektroden wie in Abb. 15.5 – einen induktiven Widerstand (*Drossel*) verwendet.

Gasentladungen sind mit der Erzeugung von Licht verbunden, das bei den Stoßprozessen durch elektronische Anregung (Kap. 17.5) und bei der Rekombination zuvor gebildeter Ionen entsteht. Gasentladungsröhren werden deshalb technisch als Lichtquellen verwendet. Bei stromschwachen Gasentladungen ist die Lichtausbeute geringer (*Glimmentladung*) als bei stromstarken (*Bogenentladung*). In der *Kohlebogenlampe* oder beim Blitz *brennt* eine stromstarke Gasentladung bei Atmosphärendruck. *Hg-, Na- und Xe-Dampf lampen* sind Hochleistungslichtquellen, die durch Gasentladung unter teilweise hohen Drucken des Füllgases (ca.  $10^2$  bar) betrieben werden. *Leuchtstoffröhren* hingegen (Abb. 15.5) arbei-

ten bei niedrigem Gasdruck (ca.  $10^{-2}$  mbar); 60% der durch Hg, das als Gasfüllung verwendet wird, entstehenden Strahlung liegt im UV; sie wird durch Fluoreszenzstoffe an der Röhrenwand in sichtbares Licht umgewandelt.

Als weitere Anwendungen der Gasentladung werden wir in Kap. 21.2.7 die Ionisationskammer, das Proportional- und das Geiger-Müller-Zählrohr zum Nachweis von ionisierender Strahlung kennenlernen.

### 15.2.3 Stromleitung in Elektrolyten

Diesen Leitungsmechanismus haben wir bereits in Kap. 14.4 kurz besprochen. Wir wollen hier noch einmal ausführlicher darauf eingehen. Tauchen wir zwei an eine Spannungsquelle angeschlossene und mit einem Strommessgerät verbundene Elektroden in mehrfach destilliertes und dadurch extrem reines Wasser, so sehen wir: Es fließt fast kein Strom. Wasser ist ein sehr schlechter Leiter (vgl. Tab. 14.2). Geben wir aber etwas Salz, Säure oder Base in das Wasser, das damit zu einem *Elektrolyten* wird, so steigt der Stromfluss sprunghaft an.

Säuren, Basen und Salze werden in Wasser hydratisiert (Kap. 13.3.4) und dadurch in Paare entgegengesetzt geladener Ionen aufgespalten (*elektrolytische Dissoziation*, z. B.  $\text{NaCl} \rightarrow \text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ ), und diese bilden die Ladungsträger für den Stromtransport im Elektrolyten.

Der *Dissoziationsgrad* eines Elektrolyten ist definiert durch:

Dissoziationsgrad

$$= \frac{\text{Zahl der in Ionen gespaltenen Moleküle}}{\text{Zahl der gelösten Moleküle}}.$$

Bei vollständiger Dissoziation hat der Elektrolyt einen Dissoziationsgrad von nahezu 1 (*starker Elektrolyt*), bei unvollständiger Dissoziation ist er wesentlich kleiner als 1 (*schwacher Elektrolyt*). In schwachen Elektrolyten nimmt der Dissoziationsgrad mit wachsender Verdünnung zu (*Ostwald'sches Verdünnungsgesetz*).

Der Stromtransport in einem einfachen Elektrolyten mit zwei Ionenarten (z. B.  $\text{Na}^+$  und  $\text{Cl}^-$ ) setzt sich stets aus zwei Teilströmen zusammen, nämlich dem Strom der positiven Kationen ( $\text{Na}^+$ ) zur Kathode und dem Strom der negativen Anionen ( $\text{Cl}^-$ ) zur Anode. Beide Ionenarten können verschiedene *Beweglichkeiten*  $b^+$  bzw.  $b^-$  besitzen (Beweglichkeit = Geschwindigkeit des Ions/Feldstärke  $E$ ). Ihre Konzentrationen im Elektrolyten  $n^+$  bzw.  $n^-$  sind gleich, wenn der Elektrolyt nach außen elektrisch neutral ist. Die gesamte *Stromdichte* ( $j = I/A$ ) lässt sich dann schreiben:

$$j = (n^+ b^+ e^+ + n^- b^- e^-) E. \quad (15-5)$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für Elektrolyte, sondern für die Ladungsträger aller Arten von Leitern.

Wegen ihrer gegenseitigen elektrostatischen Anziehung sind die Ionen von Wolken entgegengesetzt geladener Ionen bzw. von elektrisch polaren Lösungsmittelmolekülen (z. B.  $\text{H}_2\text{O}$ ) umgeben, was ihre Beweglichkeit im Lösungsmittel unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes drastisch einschränkt. Aus diesem Grund ist die Leitfähigkeit von Elektrolyten ca.  $10^4$ mal kleiner als die von Metallen. Je höher die Konzentration im Elektrolyten ist, desto leichter können sich diese Ionenwolken aufbauen. Mit abnehmender Konzentration lässt deren hemmender Einfluss immer mehr nach, was eine Zunahme der Beweglichkeit der Ionen zur Folge hat. Dies gilt insbesondere für starke Elektrolyte (Dissoziationsgrad  $\approx 1$ ). Der Ordnungszustand, d. h., die Größe und Ausdehnung der Ionenwolke ist um so geringer, je höher die Temperatur ist. Aus diesem Grunde nimmt die Leitfähigkeit der Elektrolyte im Gegensatz zu der von Metallen mit wachsender Temperatur zu (vgl. Kap. 14.5.2 und Tab. 14.2). Bei schwachen Elektrolyten kommt hinzu, dass sich auch der Dissoziationsgrad mit der Temperatur verändert.

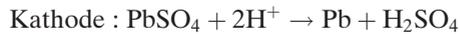
Aufgrund der gegenüber Gasen wesentlich höheren Dichte von Flüssigkeiten ist die mittlere freie Weglänge in Elektrolyten sehr gering, und die Ladungsträger können zwischen

den Stößen nur wenig kinetische Energie durch das Feld aufnehmen. Energien, wie die, welche zur Gasentladung führen, werden daher nicht erreicht.

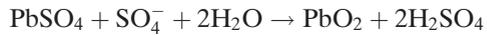
**Polarisationserscheinungen** Der im Elektrolyten mit elektrischem Strom verbundene Materietransport führt normalerweise zur Abscheidung der Ionen an den Elektroden oder zu sekundären chemischen Prozessen, wodurch die elektrolytischen Vorgänge in ihrer Vielfalt sehr kompliziert werden. Tauchen zum Beispiel zwei Elektroden *gleichen* Materials in einen Elektrolyten, so sollte diese Anordnung, nach dem was wir bis jetzt über Spannungsreihe und galvanische Elemente (Kap. 14.3.2) gelernt haben, kein galvanisches Element darstellen und als Spannungsquelle untauglich sein. Durch eine Vorbehandlung der Elektroden kann sich trotzdem eine sogenannte *Polarisationsspannung* zwischen den beiden Elektroden aufbauen. Dies können wir beobachten, wenn wir z. B. zwei Platinelektroden in eine verdünnte Säure tauchen und sie über ein Amperemeter mit den Polen einer Gleichspannungsquelle ( $U_0$  ca. 1 V) verbinden. Dann geht schon kurze Zeit nach dem Anschalten von  $U_0$  der durch den Stromkreis *Elektrode 1 – Spannungsquelle – Amperemeter – Elektrode 2 – Elektrolyt* fließende Strom erheblich zurück. Der Grund hierfür ist, dass sich an der Platin-Kathode gasförmiges  $H_2$  und an der Platin-Anode gasförmiges  $O_2$  aus den Dissoziationsprodukten von  $H_2O$  abscheidet. Die Elektroden beladen sich zunehmend mit diesen Gasen, und dadurch entsteht praktisch ein galvanisches Element mit Wasserstoff- und Sauerstoff-Elektrode. Die Spannung dieses Elementes beträgt 1 V; sie ist der von außen angelegten Spannung  $U_0$  entgegengerichtet, wodurch es zum Abfall der Stromstärke kommt. Diese elektrolytische Polarisation der Elektroden tritt bei allen galvanischen Elementen auf, bei denen Elektrolyseprodukte an den Elektroden abgeschieden werden. Sie lässt sich dadurch vermeiden, dass die Elektrolyseprodukte durch chemische Reaktionen beseitigt werden.  $H_2$  kann beispielsweise durch oxidie-

rende Substanzen wie Braunstein abgefangen werden, wobei dann  $H_2O$  entsteht.

Es gibt galvanische Elemente, sog. *Sekundärelemente*, bei denen die Polarisationserscheinungen gezielt zur Spannungserzeugung verwendet werden. Wir wollen dies am Beispiel des *Bleiakkumulators* (der *Autobatterie*) näher erläutern. Er besteht aus zwei Bleiplatten, die in Schwefelsäure eintauchen und sich deswegen mit einer Schicht von  $PbSO_4$  überziehen. Schalten wir ihn nun an eine äußere Spannungsquelle, dann fließt ein Strom, und es kommt an den Elektroden zu den folgenden chemischen Reaktionen:



Anode :



Diesen Vorgang nennt man *Aufladen der Batterie*. Die Reaktionsprodukte  $Pb$  und  $PbO_2$ , bilden in der verdünnten  $H_2SO_4$  ein galvanisches Element; es liefert die Spannung 2,1 V. Von dem aufgeladenen Akkumulator kann solange elektrische Energie entnommen werden, bis sich  $Pb$  und  $PbO_2$  wieder vollständig in  $PbSO_4$  zurückgebildet haben. Dies geschieht, indem die obigen Reaktionen in umgekehrter Richtung ablaufen. Normale Autobatterien können z. B. einen Strom von 1 A über 70 und mehr Stunden aufrechterhalten.

Als wichtige Konsequenz der beschriebenen Polarisation ergibt sich, dass die Leitfähigkeit  $\sigma$  eines Elektrolyten nicht mittels Gleichspannung bestimmt werden darf, da wegen der möglicherweise an den Messelektroden auftretenden Polarisationsspannungen die effektive Spannung kleiner als die angelegte ist und sogar Null sein kann, wodurch fälschlicherweise auf eine zu kleine Leitfähigkeit geschlossen wird. Verwenden wir zur Bestimmung der Leitfähigkeit dagegen Wechselspannung, so kommt es nicht zu diesen Störeffekten, weil der Aufbau der Polarisationsspannung Zeiten benötigt, die groß sind gegen die Zeit, in der die Wechselspannung ihr Vorzeichen umkehrt.

**Faraday'sche Gesetze** Da Ionen nur ganzzahlige Vielfache der Elementarladung tragen können, sei es als Defektladung (Kationen) oder Überschussladung (Anionen), besteht ein fester Zusammenhang zwischen

der beim Stromfluss transportierten Ladung und der transportierten Stoffmenge. Trägt ein Ion als Überschussladung eine Elementarladung, so nennen wir es *einwertig*. Allgemein gibt die *Wertigkeit* die Zahl der Überschussladungen (unabhängig vom Ladungsvorzeichen) an. Fließt ein Strom durch eine  $\text{AgNO}_3$ -Lösung, in die zwei  $\text{Ag}$ -Elektroden eintauchen, so gelangen  $\text{Ag}^+$ -Ionen zur Kathode und werden dort abgeschieden, indem sie aus der Elektrode ein Elektron aufnehmen. Zugleich wird durch den  $\text{NO}_3^-$ -Rest an der Anode ein  $\text{Ag}^+$  abgelöst, so dass die Konzentration des Elektrolyten unverändert bleibt. Insgesamt ist dadurch eine Elementarladung von der Anode zur Kathode gelangt und zugleich ein  $\text{Ag}^+$ -Ion von der Anode zur Kathode. Man kann nun einfach nach einiger Zeit (sagen wir, nach  $t$  Sekunden) eine der Elektroden wiegen und aus der Massenänderung die gesamte transportierte Ladung  $Q$  und damit den Strom  $I = Q/t$  bestimmen. Die Gesetze, die den Zusammenhang zwischen transportierter Ladung und Masse beschreiben, nennt man die *Faraday'schen Gesetze*:

1. Für die elektrolytische Abscheidung eines Stoffes an einer Elektrode benötigt man pro *Mol* die Gesamtladung  $Q/\text{mol} = zN_Ae$ , wobei die *Avogadro'sche* (oder *Loschmidt'sche*) *Konstante*  $N_A$  die Zahl der Ionen im Mol,  $e$  die Elementarladung und  $z$  die Wertigkeit des Ions angibt. Die Konstante  $N_Ae$  wird *Faraday-Konstante*  $F$  genannt. In SI-Einheiten hat sie den Wert  $F = 96484 \text{ C mol}^{-1}$ .

2. Bezeichnen wir die Masse eines Ions mit  $m_I$ , so wird mit der Ladungsmenge von  $96484 \text{ C}$  bei einwertigen Ionen die *molare Masse*  $N_A m_I$  transportiert. Bei mehrwertigen Ionen tritt an ihre Stelle das *Grammäquivalent* (molare Masse/Wertigkeit).

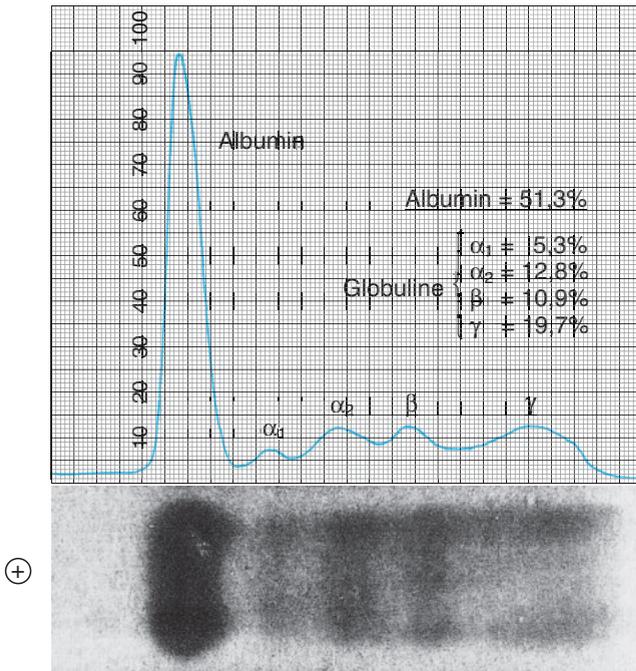
**Elektrophorese** Nicht nur als Ionen gelöste Stoffe, sondern auch kolloidale Teilchen führen zu elektrischer Leitfähigkeit von Lösungen. Diesen Ladungstransport nennt man *Elektrophorese*. (Bezüglich kolloidaler Systeme s. Kap. 13.3.2.)

Kolloidal gelöste Teilchen würden spontan zusammenklumpen, (da dies nach dem in

Kap. 5.1 über die chemische Bindung Gesagten energetisch günstig wäre), wenn sie nicht durch eine *Doppelschicht* von elektrischen Ladungen auf ihrer Oberfläche und in der angrenzenden Flüssigkeit elektrisch geladen wären und sich dadurch gegenseitig abstoßen würden. Elektrische Aufladung führt zur Wanderung der kolloidalen Teilchen und damit zu einem Strom, wenn man zwei Elektroden einer Spannungsquelle in die Lösung eintaucht. Die Elektrophorese hat praktische Bedeutung, z. B. bei der Lackierung von Autokarosserien oder zur Trennung von Proteinen, gewonnen. Proteinmoleküle zählt man aufgrund ihrer Größe zu den kolloidalen Teilchen. Sie können sowohl positiv als auch negativ geladen sein. Welche Ladung nun ein Proteinmolekül hat, hängt neben den Moleküleigenschaften sehr stark vom pH-Wert der umgebenden Flüssigkeit ab. Durch Elektrophorese kann man beispielsweise die im menschlichen Serum enthaltenen Proteine trennen. Um eindeutige Versuchsbedingungen zu schaffen, führt man die Trennung im Allgemeinen in Pufferlösungen mit einem  $\text{pH} > 8$  durch. Bei diesem pH-Wert sind alle Proteine negativ geladen, wandern also zur Anode. Die Trennung kann entweder in einer Küvette oder in einem mit Pufferlösung getränkten Filterpapier-Streifen durchgeführt werden. Das Filterpapier-Verfahren ist technisch wesentlich einfacher auszuwerten.

Unter dem Einfluss des elektrischen Feldes wandern die Teilchen mit einer konstanten mittleren Geschwindigkeit, die ihrer Ladung direkt und ihrer Masse umgekehrt proportional ist. Proteinmoleküle mit unterschiedlichem Verhältnis von Ladung zu Masse können demnach durch Elektrophorese voneinander getrennt werden, wenn die Wanderungstrecke zwischen den Elektroden genügend lang ist.

Die Abb. 15.6 zeigt die nach der elektrophoretischen Trennung auf einem Filterpapierstreifen mit Amidoschwarz angefärbten Proteine und darüber die photometrische Auswertung der einzelnen Fraktionen. Das Verhältnis der einzelnen Fraktionen zueinander gibt bei verschiedenen Krankheitsbildern wichtige diagnostische Hinweise.



**Abb. 15.6** Elektrophoretische Trennung von Serumproteinen, die mit Amidoschwarz eingefärbt wurden.

**Stromleitung im menschlichen Organismus; Gefahren bei Unfällen** Da der menschliche Organismus zu über 70% aus Wasser besteht, in dem zahlreiche Ionen vorhanden sind, so dass global etwa eine  $\frac{1}{3}$  molare Lösung vorliegt, stellt er für den elektrischen Strom einen relativ guten elektrolytischen Leiter dar. Die Größe des Stromflusses wird bestimmt durch den Betrag der angelegten Spannung  $U$  und den Widerstand  $R$  derjenigen Körperteile, durch die der Strom fließt:  $I = U/R$ .  $R$  beträgt beispielsweise zwischen den beiden Händen etwa  $800 \Omega$ . Hinzu kommt der Übergangswiderstand zwischen der Haut und den Elektroden, der praktisch verschwindet, wenn die Haut feucht ist, aber auch sehr hohe Werte annehmen kann, wenn die Haut trocken ist. Damit es überhaupt zu einem Stromfluss durch den Organismus kommt, ist es zunächst notwendig, dass der Körper mit *beiden* Polen einer Spannungsquelle in Berührung kommt. Da unser elektrisches Leitungsnetz so geschaltet ist, dass ein Pol mit der Erde verbunden (*geerdet*) wird, fließt bereits Strom, wenn man nur den spannungsführenden Pol berührt und, z. B. in einem

feuchten Raum, mit den Füßen eine gute Erdverbindung hat. Kein Strom fließt dagegen, wenn sich zwischen der *Erde* und dem Körper ein guter Isolator befindet, also wenn man z. B. auf trockenem Holz steht.

Wie in jedem elektrischen Leiter wird auch im Körper durch den Stromfluss Joule'sche Wärme entwickelt. Diese wird jedoch erst dann gefährlich, wenn sie lokal so groß wird, dass es zu Verbrennungen kommt. Dazu sind relativ große Ströme nötig, und die Verbrennungen treten dann meist nur an den Ein- und Austrittsstellen des Stromes an der Haut auf, da hier wegen des Übergangswiderstandes die Joule'sche Wärme am größten ist. Wesentlich gefährlicher sind die Wirkungen des elektrischen Stromes auf die erregbaren Strukturen, insbesondere auf den Herzmuskel und die Nervenfasern. Hier muss nun zwischen Gleich- und Wechselstrom verschiedener Frequenzen unterschieden werden. Der Stromfluss kann, wie in Kap. 15.1 beschrieben, zur Depolarisierung von erregbaren Membranen und damit zur Ausbildung von Aktionspotentialen führen. Dadurch werden Muskelkontraktionen, auch solche des Her-

zens, eingeleitet. Mit Gleichstrom tritt diese Depolarisation nur beim Ein- und Ausschalten des Stromes auf, aber bei Wechselstrom wiederholt sich die Depolarisation in jeder Periode. Dies führt dann zu Verkrampfungen der Muskeln und zum *Herzflimmern* (kurzes, unregelmäßiges und ineffektives Kontrahieren der Herzkammern), der häufigsten Todesursache bei elektrischen Unfällen. Da jedoch die Auslösung des Aktionspotentials an Stofftransport ( $\text{Na}^+$ -Einstrom) gebunden ist, reicht bei hochfrequentem Wechselstrom die Zeit der Depolarisation nicht aus, um ein Aktionspotential auszulösen. Daher kann man hochfrequente Ströme von nicht zu großer Stärke völlig gefahrlos durch den Organismus leiten. Die größte Gefahr besteht demnach bei den niederfrequenten Wechselströmen, zu denen auch unser technischer Wechselstrom von 50 Hz gehört. Es waren wirtschaftliche Gründe, die zur Wahl einer Wechselspannung für das allgemeine Netz führten, welche für den menschlichen Organismus bei unvorsichtiger Handhabung eine Gefahr darstellt. Eine Verringerung der Spannung würde wesentlich größere Leitungsquerschnitte, eine Herabsetzung der Frequenz wesentlich größere Transformatoren und eine Erhöhung der Frequenz wesentlich größere Leitungsverluste bedeuten. Die Verwendung von Gleichstrom schließlich würde große Probleme bei der Umwandlung von Hochspannung in Niederspannung mit sich bringen.

Für das gefährliche Herzflimmern ist nicht nur die Größe des durch den Körper fließenden Stromes, sondern auch die Dauer des *Elektroschocks* von Bedeutung. Als Faustregel wurde aus Tierexperimenten für 50 Hz-Wechselstrom eine Beziehung zwischen Schockdauer  $\Delta t$  und Maximalstrom  $I_{\max}$ , bei dem Herzflimmern gerade noch vermieden wird, abgeleitet:  $I_{\max} = 0,116 (\Delta t)^{-1/2}$  in SI-Einheiten. Hieraus folgt, dass bei einer Schockdauer von 1 s ein 50 Hz-Wechselstrom von 116 mA noch ungefährlich ist, aber bei einer Schockdauer von 4 s nur noch 58 mA verträglich sind. Der Elektroschock, bei dem die Körperoberfläche elektrischen Kontakt bekommt (Makroschock), unterscheidet sich wesentlich

vom *Mikroschock*, bei dem Stromkontakt direkt mit dem Körperinnern besteht. Beim Mikroschock muss der Strom nicht erst den großen Hautwiderstand (je nach Feuchtigkeit bis  $10^6 \Omega$ ) überwinden, sondern kann den Gefäßen folgen und passiert direkt das Herz. Hierbei genügen ca.  $10^4$ mal kleinere Spannungen als beim Makroschock, um Herzflimmern zu verursachen. Diese gefährliche Situation kann beispielsweise im Operationssaal bei der Arbeit des Arztes am offenen Patienten auftreten oder in der Intensivstation, wenn einem Patienten ein Herzkatheter (aus Metall) gesetzt wurde. Jeder, der entsprechende Arbeit verrichtet, muss sich darüber im Klaren sein, dass derart kleine Spannungen bereits durch induktive Kopplung eines Metallgehäuses oder irgendeiner Leiterschleife an ein unter Spannung stehendes Kabel auftreten. Diese Kopplung erfolgt *ohne* direkte Berührung im Prinzip wie zwischen den Spulen eines Transformators. Deshalb muss im Krankenhaus und speziell im Operationssaal peinlich auf intakte Erdung von Instrumenten und elektrischen Geräten geachtet werden, weil dadurch elektrische Aufladungen und damit Ströme unterbunden werden.

**Medizinische Anwendung** Diejenigen Wirkungen des elektrischen Stromes, die für den Menschen gefährlich sind, können auch zu medizinischen Anwendungen herangezogen werden. Gleichstrom und niederfrequenter Wechselstrom werden bei verschiedenen Nerven- und Muskelerkrankungen zur Erregung benutzt. Hierbei arbeitet man meist mit zwei Elektroden von sehr unterschiedlicher Fläche. In unmittelbarer Nähe des zu erregenden Muskels setzt man die sog. *differente* Elektrode an, während in einiger Entfernung die großflächige *indifferente* Elektrode mit der Haut in Berührung gebracht wird. Dadurch erreicht man, dass unter der differentiellen Elektrode eine große Stromdichte, unter der indifferenten Elektrode aber nur eine kleine Stromdichte entsteht. Die hohe Stromdichte reicht aus, um eine Depolarisation der erregbaren Zellmembranen zu bewirken, an der anderen Elektrode jedoch tritt keinerlei

physiologische Wirkung ein. Während bei Verwendung von Gleichstrom eine Reizung nur beim Ein- und Ausschaltvorgang (sog. *Galvani'sche Reizung*) ausgelöst wird, tritt diese bei Wechselstrom (sog. *Faraday'sche Reizung*) rhythmisch mit der verwendeten Frequenz auf.

Hochfrequenter Strom, der nicht zur Erregung von Nervenfasern führt, wird in der *Diathermie* zur Erwärmung von Körper- oder Extremitätenabschnitten verwendet. Die betreffenden Abschnitte werden normalerweise zwischen großflächige Elektroden gebracht. Mit diesem Verfahren werden auch tieferliegende Organbereiche durch die Joule'sche Stromwärme erwärmt, was durch Wärmestrahlung von außen nicht möglich ist.

Eine weitere wichtige Anwendung hochfrequenter Ströme ist das *elektrische Schneiden*. Benutzt wird eine großflächige Elektrode, die sich meist unter dem Gesäß des Patienten befindet, und eine sehr kleinflächige Elektrode in Form einer Nadel. Die von der großflächigen Elektrode ausgehenden Feldlinien werden an der Nadel gesammelt, so dass dort die Feldliniendichte sehr groß wird. Dadurch wird die Stromdichte unter der Nadel sehr groß, und es kommt dort zu einer beträchtlichen Wärmeentwicklung und zum Durchtrennen des Gewebes. Ein wesentlicher Vorteil gegenüber dem mechanischen Schneiden ist, dass kleinere getroffene Blutgefäße durch Koagulation verschlossen werden.

Herzkammerflimmern tritt nicht nur beim Elektroschock (siehe oben), sondern auch bei Herzinfarkt auf. Gelingt es nicht, das Herz zu defibrillieren, dann setzt innerhalb weniger Minuten Herzstillstand ein. Als Therapiegerät wird der *Defibrillator* verwendet, das sind zwei großflächige Elektroden (mit ca. 7,5 cm Durchmesser), die auf ihrer Unterseite mit elektrisch leitender Paste überzogen sind, um beim Aufsetzen auf die Haut oberhalb bzw. unterhalb des Herzes einen geringen elektrischen Übergangswiderstand zu gewährleisten. Beim Entladen eines Kondensators fließt innerhalb einiger Millisekunden über die beiden Elektroden ein Strom von ca. 20 A durchs Herz. Dabei werden alle Muskelfasern des

Herzens gleichzeitig kontrahiert, und sie erholen sich dann auch zur gleichen Zeit wieder, wodurch das Herz seinen normalen Rhythmus aufnehmen kann.

### 15.2.4 Stromleitung in Festkörpern

Die elektrische Leitfähigkeit in Festkörpern erstreckt sich über den astronomisch anmutenden Zahlenbereich von mehr als 40 Zehnerpotenzen (Tab. 15.1). In manchen Stoffen sinkt der spezifische Widerstand im supraleitenden Zustand bei tiefen Temperaturen sogar auf unmessbar niedrige Werte ab, während andererseits Stoffe wie Glas oder Plastik wegen ihrer extrem geringen Leitfähigkeit zur Isolation elektrischer Leitungen verwendet werden. Nach ihrer Leitfähigkeit lassen sich Festkörper einteilen in Supraleiter, Leiter, Halbleiter und Nichtleiter (Isolatoren), wie in Tab. 15.1 angedeutet. Mit Ausnahme der Supraleiter liegt in allen Stoffen ein ähnlicher Leitungsmechanismus vor: In mehr oder minder großer Zahl vorhandene Ladungsträger werden in ihrer Bewegung im elektrischen Feld durch Stöße mit Atomen oder Ionen behindert.

**Supraleiter** Bei etwa der Hälfte aller Metalle ist beobachtet worden, dass der spezifische elektrische Widerstand bei Abkühlung unter eine charakteristische Temperatur (*Sprungtemperatur*  $T_S$ ) sprunghaft auf un-

**Tab. 15.1** Richtwerte für die spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  einiger Materialien

Kategorie	Material	$\sigma$ ( $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ )
Nichtleiter (Isolatoren)	Bernstein	$10^{-26}$
	PVC	$10^{-16}$
	Glas	$10^{-14}$
	Marmor	$10^{-10}$
Halbleiter	Si (reinst, 300 K)	1
	Si (dotiert, 300 K)	$10^3$
Leiter	Fe	$10^7$
	Cu	$10^8$
	Pb ( $\approx 10$ K)	$10^7$
Supraleiter	Pb (<5 K)	$>10^{20}$

messbar kleine Werte sinkt. Ein Strom in einem supraleitenden Ring kann über Jahre hinweg – ohne Energiezufuhr von außen – fließen, wenn er einmal angeregt ist. Erst bei Erwärmung über die Sprungtemperatur oder durch Anlegen eines starken äußeren Magnetfeldes bricht der Strom zusammen. Eine Erklärung des Mechanismus der Supraleitung ist nur mit Hilfe der Quantentheorie möglich. Die praktischen Nutzungsmöglichkeiten von Supraleitern sind vielfältig; allerdings sind sie meistens erschwert durch aufwendige Kühlsysteme mit flüssigem Helium (Siedepunkt 4,2 K), die erforderlich sind, um die nahe dem absoluten Nullpunkt liegenden Sprungtemperaturen zu unterschreiten. Seit einigen Jahren sind bestimmte Metallverbindungen (*Hochtemperatursupraleiter* auf der Basis von Kupferoxiden) bekannt, die selbst oberhalb der Temperatur flüssigen Stickstoffs (Siedetemperatur 77 K) noch supraleitend sind. Der Rekord liegt bei etwa 200 K. Hochleistungs-Elektromagnete enthalten heute meist supraleitende Spulen (*Kryomagnete*, z. B. aus der Legierung  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  mit  $T_S = 18,3$  K). Der Transport elektrischer Energie mit Überlandleitungen aus Supraleitern ist bislang keine kostengünstigere Alternative zum konventionellen Transport mit Hochspannungsleitungen.

**Leiter** Die wichtigsten elektrischen Leiter sind die Metalle. Wie wir in Kap. 5.1.1 gesehen haben, zeichnen sich Metalle dadurch aus, dass neben den fest an die Ionenrümpfe gebundenen Rumpfelektronen noch Elektronen vorhanden sind, die wir als *Leitungselektronen* bezeichnen, und die sich mehr oder weniger frei zwischen den Gitterionen, wie Gasmoleküle in einem festen porösen Material, bewegen können. (Aufgrund dieser Analogie spricht man häufig auch vom *Elektronengas* im Metallinnern.) Diese Leitungselektronen dienen als Ladungsträger für den Stromtransport. Liegt an den Enden eines Metallstücks eine elektrische Spannung, so wandern sie zum positiven Pol. Der normalerweise starken ungeordneten Eigenbewegung der Leitungselektronen (ihre mittlere Geschwindigkeit beträgt bei 300 K ca.  $10^5$  m s<sup>-1</sup>) überlagert sich

eine *Driftbewegung* (von etwa  $10^{-2}$  m s<sup>-1</sup>) in Richtung der elektrischen Feldlinien. Die Quantentheorie hat gezeigt, dass die Driftbewegung in einem idealen, völlig fehlerfreien Kristallgitter, das zudem stark abgekühlt ist, ähnlich ungestört erfolgt wie im Vakuum. Anders ist dies aber in realen Metallen bei normalen Temperaturen. Metalle sind stets verunreinigt und weisen Gitterfehler auf; außerdem schwingen die Atome eines Gitters infolge der thermischen Bewegung je nach der Höhe der Temperatur mehr oder weniger weit aus ihren Ruhelagen heraus, wodurch die regelmäßige Struktur des Kristallgitters ebenfalls gestört wird. Auf diese Hindernisse prallen die Leitungselektronen, wobei ihre aus der Beschleunigung im Feld herrührende kinetische Energie auf die Atome des Gitters übertragen wird. Dies erhöht deren ungeordnete Bewegung. Ihre thermische Energie steigt, und das bedeutet, dass die durch die elektrische Spannung an den Elektronen verrichtete Arbeit die Temperatur des Kristallgitters erhöht.

Die Umwandlung der geordneten Driftbewegung der Elektronen im elektrischen Feld in ungeordnete Bewegung der Gitteratome ist gleichbedeutend mit der Verwandlung elektrischer Energie in Wärmeenergie (Joule'sche Wärme).

Da in Metallen nur die Elektronen als Träger für den Ladungstransport in Frage kommen, vereinfacht sich Gl. (15-5), und für die spezifische Leitfähigkeit  $\sigma = j/E$  erhalten wir:

$$\sigma = n^- e^- b^- , \quad (15-6)$$

wobei die *Beweglichkeit*  $b^-$  der Leitungselektronen durch die Driftgeschwindigkeit  $v_D$  bezogen auf die Stärke des elektrischen Feldes  $E$  gegeben ist:

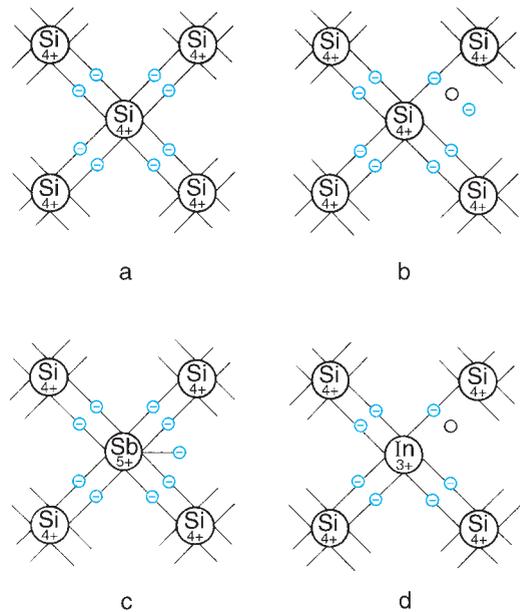
$$b^- = \frac{v_D}{E} . \quad (15-7)$$

Die Elektronen bewegen sich, über längere Zeit gemittelt, tatsächlich mit konstanter Driftgeschwindigkeit, denn die Stoßwechsel-

wirkung der Elektronen mit den Atomen des Gitters wirkt wie eine Reibungskraft, die der elektrischen Kraft aus dem angelegten Feld entgegengerichtet ist.  $v_D$  stellt sich, wie bei der Bewegung einer Kugel in einer viskosen Flüssigkeit (Kap. 5.3.3.2.2), so ein, dass die resultierende Kraft Null wird. Der Betrag  $v_D$  erweist sich als sehr gering: Schicken wir z. B. durch einen Kupferdraht mit Querschnitt  $1 \text{ mm}^2$  einen Strom der Stärke 6 A, so driften die Elektronen mit der geringen Geschwindigkeit von etwa  $4 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$  durch den Leiter. Die große Geschwindigkeit bei der elektrischen Nachrichtenübertragung beruht also nicht auf der Driftgeschwindigkeit der Elektronen im Draht, sondern sie kommt zustande durch die Ausbreitung des elektrischen Feldes im Leiter, die mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt.

Da die Elektronendichte  $n^-$  in Gl. (15-6) für jedes Metall eine charakteristische und konstante Größe ist (pro  $\text{cm}^3$  sind es größenordnungsmäßig  $10^{23}$  Elektronen), ist die Leitfähigkeit in Metallen nur durch Veränderung der Driftbeweglichkeit  $b^-$  zu beeinflussen. Je höher die Temperatur, je stärker also die thermische Bewegung der Gitterbausteine ist, um so häufiger sind Stöße und um so geringer wird die Beweglichkeit. Aus diesem Grunde sinkt in Metallen die Leitfähigkeit  $\sigma$  mit steigender Temperatur, oder anders ausgedrückt, nimmt der spezifische Widerstand  $\rho$  mit steigender Temperatur zu.  $\sigma$  sinkt ebenfalls, wenn eine erhöhte Konzentration an Verunreinigungen oder Gitterfehlern die Beweglichkeit herabsetzt.

**Halbleiter** Halbleiter spielen heute eine bedeutende Rolle in der Elektronik. Sie unterscheiden sich von Metallen dadurch, dass sie keine frei beweglichen Leitungselektronen besitzen. Sogar ihre äußeren Valenzelektronen sind – wenn auch schwach – an den Atomrumpf gebunden. Bei einem Teil der Valenzelektronen genügt bereits thermische Energie, um sie von den Atomrümpfen zu lösen und sie beweglich zu machen wie die Leitungselektronen im Metall. Diese thermische Erzeugung von Ladungsträgern wollen



**Abb. 15.7** Silizium als Halbleiter: (a) natürliches Silizium bei sehr niedriger Temperatur, (b) bei Zimmertemperatur, (c) n-Silizium, (d) p-Silizium. (⊖: Elektron; ⊙: Loch; die Striche symbolisieren die Bindungen zu den nächsten Nachbarn.)

wir am Beispiel des Siliziumkristalls näher betrachten. Si hat 4 Valenzelektronen, von seinen 14 Elektronen gehören 4 der äußersten Schale an. Abb. 15.7a zeigt, wie die Si-Atome im Kristall angeordnet sind. Jedes Si-Ion besitzt die Ladung  $+4$ . Es ist von 8 Elektronen umgeben, von denen jedoch jedes zwei Nachbarionen zugleich angehört. Somit ist der Kristall elektrisch ungeladen. Bei tiefen Temperaturen sind alle Elektronen gebunden, und der Kristall wirkt als Isolator. Bei Zimmertemperatur dagegen werden infolge der Wärmebewegung des Kristallgitters einzelne Elektronen aus dem Verband herausgerissen und können sich frei bewegen (Abb. 15.7b). Was anstelle des Elektrons zurückbleibt, ist eine *Fehlstelle*, auch *Defektelektron* oder *Loch* genannt. Man kann sich ein Loch als Ladungsträger vorstellen, der eine Masse ungefähr gleich jener eines Elektrons hat, und dessen Ladung  $+e$  beträgt. Im reinen Halbleiterkristall kommen Elektronen und Löcher immer paarweise vor. Beide Ladungs-

träger sind beweglich und daher verantwortlich für die Leitfähigkeit des natürlichen Siliziums. Die Beweglichkeit eines Loches kommt dadurch zustande, dass es ein Nachbarlektron einfangen kann, an dessen ursprünglichem Ort dann ein neues Loch entsteht. Da im Halbleiter also zwei Sorten von Ladungsträgern zum Stromtransport beitragen, wird hier die Leitfähigkeit beschrieben durch:

$$\sigma = (n^- e^- b^- + n^+ e^+ b^+). \quad (15-8)$$

Die Mechanismen, die die Beweglichkeit  $b^-$  der Elektronen und  $b^+$  der Löcher einschränken, sind dieselben wie bei Metallen.

Im Gegensatz zu den Metallen können die Ladungsdichten  $n^-$  und  $n^+$  in Halbleitern in weiten Grenzen beeinflusst werden:

1. Dies kann thermisch geschehen. Dabei nehmen  $n^-$  und  $n^+$  mit steigender Temperatur außerordentlich stark zu, so dass in Gl. (15-8) die Abnahme von  $b$  mehr als wettgemacht wird. Folglich steigt – im Gegensatz zu den Metallen – die Leitfähigkeit der Halbleiter mit steigender Temperatur. Da Kohle zu den Halbleitern zu zählen ist, ist dies auch der Grund für das in Kap. 14.5.2 beschriebene unterschiedliche Verhalten von Metallfaden- und Kohlefadenlampe.

2. Eine Beeinflussung von  $n^-$  und  $n^+$  ist auch durch angelegte elektrische Felder möglich; diese Möglichkeit wird beim *Transistor* ausgenutzt (siehe Abb. 15.10).

3. Zudem können Loch-Elektronen-Paare auch durch Lichtenergie erzeugt werden; die dadurch entstehende *Photoleitfähigkeit* wirkt sich in einer Halbleiterdiode (siehe Abb. 15.8) so aus, dass der Widerstand drastisch gesenkt wird. Solche Halbleiterelemente (Photowiderstände, Photoelemente usw.) dienen häufig der Messung von Lichtintensitäten (Belichtungsmesser).

4. Bereits geringe Verunreinigungen vermögen im Halbleiter dessen Ladungsträgerkonzentrationen  $n^-$  und  $n^+$  drastisch zu ändern, was bei geeigneter Wahl der Verunreinigungsatome zur sogenannten n- oder p-Leitung führt.

Durch Einbau geeigneter Fremdatome lassen sich in Halbleitern zusätzliche freie Ladungsträger erzeugen. Abb. 15.7c zeigt, wie ein 5-wertiges Antimon-Atom im Silizium ein zusätzliches Elektron liefert. Das Sb-Ion hat die Ladung +5, daher ist der Kristall weiterhin elektrisch ungeladen. Umgekehrt erzeugt ein 3-wertiges Indium-Atom ein Loch, das ebenfalls als beweglicher Ladungsträger in Er-

scheinung tritt (Abb. 15.7d). Auch in diesem Fall bleibt der Kristall elektrisch ungeladen. Entscheidend ist, welche Ladungsträger beweglich werden und so zum elektrischen Strom beitragen können, und welche ortsfest an den Fremdatomen gebunden bleiben und daher nicht zum Strom beitragen.

Man bezeichnet den Einbau von Fremdatomen ins Kristallgefüge als *Dotierung*. Je nachdem, ob die Fremdatome mehr oder weniger Valenzelektronen als die Kristallatome besitzen, werden durch die Dotierung Elektronen oder Löcher zugefügt. Man spricht dann von *n-Halbleiter* oder *p-Halbleiter*, wobei n- und p- auf das negative bzw. positive Vorzeichen der durch Dotierung erzeugten freien Ladungsträger hinweisen. Schon außerordentlich kleine Mengen Fremdmaterial genügen, um eine wesentliche Änderung der Leitfähigkeit herbeizuführen. Eine Dotierung von einem Fremdatom auf  $10^8$  Atome kann die Leitfähigkeit verzehnfachen. Daraus ist ersichtlich, dass das Ausgangsmaterial einen enorm hohen Grad von Reinheit haben muss.

Auch im dotierten Halbleiter werden infolge der Wärmebewegung spontan Elektron-Loch-Paare gebildet. Somit befinden sich beispielsweise im n-Halbleiter nicht nur freie Elektronen, sondern auch einige wenige Löcher. Man bezeichnet dann die Elektronen als *Majoritätsträger*, die Löcher als *Minoritätsträger*. Im p-Halbleiter sind die Verhältnisse genau umgekehrt.

Die geeignete Kombination verschieden dotierter Halbleiterelemente hat der modernen Elektronik und Technik sehr viele neue Anwendungsbereiche eröffnet. Insbesondere die Digitalelektronik beruht auf der Anwendung von Halbleiterbauelementen. In Kap. 15.3 besprechen wir zunächst die beiden einfachsten Halbleiterbauelemente, die *Halbleiterdiode* und den *Transistor*, und daran anschließend die *Digitalelektronik*.

**Isolatoren** In Metallen sind die Valenzelektronen von den Atomrümpfen abgelöst und somit als Leitungselektronen beweglich. In Halbleitern können sie, da sie nur schwach an die Atomrümpfe gebunden sind, durch Wärmebewegung abgelöst werden, wobei be-

wegliche Elektronen-Loch-Paare entstehen. In *Isolatoren* sind die Valenzelektronen so fest an die einzelnen Atome im Gitterverband gebunden, dass sie sich — auch mit Hilfe thermischer Energie — praktisch nicht von diesen Atomen wegbewegen können, so dass kein

Ladungstransport möglich ist. Die Leitfähigkeit von Isolatoren ist daher verschwindend klein (Tab. 15.1). Erst bei hohen Temperaturen ändert sich dies; so entwickelt z. B. Glas, das auf ca. 1000 °C erhitzt worden ist, eine beträchtliche Ionenleitfähigkeit.

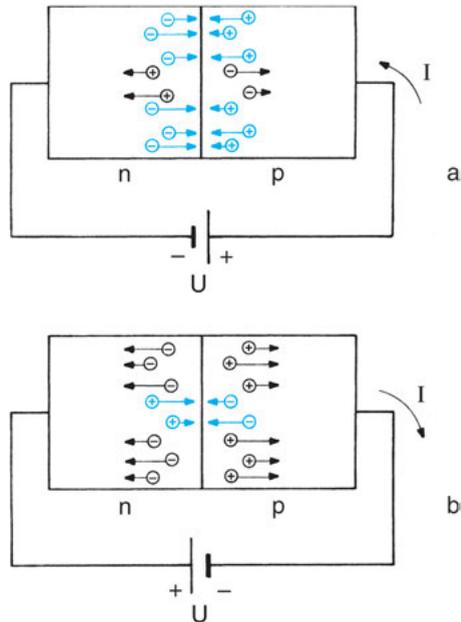
## 15.3 Halbleiterelektronik

### 15.3.1 Halbleiterdiode

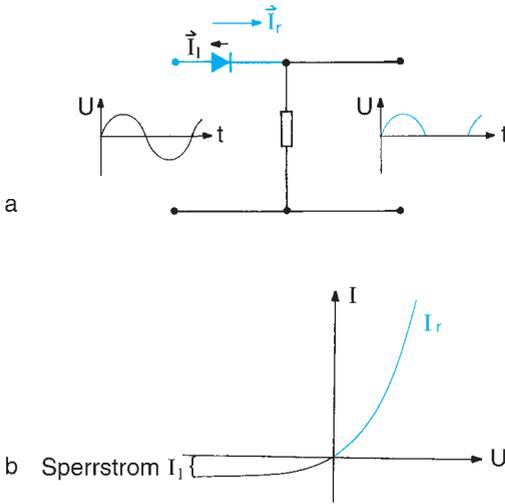
Die Diode besteht aus zwei verschiedenen dotierten Halbleitern: Lässt man einen p- und einen n-Halbleiter aneinandergrenzen, so sind beiderseits der Trennfläche, die auch *Sperrschicht* genannt wird, die Konzentrationen von Elektronen und Löchern ganz unterschiedlich. Die beiden Trägersorten werden versuchen, sich — wie man das von Gasen und Elektrolyten her kennt — durch Diffusion zu vermischen. Wenn nun an die Diode (Abb. 15.8) eine äußere Spannung  $U$  angelegt wird, so ist die Wirkung je nach der Polung von  $U$  verschieden. Wenn die p-Seite positiv ist, werden die Majoritätsträger gegen die Sperrschicht und durch diese hindurch getrieben. Für den Strom durch die Sperrschicht stehen viele Träger zur Verfügung; der Strom ist daher groß und man bezeichnet diese Polung als *Durchlassrichtung* (Abb. 15.8a und 15.9a). Wenn die p-Seite dagegen negativ ist, werden die Majoritätsträger von der Sperrschicht abgesaugt und nur die Minoritätsträger treten durch sie hindurch (Abb. 15.8b). Da letztere in viel geringerer Anzahl vorhanden sind, ist der resultierende Strom, der *Sperrstrom* genannt wird, nur klein (Abb. 15.9b). Die Diode hat somit in den zwei Richtungen verschiedene Leitfähigkeit; sie wirkt für Wechselströme, ebenso wie die Röhrendiode (Kap. 15.2.1), als *Gleichrichter*. In Schaltbildern benutzt man für sie das Symbol  $\rightarrow|$ .

Im Gegensatz zu *linearen Schaltungen*, in denen die Zusammenhänge zwischen Strömen und Spannungen durch lineare Gleichungen (z. B. das Ohm'sche Gesetz) be-

schrieben werden, ist die in Abb. 15.9a gezeichnete Gleichrichterschaltung eine *nicht-lineare Schaltung*. Die Gleichrichter-Kennlinie (Abb. 15.9b) zeigt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen  $I$  und  $U$ . Bei negativen Werten von  $U$  ist die Diode für den Stromdurchgang gesperrt, was in Abb. 15.9a durch den Vektorpfeil neben  $\bar{I}_1$  bzw. in der Gleichrichter-Kennlinie durch den kleinen *Sperrstrom*  $I_1$  zum Ausdruck kommt. Dieser ändert sich kaum mit der Größe der Spannung. Bei positiver Spannung  $U$  ist die Diode



**Abb. 15.8** Wirkungsweise einer Diode (der Pfeil rechts außen gibt die Richtung des positiven Stromes an): (a) Vorspannung in Durchlassrichtung, (b) Vorspannung in Sperrichtung.



**Abb. 15.9** (a) Nichtlineare Gleichrichterschaltung. Der zeitliche Verlauf der Spannung ist links vor der Gleichrichtung und rechts nach der Gleichrichtung eingezeichnet. (b) Strom-Spannungskennlinie einer Gleichrichterdiode.

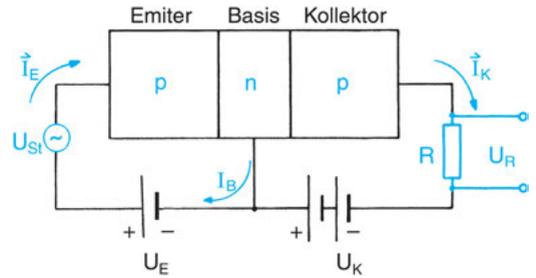
in Durchlassrichtung gepolt; es fließt der von  $U$  abhängige Durchlassstrom  $I_r$ .

Technische Bedeutung hat die Diode zur Gleichrichtung von Wechselströmen. Schaltet man sie in einen Wechselstromkreis, Abb. 15.9a, so lässt sie den Strom in einer Richtung durch, sperrt ihn aber, wenn er sein Vorzeichen wechselt. An einem Widerstand fällt dann die in der Abbildung gezeichnete, gleichgerichtete Spannung ab. Gleichgerichtete Spannung ist also keine Gleichspannung; zwar ist ihr Vorzeichen, nicht aber ihr Betrag zeitlich konstant. Die Spannung muss noch mit Kondensatoren *geglättet* werden, bevor aus ihr eine Gleichspannung wird.

Um Hochspannung zu erzeugen, wie sie z. B. zur Spannungsversorgung von Röntgenröhren benötigt werden, transformiert man die Wechselspannung des Netzes auf Hochspannung (Kap. 16.2.3) und richtet diese dann in einer Kombination von Dioden und Kondensatoren gleich.

### 15.3.2 Transistor

Aufbauend auf der Wirkungsweise der Halbleiterdiode ist der Transistor relativ einfach



**Abb. 15.10** Transistor.

zu verstehen. Er besteht im Prinzip aus zwei p-n-Trennschichten, die durch drei entsprechend dotierte Halbleiter gebildet werden, also aus miteinander verbundenen dünnen Schichten der Dotierungs-Kombination n-p-n. Man bezeichnet sie auch als Emittier-Basis-Kollektor-Schaltung.

In Abb. 15.10 ist die p-n-Trennschicht am Emittier-Basis-Übergang durch geeignete Polung der Spannungsquelle  $U_E$  in Durchlassrichtung gepolt. Deshalb gelangen die beweglichen Löcher von der p-dotierten in die n-dotierte Schicht. Man sagt dazu auch: Die Löcher werden von der p-Elektrode in die n-Elektrode (Basis) emittiert (daher der Name Emittier für diese Elektrode). Sie werden dann unter dem Einfluss der angelegten Spannung  $U_K$  und weil die Basis sehr dünn ist ( $\lesssim 1 \mu\text{m}$ ), Elektron-Loch-Rekombination also unwahrscheinlich ist, zu  $\approx 98\%$  als *Kollektorstrom*  $I_K$  durch die in Sperrichtung gepolte n-p-Grenzschicht zum Kollektor und von dort zum negativen Pol der Spannungsquelle  $U_K$  hin abgesaugt. Nur  $\approx 2\%$  gelangen als *Basisstrom*  $I_B$  zur Spannungsquelle  $U_E$ . Das bedeutet, dass eine Änderung des *Emittierstroms*  $I_E$ , die durch eine Veränderung der Spannung im Emittier-Basis-Stromkreis hervorgerufen wird, eine erhebliche Änderung des Kollektorstroms  $I_K$  zur Folge hat. Schaltet man nun in Serie zur Gleichspannung  $U_E$  eine zeitabhängige *Steuerspannung*  $U_{St}$  hinzu, so bewirkt eine kleine Änderung  $\Delta U_{St}$  eine große Änderung  $\Delta I_E$  und damit auch eine große Änderung  $\Delta I_K$ . Dies ist so, weil der Emittier-Basis-Übergang in Durchlassrichtung gepolt ist und dafür die steile Kennlinie des Durchlassstroms gilt (Abb. 15.9b): Eine

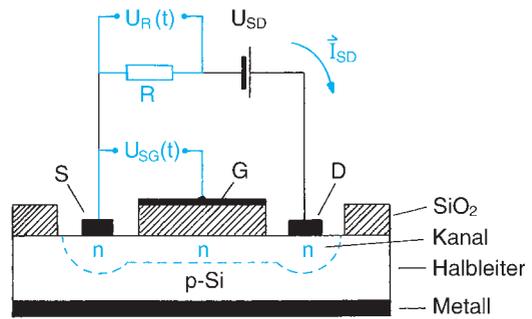
kleine Änderung der Spannung bewirkt eine große Änderung des Stroms. Die Änderung des Kollektorstroms überträgt sich auf die am Widerstand  $R$  abgreifbare Spannung  $U_R = RI_K$ . Damit funktioniert der Transistor als Verstärker, denn kleine Steuerspannungen  $U_{St}$  (z. B. von einem CD-Player oder einer Antenne) bewirken verstärkte Spannungssignale  $U_R$  (z. B. zum Betrieb eines Lautsprechers), ohne die Signalform zu verändern.

Damit sich die Signalform der am Widerstand  $R$  abgreifbaren Spannung  $U_R$  gegenüber der Steuerspannung  $U_{St}$  nicht ändert, muss der Verstärker *linear* sein, d. h.,  $U_R$  muss in ihrer Amplitude proportional  $U_{St}$  sein (der Proportionalitätsfaktor  $U_R/U_{St}$  ist der *Verstärkungsfaktor*). Ferner sollten möglichst alle Frequenzkomponenten, die im Signal  $U_{St}$  vorkommen, mit gleicher Verstärkung und ohne Phasenverschiebung übertragen werden. Die beiden letzten Bedingungen lassen sich aber nicht vollständig erfüllen; kein Verstärker zeigt ein völlig frequenzunabhängiges Verhalten.

### 15.3.3 Feldeffekt-Transistor

Ein Nachteil des soeben beschriebenen Transistors gegenüber der Röhrentriode ist der, dass zur Steuerung eine größere Leistung erforderlich ist und daher sehr schwache Signale nicht verstärkt werden können. Der Grund hierfür ist der relativ niedrige Eingangswiderstand von 1 kΩ bis 1 MΩ. Legt man an diesen Widerstand eine Steuerspannung an, dann fließt durch ihn ein Strom, und damit wird Leistung verbraucht. Der *Feldeffekt-Transistor* vermeidet diesen Nachteil. Sein Innenwiderstand beträgt bis zu  $10^{15} \Omega$ , so dass praktisch kein Strom fließt und keine Leistung verbraucht wird. Ermöglicht wird dies dadurch, dass die Steuerung über das elektrische Feld in einem Kondensator (ohne leitende Verbindungen) erfolgt. Wie dies realisiert wird, zeigt Abb. 15.11.

Auf eine p-leitende Halbleiterschicht (hier p-Si), in die ein n-leitender *Kanal* eingelassen ist, sind drei Elektroden aufgebracht: Die Eintrittselektrode  $S$  (die hier *Source* oder *Quelle* genannt wird), die Austrittselektrode  $D$  (die man als *Drain* oder *Senke* bezeichnet) und die Steuerelektrode  $G$  (das sog. *Gate* oder *Tor*). Die Ein- und Austrittselektroden stehen in elektrischem Kontakt miteinander, wobei der zu steuernde Strom durch den Kanal geleitet wird. Die Steuerelektrode ist durch eine Isolierschicht (aus Silizium-Dioxid = Quarz) von der Halbleiterschicht des Kanals getrennt. Wird sie statisch aufgeladen, so wirkt ihr elektrisches Feld durch den Isolator hindurch auf den Kanal und das darunterliegende p-leitende Material.



**Abb. 15.11** Feldeffekt-Transistor. Er besteht aus einer Metall-, Oxid- und Halbleiterschicht und wird abgekürzt *MOSFET* genannt (*Metal-Oxide-Semiconductor-Field-Effect-Transistor*). Durch die Gate-Spannung  $U_{SG}$  wird der Strom zwischen  $S$  und  $D$  gesteuert.

Im Kanal geschieht nun Folgendes: Ohne Gate-Spannung  $U_{SG}$  bildet sich am n-p-Übergang eine Raumladungsschicht, in der die Zahl der Majoritätsträger sehr gering ist (*Verarmungsschicht*). Für den n-leitenden Kanal bedeutet das, dass die gut leitende Schicht um die Dicke der (praktisch trägerfreien) Verarmungsschicht vermindert ist. Schaltet man nun eine Gate-Spannung hinzu, so kann die Raumladungsschicht durch das elektrische Feld je nach Polung verkleinert oder vergrößert werden, und damit wird der Querschnitt der gut leitenden n-Schicht größer oder geringer; sie kann sogar ganz verschwinden. Man steuert also mit der Gate-Spannung den Widerstand des Leiterkanals und damit den Strom zwischen den Elektroden  $S$  und  $D$ , zwischen denen die Potentialdifferenz  $U_{SD}$  liegt. Diese Steuerung des Stromes und damit der am Widerstand  $R$  abfallenden Spannung  $U_R(t)$  über den *Feldeffekt* erfolgt praktisch leistungslos. Ein weiterer Vorteil dieses Transistors ist der, dass er aus nur wenigen, durch Aufdampftechnik herstellbaren dünnen Schichten besteht und daher so klein ist, dass er sich gut für integrierte Schaltungen eignet.

### 15.3.4 Digitalelektronik

Die Digitalelektronik hat nicht nur der analogen Elektronik vielfach den Rang abgelassen (z. B. in der Messtechnik, die wir im nächsten Kapitel besprechen, oder im Funkverkehr), sondern hat ganz neue Bereiche erschlossen, die unter *Automatisierung* (Steuerung, Regelung von technischen Systemen), *Datenverarbeitung* (Registrierung, Auswertung, elektronischer Versand) und *Datenspeicherung*

eingeorordnet werden können. Die entscheidende Voraussetzung für die technologische Entwicklung der Digitalelektronik war die Entwicklung von extrem schnellen, kleinen und billigen Schaltelementen aus Halbleitern. Mit ihnen wurde es möglich, äußerst komplexe Probleme zu bewältigen, weil diese sich stets durch eine Vielzahl ineinandergreifender einfacher Einzelprozesse, die man nur oft und schnell genug ablaufen lassen muss, darstellen lassen. In modernen integrierten digitalelektronischen Schaltungen (*integrated circuits*, IC's) werden zu diesem Zweck bis zu mehreren Millionen einfache elektronische Schaltelemente pro  $\text{mm}^2$  zusammengesetzt (Abb. 15.12).

Ausgelöst durch die Möglichkeiten der Digitalelektronik hat sich mit der *Informatik* ein bedeutender Wissenschaftszweig entwickelt, der auch in der Medizin etabliert ist (Medizinische Informatik, Kap. 23). Hier soll mit einigen Beispielen ein erster Einblick vermittelt werden.

Das einfachste Schaltelement ist der Schalter, der eine elektrische Spannung ein- oder ausschaltet. In der Digitalelektronik benutzt man als Schalter Bauelemente, die aus den oben beschriebenen Halbleiterdioden und/

oder Transistoren bestehen. (Mechanische Schalter sind im Vergleich dazu wesentlich umständlicher herzustellen und reagieren zu langsam.) Das Zusammenwirken vieler solcher Schaltelemente lässt sich in übersichtlicher Weise nur mit Hilfe geeigneter mathematischer Methoden beschreiben. Den beiden Zuständen *geschlossen* und *geöffnet*, durch die sich ein elektrischer Schalter auszeichnet, werden Potentialangaben zugeordnet: Hohes elektrisches Potential (z. B. 5 V), oft gekennzeichnet durch den Buchstaben *H* (*high*), und niedriges Potential (z. B. 0 V), bezeichnet mit *L* (*low*). Dies legt es nahe, bei der mathematischen Beschreibung von Schaltkreisen anstelle des sonst üblichen dezimalen Zahlensystems das auf nur zwei Ziffern beruhende *Dual-* oder *Binärsystem* zu benutzen. Die daraus folgende Beschreibungsmethode nennt man *Schaltalgebra*.

Das *Dezimalsystem* baut auf den zehn arabischen Ziffern 0, 1, 2, ... 9 auf. Jede natürliche Zahl lässt sich durch diese Ziffern darstellen, indem man sie als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen schreibt, z. B.:

$$283 = 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

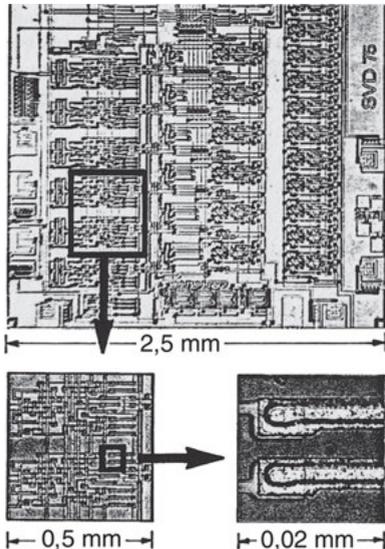
Jeder Stelle innerhalb einer im Dezimalsystem geschriebenen Zahl kommt also eine bestimmte Zehnerpotenz zu.

Das *Dual-System* benutzt zur Darstellung einer Zahl nur zwei Ziffern, die wir mit 0 und 1 bezeichnen können. (Der Zusammenhang mit den beiden Zuständen des Schalters ist nun deutlich: Der 0 kann man den Zustand *L* und der 1 den Zustand *H* zuordnen.) Jede Zahl wird jetzt als eine Summe von Potenzen von 2 dargestellt, und diese werden nur mit 0 oder 1 multipliziert, da es im Dualsystem nur darauf ankommt, ob eine bestimmte Zweierpotenz in der gegebenen Zahl enthalten ist oder nicht. So lautet z. B. die Zerlegung der oben angegebenen Zahl 283 in Zweierpotenzen:

$$\begin{aligned} 283 &= 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 \\ &\quad + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 256 + 0 + 0 + 0 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Das heißt, in der binären Schreibweise hat die Dezimalzahl 283 die Darstellung 100011011. Man nennt die beiden Dualziffern 0 und 1 *binäre Ziffern* oder *binäre Variablen*, im Englischen *binary digit*, abgekürzt *bit*.

Die Schaltalgebra ist aus logischen Verknüpfungen zwischen binären Variablen und aus Rechenregeln, ähnlich denen im Dezimalsystem (Addition, Multiplikation etc.) aufgebaut. Diese Verknüpfungen entspre-



**Abb. 15.12** Drei verschieden große Ausschnitte aus einem IC. Der Ausschnitt rechts unten zeigt zwei einzelne Transistoren.

chen denen, die in der *mathematischen Logik* zwischen Aussagen gemacht werden können; denn auch diese Aussagen sind durch zwei Eigenschaften gekennzeichnet: Entweder sie sind wahr oder falsch.

Die einfachsten logischen Verknüpfungen sind:

1. Die *Negation*: Die durch Negation einer Aussage *A* folgende Aussage *Q* ist wahr, wenn *A* falsch ist, und falsch, wenn *A* wahr ist.

2. Die *Alternative*: Die Aussage *Q* ist wahr, wenn *A* oder *B* wahr ist oder beide wahr sind, und nur dann falsch, wenn weder *A* noch *B* wahr sind.

3. Die *Konjunktion*: Die Aussage *Q* ist wahr, wenn sowohl *A* als auch *B* wahr sind, und andernfalls falsch.

Ihre technische Realisierung finden diese Verknüpfungen dadurch, dass man *wahr* und *falsch* als Schaltzustand 1 (*H*) und 0 (*L*) repräsentiert. Die den drei Verknüpfungen zugeordneten Schaltelemente nennt man *NICHT-Glied*, *ODER-Glied* und *UND-Glied*. Daneben sind die alternativen Bezeichnungen gebräuchlich: *Inverter*, *OR-Glied* und *AND-Glied*.

Die Schaltmöglichkeiten solcher Glieder lassen sich in einer Tafel, die man *Funktions-* oder *Wahrheitstafel* nennt, zusammenstellen. Am Beispiel des UND-Gliedes sei dies erläutert: Es wird von einem Schalter dargestellt, der zwei Eingangssignale *A* und *B* mit einem Ausgangssignal *Q* verknüpft (man sagt: *Q* ist eine Funktion von *A* und *B*) und zwar so, dass *Q* dann, und nur dann den Wert 1 (*H*) annimmt, wenn sowohl *A* als auch *B* den Wert 1 haben. Was hierbei am Schalter geschieht, können wir darstellen, indem wir eine Kombination von Spannungsimpulsen (Potential gegenüber Erde) auf die Eingänge *A* und *B* des Schalters geben und nachsehen, welche Spannung am Ausgang *Q* resultiert. Abb. 15.13 zeigt ein Beispiel.

Die möglichen Zustände des UND-Gliedes sind in der Funktionstafel der Tab. 15.2 zusammengestellt. Diese ist folgendermaßen zu lesen:

Zustand 0: An *A* und *B* liegt 0 (*L*); dann ist auch  $Q = 0$  (*L*).

Zustand 1, 2: An *A* oder *B* liegt 1 (*H*); dann ist  $Q = 0$  (*L*).

Zustand 3: An *A* und *B* liegt 1 (*H*); dann ist  $Q = 1$  (*H*).

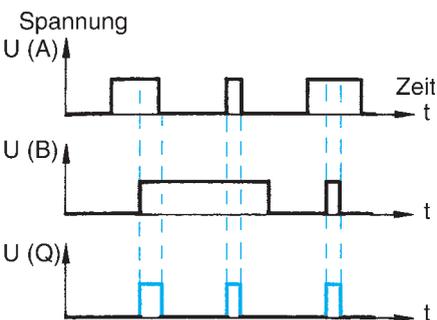
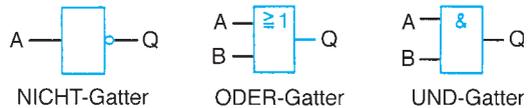


Abb. 15.13 Spannungen an den Eingängen *A* und *B* und am Ausgang *Q* bei einem UND-Glied.

Tab. 15.2 Funktionstafel für das UND-Glied

Zustand	Eingang	Ausgang
0	A B L L	L
1	L H	L
2	H L	L
3	H H	H

Wie für das UND-Glied lässt sich eine Funktionstafel auch für das ODER-Glied und das NICHT-Glied (und für weitere in der Praxis wichtige Glieder, die durch Kombination des UND- oder ODER-Gliedes mit dem NICHT-Glied entstehen) aufstellen. Realisiert werden diese Glieder, wie bereits erwähnt, durch Halbleiterbauelemente, die als *Gatter* (*Gate*) bezeichnet werden und folgende Symbolsymbole besitzen:



Zur Lösung von Rechenaufgaben lassen sich nun durch Kombination dieser Schaltelemente Schaltungen aufbauen, bei denen sich das Ergebnis in Form von Spannungsimpulsen messen lässt. Dazu rechnet man die Dezimalzahlen ins Dual-System um (*Binär-Codierung*). Die Art der Kombination von Schaltelementen folgt aus den Rechenregeln für das Dual-System. Wir wollen die Addition als Beispiel näher betrachten. Im Dual-System gelten folgende Regeln:

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1$

$1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 0$ , mit Übertrag einer 1 zur nächsten Dual-Stelle.

Eine mögliche technische Realisierung eines Addierers im Dual-System ist in Abb. 15.14 dargestellt. An den

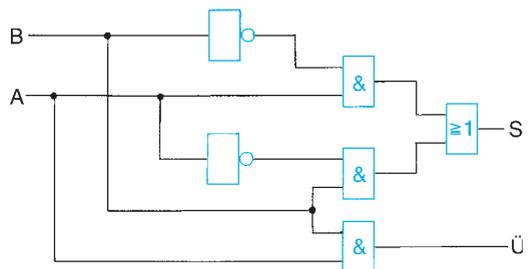


Abb. 15.14 Technische Realisierung eines Addierers aus drei UND-Gliedern, zwei NICHT-Gliedern und einem ODER-Glied. *A* und *B* sind die Eingänge. *S* und *Ü* geben Summe bzw. Übertrag an.

Eingängen  $A$  und  $B$  werden die beiden zu addierenden Zahlen in Form von kurzen Spannungsimpulsen (z. B.  $0 (L) \cong 0$  Volt und  $1 (H) \cong 5$  Volt, mit Dauern von einigen  $\mu\text{s}$ , neuerdings sogar ns) eingegeben. Die Spannungen an den Ausgängen dienen dazu, weitere Schaltelemente zu schalten, bis schließlich am Ausgang das Signal  $S$  (Summe) – wieder in Form einer Spannung – zu messen ist.

Neben solchen *rechnenden* Schaltnetzen werden weitere Bauelemente benötigt, die zur *Speicherung* von Daten dienen. Bei den bisher besprochenen Elementen treten am Ausgang logische Folgespannungen auf, solange entsprechende Kombinationen von Spannungen am Eingang anliegen. Zur Speicherung benötigt man dagegen solche Bauteile, die die Information über vorausgegangene Eingangssignale beibehalten. Das leisten sog. *flip-flops*, Schalter mit zwei stabilen Zuständen, die durch bestimmte Kombination von Eingangssignalen eingestellt werden und damit die Information eines bit speichern. Wieder ausgelesen werden kann diese Information durch andere Eingangssignale, da die zugehörigen Ausgangssignale am flip-flop für jeden der einstellbaren stabilen Zustände unterschiedlich sind. Ein flip-flop lässt sich aus zwei Schaltelementen aufbauen, die jeweils eine Kombination aus einem NICHT- und einem ODER-Glied sind.

Auf der Basis dieser Schaltalgebra lassen sich Zählschaltungen konstruieren, die unentbehrlicher Bestandteil aller digital arbeitender Mess-, Steuer- und Regelanlagen sind. Wir finden sie beispielsweise auch in dem in Kap. 16.1.2 zu besprechenden Digital-Messwerk.

Digitale Informationen werden über elektrische Schreibmaschinen, über Bildschirme oder in speziellen Anzeigeelementen als Ziffern (oder Buchstaben) sichtbar gemacht. Für die direkte Anzeige dienen beispielsweise sog. *Siebensegmentelemente*, wie man sie in Taschenrechnern oder beim Digitalvoltmeter findet. Mit ihnen lassen sich alle Zahlen sowie einige Buchstaben darstellen, z. B.

28.8.1749

Rechen- und Speicher-Geräte, die mit integrierten digitalelektronischen Bauteilen arbeiten, sind vielseitig in Forschung und Technik im Einsatz. Mit Hilfe der Schaltalgebra kann für jedes spezielle Anwenderproblem eine eigene optimale Schaltung entwickelt werden, wobei neben dem eigentlichen Entwurf eines Schaltplanes natürlich Gesichtspunkte wie Größe, Rechengeschwindigkeit, Störsicherheit und Wirtschaftlichkeit des Gerätes eine erhebliche Rolle spielen.

## 16. Elektrische Geräte

### 16.1 Messgeräte

Die elektrische Messtechnik ist soweit entwickelt, dass man heute bemüht ist, jede physikalische Messung, sei es einer mechanischen, thermischen, akustischen, optischen oder auch einer kernphysikalischen Größe, in ein elektrisches Messsignal umzuwandeln, um dieses dann weiterzuverarbeiten und anzuzeigen. Dabei kommt es darauf an, den gewünschten Messwert (z. B. die Temperatur) durch einen geeigneten Signalgeber, d. h. Sensor (z. B. einen temperaturabhängigen elektrischen Widerstand) aufzunehmen und in einer als Signalumformer dienenden elektrischen Schaltung (wie z. B. beim elektronischen Thermometer, Kap. 8.5.4) in eine Spannung oder einen Strom umzuwandeln. Die Anzeige erfolgt mit einem Zeigerinstrument, bei dem die elektrische Größe in eine mechanische – nämlich die Drehung eines Zeigers über einer Skala – umgewandelt

wird, oder aber in digitaler Form. Der Zeigerausschlag eines Zeigerinstruments (z. B. des im folgenden behandelten Drehspul-Messwerks) ist im Prinzip – wenn wir von Messungenauigkeiten absehen – streng proportional zum kontinuierlich veränderlichen elektrischen Strom, d. h., jeder Stromänderung folgt ein entsprechender Zeigerausschlag. Eine solche proportionale Anzeige einer kontinuierlichen Größe bezeichnet man als *analoge Anzeige*. Daneben haben Geräte weite Verbreitung gefunden, die auf *digitaler Anzeige* basieren. Diese sind speziell den Anforderungen elektronischer Computer angepasst (Kap. 15.3.4). Ein digitales elektrisches Signal ändert sich nicht kontinuierlich, sondern nur schrittweise um Vielfache einer vorgegebenen Einheitsstufe (Schrittweite), so dass die Gesamthöhe des Signals durch Abzählung der in ihm enthaltenen Stufen

Eingängen  $A$  und  $B$  werden die beiden zu addierenden Zahlen in Form von kurzen Spannungsimpulsen (z. B.  $0 (L) \cong 0$  Volt und  $1 (H) \cong 5$  Volt, mit Dauern von einigen  $\mu\text{s}$ , neuerdings sogar ns) eingegeben. Die Spannungen an den Ausgängen dienen dazu, weitere Schaltelemente zu schalten, bis schließlich am Ausgang das Signal  $S$  (Summe) – wieder in Form einer Spannung – zu messen ist.

Neben solchen *rechnenden* Schaltnetzen werden weitere Bauelemente benötigt, die zur *Speicherung* von Daten dienen. Bei den bisher besprochenen Elementen treten am Ausgang logische Folgespannungen auf, solange entsprechende Kombinationen von Spannungen am Eingang anliegen. Zur Speicherung benötigt man dagegen solche Bauteile, die die Information über vorausgegangene Eingangssignale beibehalten. Das leisten sog. *flip-flops*, Schalter mit zwei stabilen Zuständen, die durch bestimmte Kombination von Eingangssignalen eingestellt werden und damit die Information eines bit speichern. Wieder ausgelesen werden kann diese Information durch andere Eingangssignale, da die zugehörigen Ausgangssignale am flip-flop für jeden der einstellbaren stabilen Zustände unterschiedlich sind. Ein flip-flop lässt sich aus zwei Schaltelementen aufbauen, die jeweils eine Kombination aus einem NICHT- und einem ODER-Glied sind.

Auf der Basis dieser Schaltalgebra lassen sich Zähl-schaltungen konstruieren, die unentbehrlicher Bestandteil aller digital arbeitender Mess-, Steuer- und Regelanlagen sind. Wir finden sie beispielsweise auch in dem in Kap. 16.1.2 zu besprechenden Digital-Messwerk.

Digitale Informationen werden über elektrische Schreibmaschinen, über Bildschirme oder in speziellen Anzeigeelementen als Ziffern (oder Buchstaben) sichtbar gemacht. Für die direkte Anzeige dienen beispielsweise sog. *Siebensegmentelemente*, wie man sie in Taschenrechnern oder beim Digitalvoltmeter findet. Mit ihnen lassen sich alle Zahlen sowie einige Buchstaben darstellen, z. B.

28.8.1749

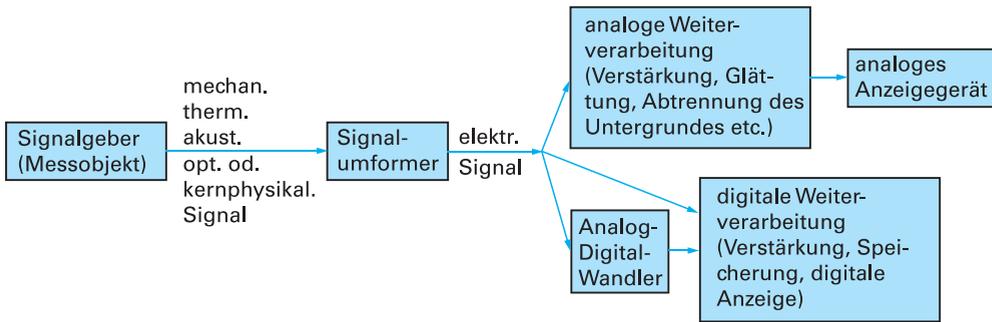
Rechen- und Speicher-Geräte, die mit integrierten digitalelektronischen Bauteilen arbeiten, sind vielseitig in Forschung und Technik im Einsatz. Mit Hilfe der Schaltalgebra kann für jedes spezielle Anwenderproblem eine eigene optimale Schaltung entwickelt werden, wobei neben dem eigentlichen Entwurf eines Schaltplanes natürlich Gesichtspunkte wie Größe, Rechengeschwindigkeit, Störsicherheit und Wirtschaftlichkeit des Gerätes eine erhebliche Rolle spielen.

## 16. Elektrische Geräte

### 16.1 Messgeräte

Die elektrische Messtechnik ist soweit entwickelt, dass man heute bemüht ist, jede physikalische Messung, sei es einer mechanischen, thermischen, akustischen, optischen oder auch einer kernphysikalischen Größe, in ein elektrisches Messsignal umzuwandeln, um dieses dann weiterzuverarbeiten und anzuzeigen. Dabei kommt es darauf an, den gewünschten Messwert (z. B. die Temperatur) durch einen geeigneten Signalgeber, d. h. Sensor (z. B. einen temperaturabhängigen elektrischen Widerstand) aufzunehmen und in einer als Signalumformer dienenden elektrischen Schaltung (wie z. B. beim elektronischen Thermometer, Kap. 8.5.4) in eine Spannung oder einen Strom umzuwandeln. Die Anzeige erfolgt mit einem Zeigerinstrument, bei dem die elektrische Größe in eine mechanische – nämlich die Drehung eines Zeigers über einer Skala – umgewandelt

wird, oder aber in digitaler Form. Der Zeigerausschlag eines Zeigerinstruments (z. B. des im folgenden behandelten Drehspul-Messwerks) ist im Prinzip – wenn wir von Messungenauigkeiten absehen – streng proportional zum kontinuierlich veränderlichen elektrischen Strom, d. h., jeder Stromänderung folgt ein entsprechender Zeigerausschlag. Eine solche proportionale Anzeige einer kontinuierlichen Größe bezeichnet man als *analoge Anzeige*. Daneben haben Geräte weite Verbreitung gefunden, die auf *digitaler Anzeige* basieren. Diese sind speziell den Anforderungen elektronischer Computer angepasst (Kap. 15.3.4). Ein digitales elektrisches Signal ändert sich nicht kontinuierlich, sondern nur schrittweise um Vielfache einer vorgegebenen Einheitsstufe (Schrittweite), so dass die Gesamthöhe des Signals durch Abzählung der in ihm enthaltenen Stufen



**Abb. 16.1** Zur Veranschaulichung analoger bzw. digitaler Messmethoden.

gemessen werden kann (*Zähltechnik*). Das Zählergebnis wird dann entweder zur weiteren Verrechnung verwendet, gespeichert oder auf einer Leuchtziffernreihe durch leuchtmiternde Dioden (LED, Kap. 17.12.1) angezeigt. Ein kontinuierliches, also analoges Messsignal muss dazu erst in einem *Analog-Digital-Wandler* (*Analog-Digital-Converter*, abgekürzt *ADC*) in ein digitales Signal umgewandelt werden.

Das Blockschaltbild in Abb. 16.1 zeigt schematisch das Messverfahren und die anschließende analoge bzw. digitale Anzeigemöglichkeit. Im Folgenden wollen wir das Drehspul-Messwerk und das Digital-Messwerk behandeln, und dann den Vorgang der Strom-, Spannungs- und Widerstandsmessung beschreiben.

### 16.1.1 Das Drehspul-Messwerk

Zur analogen Anzeige elektrischer Größen wird fast ausschließlich das Drehspul-Messwerk verwendet. Das Drehspul-Messwerk misst stets Gleichströme. Werden Stromstärken angezeigt, nennt man es ein *Amperemeter*. Wird es zur Anzeige von Spannungen (als *Voltmeter*) verwendet, so wird ebenfalls ein Strom gemessen, nämlich derjenige, der infolge der Spannung durch einen im Messgerät eingebauten Widerstand bekannter Größe  $R$  fließt. Mit dem Ohm'schen Gesetz, Gl. (14-9), wird dann die Anzeigeskala in Spannungswerte umgeiecht.

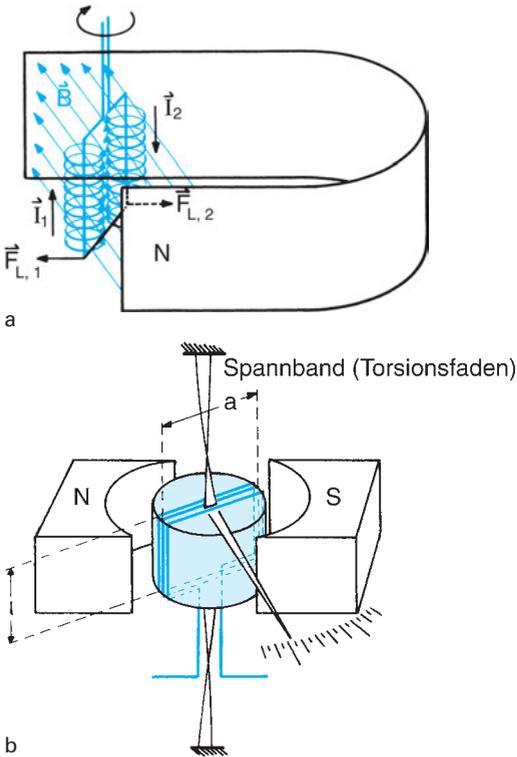
Wechselströme und -spannungen werden gemessen, indem man sie zuvor durch einen im Gerät eingebauten

Gleichrichter (siehe Kap. 15.3.1) in eine Gleichstromgröße umwandelt. Zur Anzeige gelangt dabei der jeweilige Effektivwert (Kap. 14.9.8).

Auch unbekannte Ohm'sche Widerstände lassen sich mit dem Drehspul-Messwerk bestimmen. Dazu wird in das Messgerät eine Spannungsquelle bekannter Ursprungung  $U_0$  (Batterie) eingebaut, die an den unbekanntem Widerstand angelegt wird. Das Messwerk mißt wiederum den Strom  $I$ , und mit dem Ohm'schen Gesetz ( $R = U/I$ ) läßt sich die Anzeige-Skala in  $\Omega$  eichen.

In den üblichen *Vielfach-* oder *Universal-Messgeräten* sind all diese Funktionselemente enthalten. Ihr Skalenfeld enthält Skalen für Gleichspannung und -strom, für Wechselspannung und -strom, sowie für Widerstände. Durch Umschaltknöpfe lässt sich der der Messgröße am besten angepaßte Messbereich einstellen. (Darauf werden wir in Kap. 16.1.3 noch näher eingehen.)

Im Drehspul-Messwerk nutzt man die Lorentz-Kraft des zu messenden Stromes zur Anzeige aus. Dieser fließt durch eine Spule, die drehbar im Magnetfeld eines Permanentmagneten aufgehängt ist. An den in Abb. 16.2 eingezeichneten Stromvektoren  $\vec{I}_1$  und  $\vec{I}_2$  ist zu erkennen, dass der Spulenstrom bezüglich  $\vec{B}$  unterschiedliche Richtungen annimmt. Dementsprechend haben die beiden Lorentz-Kräfte  $\vec{F}_{L,1}$  und  $\vec{F}_{L,2}$  entgegengesetzte Richtungen und bilden ein Kräftepaar, das nach Gl. (2-9) ein Drehmoment bewirkt und die Drahtschleife um ihre vertikale Achse dreht. (Damit wird klar, warum man mit dem Messwerk Wechselströme nicht direkt messen kann: Die Spule würde mit der Frequenz des Wechselstromes hin- und herzittern und wegen ihrer mechanischen Trägheit keine messbaren Ausschläge anzeigen.) Durch einen technischen Kunstgriff — einen Weicheisenkern zwischen den Magnetpolen des Permanentmagneten — wird statt der in Abb. 16.2a gezeichneten



**Abb. 16.2** Drehspul-Messwerk: (a) Prinzip, (b) technische Ausführung mit Weicheisenkern zur Erzeugung eines inhomogenen Magnetfeldes.

Anordnung ein inhomogenes Feld erzeugt (Abb. 16.2b), in dem sich der Betrag des Drehmomentes für einen großen Winkelbereich als unabhängig von der Stellung der Drahtschleife erweist ( $a$  und  $l$  sind Breite und Länge und  $n$  die Anzahl der Drahtschleifen):

$$M = naBl. \quad (16-1)$$

Ein kleiner Strom  $I$  vermag daher die Spule mit dem daran befestigten Zeiger, wenn sie frei aufgehängt ist, im Feld zu drehen. Zum Messgerät wird die Anordnung jedoch erst, wenn dafür gesorgt wird, dass die Drehung, d. h. der Drehwinkel, der Größe des Stromes proportional wird. Dazu setzt man dem Drehmoment der Gl. (16-1) ein mechanisches Drehmoment  $M_{\text{mech}}$  entgegen, das proportional zum Drehwinkel  $\alpha$  wächst:

$$M_{\text{mech}} = M_0 \alpha. \quad (16-2)$$

$M_{\text{mech}}$  lässt sich technisch dadurch erzeugen, dass man die Spule an einem Torsionsfaden aufhängt (Abb. 16.2b). Die Spule dreht sich nun gerade so weit, bis das elektrische erzeugte Drehmoment das mechanische aufhebt:

$$M = -M_{\text{mech}}, \text{ oder}$$

$$\alpha = CI, \text{ wobei } C \text{ eine Konstante ist.} \quad (16-3)$$

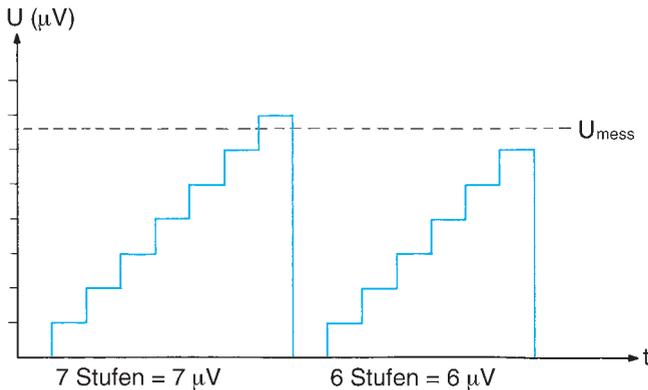
Wir können jetzt die Stromstärke durch Messung dieses Winkels bestimmen. Dazu wird beim *Drehspul-Amperemeter* an der Spule ein Zeiger befestigt, der über eine Skala streicht. Für hochempfindliche *Galvanometer* wäre ein solcher Zeiger zu schwer; man wendet statt dessen einen *Lichtzeiger*. An der Spule ist ein kleiner Spiegel befestigt, an dem ein Lichtstrahl reflektiert wird und dann auf eine Skala fällt. Solche *Spiegelgalvanometer* sind äußerst empfindlich; mit ihnen kann man Ströme bis zu  $10^{-10}$  A messen, während normale Amperemeter für Ströme zwischen  $10^{-3}$  und 10 A geeignet sind.

## 16.1.2 Das Digital-Messgerät

Die Digitaltechnik (Kap. 15.3.4) hat außerordentlich große Bedeutung erlangt, da es gelungen ist, digitalelektronische Bauelemente sehr preiswert herzustellen. In der Messtechnik erobern sich Digital-Geräte wegen der problemlosen Ablesbarkeit der Messwerte und der erreichbaren hohen Genauigkeit immer mehr Einsatzgebiete.

Das Digital-Messgerät misst im Gegensatz zum Drehspulmesswerk direkt Spannungen und muss für Strom- und Widerstandsmessungen umgeeicht werden; daher auch der Name *Digital-Voltmeter*. Die Messspannung  $U_{\text{mess}}$  wird in einem Analog-Digital-Wandler mit einer digitalen Vergleichsspannung  $U$  verglichen, die ständig sich wiederholend von Null in vorgegebenen Stufen (z. B. 1 V) ansteigt (Abb. 16.3). Es wird die Zahl der Stufen gezählt, die benötigt werden, bis die Vergleichsspannung zum ersten Mal die Messspannung übersteigt, und das Zählergebnis wird direkt auf einer Leuchtzifferanzeige sichtbar gemacht. Diese Anzeige nennt man digital; sie springt stets um Vielfache der Einheitsspannung, die einer Stufe entspricht, anstatt, wie die Zeigerstellung des analog arbeitenden Drehspul-Messwerks, sich kontinuierlich zu verändern.

Das Zählergebnis bleibt so lange in der Anzeige, bis (nach ca. 1 s) das nächste Zählergebnis vorliegt. Diese Ergebnisse sind höchstens bis auf eine Einheit der letzten angezeigten Stelle genau, und daher springt die Anzeige der letzten Stelle auch bei einer festen Messspannung. Schwankt allerdings die Messspannung und sind diese Schwankungen größer als



**Abb. 16.3** Zur digitalen Messung einer Spannung.

die Einheit der letzten angezeigten Stelle, dann werden sie vom Messgerät angezeigt. Die Sprungfrequenz der Anzeige ist jedoch wegen der zur Zählung benötigten Zeitdauer von ca. 1 s kein direktes Maß für die Schwankungsfrequenz der Messspannung. Die Anzeige erfolgt meist durch geeignete Anordnung von *Photodioden* (*light emitting diode, LED*; Kap. 17.12.1).

Die Digitalgeräte besitzen hohe Innenwiderstände (ca. 100 M $\Omega$ ) und sind normalerweise genauer (Messgenauigkeit ca. 1% des Vollausschlages) als Drehspul-Messwerke (Messgenauigkeit 1–5% des Vollausschlages). Ein weiterer Vorteil ist, dass man bei Digitalgeräten den Messwert mit der richtigen Lage des Kommas direkt ablesen kann, anstatt mühsam die Koinzidenz von Zeigerausschlag und Skalenwert visuell feststellen zu müssen. Strommessungen sind digital nur indirekt über die durch den Strom  $I$  an einem bekannten Widerstand  $R$  abfallende Spannung  $U = RI$  möglich. Auch das Digital-Messwerk misst, wie das Drehspul-Gerät, nur Gleichstromgrößen; um Wechselspannungen

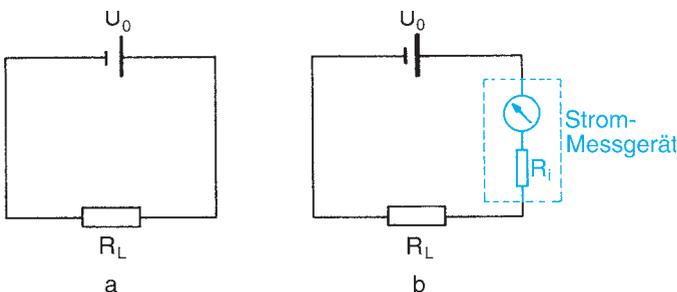
oder -ströme zu messen, ist es nötig, einen Gleichrichter (vgl. Kap. 15.3.1) vorzuschalten.

Auf eine Besonderheit dieser Messgeräte sei noch hingewiesen: Unabhängig davon, wie genau der Messwert ist, erfolgt die Anzeige mit der vollen Zahl von Stellen, also üblicherweise mit 5 oder 6 Stellen. Es kann gut sein, dass von einer solchen Anzeige die letzten Stellen infolge objektbedingter Messfehler gar keine physikalische Bedeutung haben.

### 16.1.3 Messung von Strom und Spannung

Das *Amperemeter* wird im Leiterkreis, dessen Stromstärke gemessen werden soll, in *Serie* zum Lastwiderstand  $R_L$  geschaltet (Abb. 16.4). Zur Messung des Spannungsabfalles an  $R_L$  wird ein *Voltmeter* dagegen parallel zu  $R_L$  gelegt (Abb. 16.5).

Ein ideales Messgerät sollte die zu messende Größe nicht beeinflussen. In dieser Hinsicht ist das Drehspul-Messgerät sehr unvollkommen, denn es verändert den zu messenden Strom oder die zu messende Spannung. Dies



**Abb. 16.4** Strommessung:

$$a) I = \frac{U_0}{R_L}, \quad b) I' = \frac{U_0}{R_i + R_L}.$$

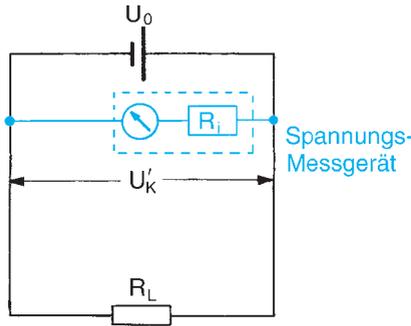


Abb. 16.5 Spannungsmessung. (Der Innenwiderstand des Voltmeters sei  $R_i$ .)

gilt auch, jedoch in geringerem Maße, für das Digital-Messgerät. Unter Umständen ist die Beeinflussung so groß, dass eine sinnvolle Messung unmöglich wird. Daher sind bei der eigentlichen Messung einige Vorsichtsmaßnahmen zu beachten, auf die wir im Folgenden eingehen wollen.

Der Grund, weshalb ein Messgerät den zu messenden Strom verfälschen kann, ist der Innenwiderstand  $R_i$  des Messgerätes.  $R_i$  hat für jeden Messbereich einen anderen Wert und sollte bei Strom-Messung möglichst niedrig, bei Spannungs-Messung aber möglichst groß sein, was wir weiter unten näher begründen werden. Es ist aber eine Eigenart solcher Geräte, dass  $R_i$  gerade bei den empfindlichsten Strom-Messbereichen am größten und bei den empfindlichsten Spannungs-Messbereichen am kleinsten ist, wie Tab. 16.1 zeigt. Gute Geräte tragen eine solche Tabelle auf ihrer Rückseite.

Kennt man die Daten des auszumessenden Stromkreises, so lässt sich die Beeinflussung der Messgröße durch das Messgerät folgendermaßen berechnen:

**Strommessung** An eine Quelle der Spannung  $U_0$  (von ihrer Abhängigkeit von der Belastung wollen wir vorerst absehen) sei ein Lastwiderstand  $R_L$  geschaltet (Abb. 16.4a). Dann fließt der Strom  $I = U_0/R_L$ . Nach Hinzuschalten eines Amperemeters mit Innenwiderstand  $R_i$  (Abb. 16.4b) wird der Strom kleiner:  $I' = U_0/(R_i + R_L)$ . Das Verhältnis  $I'/I = R_L/(R_i + R_L)$  zeigt an, wie sehr der zu messende Strom  $I$  durch  $R_i$  verfälscht wird; je kleiner  $R_i$ , um so geringer die Verfälschung. Ist für eine quantitative Analyse der Abweichung eines Messwertes  $I'$  von  $I$  der Lastwiderstand  $R_L$  nicht bekannt, so ist zumindest eine Abschätzung des durch  $R_i$  bedingten Messfehlers zu empfehlen.

**Spannungsmessung** Schalten wir ein Voltmeter in den Stromkreis (Abb. 16.5), so wird der zu messende Spannungswert ebenfalls durch den Innenwiderstand  $R_i$  des Messgerätes verfälscht, denn der Stromfluss durch das Messgerät stellt eine zusätzliche Belastung der Spannungsquelle dar, was dazu führt, dass die Klemmenspannung  $U_K$  vermindert wird. Mit Gln. (14-14) und (14-23) findet man, dass die Klemmenspannung  $U_K$  (die sich wegen des durch  $R_L$  fließenden Stromes schon von der Ursprungspannung  $U_0$  unterscheidet) durch Einschalten des Messgerätes auf den Wert  $U_K$  verkleinert wird (Abb. 16.5):

$$U_K = U_0 \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R_L} + \frac{R_0}{R_i}}, \tag{16-4}$$

wobei  $R_i$  der Innenwiderstand des auf den entsprechenden Spannungsbereich eingestellten Messgerätes und  $R_0$  der Innenwiderstand der Spannungsquelle ist. Nur bei  $R_L \gg R_0$  und  $R_i \gg R_0$  bleibt die Verfälschung von  $U_K$  klein.

Ein Beispiel soll zur Vorsicht bei Strom- oder Spannungsmessungen mahnen. Eine Nervenzelle stellt eine galvanische Spannungsquelle mit einer Leerlaufspan-

Tab. 16.1 Typische Innenwiderstände  $R_i$  für verschiedene Strom- und Spannungsbereiche eines Drehspul- bzw. Digital-Messgerätes

Drehspul-Messgerät		Digital-Messgerät	
0,3 mA	3 kΩ	1 mA (AC, DC)	100 Ω
3 mA	150 Ω		
50 mA	30 Ω		
0,3 A	1,5 Ω		
1,5 A	0,3 Ω	1 A (AC, DC)	0,5 Ω
150 mV	500 Ω	10 mV – 1 V (DC)	1000 MΩ
1,5 V	5 kΩ	10 mV – 1000 V (AC)	1 MΩ
6 V	20 kΩ	10 V – 1000 V (DC)	10 MΩ
150 V	500 kΩ		
600 V	2 MΩ		

nung von ca. 100 mV dar. Sie hat einen Innenwiderstand  $R_O$  von ca. 10 M $\Omega$ . Wir wollen diese Spannung mit einem Voltmeter messen, dessen Innenwiderstand im Messbereich bis 100 mV den Wert  $R_i = 100 \Omega$  hat. Es soll keine zusätzliche Last zugeschaltet sein ( $R_L = \infty$ ). Dann ist nach Gl. (16-4) der angezeigte Spannungswert  $U_K$

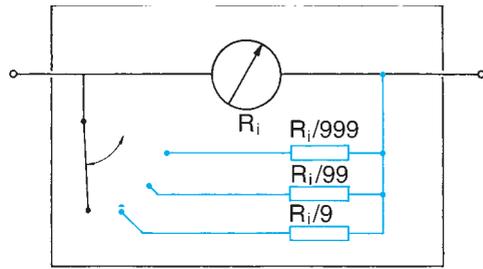
$$U_K = U_0 \frac{1}{1 + \frac{10^7}{10^2}} \approx 10^{-5} U_0. \tag{16-5}$$

Die Spannungsquelle wird also bei dem Messvorgang durch das Voltmeter praktisch kurzgeschlossen, so dass nurmehr der  $10^{-5}$ te Teil der Urspannung  $U_0$  angezeigt wird. Eine solche Messung ist also unsinnig; sie verletzt die aus Gl. (16-4) folgende Bedingung  $R_i \gg R_O$  gr $\ddot{u}$ blich.

Wir haben gesehen, dass bei einer sinnvollen Spannungsmessung die Quelle nur geringf $\ddot{u}$ gig belastet werden darf. Dies l $\ddot{a}$ sst sich alternativ zu der oben beschriebenen Bedingung eines gro $\ddot{u}$ sen Innenwiderstandes  $R_i$  auch dadurch erreichen, dass die Messspannung nur mehr zur Steuerung des Stromes in einer Verst $\ddot{a}$ rkerschaltung benutzt wird. Dieser Strom kann dann mit einem unempfindlichen Messwerk (mit kleinem  $R_i$ ) gemessen werden.

**Messbereichserweiterung** Den *Messbereich* eines Strom- oder Spannungsmessger $\ddot{a}$ tes bezeichnet man durch denjenigen Strom bzw. diejenige Spannung, bei denen Vollausschlag, d. h. ein Zeigerausschlag  $\ddot{u}$ ber die ganze Skala erzielt wird. Durch geeignetes Zuschalten von Widerst $\ddot{a}$ nden gelingt es, sowohl die Strom-Messbereiche als auch die nach Um-eichung der Skala erhaltenen Spannungs-Messbereiche zu ver $\ddot{a}$ ndern. In Vielfach-Messger $\ddot{a}$ ten geschieht dies durch einfaches Umschalten von Drehschaltern, wodurch der Innenwiderstand  $R_i$  des Ger $\ddot{a}$ tes ge $\ddot{a}$ ndert wird.

Gr $\ddot{o}$ bere Str $\ddot{o}$ me kann man messen, wenn man einen kleinen Widerstand zum eigentlichen Messinstrument (Messwerk) parallel schaltet, so dass ein fester Bruchteil des zu messenden Stromes um das Messwerk herumflie $\ddot{s}$ t. Unter einer Messbereichserweiterung um den Faktor  $n$  wollen wir verstehen, dass das Messwerk Vollausschlag zeigt, wenn der Messstrom  $n$ -mal so gro $\ddot{s}$ t ist, wie der Strom  $I_{\max}$ , der zum Vollausschlag des Messwerkes allein f $\ddot{u}$ hrt. Zur Berechnung des Parallelwiderstandes ben $\ddot{o}$ tigen wir die Kirchhoff'schen Gesetze (Kap. 14.6.3): Wenn der Messstrom  $I = nI_{\max}$  ist, muss



**Abb. 16.6** Messbereichserweiterung bei der Strommessung.

der Anteil  $(n - 1) I_{\max}$  am Messwerk vorbei durch den Widerstand  $R_0$  flie $\ddot{s}$ en. Da sich bei Parallelschaltung die Str $\ddot{o}$ me umgekehrt verhalten wie die Widerst $\ddot{a}$ nde  $(n - 1) I_{\max}/I_{\max} = R_i/R_0$ , wobei  $R_i$  der Eigenwiderstand des Messwerkes ist, finden wir

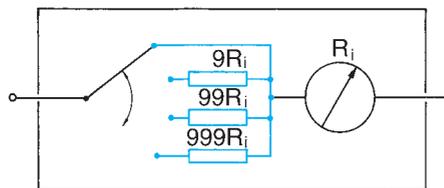
$$R_0 = \frac{R_i}{(n - 1)}. \tag{16-6}$$

Abb. 16.6 zeigt ein Amperemeter mit verschiedenen Messbereichen, das aus Messwerk und verschiedenen, wahlweise einschaltbaren Parallelwiderst $\ddot{a}$ nden besteht.

Zur Messung gro $\ddot{s}$ er Spannungen schaltet man einen gro $\ddot{s}$ en Widerstand in Serie vor das Messwerk, so dass an ihm ein fester Bruchteil der Spannung abf $\ddot{a}$ llt und nur der  $\ddot{u}$ brige Teil am Messwerk. Die zur Messbereichserweiterung des Voltmeters erforderlichen, in Serie mit dem Messwerk zu schaltenden Widerst $\ddot{a}$ nde  $R_0$  berechnen wir ebenfalls mit den Kirchhoff'schen Gesetzen: Das Voltmeter soll Vollausschlag zeigen, wenn die angelegte Spannung  $n$ -mal so gro $\ddot{s}$ t ist wie die Spannung  $U_{\max}$ , die zum Vollausschlag des Messwerkes allein f $\ddot{u}$ hrt. Dann muss die Messspannung so aufgeteilt werden, dass  $U_{\max}$  am Messwerk und  $(n - 1) U_{\max}$  am Vorschaltwiderstand  $R_0$  abf $\ddot{a}$ llt. Da bei Serienschaltung die abfallenden Teilspannungen sich verhalten wie die Widerst $\ddot{a}$ nde  $(n - 1) U_{\max}/U_{\max} = R_0/R_i$ , erhalten wir f $\ddot{u}$ r  $R_0$  (Abb. 16.7):

$$R_0 = R_i(n - 1). \tag{16-7}$$

Abb. 16.7 zeigt ein *Voltmeter* aus Messwerk und Serienwiderst $\ddot{a}$ nden, die zur Wahl verschiedener Spannungsmessbereiche zugeschaltet werden k $\ddot{o}$ nnen.



**Abb. 16.7** Messbereichserweiterung bei der Spannungsmessung.

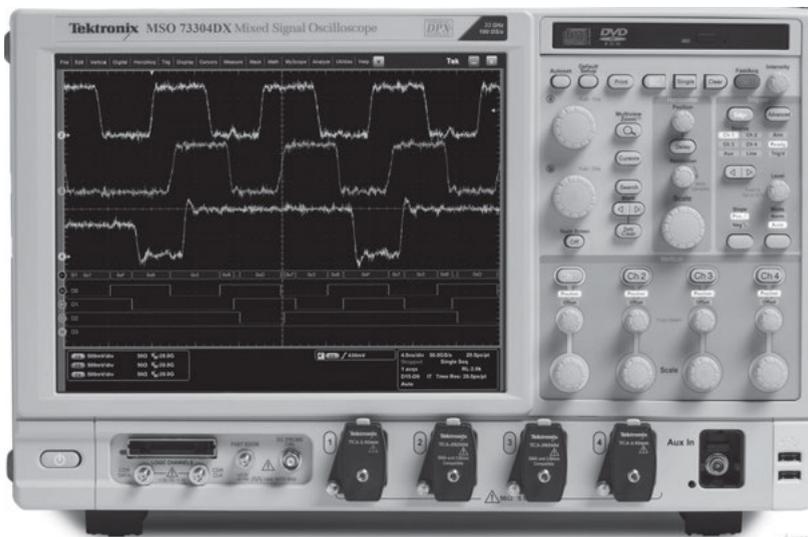
### 16.1.4 Elektronenstrahl-Oszilloskop (Oszillograph) und Bildschirm

Elektrische Signale lassen sich mit der *Elektronenstrahlröhre* auf einem Bildschirm direkt sichtbar machen. Diese Art der Anzeige zeichnet sich durch besondere Vielseitigkeit aus. Grob lassen sich die Anwendungsbereiche gliedern in

1. die Anzeige analoger und digitaler elektrischer Messgrößen mit dem Elektronenstrahl-Oszilloskop,
2. die Wiedergabe digitaler Daten aus elektronischen Datenverarbeitungsanlagen auf einem Bildschirm, und
3. die elektronische Bilderzeugung und -übertragung z. B. in Fernsehgeräten, Elektronenmikroskopen oder Radaranlagen.

**Oszilloskop (Oszillograph)** Nahezu jede Messgröße, sei sie mechanischen, thermischen oder optischen Ursprungs, lässt sich in ein elektrisches Signal transformieren, wodurch jede dieser Größen mit dem *Oszilloskop* (Abb. 16.8) erfasst werden kann. Damit ist das Oszilloskop auch zu einem wichtigen Anzeigeinstrument in der Medizin geworden, das beispielsweise auf Intensivstationen zur

Sichtkontrolle von Pulsschlag, Blutdruck, EKG und anderen Kontrollgrößen eingesetzt wird. Die Vorteile des Oszilloskops gegenüber üblichen elektrischen Messgeräten bestehen darin, dass die Anzeige praktisch leistungslos und verzögerungsfrei erfolgt, und dass sich Wechselspannungen bzw. -ströme in ihrem zeitlichen Verlauf darstellen lassen. (Ein normales Voltmeter gibt nur Zeit-Mittelwerte!) Bei sinusförmigen Größen kann man so beispielsweise Frequenz- und Phasenbeziehungen ablesen, bei nicht-sinusförmigen Größen erhält man Auskunft über ihre Form, etwa über die Form der Zacken im EKG. Zur Durchführung quantitativer Spannungsmessungen mit dem Oszilloskop dient ein auf dem Bildschirm aufgedrucktes Raster, an dem man die Spannungsamplituden  $U_0$  der Wechselspannung — wie auf einem Millimeterpapier gezeichnet — direkt ablesen kann, allerdings nur mit mäßiger Genauigkeit von einigen Prozent. Es gibt *Speicher-Oszilloskope*, die durch geeignetes Nachleuchtverfahren die aufgenommene  $U(t)$ -Grafik längere Zeit auf dem Bildschirm speichern. Bei einem digitalen Oszilloskop (Digital Storage Oscilloscope, DSO) können Daten auf einem Speicherschirm abgelegt und beliebig lange nach



**Abb. 16.8** Frontplatte eines Oszilloskops mit Bildschirm, auf dem verschiedene Wechselspannungen  $U(t)$  als grafische Darstellung wiedergegeben sind. Abdruck mit freundlicher Genehmigung der Firma Tektronix.

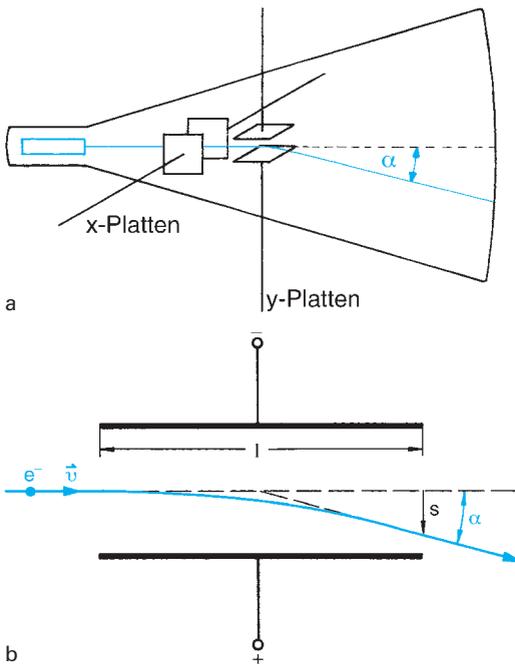


Abb. 16.9 (a) Elektronenstrahlröhre, (b) Ablenkung des Elektronenstrahls im Kondensator.

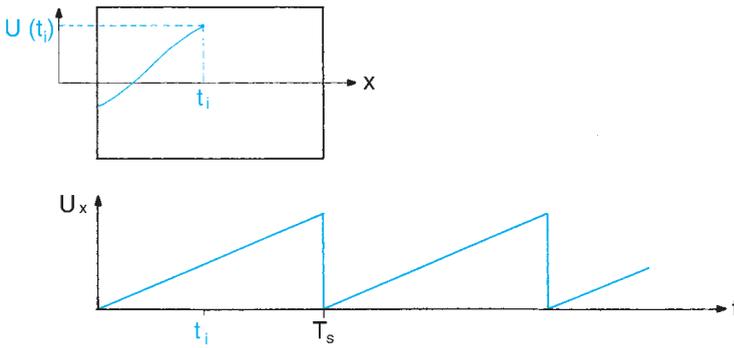
der Messung wieder zur Verfügung gestellt, ausgewertet oder auf einen PC übertragen werden. Zuvor werden im DSO durch einen Analog-Digital-Wandler die primär analog gewonnenen Signale digitalisiert.

Das Oszilloskop besteht im Wesentlichen aus drei Funktionselementen, nämlich der Elektronenstrahlröhre, der Y-Ablenkungseinheit und der X-Ablenkungseinheit. Die beiden Ablenkungseinheiten lassen sich entweder durch Magnetfelder (Ablenkspulen) oder durch elektrische Felder (Ablenkkondensatoren) realisieren. Im Folgenden beschränken wir uns auf letzteren Fall.

Die **Elektronenstrahlröhre** ist eine Vakuumröhre, in der, wie in Kap. 15.2.1 besprochen, Elektronen erzeugt, durch elektrische Felder beschleunigt und gebündelt werden und durch eine Öffnung in der Anode in den Röhrenraum fliegen. Dort sind zwei Paare von Kondensatorplatten senkrecht zueinander angeordnet (Abb. 16.9a). Eine Mess-Spannung, die an eines der Plattenpaare angelegt wird, lenkt den Elektronenstrahl ab, und der Ablenkwinkel  $\alpha$  ist ein Maß für die Spannung.

Ein Elektron fliege mit der Geschwindigkeit  $v$  parallel zu den Platten in einen geladenen Ablenkkondensator, wobei  $v$  durch die Beschleunigungsspannung  $U_B$  gegeben ist ( $mv^2/2 = eU_B$ , s. Kap. 15.2.1). Im elektrischen Feld zwischen den Platten greift am Elektron die Kraft  $F = -eE = eU/d$  an, wo  $d$  der Plattenabstand,  $U$  die Kondensator-Spannung und  $E$  die Feldstärke bedeuten. Dadurch wird das Elektron auf einer parabelförmigen Bahn zur positiven Platte hin beschleunigt (Abb. 16.9b). Die Ablenkung  $s$  aus der geradlinigen Richtung ist nach Gl. (1-29):  $s = (a/2)t^2$ . Aus  $F = ma$  folgt  $a = (e/m)E$ . Die Zeit zum Durchqueren des Kondensators ist  $t = l/v$ , wobei  $l$  die Länge der Platten bedeutet. Setzen wir ein, so erhalten wir  $s = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{U}{d} \left(\frac{l}{v}\right)^2$ . Nach Verlassen des Ablenkkondensators fliegt das Elektron geradlinig unter dem Winkel  $\alpha$  weiter; für ihn gilt  $\tan \alpha = 2s/l$ .

Durch die zueinander senkrecht angeordneten Kondensatoren kann der Strahl sowohl waagrecht (X-Ablenkung) als auch senkrecht (Y-Ablenkung) ausgelenkt werden. Der Elektronenstrahl trifft dann auf einen mit Fluoreszenzfarbe bestrichenen Glasschirm — den *Bildschirm* —, wo der Auftreffort durch einen Leuchtfleck markiert wird. Sowohl Helligkeit als auch Größe des Leuchtflecks lassen sich verändern (Knöpfe *Helligkeit* und *Focus*). Normalerweise legt man die zu messende Spannung  $U$  direkt an die Y-Platten (*Vertikal-Ablenkung*). Falls  $U$  eine Gleichspannung ist, wird der Leuchtfleck vertikal verschoben, bei einer Wechselfspannung entsteht ein vertikaler Strich, dessen Länge der Spannungsamplitude proportional ist. Zur Ablenkung über den ganzen Bildschirm benötigt man (im unempfindlichen Messbereich) einige Volt. Um auch kleinere und größere Spannungen messen zu können, ist den Y-Ablenkungsplatten ein elektronischer Verstärker-Teil (siehe Kap. 15.3.2) vorgeschaltet. Auf diese Weise kann man durch geeignete Wahl der Verstärkung (bzw. Abschwächung) am Knopf *Y-Verstärkung* mit Spannungen zwischen z. B. 1 mV und 500 V messbare Ablenkungen des Elektronenstrahls erreichen. Der Bereichsschalter des Verstärkers ist in festen Schritten geeicht (Angabe in Spannung pro Skalenteil des Bildschirm-Rasters), so dass man direkt, nach Abzählen der Rasterstriche, durch Multiplizieren mit

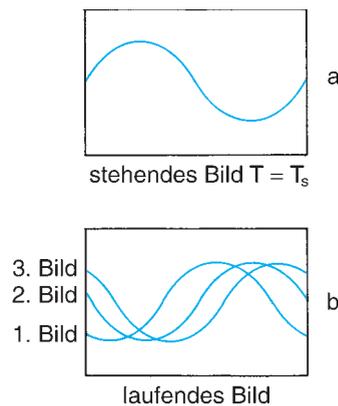


**Abb. 16.10** Aufzeichnung eines kontinuierlichen Spannungsverlaufs  $U(t)$  auf dem Oszilloskopschirm mit Hilfe der Sägezahnspannung  $U_x$ . (Dargestellt ist der Spannungsverlauf bis  $t_i$ , der sich durch das Nachleuchten des Schirms ergibt.)

dem Verstärkungsfaktor des eingestellten Bereichs die gesuchte Spannung erhält.

Die **X- oder Horizontal-Ablenkung** ist im Prinzip aufgebaut wie die Y-Ablenkungseinheit. Man kann die Größe einer Gleichspannung oder die Amplitude einer Wechselspannung also ebenso messen, indem man sie an die Buchsen der X-Ablenkung anlegt. Um jedoch den zeitlichen Verlauf einer Wechselspannung aufzeichnen zu können, ist die X-Einheit mit einer besonderen elektrischen Einheit, der *t-Einheit* (oder *Zeitbasis*) versehen. Diese liefert intern eine Spannung, die mit der Zeit  $t$  linear wächst, nach einem einstellbaren Zeitintervall abrupt auf Null zurückspringt und erneut ansteigt (*Sägezahnspannung*) (Abb. 16.10). Diese Spannung wird an das Plattenpaar angelegt. Eine an die Y-Platten angelegte Spannung wird so mit konstanter Geschwindigkeit über das Bildfeld horizontal verschoben. Jedem Zeitpunkt  $t_i$  ist also ein bestimmter Ort in der X-Richtung zugeordnet, und zu diesem Zeitpunkt ruft die Spannung  $U(t_i)$  eine bestimmte Y-Ablenkung hervor. Da der Fluoreszenzschirm einige Bruchteile von Sekunden nachleuchtet, nachdem der Elektronenstrahl schon weiter gelaufen ist, wird auf diese Weise der Spannungsverlauf kontinuierlich aufgezeichnet. Weil die an den X-Platten anliegende Spannung eine Sägezahnspannung ist, wird die zeitliche Ablenkung des Bildpunktes vom linken zum rechten Bildschirmrand periodisch wiederholt. Für Spannungen hoher Frequenz muss dies rasch, bei niedrigen Frequenzen langsam geschehen. Die Frequenz des Sägezahns muss sich daher in weiten Bereichen ändern lassen

(Knopf *t-Ablenkung*); sie ist üblicherweise zwischen 0,02 Hz und 1 MHz vorwählbar. Stimmt die Anstiegszeit  $T_S$  mit der Periodendauer  $T$  der aufzuzeichnenden Wechselspannung überein, so erscheint auf dem Bildschirm genau der Spannungsverlauf  $U(t)$  während einer Periode. Diese Grafik wird dauernd reproduziert, wobei ein *stehendes Bild* entsteht (Abb. 16.11a). Fallen in das Zeitintervall  $T_S$  genau  $n$  Perioden, d. h.  $T_S = nT$ , so werden  $n$  Perioden als stehendes Bild aufgezeichnet. Etwas anderes passiert, wenn  $T$  nicht ganzzahliges Vielfaches von  $T_S$  ist: Dann wird bei jedem Durchlauf von links nach rechts ein anderes Bild geschrieben. Man erhält also kein stehendes Bild mehr, sondern ein *laufendes Bild* (Abb. 16.11b), das sich nicht ohne weiteres auswerten lässt. Bei einer nicht streng periodischen Wechselspannung (z. B. einer Impulsfolge oder EKG-Spannung) erhält man auf diese Weise stets



**Abb. 16.11** (a) Stehendes und (b) laufendes Bild auf dem Oszilloskopschirm.

laufende Bilder. Durch den Kunstgriff der *Triggerung* lässt sich jedoch auch in diesen Fällen meist ein stehendes Bild erzeugen. Hierbei wird anstelle der Sägezahnspannung eine Impulsfolge von einzelnen Sägezähnen verwendet. Die *Wartezeit* zwischen zwei Zähnen, während der die horizontale Ablenkung Null ist, bestimmt das Messsignal selbst: Überschreitet es zum Beispiel einen bestimmten Spannungswert  $U_T$  (er kann am Oszilloskop eingestellt werden), so wird elektronisch ein Sägezahnimpuls ausgelöst (*getriggert*), und der während  $T_S$  folgende Ausschnitt der Wechselspannung wird auf dem Bildschirm aufgezeichnet. Danach wartet der Sägezahnspannungs-Generator so lange, bis die Wechselspannung aufs neue die Triggerspannung  $U_T$  überschreitet, wonach wiederum ein Sägezahnimpuls ausgelöst wird, usw. Dadurch sind alle aufgezeichneten Spannungsbilder  $U(t)$  deckungsgleich. Für eine periodische Spannung bedeutet dies, dass stets der gleiche Ausschnitt der  $U(t)$ -Kurve gezeichnet wird, wodurch ein stehendes Bild entsteht. Dasselbe gilt für eine Folge gleicher Impulse, die in unregelmäßigen Abständen aufeinander folgen.

**Zweistrah-Oszilloskop** In ihm lassen sich auf demselben Bildschirm zugleich zwei verschiedene Spannungsverläufe darstellen. Dazu sind entweder zwei gesonderte Elektronenstrahlquellen eingebaut, oder ein Elektronenstrahl wird durch hochfrequente elektronische Umschaltung zur sukzessiven Darstellung beider Spannungsverläufe verwendet. X-Ablenkungseinheit und Triggerung sind für beide Elektronenstrahlen gleich. Mit dieser Anordnung lassen sich z. B. die Phasen- und Amplitudendifferenz zwischen zwei Spannungen gleicher Frequenz direkt bestimmen.

**Bildschirm** Wie wir gesehen haben, liefert das Oszilloskop die analoge Darstellung von Zeitfunktionen, also Kurven. Zur Darstellung zweidimensionaler Bilder, wie sie bei Bild-Synthesegeräten als Tomogramme, Szintigramme oder als Fernsehbilder entstehen, bedient man sich der Bildschirnröhre. In ihr erfolgt die Strahlablenkung nicht im Plattenkondensator (mit dieser Konstruktion sind

nur kleine Ablenkwinkel möglich), sondern mit Magnetfeldern. Diese werden durch Spulen erzeugt, welche außen den Röhrensockel umgeben. Die Magnetfelder werden so variiert, dass der Elektronenstrahl periodisch den Bildschirm von links oben nach rechts unten in 400–800 (beim deutschen Fernsehen 625) Zeilen durchläuft, worauf er wieder zum Ausgangspunkt zurückspringt und dasselbe Spiel vom neuem beginnt. Sind die Laufgeschwindigkeit und die Zeilendichte groß genug, so wirkt der Bildschirm gleichmäßig hell. Eine Bildstruktur lässt sich dadurch erzeugen, dass man die Intensität des Elektronenstrahls und damit die Helligkeit auf dem Bildschirm während des Durchlaufs steuert (vgl. hierzu Kap. 15.2.1). Diese Steuerung kann analog oder digital vorgenommen werden. Sie erfolgt digital bei Sichtbildschirmen von Datenverarbeitungsanlagen, da diese die Steuersignale digital ausgeben. Digital bedeutet hier: Die Zeilen sind in nebeneinander liegende Punkte gerastert, die entweder *hell* oder *dunkel* sind. So lassen sich Bilder oder Texte Punkt für Punkt durch binäre Signale aufbauen.

Zur Wiedergabe farbiger Bilder, wie sie z. B. außer beim Farbfernsehen für die Darstellung von Szintigrammen üblich sind (wobei die verschiedenen Farben zur deutlichen Kennzeichnung unterschiedlicher  $\gamma$ -Strahlungsintensitäten dienen), wird der Elektronenstrahl ebenfalls gerastert (ähnlich wie bei einer farbigen Buchillustration), und zwar mittels einer Lochmaske mit ca. 400 000 Löchern, die etwa 1 cm vor dem Leuchtschirm angebracht ist. Das Bild entsteht also aus ca. 400 000 Rasterpunkten, die man mit der Lupe leicht erkennen kann. Jeder dieser Rasterpunkte enthält 3 Einzelpunkte, welche in den Farben Rot, Grün bzw. Blau angeregt werden. Durch additive Mischung dieser drei Farben im Auge (das die Punkte nicht auflösen kann) und durch Variation der Einzelhelligkeiten können alle Farben des Spektrums erzeugt werden. So entsteht beispielsweise Gelb durch Addition von Rot und Grün; Braun entsteht aus Orange durch Verringerung der Elektronenstrahlintensität usw. Auch ein Schwarz-Weiß-Bild (neutraler Grauton) kann so erzeugt werden. Zur Anregung

der drei Farbpunkte in jedem Rasterpunkt dienen getrennte Elektronenstrahl-Erzeugersysteme, die entweder beim Bildschirmgerät im Labor von einem Rechner oder beim Fernsehgerät vom Fernsehsender gesteuert werden. Die kommerziellen Fernsehsysteme (PAL, SECAM, NTSC) unterscheiden sich lediglich in der Art, wie die zur Steuerung jedes Farbrasterpunktes benötigten Signale vom Sender übertragen werden. Auf die Fernsehübertragung werden wir in Kap. 16.2.4 zurückkommen.

Eine Alternative zum Elektronenstrahlbildschirm ist der *Flachbildschirm*. Dieser stellt einen *Festkörperbildspeicher* dar, der aus einer zweidimensionalen Matrix von einzelnen eigenständigen Bildelementen, den *Pixeln* besteht. Hochauflösende Grafikbildschirme können  $1200 \times 1600$  Pixel und mehr enthalten. Der Erfolg der Flachbildschirme ist sowohl durch die Digitaltechnik als auch durch die Miniaturisierung der Pixelelemente ermöglicht worden. Letztere sind LCDs (*liquid crystal displays*) mit steuerbarer Transmission von Licht oder selbstleuchtende LEDs (*light emitting diodes*, Kap. 17.12.1).

Plasmabildschirme (Plasma Display Panel, PDP) sind Flachbildschirme mit vornehmlich großen Bildschirmdiagonalen ( $> 42''$ ,  $1'' = 1 \text{ Zoll} = 2,54 \text{ cm}$ ). Spezialisierte Hersteller bieten sogar bis zu 152 Zoll große Bildschirme (mit einer Bild diagonalen von umgerechnet 3,86 m) an. Das verschiedenfarbige Licht wird in den Panels mit Leuchtstoffen erzeugt. Als Leuchtstoffe dienen Edelgase, die bei Gasentladungen in einem Plasma (ionisiertes Gas)

zur Lichtemission angeregt werden. Vorteile der Plasma-Technologie sind der vertikal und horizontal nahezu unbegrenzt große Blickwinkel ohne Farb- und Kontrastbeeinträchtigung und die extrem kurze Reaktionszeit der einzelnen Bildzellen, die im Nanosekundenbereich liegt.

### 16.1.5 Analoge Ladungsmessung

*Bewegte Ladungen*, Ströme also, erzeugen Magnetfelder, die man, wie wir beim Galvanometer gesehen haben, zur Strommessung ausnutzt. *Ruhende Ladungen* — etwa die Ladungsmenge  $Q$  auf den Platten eines Kondensators — lassen sich ebenfalls mit solchen Strommessgeräten nachweisen, indem man sie nämlich durch das Messgerät abfließen lässt. Ruhende Ladungen lassen sich durch die von ihnen erzeugten elektrischen Felder auch *statisch* messen, wobei die Coulomb'sche Abstoßung gleichnamiger Ladungen ausgenutzt wird. Solche Ladungsmessgeräte nennt man *Elektrometer*. Sie stellen ein Beispiel für die Anwendung von Coulomb-Kräften dar, sind aber in dieser analogen Form nur zu qualitativen Demonstrationsversuchen geeignet. Für quantitative Messungen mit hoher Präzision werden heute vornehmlich digitale Methoden verwendet.

Ein einfaches Beispiel für ein Elektrometer ist in Abb. 16.12 dargestellt. In einem Gehäuse  $H$  ist ein Kondensator isoliert eingebaut, an dessen einer Platte  $P_1$  eine hauchdünne, leichte Metallfolie als Zeiger  $Z$  beweglich aufgehängt ist. Lädt man jetzt die Platte  $P_1$  mit der zu messenden Ladung  $Q$  auf, so wird auch die Folie  $Z$  gleichnamig aufgeladen. Sie wird daher von der Platte  $P_1$  durch die Coulomb-Kraft (Gl. (14-1)) abgestoßen und zusätzlich von der geerdeten Platte  $P_2$  angezogen. Die Folge ist, dass das Zeigerblättchen gegen sein Gewicht angehoben wird, und zwar um so stärker, je größer die zu messende Ladung  $Q$  ist. Wenn die Skala  $S$  geeignet geeicht ist, zeigt sie die Ladung direkt an. Mit hochempfindlichen Elektrometern lassen sich noch Ladungsmengen von einigen hundert Elementarladungen messen.

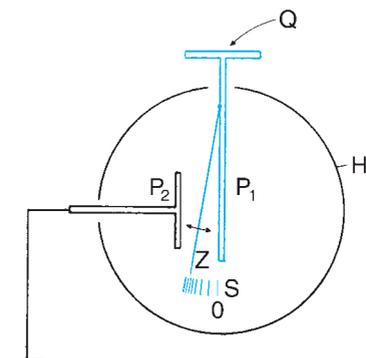


Abb. 16.12 Elektrometer.

### 16.1.6 Messung von Ohm'schen Widerständen

Um einen Ohm'schen Widerstand  $R$  zu messen, genügt es im Prinzip, eine bekannte

Spannung  $U$  an den Widerstand anzulegen, den durch  $R$  fließenden Strom  $I$  zu messen und dann nach dem Ohm'schen Gesetz  $R = U/I$  zu berechnen. In Vielfach-Messgeräten ist häufig eine Spannungsquelle (Batterie) eingebaut und eine eigene Ohm-Skala auf dem Skalenfeld enthalten.

Zur Präzisionsmessung von Widerständen und auch von Spannungen bedient man sich jedoch sogenannter *Null-Methoden*. Das Prinzip hierbei ist, dass der zu messenden unbekannt GröÙe eine zweite, kontinuierlich variable GröÙe entgegengeschaltet wird und mit Hilfe eines *Null-Gerätes* der Abgleich, d. h. die Differenz der beiden GröÙen kontrolliert wird.

Als Beispiel einer Null-Messung wollen wir die Messung Ohm'scher Widerstände mittels der *Wheatstone'schen Brückenschaltung* beschreiben. Wir legen parallel zum Widerstandsdraht  $AB$ , der mit einer Ablese-skala versehen ist, den zu messenden Widerstand  $R_x$  und einen bekannten Vergleichswiderstand  $R$  (Abb. 16.13). In der Leiterschleife  $U_0 - A - D - B - U_0$  verschieben wir den Abgriff  $D$ , teilen also  $U_0$  auf in  $U_{AD}$  und  $U_{BD}$ , bis das als *Brücke* zwischen die Punkte  $C$  und  $D$  gelegte, sehr empfindliche Strommessgerät keinen Brückenstrom mehr anzeigt. Dann liegt zwischen  $C$  und  $D$  keine Spannung mehr, und die Spannung  $U_{AC}$  ist gleich der im Teil der Länge  $l$  des Widerstandsdrahtes abfallenden Spannung  $U_{AD}$ , und die Spannung  $U_{BC}$  ist gleich der über dem Leiterstück der Länge  $(l_0 - l)$  abfallenden Spannung

$U_{BD}$ . Mit den durch die Zweige  $ACB$  und  $ADB$  fließenden Strömen  $I_1$  bzw.  $I_2$  gilt nach dem Ohm'schen Gesetz:

$$U_{AC} = U_{AD} \quad \text{bzw.} \quad I_1 R_x = I_2 \rho \frac{l}{A}, \quad \text{und} \quad (16-8)$$

$$U_{BC} = U_{BD} \quad \text{bzw.} \quad I_1 R = I_2 \rho \frac{l_0 - l}{A}. \quad (16-9)$$

$\rho$  und  $A$  sind dabei spezifischer Widerstand und Querschnittsfläche des Widerstandsdrahtes. Durch Dividieren der Gl. (16-8) mit Gl. (16-9) erhalten wir schließlich:

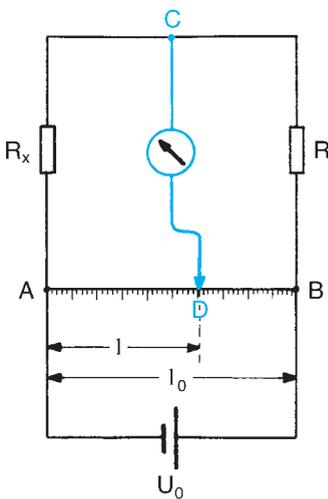
$$\frac{R_x}{R} = \frac{l}{l_0 - l}, \quad \text{und} \quad R_x = R \frac{l}{l_0 - l}. \quad (16-10)$$

Der unbekannt Widerstand  $R_x$  lässt sich also durch die Nullabstimmung der Brücke zwischen  $C$  und  $D$  aus den bekannten GröÙen  $R$ ,  $l$  und  $l_0$  berechnen.

Will man den Ohm'schen Widerstand eines Elektrolyten messen, so ist diese Methode abzuwandeln, denn in Kap. 15.2.3 haben wir gesehen, dass wegen der Polarisation der Elektroden der Widerstand des Elektrolyten mit Gleichstrom nicht zu bestimmen ist. Daher betreibt man die Brückenschaltung der Abb. 16.13 mit Wechselspannung. Das Null-Instrument kann dann durch einen Kopfhörer ersetzt werden, in dem der Brummtton der Wechselspannung genau dann verschwindet, wenn die Brücke abgeglichen ist.

### 16.1.7 Rauschen

Infolge der thermischen (unregelmäßigen) Bewegungen, denen die Teile (Atome, Moleküle etc.) jedes physikalischen Systems unterworfen sind, und die zu geringen unregelmäßigen Änderungen der Energieverteilung im System (*Fluktuationen*) führen, lassen sich MessgröÙen nur bis zu einer dadurch bedingten unteren Grenze bestimmen. Sind die Schwankungen des Messsignals durch thermische Einflüsse (das sog. *Rauschen*) wesentlich größer als das Messsignal selbst, so geht dieses im Rauschen unter und kann nicht mehr bestimmt werden. Das Verhältnis von SignalgröÙe zur GröÙe der Störung wird durch das *Signal-Rausch-Verhältnis* charakterisiert. Wegen des thermischen Rauschens hätte es keinen Sinn, wenn die Empfindlichkeit von Auge und Ohr größer wäre, da wir dann dieses störende thermische Rauschen wahrnehmen würden. Bei der Übertragung von Funksignalen einer Weltraumsonde lässt sich das Signal-Rausch-Verhältnis dadurch verbessern, dass gewisse Teile des elektrischen Empfän-



**Abb. 16.13** Wheatstone'sche Brückenschaltung zur Messung von elektrischen Widerständen.

gers auf die Temperatur des flüssigen Heliums (4,2 K) abgekühlt werden.

Einer der vielen Vorteile der Digitaltechnik gegenüber der Analogtechnik ist, dass der Einfluss des Rauschens auf die Signalanzeige um Größenordnungen kleiner gehalten werden kann, und daher das Signal-Rausch-Verhältnis extrem günstig ist. Nur aus diesem

Grund ist es möglich geworden, mit einem nur 100 Gramm schweren Handtelefon (Handy) und entsprechend kleiner Sende- und Empfangsleistung über Satellit über den ganzen Globus zu telefonieren, oder aus der Umgebung des Pluto Satellitensignale zu empfangen, die um viele Zehnerpotenzen unter dem analogen Rauschpegel liegen.

## 16.2 Technische elektrische Geräte

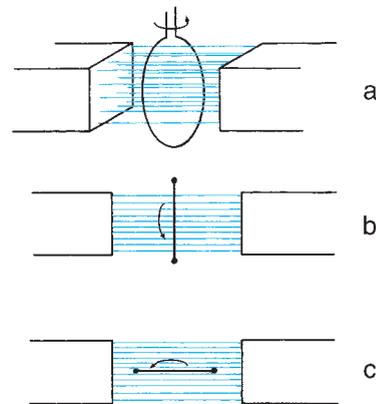
### 16.2.1 Dynamo-Maschine

Gleichgültig, ob wir es mit einem Kern-, Kohle- oder Wasserkraftwerk zu tun haben, immer wird mit einer Dynamo-Maschine elektrische Energie erzeugt, und zwar durch Umwandlung von Kern-, Wärme- oder mechanischer Energie. Beim Kernkraftwerk reicht die Kette der Energieumwandlungen von der Kernenergie des radioaktiven Brennstoffes über die Wärmeenergie der Kühlflüssigkeit, die kinetische Energie der Turbinen bis hin zur elektrischen Energie aus dem Dynamo. Im Kohlekraftwerk wird chemische Energie der Kohle in Wärmeenergie, diese in kinetische Energie von Dampfturbinen und schließlich durch den Dynamo in elektrische Energie verwandelt. Im Wasserkraftwerk gelangen wir von der potentiellen Energie des Wassers zur kinetischen Energie der Turbine und schließlich durch den Dynamo wiederum zur elektrischen Energie.

Die Dynamo-Maschine arbeitet nach dem Induktionsprinzip (Kap. 14.8.4). Mit dem mechanischen Drehmoment der Turbine wird eine Spule aus  $n$  Leiterschleifen, die auf einen festen Rahmen aufgewickelt sind (*Anker*), in einem Magnetfeld gedreht (Abb. 16.14a). Nach Gl. (14-53) entsteht dadurch eine Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}$ , die der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses  $\Phi$  innerhalb der Schleife gleich ist:  $U_{\text{ind}} = -d\Phi/dt$ . Steht die Spule senkrecht zu den magnetischen Feldlinien, so ist die Fläche am größten und demnach auch der sie durchsetzende magnetische Fluss  $\Phi = nBA$  (Abb. 16.14b). Nach einer Drehung um  $90^\circ$  dagegen schneidet die Leiterschleife praktisch

überhaupt keine Feldlinien mehr; der sie durchsetzende Fluss ist jetzt Null (Abb. 16.14c). Wird die Schleife weiter gedreht, so nimmt der sie durchsetzende Fluss wieder zu, jetzt aber – bezogen auf die Schleife – in umgekehrter Richtung. Damit ändert auch die Induktionsspannung ihr Vorzeichen. Anders ausgedrückt: An den Enden der Leiterschleife entsteht eine sich sinusförmig ändernde Wechselspannung, deren Frequenz  $\nu$  mit der Rotationsfrequenz der Schleife übereinstimmt:  $U_{\text{ind}} = U_0 \sin 2\pi\nu t$  (s. Gl. (14-56)), und die z. B. durch Schleifkontakte abgegriffen werden kann.

In der Praxis erzeugt man nicht einfache Wechselspannungen, sondern Dreiphasen-



**Abb. 16.14** Wirkungsweise eines Elektro-Dynamos. (a) Rotation einer Leiterschleife in einem Magnetfeld. (b) Steht die Fläche  $A$  der Leiterschleife senkrecht zu den  $B$ -Linien, dann ist der magnetische Fluß  $\Phi = BA$  maximal. (c) Steht die Fläche  $A$  der Leiterschleife parallel zu den  $B$ -Linien, dann ist der magnetische Fluss innerhalb der Schleife gleich Null.

spannungen (Kap. 14.9.3). Dazu ordnet man mehrere Spulen gegeneinander gedreht auf einem *Rotor* an und verwendet anstelle eines durch seine Größe, sein Gewicht und seine geringe Feldstärke unpraktischen Permanentmagneten einen Elektromagneten (*Stator*), durch dessen Wicklungen man den Induktionsstrom schiebt, so dass er sich die Induktionsflussdichte  $B$  selbst schafft. Solche Dynamo-Maschinen sind bis zu 20 m lang und liefern einige 100 MW elektrische Leistung. Die Umwandlung der mechanischen Energie in elektrische gelingt technisch heute mit einem Wirkungsgrad, der fast 1 ist. Viel schlechter ist der Wirkungsgrad bei der Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Energie.

### 16.2.2 Elektro-Motor

Um den Elektro-Motor im Prinzip zu verstehen, brauchen wir nichts Neues zu lernen, denn er stellt eine praktische Anwendung der Umkehrung des *Dynamo-Prinzips* dar. Bei der Dynamo-Maschine wird ein aus  $n$  Leiterschleifen gewickelter *Anker* im Magnetfeld mechanisch gedreht, wobei Spannung induziert und Strom erzeugt wird; mechanische Energie wird also in elektrische Energie umgesetzt. Umgekehrt wird beim Elektro-Motor der Strom, der durch die Leiterschleifen geschickt wird, in mechanische Energie des rotierenden Ankers umgesetzt. Schon von der Beschreibung des Drehspulmesswerkes (Kap. 16.1.1) her wissen wir: Schickt man durch eine Leiterschleife in einem Magnetfeld einen Strom, so bewirken die Lorentz-Kräfte an beiden Längsseiten der Leiterschleife ein mechanisches Drehmoment, das zum Antrieb von Maschinen dienen kann. Damit sich die Spule dauernd dreht, muss die Polung des Spulenstromes während jeder Umdrehung einmal geändert werden. Dies geschieht bei der *Gleichstrom-Maschine* durch Schleifkontakte an dem Rotor. Üblicher sind heutzutage *Wechselstrom-Motoren*. Ihr Magnetfeld wird elektrisch in Statorspulen erzeugt. Durch spezielle Konstruktion kann man erreichen, dass (auch bei

Belastung) die Drehzahl entweder der Frequenz der Wechselfspannung gleich ist oder in einem festen ganzzahligen Verhältnis dazu steht (*Synchron-Motor*). Für eine Reihe spezieller Anwendungen werden sog. *Schritt-Motoren* verwendet, die durch einen elektrischen Impuls, der digital-elektronisch erzeugt wird, um einen festen Winkelschritt  $\Delta\Phi$  vorangetrieben werden. Auf diese Weise kann man mit Computern ferngesteuert die Bewegung, z. B. von Robotern, von CNC-Maschinen (*computer numeric controlled*), von Uhren usw. zentral steuern.

### 16.2.3 Transformator

Eine weitere praktische Anwendung der Induktion begegnet uns bei der Aufgabe, aus der Netzspannung von 230 V eine Hochspannung von 15000 V zu erzeugen, wie sie beim Fernsehgerät benötigt wird, oder aus der Netzspannung eine mit 6 V betriebene Haustürklingel zu speisen. Das Gerät, mit dem Wechselfspannung herauf- oder heruntertransformiert wird, nennt man *Transformator* (Abb. 16.15a). Der Strom in der Primärspule I erzeugt einen mit der Frequenz der Primärspannung sich ändernden magnetischen Fluss  $\Phi$ , der durch die zweite Spule II hindurchgreift. Damit der gesamte Fluss  $\Phi$  die Sekundärspule durchsetzt, wird er in dem Eisenkern gebündelt, auf den beide Spulen aufgesetzt sind. Nach dem Induktionsgesetz (Gl. (14-53)) entsteht in der Primärspule eine Selbstinduktionsspannung

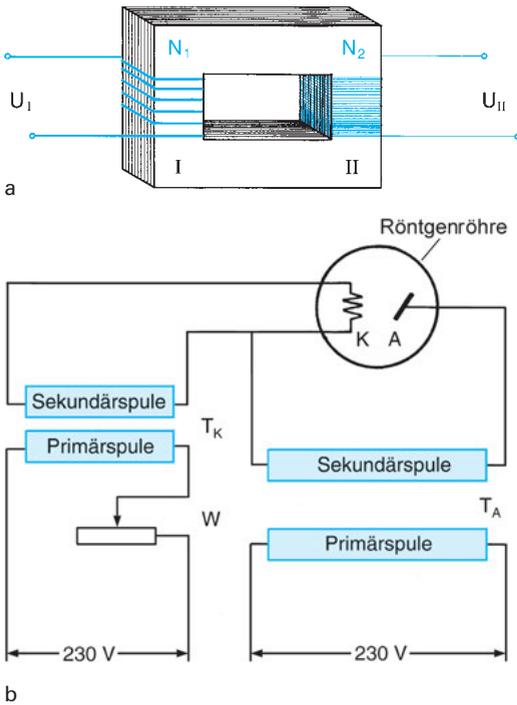
$$U_{\text{ind}} = -n_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad (16-11)$$

die der von außen angelegten Spannung  $U_I$  in jedem Moment entgegengesetzt gleich ist:

$$U_I = n_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (16-12)$$

In der Sekundärspule wird die Spannung  $U_{II}$  induziert:

$$U_{II} = -n_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (16-13)$$



**Abb. 16.15** Transformator: (a) Prinzip, (b) als Beispiel eine einfache Spannungsversorgung von Röntgenröhren.

Vergleichen wir Gl. (16-12) und (16-13), so sehen wir:

Primär- und Sekundärspannung verhalten sich wie die Windungszahlen der Spulen.

$$\frac{U_{II}}{U_I} = -\frac{n_2}{n_1} \quad (16-14)$$

Das negative Vorzeichen soll auf die Phasenverschiebung zwischen  $U_I$  und  $U_{II}$  um  $\varphi_0 = \pi$  hinweisen.

Die Sekundärspule kann man also als neue Spannungsquelle mit einer gegenüber  $U_I$  gemäß Gl. (16-14) veränderten Spannung  $U_{II}$  verwenden.

Belastet man die Sekundärseite mit einem Verbraucher, so kann die der Sekundärspannungsquelle entzogene Leistung,  $P_{II} = U_{II}I_{II}$ , nie höher sein als die Leistung  $P_I = U_I I_I$ , die von der Primärspule zugeführt wird:  $P_{II} \leq P_I$ . Dies ist für die praktische Anwendung wichtig:

Erzeugt man mit einem Transformator eine hohe Spannung  $U_{II}$ , so kann man ihm sekundärseitig nur kleine Ströme entziehen. Hohe Ströme, wie sie etwa zum Elektroschweißen benötigt werden, lassen sich dadurch erzeugen, dass man die Netzspannung sekundärseitig heruntertransformiert.

**Spannungsversorgung von Röntengeräten** Wird ein Röntengerät mit einem Netzanschluß von 230 Volt Wechselspannung betrieben, so ist, wie Abb. 16.15b zeigt, ein Transformator mit einer doppelten Funktion erforderlich. In der *Heizstromwicklung* des Transformators  $T_K$ , die eine geringe Windungszahl hat, wird die Netzspannung von 230 Volt herunter auf 4 bis 8 Volt transformiert und liefert einen Strom von einigen Ampere zur Heizung des Glühdrahtes der Kathode K. Auf der Primärseite des Transformators  $T_A$  ist ein Regelwiderstand  $W$  eingebaut, um die Heizspannung und damit den Elektronen-Strom in der Röntgenröhre zu variieren. Der Hochspannungskreis umfasst den Transformator  $T_A$  sowie Kathode K und Anode A der Röntgenröhre. Eine derartige Apparatur, die nur aus Transformator und Röntgenröhre besteht, nennt man einen *Halbwellenapparat*. Da an der Röntgenröhre eine sinusförmige Spannung liegt, fließt immer nur während derjenigen Halbperioden ein Anodenstrom, in der die Kathode negativ und die Anode positiv ist. Demnach wird auch nur während der Hälfte der Zeit Röntgenstrahlung erzeugt. Diese ist zudem noch von sehr unterschiedlicher Strahlungsqualität, da während der wirksamen Halbperiode die Beschleunigungsspannung für die Elektronen sich von 0 auf ihren Maximalwert und wieder auf 0 verändert.

Wegen dieser Nachteile ergänzt man diese Prinzipschaltung in leistungsfähigen Röntengeräten durch einen zusätzlichen Gleichrichter, um die Erzeugung von Röntgenstrahlen (Kap. 21.3) gleicher Qualität während der gesamten Einschaltzeit zu erreichen. In kommerziellen Geräten für die Röntgendiagnostik liegen die Röhrenspannungen zwischen 50000 V und 100000 V.

**Phasenanschnitts-Steuerung** Für viele Zwecke lässt sich die Leistungssteuerung statt mit dem Transformator mit einer elektronischen Schaltung durchführen, die im Gegensatz zum Transformator fast verlustlos arbeitet. Zur Leistungssteuerung (z. B. Helligkeitssteuerung einer Lampe) mit dem Transformator wird die Spannungsamplitude verringert, indem mit dem *Drehtransformator* die Windungszahl  $n_{II}$  (Gl. (16-14)) kontinuierlich reduziert wird. Dabei bleibt der Spannungsverlauf sinusförmig. Dagegen schaltet man bei der *Phasenanschnitts-Steuerung* die Netzspannung in jeder Halbperiode für ein kurzes Zeitintervall ab (Abb. 16.16), so dass der zeitliche Mittelwert der Leistung

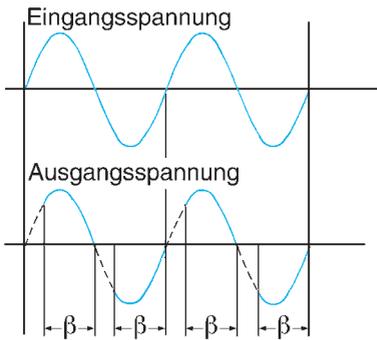


Abb. 16.16 Eingangsspannung und Ausgangsspannung an einem Dimmer.

$\langle P \rangle = \langle UI \rangle$  geringer wird. Durch Veränderung des Stromflusswinkels  $\beta$  lässt sich  $\langle P \rangle$  somit kontinuierlich steuern. In den Haushalten wird diese Schaltung, die in den Lichtschalter mit eingebaut ist, als Helligkeitsregler (*Dimmer*) verwendet. Zu beachten ist, dass diese Dimmer nur in engen, durch die spezielle Konstruktion festgelegten Leistungsbereichen optimal funktionieren, und dass sie nur dort zur Leistungssteuerung verwendet werden können, wo es nicht auf den zeitlichen Verlauf der Wechselspannung ankommt.

### 16.2.4 Sender und Empfänger

Bei Funk und Fernsehen wird die Möglichkeit genutzt, Informationen mit Hilfe *elektromagnetischer Wellen* über große Distanzen hinweg kabellos zu übertragen. Elektromagnetische Wellen werden dabei von Hindernissen (Glasfenster, Mauern, Dachziegel ...), deren Ausmaß kleiner als die Wellenlänge ist, nur wenig beeinflusst (falls es sich nicht um geerdete Metallteile handelt), so dass auch z. B. im Innern eines Hauses mit Zimmerantenne gesendet oder empfangen werden kann. Um eine Vorstellung über die Stärke der beim Funkempfang üblichen Feldstärke  $E$  zu haben: Sie liegt in der Größenordnung von  $E = 10^{-3} \text{ V m}^{-1}$ . (Zum Vergleich: In einem Plattenkondensator, dessen Platten einen Abstand von 1 cm haben und an denen die Spannung 10 V liegt, hat die Feldstärke den Wert  $E = U/d = 10^3 \text{ Vm}^{-1}$ .) Mit großem technischen Aufwand können jedoch noch weitaus schwächere Signale verarbeitet werden, wie sie beispielsweise bei

Funkübertragungen aus dem Weltraum erzeugt werden. Die zu übertragende Information, sei es Sprache, Musik, oder seien es die Signale zur Steuerung des Elektronenstrahls in der Fernröhre, werden der elektromagnetischen Welle aufgeprägt. Dabei wird eine monochromatische Trägerwelle im Takt der Informationssignale *moduliert* (vgl. nächster Abschnitt). Je mehr Signale pro Zeiteinheit zu übertragen sind, um so höher muss die Frequenz der Trägerwelle sein. Beim Fernsehen ist die Informationsmenge besonders hoch: Helligkeit, Farbe und Lage der etwa 500 000 Bildpunkte des Fernsehbildes werden 25mal pro Sekunde übermittelt, pro Sekunde müssen also etwa 40 Millionen Einzelinformationen übertragen werden; hinzu kommt noch der Ton. Dies ist nur mit hochfrequenten elektromagnetischen Wellen möglich; üblich sind Ultrahochfrequenz (UHF)-Wellen mit einer Frequenz größer als 50 MHz (siehe Abb. 14.42).

Die Wellenlängen derartiger *UHF-Wellen* sind nach Gl. (14-95) klein, verglichen mit Hindernissen, die üblicherweise die Ausbreitung der Wellen behindern, wie Bodenerhebungen, Häuser, Bäume usw. Die Wellen verhalten sich daher ähnlich wie optische: Sie werden an den Hindernissen gestreut oder reflektiert; der Rest der Strahlung breitet sich als freie Welle geradlinig aus. Auf größere Entfernungen kann man daher nur mit einem dichten Netz von Sendestationen senden (beim Fernsehen Abstand ca. 80 km), die zudem möglichst hoch liegen (Fernsehtürme auf Anhöhen).

Bei *Langwellen* (LW), deren Wellenlängen mit einigen km über der Größe der erwähnten Hindernisse liegen, hat man diese Schwierigkeiten nicht: Sie breiten sich als *geführte Oberflächenwellen* (*Bodenwellen*) längs der gekrümmten Erdoberfläche aus und werden nur geringfügig durch Beugung aus ihrer Richtung abgelenkt. So kann man im Prinzip von *einer* Sendestation rund um die Erde empfangen werden; die Wellen können sogar die Erde mehrfach umlaufen.

*Mittel- und Kurzwellen* (MW, KW) werden – wenn auch nicht so gut wie Langwellen –

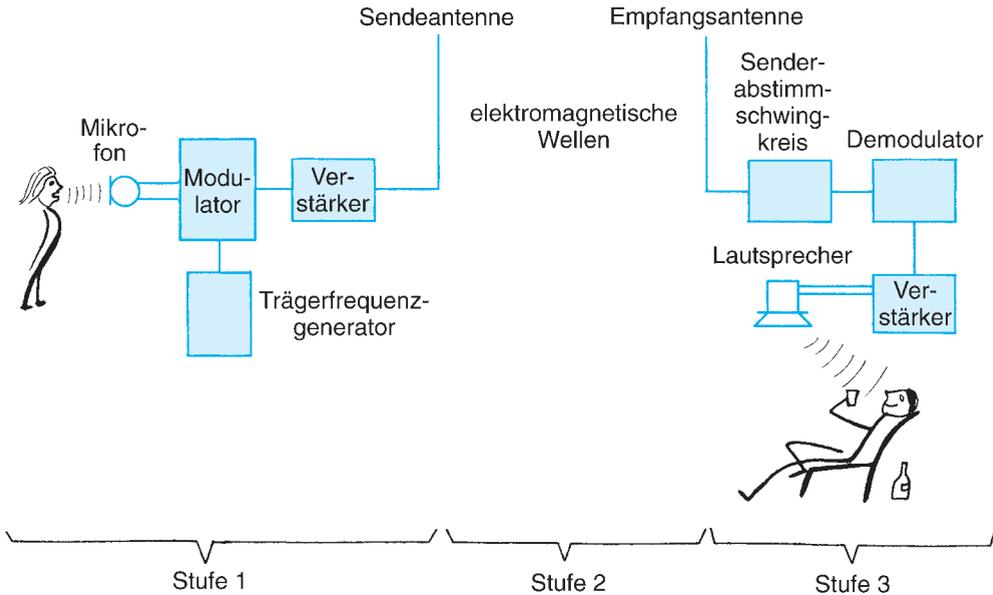


Abb. 16.17 Schallübertragung von der Radiostation zum Empfänger.

als Bodenwellen geleitet. Zudem können sie an elektrisch geladenen Schichten der oberen Lufthülle zur Erde zurückreflektiert und damit auch in großen Entfernungen empfangen werden. Ein Kuriosum ist, dass dieser Reflexionsmechanismus von der Sonnenstrahlung beeinflusst wird, so dass man am Urlaubsort den Heimatsender auf Mittelwelle oftmals am besten abends empfangen kann.

Die Schall- oder Bildübertragung erfolgt in drei Stufen (Abb. 16.17):

1. Im *Sender* wird die monochromatische und kohärente Trägerwelle mit einem rückge-

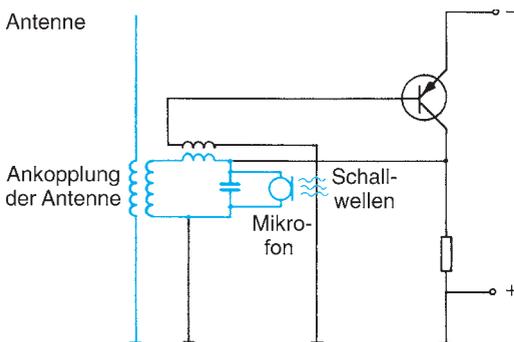


Abb. 16.18 Wirkungsweise eines Senders (vgl. hierzu *Parallel-Schwingkreis* in Kap. 14.9.6).

koppelten Schwingkreis (Abb. 16.18) erzeugt; dann wird die Information aufmoduliert, und anschließend wird die Welle gewaltig verstärkt (Sendeleistungen von  $\approx 10^3$  kW) und auf die Sendeantennen gegeben.

2. Die von der Sendeantenne ausgestrahlte elektromagnetische Welle breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum aus.

3. Beim *Empfänger* laufen im Prinzip die Vorgänge von 1. in umgekehrter Reihenfolge ab, nur eben für geringere Leistungen dimensioniert: Die elektromagnetischen Wellen erzeugen Ströme in der Antenne, die an einen Schwingkreis gekoppelt ist. Der Schwingkreis enthält einen variablen Kondensator (Drehkondensator), mit dem man ihn auf die Frequenz der Trägerwelle des Senders einstellt. Dann wird er durch die Ströme in der Antenne mehr oder weniger stark zu Schwingungen angeregt. In der sogenannten *Demodulatorstufe* werden dann die Informationssignale von der hochfrequenten Trägerwelle abgenommen (Demodulation, z. B. durch einen Tiefpass-Filter) und nach weiterer Verstärkung auf den Lautsprecher oder die Fernschröhre gegeben. Lautsprecher sind nur für begrenzte Frequenzbereiche brauchbar. Da-

her sind in guten Empfangsgeräten mehrere Lautsprecher eingebaut, die speziell für niedrige Schallfrequenzen (Tiefenlautsprecher) bzw. für hohe Frequenzen (Hochtonlautsprecher) ausgelegt sind.

Beim Fernsehen sorgt ein besonderes Bildaufnahmegerät (*Ikonoskop-Kamera*) für die Erzeugung der zur Bildübertragung notwendigen elektromagnetischen Signale und ein spezielles Bildwiedergabegerät (*Elektronenstrahlröhre, Flüssig-Kristall* oder *Plasma-Bildschirm*) schließlich für die Sichtbarmachung des übertragenen Bildes.

**Modulationsverfahren** Will man selektiv, d. h., nur bestimmte Sender empfangen, dann ist die Abstimmung des Empfängers auf eine Trägerquelle mit fester, dem Sender zugeordneter Frequenz erforderlich. Dieser Welle wird die zu übermittelnde Information aufgeprägt, sie wird *moduliert*. Das einfachste Modulationsverfahren ist die *Amplituden-Modulation*. Dabei wird die Amplitude  $A(x, t)$  der Trägerwelle entsprechend dem Amplitudenverlauf  $A_S(t)$  z. B. eines Schallsignals verändert:

$$A(x, t) = A_0 A_S(t) \sin(\omega_T t + kx).$$

Dies setzt voraus (vgl. Abb. 16.19 a, b, c), dass die Trägerfrequenz  $\omega_T$  weitaus größer als die des akustischen Signals ist. Die Amplituden-Modulation wird bei Lang-, Mittel- und Kurzwellen-Sendern angewandt. Eine bessere Übertragungsqualität erreicht man mit der *Frequenz-* bzw. *Phasen-Modulation*. Hierbei wird die Phase der Trägerwelle zeitlich im Rhythmus des Schallsignals verändert. Das führt dazu, dass die momentane Frequenz der Trägerwelle um die Frequenz  $\omega_T$  schwankt (Abb. 16.19d). Das Zustandekommen der Frequenz-Modulation können wir uns anhand von Abb. 16.18 klarmachen: Das Mikrofon ist dem Schwingkreiskondensator parallel geschaltet. Je nach auffallender Schallintensität ändert sich seine Kapazität geringfügig und damit die Gesamtkapazität  $C$  des Schwingkreises. Da dessen Eigenfrequenz nach Gl. (14-93) durch  $\nu = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  gegeben ist, wird also auch die Eigenfrequenz im Takt des zu übertragenden Schallsignals moduliert.

Im technischen Funkverkehr findet eine weitere Modulationsart, die sog. *Pulspositions-Modulation*, weitverbreitete Anwendung. Bei diesem Verfahren wird keine sinusförmige Trägerwelle, sondern eine Folge von Spannungsimpulsen (digitale Nachrichtentechnik) verwendet, wobei die zeitliche Position der einzelnen Impulse durch die zu übermittelnden Infor-

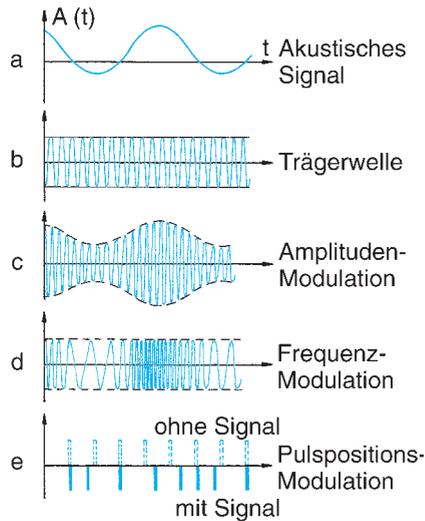


Abb. 16.19 Modulationsverfahren.

mationen gesteuert wird (Abb. 16.19e). Der Vorteil dieser Methode besteht neben der Möglichkeit der digitalen Signalverarbeitung in der besseren Erkennbarkeit der Signale auch bei extrem niedriger Empfangsleistung (ein Problem, das z. B. beim Funkverkehr mit Raumsonden auftritt). — Auch bei der optoelektronischen Informationsübertragung (Kap. 19.3.7) lässt sich dieses Verfahren vorteilhaft anwenden.

Die *Satellitennavigation (GPS: global positioning system)* beruht auf der Auswertung von Positionssignalen, die von künstlichen Satelliten ausgesandt werden. Diese befinden sich auf exakt vermessenen Kreisbahnen in etwa 20000 km Höhe. Die fortlaufenden Positionssignale werden von Beobachtern auf der Erde, deren Position ermittelt werden soll, registriert. Die laufende Abstandsänderung zwischen Beobachter und vorbei fliegendem Satelliten bewirkt aufgrund des Dopplereffekts eine laufende Änderung der Empfangsfrequenz; deren Änderungsgeschwindigkeit wird im Bordcomputer des Beobachters bestimmt und ist dann ein Maß für den Abstand, in dem die Satellitenbahn seitlich vom Ort des Beobachters verläuft. Genaue Zeitmarken und auf dem neusten Stand gehaltene Bahnparameter des Satelliten werden als Zusatzinformation der Satelliten-Messfrequenz aufmoduliert und stehen dem Empfänger dauernd zur Verfügung. Aus der somit bekannten Satellitenbahn und dem ermittelten seitlichen Abstand des Beobachters ist dessen Position dann mittels *Triangulation* (Kap. 1.1.3) bis auf einige Meter genau bestimmbar.



## 17. Optische Strahlung

### 17.1 Einleitung

Aus dem umfangreichen Spektrum der elektromagnetischen Wellen stellt das sichtbare Licht nur einen kleinen Ausschnitt dar (Abb. 14.42). Dieser *optische* Bereich im ursprünglichen Sinne nimmt von den mehr als 25 Zehnerpotenzen, über die sich das heute der Messung zugängliche elektromagnetische Spektrum erstreckt, den winzigen Wellenlängenbereich zwischen 0,4 und 0,8  $\mu\text{m}$  ein. In diesem Wellenlängenbereich ist das Sonnenlicht am intensivsten. Dass wir für diesen Bereich mit dem Gesichtssinn die einzige direkte Wahrnehmungsmöglichkeit für elektromagnetische Strahlung haben (wenn wir vom Wärmeempfinden der Haut bei langwelliger Strahlung absehen), hat dem optischen Bereich eine hervorragende Stellung verschafft und dazu geführt, dass wesentliche Gesetze der Optik bereits 2000 Jahre lang bekannt sind, während man erst im vorigen Jahrhundert die Existenz anderer Spektralbereiche elektromagnetischer Strahlung entdeckte. Es zeigte sich, dass Gesetze der klassischen Optik auch dort anwendbar sind. Seither hat der Begriff der *Optik* die Beschränkung auf den sichtbaren Bereich verloren; man spricht von Ultrarot- (oder Infrarot-) Optik, Ultraviolett-

Optik usw. Auch die Bezeichnung *Licht* wird zuweilen für nicht-sichtbare optische Strahlung verwendet. Mit der *Elektronenoptik* wird der Begriff der Optik sogar auf Abbildung mit nicht elektromagnetischer Strahlung angewendet.

Wir wollen elektromagnetische Wellen im Infraroten (IR), Sichtbaren (VIS) und Ultravioletten (UV), die aus atomaren und molekularen Quellen oder aus glühenden Stoffen u. Ä. stammen, als *optische Strahlung* definieren. Hervorzuheben ist der LASER als Lichtquelle, der seit 5 Jahrzehnten eine rasante Weiterentwicklung der Optik ausgelöst hat. Nichtoptische, langwellige elektromagnetische Wellen (Lang-, Kurz-, Mikrowellen) werden von Antennen ausgestrahlt, die an Schwingkreise gekoppelt sind (vgl. Kap. 14.9.6). Sehr kurzwellige Strahlung (Röntgen- und Gamma-Strahlung) wird nicht zum optischen Spektralbereich gerechnet.

Das Schaubild auf dieser Seite demonstriert, dass unter dem Begriff der *Optik* drei sehr unterschiedliche Bereiche zusammengefasst sind.

Für den Mediziner ist die Optik zum Verständnis diagnostischer und therapeutischer

Optik: Wissenschaft des Lichts		
<p><b>Physiologische Optik</b></p> <p>Funktion und Eigenschaften des Sehens (Augen, Nerven, Gehirn):                      Bilder, Sensitivität, Farben, 3-dimensionales Sehen, Colorimetrie</p>	<p><b>Physikalische Optik</b></p> <p>Materialoptik:                      optische Materialeigenschaften, Nanooptik</p> <p>Ausbreitung des Lichts:                      Wellen und Photonen</p> <p>Theorien:                      Strahlenoptik, Elektrodynamik, Quantenoptik</p>	<p><b>Technische Optik</b></p> <p>Abbildungsoptiken:                      optische Instrumente, digitale Bildaufbereitung</p> <p>Messung des Lichts:                      Lichtquellen, Photometrie, Spektrometrie, Polarisation, Kohärenz</p> <p>Materialbearbeitung,                      medizinisch-biologische Anwendungen</p>

Hilfsmittel (Mikroskop, Photometer, Laserkoagulator, Endoskop usw.) und als Grundlage der Ophthalmologie von Bedeutung. Kurzwellige Strahlung ist darüber hinaus z. B. für die Erzeugung von Vitamin D in der Haut und für die Hautbräunung wichtig, langwellige IR-Strahlung trägt wesentlich zum Wärmehaushalt des Körpers bei.

Verschiedene Beschreibungsweisen sind für das Licht erforderlich, wenn wir einerseits die Ausbreitung (mit Brechung, Beugung und Reflexion) und andererseits seine Emission und Absorption durch Wechselwirkung mit atomaren Systemen behandeln wollen:

1. Die Ausbreitung von Licht im Raum erfolgt als transversale elektromagnetische Welle und wird allgemein durch die Maxwell'schen Gleichungen (Kap. 14.9.7.3) beschrieben. Die Korrektur eines fehlsichtigen Auges mit einer Brille vollständig mit den Maxwell'schen Gleichungen zu berechnen, ist allerdings eine Aufgabe, vor der jeder Physiker zurückschrecken würde. Glücklicherweise lässt sich diese Berechnung — das gilt ebenso für die meisten anderen optischen Abbildungen — durch die einfache Näherungsmetho-

de der *Strahlengänge* der *Geometrischen Optik* umgehen.

2. Der einzelne Emissions- und Absorptionsvorgang von Licht, also die Wechselwirkung mit Materie, ist mit dem Bild der elektromagnetischen Welle nur unzureichend zu beschreiben; hier wirkt das Licht wie ein Strom von Energiepaketen (*Energiequanten*, *Photonen*). Diese Elementarprozesse lassen sich erst durch die *Quantentheorie* verstehen. Die Wechselwirkungen von Licht mit Materie, also die Elementarprozesse von Emission und Absorption, werden im Rahmen der *Quantentheorie* beschrieben.

Dass Licht in diesen beiden unterschiedlichen Erscheinungsformen auftritt, bezeichnet man als *Dualität* oder *Welle-Teilchen-Dualismus*. (Siehe hierzu *Materiewellen*, Kap. 18.6.)

In den folgenden Kapiteln wird zur Ausbreitung und zum Wellencharakter des Lichtes einiges aus Kap. 7 („Wellen I“) und Kap. 14.9.7 („Elektromagnetische Wellen“) benötigt werden. Es sei empfohlen, bei der Lektüre des Abschnitts *Optik* gelegentlich zu diesen Kapiteln zurückzublättern.

## 17.2 Licht-Messgrößen

**Energie-Größen** Wir haben bereits in Kap. 14.9.7.2 erfahren, dass elektromagnetische Wellenfelder in der Lage sind, Energie — wir nennen sie *Feldenergie* — zu transportieren. Ihre Größe ergibt sich aus den Amplituden des elektrischen und des magnetischen Feldes.

Die *Energiedichte*  $\varrho$ , d. h. die pro Volumeneinheit enthaltene Feldenergie, setzt sich aus elektrischem und magnetischem Anteil zusammen.

Diese beiden Anteile sind proportional zum Quadrat der elektrischen Feldstärke  $E$  bzw. der magnetischen Feldstärke  $H$  und ergeben sich aus Gl. (14-43) und Gl. (14-64):  $\varrho = \frac{1}{2}(DE + BH) = \frac{1}{2}(\epsilon_0\epsilon_{\text{rel}}E^2 + \mu_0\mu_{\text{rel}}H^2)$ .

Die Feldenergie breitet sich wie das elektromagnetische Wellenfeld mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  aus, und für die *Intensität*

oder *Energiestromdichte*  $S$  (Energiedichte mal Lichtgeschwindigkeit) folgt daher:

$$S = c\varrho = c \frac{1}{2}(\epsilon_0\epsilon_{\text{rel}}E^2 + \mu_0\mu_{\text{rel}}H^2), \quad (17-1)$$

mit der SI-Einheit  $\text{W m}^{-2}$ .  $S$  gibt also den *Energiestrom* (die *Strahlungsleistung*) pro Einheit der Querschnittsfläche des Lichtbündels an (s. Gl. (7-14b)). Als weitere Messgröße dient die *Strahlstärke*, die als Energiestrom pro Raumwinkel mit der SI-Einheit  $\text{W sterad}^{-1}$  definiert ist. Will man angeben, wie ein Körper *beleuchtet* wird, so verwendet man die *Bestrahlungsstärke*, das ist der auftreffende Energiestrom pro Flächeneinheit des beleuchteten Körpers (wobei die Fläche senkrecht zur Lichtstrahl-Richtung zu messen ist). Ihre SI-Einheit ist (wie die der Intensität)  $\text{W m}^{-2}$ .

Da  $E$  und  $H$  zu jedem Zeitpunkt zueinander proportional sind (Kap. 14.9.7), lässt sich Gl. (17-1) nach einiger Rechnung umformen in

$$S = EH. \quad (17-2)$$

Gehen wir vom Wellenbild zum Photonenbild der Lichtstrahlung (Kap. 17.5) über, so werden in Gl. (17-2) die Wellengrößen ersetzt durch die Energie der Photonen  $h\nu$ , siehe auch Gl. (17-9):

$$S = N h \nu = N \hbar \omega, \quad (17-3)$$

wobei  $N$  die Anzahl der pro Zeiteinheit durch die Einheit der Querschnittsfläche des Lichtbündels hindurchtretenden Photonen der Energie  $h\nu$  ist.  $h$  ist hierbei die Planck'sche Konstante (das *Planck'sche Wirkungsquantum*),  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J s, deren Entdeckung bei der Herleitung des Planck'schen Strahlungsgesetzes um 1900 den Siegeszug der Quantentheorie auslöste, und die wir schon in Kap. 3.3 eingeführt haben. Oft verwendet man statt der Frequenz  $\nu$  die Kreisfrequenz  $\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ), und dann tritt an die Stelle von  $h$  in Gl. (17-3) die Konstante  $h/2\pi$ , die mit  $\hbar$  (sprich: *h quer*) bezeichnet wird.

Es ist üblich, die Ausbreitungsrichtung des Energiestroms in die Größe  $S$  einzubeziehen, die damit zum Vektor  $\vec{S}$ , dem Ausbreitungsvektor (auch *Poynting-Vektor* genannt), wird. Da die Vektoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen (elektromagnetische Wellen sind Transversalwellen, Kap. 14.9.7), erhalten wir einen Vektor in Richtung der Ausbreitung durch das Vektorprodukt (s. Anhang) aus  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (17-4)$$

Die Intensität der Gl. (17-2) gibt nun den Betrag des Poynting-Vektors.

### Lichttechnische (photometrische) Größen

Das menschliche Auge (zusammen mit der nachgeschalteten Signalverarbeitung durch Sehnerv und Gehirn) ist ein herausragendes

Beispiel für die erfolgreiche Anpassung des menschlichen Körpers an äußere Lebensbedingungen, die im optischen Bereich früher ausschließlich durch Sonne, Gestirne oder brennende Gegenstände bestimmt waren.

Das Auge bestimmt die Intensität von Licht nicht quantitativ, vielmehr passt es seine Empfindlichkeit an die herrschenden Lichtverhältnisse an (*Adaptierung*). Zudem ist die Empfindlichkeit an den Grenzen des Sichtbaren zum Ultraviolett und zum Infrarot (Abb. 14.42) wesentlich geringer als etwa in der Mitte des sichtbaren Spektralbereichs. Gleiche Lichtintensitäten aus verschiedenen Spektralbereichen werden also als verschieden hell empfunden. Wie alle Sinneswahrnehmungen ist die Licht-Wahrnehmung ein *subjektiver*, d. h. individuell unterschiedlich wahrgenommener Vorgang, und damit eigentlich nicht objektiv messbar.

Durch den Trick, Lichthelligkeits- und Farbempfindungen, die durch Auge und Signalverarbeitung im Gehirn entstehen, durch Mittelwertbildung über viele Menschen formal festzulegen, ist es dennoch gelungen, subjektive Lichtempfindungen vergleichbar und damit messbar zu machen. Dazu wurden *physiologisch* bewertete, sogenannte *photometrische Messgrößen* und Einheiten eingeführt (siehe unten).

Abb. 17.1 zeigt zwei Empfindlichkeitskurven des Auges. Sie haben ihre Maxima im Gelbgrünen bei 510 nm bzw. 555 nm, also nahe den Wellenlängen, wo das Sonnenlicht am intensivsten ist. Das Empfindlichkeitsmaximum des *dunkeladaptierten* Auges (Dämmerungssehen) ist gegenüber dem des *helladaptierten* Auges geringfügig zu kürzeren Wellenlängen verschoben, ähnlich dem Unterschied zwischen Sonnen- und Mondlicht.

Um die Helligkeitsempfindung des Auges quantitativ messen zu können, werden analog zu den Energie-Größen weitere *subjektive* Lichtmessgrößen eingeführt, die die Empfindlichkeitskurven des Auges mitberücksichtigen. Sie werden auch als *physiologisch bewertete Größen* bezeichnet und ergeben sich durch Multiplikation der Energie-Größen mit den Werten der relativen gemittelten Augenempfindlichkeitskurven von Abb. 17.1.

Die von einer Lichtquelle in einen Raumwinkel  $\Omega$  ausgesandte, physiologisch bewertete Strahlung wird der *Lichtstrom*  $\Phi$  genannt (SI-Einheit: *Lumen*; Kap. 1.1.2). Der Lichtstrom pro Raumwinkel wird als *Lichtstärke*  $I$  bezeichnet:  $I = \Phi/\Omega$ . Lichtquellen mit Strahlung verschiedener spektraler Zusammensetzung, die dem Auge (in gleichem Abstand) gleich hell erscheinen – haben per definitionem dieselbe Lichtstärke. Im Internationalen Einheitensystem (SI) ist für die Lichtstärke eine spezielle Basiseinheit, *Candela* (cd), eingeführt worden (s. Kap. 1.1.2).

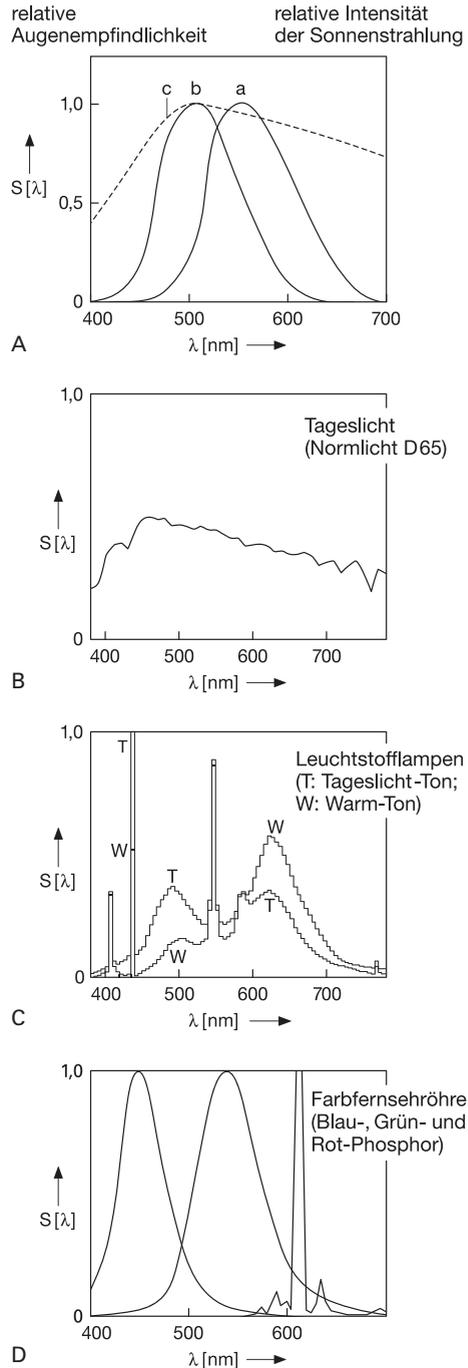
Im Maximum der Empfindlichkeit des helladaptierten Auges (bei 555 nm) entspricht dem Lichtstrom 1 Lumen der Energiestrom  $1,46 \cdot 10^3$  W. Zum Vergleich: Im Roten ist für einen gleich starken Lichteindruck etwa die 1000fache (energetische) Lichtleistung erforderlich.

Als weitere lichttechnische Größe ist die *Beleuchtungsstärke*  $B$  eingeführt. Sie gibt den Lichtstrom pro Flächeneinheit des beleuchteten Körpers (senkrecht zur Strahlrichtung gemessen) an. Fällt ein Lichtstrom  $\Phi$  auf eine Fläche  $A$  eines nicht selbstleuchtenden Gegenstandes, so ist  $B = \Phi/A$ . SI-Einheit von  $B$  ist *Lux*.

Die Leistungsfähigkeit einer Lichtquelle wird durch die *Lichtausbeute*  $A$  beschrieben. Sie ist definiert als der Quotient aus dem emittierten Lichtstrom  $\Phi$  und der dafür erforderlichen (meist elektrischen) Leistung  $L$ :

$$A = \Phi/L \text{ mit der Einheit [Lumen/Watt].}$$

Beispiel: Eine 75 Watt Glühlampe verbraucht 75 W elektrischer Energie und emittiert 850 Lumen. Damit gilt:  $A = 11$  Lumen/Watt. (Moderne Lichtquellen, wie Leuchtstoff-Sparlampen oder LEDs zeichnen sich durch wesentlich höhere  $A$ -Werte aus.)



**Abb. 17.1** Lichttechnik (A) vereinfachte Empfindlichkeitskurven des Auges (a) Helladaptation; (b) Dämmerungssehen; (c) Sonnenspektrum im sichtbaren Spektralbereich. Lichtquellen: (B) Tageslicht,  $\lambda$ : Wellenlänge;  $S$ : relative Intensität, (C) Leuchtstofflampen; (D) Farbfernsehschirm.

## 17.3 Strahlungsquellen

Optische Strahlung – vom Infraroten bis hin zum Ultravioletten – kann von Atomen oder Molekülen im gasförmigen, flüssigen oder festen Aggregatzustand emittiert werden, zumeist, indem Elektronen der Atome ihre Energie ändern. Die Möglichkeit zu solchen Energieänderungen ist durch feste Regeln der Quantentheorie eingeschränkt, die wir in den folgenden Kapiteln näher kennenlernen werden.

Die einfachsten Verhältnisse finden wir bei Gasen geringer Dichte, bei denen das Spektrum der emittierten Strahlung weitgehend durch das einzelne, isolierte Atom oder Molekül bestimmt wird. Quecksilber-Dampf Lampe und Natrium-Dampf Lampe sind hierzu wichtige praktische Beispiele. Ihr Licht entsteht durch eine Gasentladung (Kap. 15.2.2), die in einem gasgefüllten Glas- oder Quarzrohr gezündet wird und bei der Licht aus einzelnen Atomen oder Molekülen emittiert wird.

Die Spektren glühender kompakter Körper, in denen die Atome so dicht gepackt sind, dass sie durch Bindungskräfte in Wechselwirkung miteinander stehen, unterscheiden sich wesentlich von denen der Gasentladungs-Quellen.

Dabei ist es von untergeordneter Bedeutung, ob der Körper ein glühendes, unter hohem Druck stehendes Gas (Beispiel: Sonne), eine glühende Flüssigkeit (Beispiel: Glasschmelze) oder ein glühender Festkörper (Beispiel: Wolfram-Draht in einer Glühlampe) ist. Er emittiert um so mehr Strahlung, je stärker man ihn aufheizt, weshalb diese Art der elektromagnetischen Strahlung unter dem Begriff *Temperatur-Strahlung* zusammengefasst wird. Der sichtbare Anteil davon wird auch als *Glühlicht*, der im IR liegende Anteil als *Wärmestrahlung* bezeichnet. Neben solchen *thermischen* Lichtquellen und den *Gasentladungslampen* sind in den vergangenen 50 Jahren seit ihrer Erfindung mit den *Lasern* Lichtquellen entwickelt worden, deren Strahlung sich wesentlich von der der übrigen Quellen unterscheidet. Ihnen ist, wegen ihrer immensen Bedeutung auch in der Medizin, ein eigenes Kapitel (17.12) gewidmet. Von geringerer praktischer Bedeutung sind bis jetzt, mit Ausnahme der *Photodioden* (LEDs, light emitting diodes), *Lumineszenz*-Strahlungsquellen.

Abb. 17.1 (b–d) zeigt drei Alltagslichtquellen. Es ist erstaunlich, wie gut sich Auge und Gehirn an diese unterschiedlichen polychromatischen Strahlungsarten anpassen kann und tageslichtähnliche Farben vortäuschen kann.

## 17.4 Bohr'sches Atommodell

Zum Verständnis der Strahlungsquellen müssen wir speziell den in Kap. 5 skizzierten Aufbau der Atomhülle heranziehen, denn Atome emittieren Licht durch Elektronen-Übergänge in der Elektronenhülle. Wir wollen am *Bohr'schen Atommodell* für ein einzelnes Wasserstoffatom, dem einfachsten Atom, erläutern, was mit diesen Übergängen gemeint ist.

Obwohl das Bohr'sche Modell nach heutiger Kenntnis in wesentlichen Punkten, die im Folgenden besprochen werden, stark vereinfacht und damit unzutreffend ist,

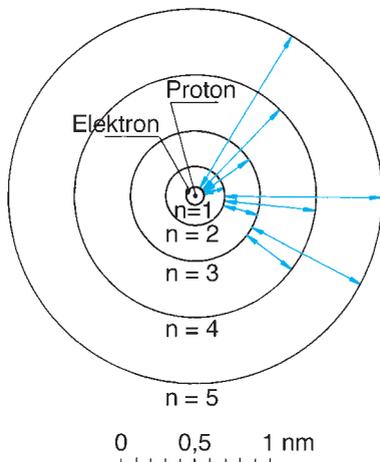
behandeln wir es hier; denn einerseits ist es sehr anschaulich, andererseits sind die daraus gezogenen Folgerungen zutreffend. So gibt es die optischen Spektren des Wasserstoffatoms mit hoher Genauigkeit und auch die Spektren anderer Atome qualitativ recht gut wieder.

Das Wasserstoffatom besteht aus einem Proton als Kern und einem Elektron in der Hülle. Dieses Elektron, so stellte es sich Bohr vor, kreist um den Atomkern wie ein Planet um die Sonne. Es wird durch die zwischen ihm und dem Proton wirkende Coulomb-

Kraft auf eine Kreisbahn um den Kern gezwungen, wobei sich der Radius  $r$  der Kreisbahn mit Gl. (14-1) und (2-7) aus der folgenden Gleichgewichtsbedingung ergibt:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \text{ (Coulombkraft)} \\ = mr\omega^2 \text{ (Zentrifugalkraft)}. \quad (17-5)$$

In Gl. (17-5) ist  $e$  die Elementarladung,  $m$  die Elektronenmasse,  $\omega$  die Kreisfrequenz des umlaufenden Elektrons und  $\epsilon_0$  die in Kap. 14.7.3 definierte elektrische Feldkonstante. Um die im Experiment beobachteten optischen Spektren des H-Atoms erklären zu können, postulierte Bohr, ohne es aber begründen zu können, dass es spezielle Kreisbahnen für das Elektron geben müsse (Abb. 17.2), die es durchlaufen kann, ohne dabei elektromagnetische Energie abzugeben oder aufzunehmen (*Bohr'sches Postulat der stationäre Bahnen*). Tatsächlich ist dies ein Widerspruch zur klassischen, für makroskopische Systeme geltenden Elektrizitätslehre, nach der ein kreisendes elektrisch geladenes Teilchen als Antenne wirkt und elektromagnetische Wellen abstrahlt. Erst die Quantentheorie hat für dieses Problem eine Lösung geliefert.



**Abb. 17.2** Maßstabsgetreues Bild des Bohr'schen Atommodells des Wasserstoffatoms (gezeichnet bis  $n = 5$ ). Im energetischen Grundzustand läuft das Elektron auf der innersten erlaubten Kreisbahn um den Kern ( $n = 1$ ). Die Pfeile kennzeichnen mögliche Übergänge des Elektrons von einer Bahn zu einer anderen.

Für das eine Elektron auf der  $n$ -ten stationären Kreisbahn mit dem Radius  $r_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) lässt sich mit Gl. (17-5) die zeitlich konstante Gesamtenergie  $E_n = E_{kin} + E_{pot}$  berechnen:

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17-6)$$

Dabei ist angenommen, dass die Energie den Wert Null annimmt, wenn  $r$  gegen  $\infty$  geht, d. h. wenn Elektron und Kern unendlich weit voneinander entfernt sind (das Elektron also frei wird). (Gebundene Zustände eines Elektrons mit geringem Abstand  $r$  und einer geschlossenen Kreisbahn sind dann wie bei der Molekülbindung (Kap. 5.1.1) durch *negative* Gesamtenergie gekennzeichnet.)

Im folgenden Abschnitt werden wir zeigen, dass das Elektron von einer zu einer anderen Bohr'schen Bahn übergehen kann. Die damit verbundene Änderung von  $E_n$  ist mit der Absorption oder Emission von Licht verknüpft.

Die im Experiment beobachteten Lichtspektren des H-Atoms lassen sich mit den Energien der Gl. (17-6) quantitativ erklären, wenn man mit Bohr die Annahme macht, daß die Radien der *stationären* Elektronenbahnen durch folgende Beziehung festgelegt sind:

$$r_n = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} n^2. \quad (17-7)$$

$n$  ist hier eine positive ganze Zahl, die von 1 bis unendlich laufen kann, und  $h$  ist das bereits in Kap. 3.3 und 17.2 eingeführte Plancksche Wirkungsquantum. Die Gesamtenergien  $E_n$ , die das Elektron auf den verschiedenen stationären Bahnen hat (wir nennen sie auch *Energieniveaus*), finden wir schließlich, indem wir Gl. (17-7) in Gl. (17-6) einsetzen:

$$E_n = \frac{-me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (17-8)$$

Da  $n$  eine ganze Zahl ist, gibt es nur *diskrete* Energieniveaus; man nennt sie *gequantelt*

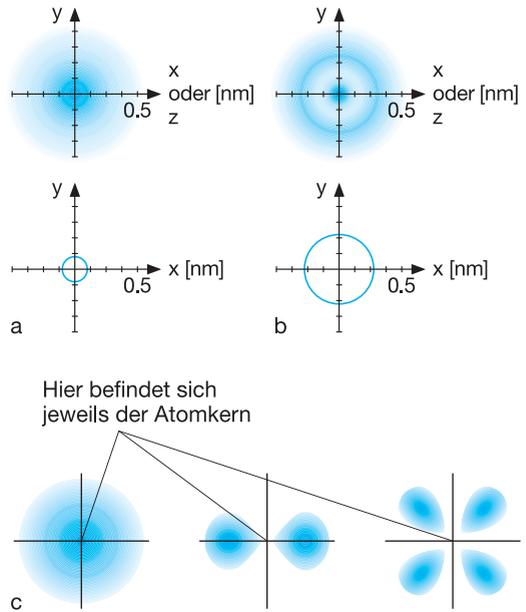
oder *quantisiert*. (Daraus hat sich die Bezeichnung *Quantentheorie* ergeben.) Die durch diese Quantelungsvorschrift festgelegten Energien sind durch die Zahl  $n$  zu charakterisieren, die man als *Quantenzahl* bezeichnet.

In Abb. 17.2 sind die stationären Elektronenbahnen des H-Atoms gezeichnet.

Überlässt man das H-Atom sich selbst, so nimmt das Elektron den Zustand mit  $n = 1$  ein, denn dieser hat die niedrigste Energie und ist daher am stabilsten. Man nennt ihn auch den *Grundzustand*. Alle anderen Zustände werden als *angeregte Zustände* bezeichnet, da es einer Energiezufuhr von außen bedarf, um das Elektron auf diese Zustände „anzuheben“, also „anzuregen“.

Bohr wusste bei der Formulierung seines Atommodells noch nichts von der Wellennatur der Elektronen (s. auch Kap. 18.6) und ihrer Dichteverteilung, wie wir sie bereits in Kap. 5.1 und Abb. 5.2 kennengelernt haben. Durch sie wird das Bild des um den Kern wie ein Planet um die Sonne kreisenden punktförmigen Elektrons falsch, da sich der momentane Ort des Elektrons zu einer bestimmten Zeit im Atom nicht angeben lässt.

**Moderne Theorieansätze:** Bis heute ist es nicht gelungen, den Elektronen eine Größe zuzuschreiben. Beschreiben wir ein Elektron nicht als einen zu jeder Zeit lokalisierbaren Masse- und Ladungspunkt, sondern mit einer *Wellenfunktion*, deren Quadrat an einem beliebigen Ort ein Maß für die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* des Elektrons an diesem Ort ist, dann dienen anstelle der Bohr'schen Bahnen die räumlichen Ladungsverteilungen, d. h. Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zur Kennzeichnung des Grundzustandes und angeregter Zustände (*Orbitale*). In diesen Zuständen können sich Elektronen dauernd aufhalten, ohne elektromagnetische Energie abzugeben oder aufzunehmen (Erweiterung des Bohr'schen Postulats). Abb. 17.3 zeigt die Raumbereiche für den Grundzustand ( $n = 1$ ) und den ersten angeregten Zustand ( $n = 2$ ) des Wasserstoffatoms; zum Vergleich ist die entsprechende Bohr'sche Bahn im gleichen



**Abb. 17.3** Ladungsverteilung a) im Grundzustand ( $n = 1$ ) und b) im 1. angeregten Zustand ( $n = 2$ ) des Wasserstoffatoms. Die Farbtiefe ist ein Maß für die Ladungsdichte. Die Ladungsbereiche muss man sich räumlich vorstellen. Zum Vergleich sind im gleichen Maßstab darunter die Bohr'schen Bahnen gezeichnet. c) Die drei möglichen Orbitale für  $n = 3$ .

Maßstab wiedergegeben. Derartige Raumbereiche sind also dreidimensional (z. B. kugel- oder kugelschalenförmig) anstelle von Kreisbahnen; man bezeichnet sie auch als *Schalen* (für  $n_{\text{Bohr}} = 1$  *K-Schale*, für  $n_{\text{Bohr}} = 2$  *L-Schale* und für  $n_{\text{Bohr}} = 3$  *M-Schale* usw.). Sie haben also mit den Bohr'schen Kreisbahnen keine Ähnlichkeit, lediglich ihr Schalendurchmesser ist  $r_n$  in Fig. 17.3a und b ähnlich. Den Ort eines Elektrons zu einer bestimmten Zeit in diesen Raumbereichen kann man nicht angeben, sondern nur seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit (Fig. 17.3c).

Eine zweite Schwierigkeit des Bohr'schen Modells liegt in der Interpretation der in Gl. (17-8) eingeführten Quantenzahl  $n$ . Heute wird sie als *Hauptquantenzahl* bezeichnet, und man weiß, dass der Atomaufbau durch weitere Quantenzahlen, wie die *Nebenquantenzahl*, die *Spinquantenzahl* und die *magnetische Quantenzahl* bestimmt wird. Beim Wasserstoff genügt aber die Kenntnis von  $n$  für

die zahlenmäßig richtige Interpretation der experimentell ermittelten Emissions- oder Absorptions-Spektren, weil dieses Atom als allereinfachstes nur aus *einem* Proton und *einem* Elektron besteht. Dies ist auch der Grund, weshalb das Bohr'sche Atommodell ausschließlich das H-Atom exakt beschreibt.

Von Sommerfeld wurde das Bohr'sche Atommodell durch Einführung weiterer Quantenzahlen erweitert. Dies sind die *Nebenquantenzahl* (oder *Drehimpulsquantenzahl*) und die *magnetische Quantenzahl* (oder *Spinquantenzahl*). Sie ermöglichen die Erklärung beobachteter Feinstrukturen von Spektren und auch eine näherungsweise Beschreibung der Spektren komplizierter und größerer Atome wie Li, K, Na usw. Auch hier wurde aber eine Korrektur durch die Quantentheorie erforderlich.

Atome anderer Elemente als Wasserstoff (mit mehr Elektronen und Protonen) haben ebenfalls erlaubte, stationäre Zustände, allerdings liegen deren Energieniveaus anders. Die Ursache ist, dass die Ladung des Kerns mit der Ordnungszahl des Elements zunimmt,

und sich nun mehrere Elektronen in verschiedenen Zuständen aufhalten, zwischen denen zusätzliche (abstoßende) Coulombkräfte wirken.

Die Besetzung der Niveaus wird durch das *Pauli'sche (Ausschließungs-)Prinzip* geregelt: Jeder durch *alle* Quantenzahlen bestimmte Zustand kann nur mit *einem* Elektron besetzt werden. Die Elektronen eines Atoms müssen sich also auf verschiedene Zustände verteilen. Dabei werden die Zustände mit niedriger Energie bevorzugt besetzt, damit die Gesamtenergie des Atoms minimal wird. (Ein stabiler Gleichgewichtszustand ist stets durch ein Minimum der Gesamtenergie ausgezeichnet, wie wir bereits aus der Mechanik wissen.)

Das Pauli-Prinzip ist die eigentliche Ursache für den Reichtum unserer Welt an Materialien unterschiedlicher Eigenschaften. Könnten sich alle Elektronen jedes Atoms im Grundzustand ansammeln, wäre unsere Welt vermutlich viel einförmiger: ein spannendes Thema für science fiction fans.

## 17.5 Emission von Licht aus Atomen

Den Vorgang der Emission können wir für das Atom mit der einfachsten Struktur, das H-Atom am Bohr'schen Modell veranschaulichen, wenn es sich im idealen Gaszustand (d. h. ohne wesentliche Wechselwirkung mit Nachbaratomen) befindet. Qualitativ gelten die Aussagen, die aus dem Bohr'schen Modell folgen, aber auch für Atome schwererer Elemente. Da sichtbares Licht nämlich meist durch die energiereichsten Elektronen (die *Leuchtelektronen* oder *Valenzelektronen*) in den äußersten besetzten Schalen der Atome erzeugt wird, können wir uns die Atome mit *einem* Elektron auf der äußersten besetzten Schale (z. B. Na oder Ag) vereinfachend so vorstellen, dass sie aus einem elektrisch einfach-positiven *Atomrumpf* und nur einem Elektron, dem *Leuchtelektron*, bestehen.

(Die übrigen Elektronen sind im Rumpf enthalten und sollen in diesem Modell zur Emission nichts beitragen.)

Dieses hypothetische Gebilde hat nun Ähnlichkeit mit dem H-Atom; es ist *wasserstoffähnlich* und kann mit dem Bohr'schen Modell interpretiert werden. Das äußerste Elektron ist übrigens nicht nur für die Lichtemission und -absorption wesentlich, sondern auch für die *chemische Bindung*. Daher ist die optische Spektroskopie zu einem wichtigen Hilfsmittel für die chemische Analyse und speziell auch für die Aufklärung von biologischen Molekülstrukturen geworden.

Bohr postulierte in seinem Modell, dass das Elektron des H-Atoms von einer Bahn zur anderen übergehen kann, wobei die Differenz zwischen den Energien dieser Bah-

nen in Form eines *Quants* elektromagnetischer Strahlung vom Atom aufgenommen (absorbiert) oder abgegeben (emittiert) wird.

Wird ein Elektron *angeregt*, d. h. auf ein höheres Energieniveau angehoben — beispielsweise beim Zusammenstoß eines Atoms mit einem im elektrischen Feld einer Gasentladung (z. B. in einer Leuchtstoffröhre) beschleunigten Ion —, so kann es von selbst zu einem Niveau niedrigerer Energie, d. h. zu einem Zustand größerer Stabilität zurückkehren (vorausgesetzt, dieser Zustand ist unbesetzt). Meist ist das der *Grundzustand*. Die Energiedifferenz  $\Delta E$  zwischen dem angeregten Zustand ( $E_2$ ) und dem Grundzustand ( $E_1$ ) wird dabei (normalerweise) durch Emission von elektromagnetischer Strahlung abgegeben. Nach dem Energiesatz gilt:  $E_2 - E_1 = h\nu$ , wobei  $h\nu$  die Quantenenergie des emittierten Strahlungsquants ist.

Je größer die Energiedifferenz ist, desto größer ist auch die Frequenz  $\nu$  der Strahlung, und desto kleiner ist die Wellenlänge  $\lambda$ :

$$E_2 - E_1 = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \hbar\omega, \quad (17-9)$$

wobei  $h$  das Planck'sche Wirkungsquantum (Kap. 3.3 und 17.2) ist und  $\hbar$  eine Abkürzung für  $h/2\pi$  bedeutet.

Ein Elektron, das sich im von Umgebungsatomen isolierten Atom in einem angeregten Zustand befindet, braucht normalerweise weniger als  $\Delta t = 10^{-8}$  s Zeit, um in den Grundzustand zurückzukehren. Im Bild der elektromagnetischen Welle wird während dieser Zeit ein Wellenzug ausgesandt, dessen Länge  $l = c \Delta t$  von der Größenordnung einiger Zentimeter ist, also bei sichtbarem Licht aus einigen hunderttausend Wellenlängen besteht. Das Atom gibt dabei an das das Atom umgebende und den ganzen Raum füllende elektromagnetische Feld eine festbestimmte „Portion“ von Energie ab, nämlich die Quantenenergie  $h\nu$ . Bringt man zum Nachweis der Strahlung einen Strah-

lungsempfänger (Kap. 20.7) in das Feld, so vermag dieser dem Feld ebenfalls nur Energie exakt dieser Menge, also ein Quant oder Vielfache davon, zu entnehmen, indem die Feldenergie z. B. in einen elektrischen Strom umgewandelt werden kann, der dann angezeigt wird.

Ein solcher Strahlungsempfänger nutzt i. A. den zur *Emission* inversen Effekt der *Absorption* aus, wobei jedes einzelne eintreffende Lichtquant ein Elektron aus dem Grundzustand  $E_1$  in einen angeregten Zustand  $E_2$  überführt. Auch hierfür gilt die Energiebilanz von Gl. (17-9), allerdings läuft der Vorgang zeitumgekehrt ab.

Diese Vorgänge sind nicht mehr im herkömmlichen Bild elektromagnetischer Wellen zu verstehen: Es tritt ein völlig neuartiges Phänomen auf, das erst im Rahmen der Quantentheorie zu deuten ist. Die Energieportionen (*Energiequanten*, *Lichtquanten* oder *Photonen*) sind proportional zur Frequenz des Wellenfeldes,  $E = h\nu$ ; sie enthalten die *kleinste* für eine bestimmte Frequenz erzeugbare und nachweisbare Strahlungsenergie, nämlich die, die mit einem *Elementarprozess* der Emission oder Absorption verbunden ist.

Beim Sprung eines gebundenen Elektrons von einer Bahn zu einer anderen wird also nach Gl. (17-9) genau ein Photon emittiert oder absorbiert. Ist bei einem anderen Übergang der Energieabstand der Niveaus größer, kommen nicht etwa mehrere Photonen ins Spiel, sondern die Frequenz des *einen* Photons ist dann größer. Geht jedoch das Leuchtelektron vom angeregten Zustand nicht direkt in den Grundzustand über, sondern in mehreren Schritten über dazwischenliegende weitere Energieniveaus, so werden dabei mehrere Photonen niedrigerer Frequenzen emittiert (*Mehrphotonen-Prozesse*). Durch kein physikalisches Hilfsmittel lassen sich Photonen, ohne dass sich die Frequenz ändert, weiter unterteilen. Strahlungsenergie ist also keine kontinuierlich veränderbare Größe, sondern *quantisiert*. In Gl. (17-3) ist

$N$  daher eine ganze Zahl. Die Energie eines einzelnen Photons ist äußerst gering; man benötigt die Energie von etwa  $10^{20}$  Lichtquanten von IR-Licht, um 1 g Wasser um 1 K zu erwärmen (Wasser absorbiert in bestimmten Spektralbereichen des IR) und erwärmt sich dabei.

Für die elektromagnetische Welle, die vom *einzelnen* Atom ausgesandt wird, hat die *Quantisierung* der Energie die Folge, dass es sinnlos wird, das Quadrat ihrer Amplitude als proportional zur Energiestromdichte zu interpretieren, wie wir es für klassische mechanische und elektromagnetische Wellen in Kap. 7.1 und 14.9.7 tun. Denn das würde voraussetzen, dass die Energie in der im Raum ausgedehnten Welle gleichmäßig verteilt ist, und nicht in Form diskreter Energiepakete. Statt dessen muss man zu einer anderen Interpretation greifen:

Das Quadrat der Wellenamplitude an einem Ort gibt die *Wahrscheinlichkeit* an, dass ein Photon der Frequenz  $\nu$  absorbiert wird, wenn man an diesen Ort einen Strahlungsempfänger bringt.

Diese Interpretation über Wahrscheinlichkeiten ist formal analog zu der, die wir in Kap. 17.4 für die Elektronen im Atom kennengelernt haben: dort war die Materiewelle (s. auch Kap. 18.6) das Maß für deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit, hier ist es die elektromagnetische Welle als Maß für die Nachweiswahrscheinlichkeit eines Photons.

Diese neuartige Deutung der elektromagnetischen Welle ist notwendig, wenn nur einige wenige Photonen in einem Wellenfeld enthalten sind oder an einem Ort absorbiert werden; ist ihre Zahl jedoch sehr groß, wie in der Umgebung üblicher Lichtquellen, so können wir das Quadrat der Wellenamplitude doch wieder als ein gutes Maß für die Intensität der Strahlung ansehen, denn wir können uns dann die riesig große Zahl von Energiequanten (z. B.  $10^{18}$  Photonen/s) in guter Näherung gleichmäßig über die Welle im Raum

verteilt denken. In diesem Bild vieler Photonen erhalten die klassische Elektrizitätslehre und auch das Bild der elektromagnetischen Welle wieder ihre Gültigkeit. (Im (physikalischen) Alltag ist es üblich, mit beiden Modellen, der klassischen Wellentheorie und der Quantentheorie, zu arbeiten und sie zur Beschreibung von Licht eher großzügig zu mischen. Dies geschieht, besserer Anschaulichkeit wegen, auch in unserem Buch.)

Wir haben hier ein Beispiel für den in Kap. 14.2.1 angesprochenen Sachverhalt, dass eine physikalische Größe, die eigentlich diskontinuierlich ist, sich also in diskreten Sprüngen ändert, aber bei großen Werten in eine quasi-kontinuierliche Größe übergeht, die mathematisch einfacher zu behandeln ist. Als Vergleichsbeispiel können wie die Verteilung von Wassermolekülen heranziehen: Im Wasserstrahl sind so viele Moleküle enthalten, dass wir von kontinuierlicher Wasserströmung sprechen können; im verdünnten Wasserdampfstrahl hingegen, in welchem einzelne Moleküle mit zeitlichem Abstand aufeinander folgen, verliert das Modell der kontinuierlichen Strömung seinen Sinn.

Zugleich wird hier eine andere Aussage der Quantentheorie deutlich, nämlich der eingeschränkte *Determinismus* des Einzelprozesses.

So ist das Zeitintervall, innerhalb dessen der einzelne Emissionsvorgang stattfindet, nicht *genau* vorhersagbar. Zwar können wir finden, wann die *Wahrscheinlichkeit* für diesen Vorgang am größten ist, wenn wir viele Prozesse in vielen Atomen (z. B. im Wasserstoffgas) betrachten, aber jeder einzelne Vorgang kann etwas früher oder später erfolgen und etwas kürzer oder länger dauern. Diese *Unbestimmtheit* haben wir schon bei der Definition der *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* des Elektrons in Kap. 17.4 kennengelernt.

Zusammenfassend stellen wir fest: Zur Beschreibung des Lichtes muss dessen Quantennatur berücksichtigt werden, wenn nur *wenige* Photonen an einem Prozess beteiligt sind. Dies gilt für den Elementarvorgang der Emission und entsprechend für den in Kap. 17.8 näher zu beschreibenden Vorgang der Absorption. Die Ausbreitung von Licht hoher Intensität (großer Photondichte), z. B. das Licht einer Lampe, erfolgt hingegen in guter Näherung wie im Modell der ausgedehnten elektromagnetischen Welle.

## 17.6 Kohärenz, spontane und induzierte Emission

Die eben beschriebene Art der Emission von Licht nennt man *spontane Emission*. Bei diesem Prozess senden verschiedene Atome z. B. einer Gasentladungs-Lichtquelle (einer Leuchtstoffröhre) weitgehend unabhängig voneinander Lichtquanten aus. Ein in einem Atom gebundenes Elektron, das sich in einem angeregten (energetisch höheren) Zustand befindet, benötigt für die spontane Rückkehr in den Grundzustand eine Zeitdauer zwischen  $\Delta t \approx 10^{-13}$  s und  $10^{-8}$  s; danach bricht die Emission ab. Aufgrund der in Kap. 17.5 angesprochenen Unbestimmtheit ist völlig offen, wann das Elektron durch Absorption eines einfallenden Photons erneut angeregt und danach zur Emission veranlasst werden wird. Der Beginn der Emission legt die Phasenkonstante  $\varphi_0$  der während der Rückkehr des Elektrons in den Grundzustand ausgesendeten elektromagnetischen Welle fest. Die Emissionsdauer bestimmt die Länge  $l$  des Wellenzuges:  $l = c \Delta t$ , wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Über längere Zeit betrachtet, setzt sich das von einer Lichtquelle emittierte Licht aus einer Vielzahl von kurzen, aus verschiedenen Atomen ausgesandten Wellenzügen mit regellos verteilten Phasenkonstanten zusammen. Diese bilden durch Überlagerung neue Wellenzüge. Solche statistisch ungeordnete Folgen nennt man auch *Rauschen*, die zugehörigen Quellen *Rauschquellen*. Ein anderes typisches Beispiel für Rausch-Lichtquellen ist die Glühlampe.

Die mittlere Zeit  $\Delta t$  bezeichnet man als die *Kohärenzzeit*, die zugehörige Länge  $l = c \cdot \Delta t$  des emittierten Wellenzuges als die *Kohärenzlänge* des Lichts. Ist  $l$  klein (z. B. nur einige Lichtwellenlängen lang), so ist das Licht *inkohärent*. Licht mit großer Länge  $l$  dagegen nennen wir *kohärent*. Rauschquellenlicht ist inkohärent.

Zur quantitativen Charakterisierung der Kohärenz dient der *Kohärenzgrad*  $\kappa$ , der zwischen den Grenzen 0 (d. h. inkohärent) und 1 (d. h. vollständig kohärent) variieren kann. Er lässt sich durch ein *Interferenzexperiment* messen, wie es in Kap. 18.1.1 und 18.1.2 beschrieben wird. In einem solchen Experiment entstehen Muster aus hellen

und dunklen *Interferenzstreifen*, die bei hoher Kohärenz starken, bei niedriger Kohärenz aber schwachen Kontrast zeigen.  $\kappa$  ist daher definiert als  $\kappa = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$ , wobei  $I_{\max}$  und  $I_{\min}$  die Lichtintensitäten in einem hellen bzw. dem benachbarten dunklen Interferenzstreifen bedeuten.

Der Begriff der *Kohärenz* ist nicht auf einzelne elektromagnetische Wellen beschränkt; er charakterisiert ganz allgemein eine Eigenschaft von Wellen:

Zwei verschiedene Wellen sind kohärent zueinander, wenn sie in ihrer Frequenz übereinstimmen, und ihre Phasendifferenzen über lange Zeit hinweg konstant sind (und sie damit lange Wellenzüge enthalten). Das quantitative Maß der Kohärenz zweier Wellen ist auch hier der *Kohärenzgrad*.

Eine streng monochromatische, harmonische Welle ist also vollständig kohärent, da sie aus einem einzigen, unendlich langen Wellenzug besteht.

Das von einem Ensemble von vielen Atomen über längere Zeit ausgesandte Licht besteht aber, wie oben gezeigt, aus einer Aufeinanderfolge von Wellenzügen, deren Phasenkonstanten weitgehend unkorreliert sind, diese Welle ist *inkohärent*. Hier ist der wesentliche Unterschied zu den von Schwingkreisen über Antennen ausgesandten niederfrequenten elektromagnetischen Wellen, wie sie für Rundfunk und Fernsehen verwendet werden. Diese Wellen können aus beliebig langen Wellenzügen bestehen und besitzen dann feste (d. h. zeitunabhängige) Phasenkonstanten, sind also *kohärent*. In der Optik spielen kohärente Wellen hauptsächlich beim *Laser* als Lichtquelle (Kap. 17.12) eine große Rolle, nicht aber bei Rausch-Lichtquellen d. h. üblichen Lampen, die auf spontaner Emission beruhen.

Bei *spontaner Emission* kehrt also, wie wir gesehen haben, das Elektron ohne Beeinflussung von außen aus dem angeregten Zu-

stand nach einer charakteristischen Zeit, der *Lebensdauer des angeregten Zustandes*, wieder in ein energetisch tiefer gelegenes Niveau (z. B. den Grundzustand) zurück, wobei i. A. die Energiedifferenz der beiden Niveaus als Lichtquant  $h\nu$  abgestrahlt wird (Gl. (17-9)).

Strahlt man aber von außen während der Besetzung des angeregten Zustandes elektromagnetische Strahlung der Frequenz  $\nu$  ein, so dass sich das Atom in deren Feld befindet, so kann man diese Lebensdauer verkürzen, und das Elektron geht vorzeitig unter Emission eines Lichtquants der Energie  $h\nu$  (enthalten in dem Wellenzug der Länge  $l$ ) in den Endzustand über. Man *induziert* also die vorzeitige Emission durch das äußere elektromagnetische Feld.

Dieser Effekt der *induzierten Emission* (die auch als *erzwungene* oder *stimulierte Emission* bezeichnet wird) ist natürlich besonders wirksam, wenn die durch spontane Emission begrenzte Lebensdauer des angeregten Zustandes sehr lang ist. Solche Zustände mit langer Lebensdauer nennt man *metastabil*.

Zusammenfassend können wir also drei unterschiedliche Elementarprozesse unterscheiden:

1. die Absorption einer von außen auffallenden elektromagnetischen Strahlung durch Anheben eines Elektrons in einen Anregungszustand höherer Energie,

2. die durch induzierte Emission, und
3. die durch spontane Emission erfolgende Rückkehr eines bereits im Anregungszustand befindlichen Elektrons in einen energetisch niedrigeren Zustand.

Absorption und induzierte Emission sind also zueinander inverse Prozesse. Die spontane Emission erfolgt im Unterschied zu ihnen ohne Einwirkung eines von außen eingestrahnten elektromagnetischen Wellenfeldes.

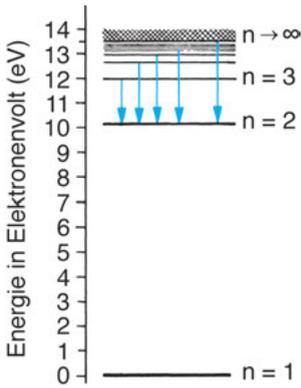
Die induzierte Emission ist immer dann sehr stark, wenn die Feldstärke des induzierenden Feldes groß ist. Beim *Laser* nutzt man diesen Effekt aus und erhöht sie künstlich durch *Rückkopplung* (siehe Kap. 17.12). Die induzierte Emission ist während des zeitlichen Verlaufs der Welle immer dann maximal, wenn die Wellenamplitude ihr Maximum erreicht. Dadurch wird dem induziert emittierten Wellenzug eine  *feste Phasenbeziehung* zur äußeren Welle aufgezwungen, und er verstärkt die äußere Welle optimal. (Wir kennen aus der Mechanik einen ähnlichen Prozess: die erzwungene Schwingung (Kap. 6.4). Dort befindet sich bei Resonanz die Schwingung stets in einer solchen festen Phasenbeziehung zur von außen einwirkenden periodischen Kraft, daß sich die Amplitude immer weiter vergrößert.)

Die induzierte Emission vieler angeregter Atome erfolgt also *kohärent*, und ihre emittierten Wellenzüge vieler angeregter Atome überlagern sich mit der einfallenden äußeren Welle zu einem einheitlichen, langen, kohärenten Wellenzug. Aufgrund dieser Eigenschaft, kohärentes Licht erzeugen (bzw. verstärken) zu können, unterscheidet sich der *Laser* von den anderen Lichtquellen prinzipiell.

## 17.7 Das Emissionsspektrum der Atome

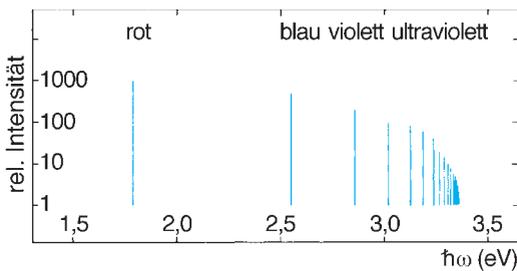
Die stationären Energiezustände für das Elektron im Wasserstoffatom sind mit Gl. (17-8) angegeben worden, so dass wir uns nun die nach Gl. (17-9) möglichen *Elektronen-Übergänge* zwischen diesen in einem Energieschema (oder *Termschema*) zusammenstellen können (Abb. 17.4).

Wir sehen an diesem Energieschema, dass eine Vielzahl von Übergängen möglich ist (vorausgesetzt, das Ausgangsniveau ist mit einem Elektron besetzt, und das Endniveau ist noch nicht besetzt), und dass daher das Atom Photonen mit verschiedenen, *diskreten Frequenzen*  $\nu$  (die *Spektrallinien*) emittieren

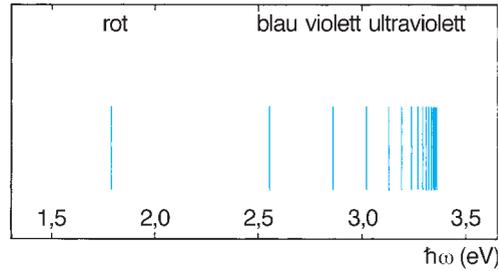


**Abb. 17.4** Energieniveauschema des Wasserstoffatoms. Die Pfeile zeigen einige mögliche elektronische Übergänge zum Niveau  $n_{\text{Bohr}} = 2$ , verbunden mit Lichtemission, an.

kann. Das Licht einer festen Frequenz nennt man *monochromatisch*; Wasserstoffgas sendet also monochromatische Wellen der diskreten Folge von Frequenzen  $\nu$  aus. Die zugehörigen Photonen haben wieder die Quantenenergien  $h\nu$ . In Abb. 17.5 ist ein Ausschnitt des Energie-Spektrums dieser Frequenzen des Wasserstoffatoms aufgezeichnet, wobei nur diejenigen ausgewählt wurden, deren Endniveau  $n = 2$  ist. Das Spektrum besteht aus *Spektrallinien* und wird als *Linienpektrum* bezeichnet. Dargestellt ist für ein erhitztes Wasserstoffgas die Intensität (sie ist, wie wir von Gl. (17-3) wissen, proportional zur Zahl der pro Zeit emittierten Lichtquanten und zur Energie der Quanten), aufgetragen gegen die Quantenenergie  $h\nu$  (*Energie-Spektrum*).



**Abb. 17.5** Ausschnitt aus dem Linienpektrum des Wasserstoffatoms ( $h\nu$ : Photonenenergien;  $I_{\text{rel}}$ : relative Intensitäten der emittierten Strahlung). Die zugehörigen Elektronenübergänge sind in Abb. 17.4 durch Pfeile eingezeichnet.



**Abb. 17.6** Ausschnitt aus dem Spektrum des H-Atoms ohne Angabe der Linienintensitäten (Diese Darstellung ist üblicher als die der Fig. 17.5)  $n_{\text{Bohr}} = 2$ ;  $n'_{\text{Bohr}} = 3, 4, 5, \dots, \infty$ . (Diese Serie von Linien mit  $n_{\text{Bohr}} = 2$  nennt man *Balmer-Serie*.)

Ebenso üblich ist, die Intensität gegen die Frequenz  $\nu$  (*Frequenz-Spektrum*), gegen die Wellenlänge (*Wellenlängen-Spektrum*) oder die Wellenzahl (*Wellenzahl-Spektrum*) aufzutragen.

Üblicherweise verzichtet man auf die Angabe der Intensitäten der emittierten Strahlung und stellt das Energie-Spektrum in Form der Abb. 17.6 dar. (Dann hat die Ordinate keine quantitative Bedeutung.)

Für das Wasserstoffatom können wir aus Gln. (17-8) und (17-9) direkt die Quantenenergien (und daraus auch die Frequenzen und Wellenlängen) berechnen:

$$E_n - E'_n = h\nu_{n,n'} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad \text{mit}$$

$$R = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2}, \quad (17-10)$$

wobei  $n$  und  $n'$  die den Energieniveaus des Anfangs- und des Endzustandes zugeordneten Zahlenwerte der Bohr'schen Hauptquantenzahl sind.  $R$  nennt man die *Rydberg-Konstante*; sie hat den Zahlenwert  $R = 13,6 \text{ eV}$ .

Die Spektren anderer z. B. im Gaszustand voneinander isolierter Atome sind ebenfalls Linien-Spektren, ihr Aufbau ist jedoch wegen der größeren Anzahl der beteiligten Hüllenelektronen komplizierter, so dass es keine der Gl. (17-10) ähnliche einfache Beziehung gibt. Die Linien im sichtbaren Teil des Spektrums stammen dabei zumeist von den äußeren Hüllenelektronen, den *Valenzelektronen*, die auch für die chemische Bindung wesentlich sind.

Die *Anregung* eines Elektrons (d. h. das Anheben auf ein höheres Energieniveau) kann auf unterschiedliche Weisen erfolgen:

In der Gasentladung (oder, als technischer Anwendung, der *Leuchtstofflampe*) wird die zur Anregung notwendige Energie aus der Bewegungsenergie von elektrisch geladenen Stoßpartnern, z. B. Ionen oder Elektronen, genommen, die in einem von außen angelegten elektrischen Feld beschleunigt worden sind und untereinander Stoßprozesse ausführen.

Eine Anregung kann auch erfolgen, wenn man Atomen genügend thermische Bewegungsenergie erteilt. Sprühen wir eine Kochsalzlösung in die Bunsenbrennerflamme, so verdampft sie, und es entstehen isolierte Na-Atome, von denen einige – wegen der hohen Temperatur der Flamme und der daraus folgenden schnellen thermischen Bewegung – durch Stöße untereinander zur Emission angeregt werden. Dadurch

verfärbt sich die Flamme leuchtend gelb, und man kann das Linien-Spektrum des Na-Atoms beobachten.

Tatsächlich hat die Strahlung einer Spektrallinie nicht exakt *eine* Frequenz, sondern umfasst ein – wenn auch schmales – Frequenzintervall  $\Delta\nu$ . Bei hohem Gasdruck, d. h. häufigen Zusammenstößen von Atomen, wächst  $\Delta\nu$ , die Spektrallinien werden *verbreitert*, da die Emissionsdauer dadurch verkürzt wird. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die *Sonne*, deren Gase durch riesige Gravitationskraft und hohe Temperatur so hohem Druck unterliegen, dass die Breiten der Spektrallinien das ganze sichtbare Spektrum überdecken, und die Sonne ein kontinuierliches Spektrum weißen Lichts emittiert (Kap. 17.9).

## 17.8 Absorption von Licht in Atomen und Molekülen

Nicht nur durch Stöße mit anderen Atomen, Ionen und Elektronen kann ein Hüllenelektron eines Atoms auf ein höheres Energieniveau gebracht (*angeregt*) werden.

Fällt elektromagnetische Strahlung der Frequenz  $\nu$  auf ein Atom, so wirkt das elektrische Feld auf die elektrischen Ladungen von Kern und Elektronenhülle. Stimmt die Frequenz (und damit die Quantenenergie) mit der einer der Spektrallinien des Atoms überein, so kann ein Elektron aus dem Niveau  $E_1$  in ein höheres Energieniveau  $E_2$  gehoben werden, indem ein Photon aus der einfallenden Strahlung absorbiert wird.

Das Photon verschwindet dabei, und seine Energie wird von dem Elektron in Form von kinetischer und potentieller Energie aufgenommen.

Auch für diesen Absorptionsprozess gilt der Energiesatz:

$$E_2 - E_1 = h\nu. \quad (17-11)$$

Wir können, wie bei der Emission, aus der Gesamtheit der atomaren Energiezustände diejenigen Frequenzen zusammenstellen, für die Quanten absorbiert werden können.

Beim Wasserstoffatom ergibt sich wieder die Formel Gl. (17-10). Das *Absorptionsspektrum* lässt sich also analog zu Abb. 17.6 darstellen, allerdings bedeuten die Linien in diesem Fall, dass aus einer auf die Probe fallenden Strahlung mit kontinuierlichem Spektrum (z. B. *weißes Licht*) bei deren Frequenzen Strahlungsenergie absorbiert wird (*Absorptions-Spektrallinien*). Bei anderen chemischen Atomsorten sind diese Spektren wie bei der Emission komplizierter und linienreicher.

Das Spektrum der absorbierten Strahlung weist also Linien bei denselben Frequenzen auf wie das Emissionsspektrum; d. h., auch das Absorptionsspektrum von isolierten Atomen ist ein für die Atomart charakteristisches Linienspektrum.

Absorptions- und Emissionsspektren sind also nicht unabhängig voneinander. Beide geben direkten Aufschluß über die elektronische Struktur des Atoms, d. h. die Anzahlen und die energetischen Lagen der Energieniveaus. Dies macht man sich bei der *Spektralanalyse* zur Identifizierung von Atomarten zunutze (Kap. 18.4).

**Molekül- und Cluster-Spektren:** Moleküle bestehen aus mehreren, i. a. chemisch unterschiedlichen Atomen. (Sind sie jedoch gleich-

artig, sprechen wir auch von *Molekülclustern*.) Die Bindungskräfte zwischen den Kernen und Elektronen führen zu Wechselwirkungen, die komplexe Energieniveau-Schemata ähnlich denen von Abb. 17.4 liefern.

Ist die Zahl der Atome wesentlich kleiner als etwa  $10^2$ , so treten in den Emissions- und Absorptionsspektren voneinander getrennte Gruppen von Linien auf, die *Molekülbanden*. Solche Molekül- oder Molekülcluster-Spektren können in vielen Fällen auch zur Spektralanalyse herangezogen werden und Auskunft geben über die enthaltenen Atome und deren geometrische Anordnung. Allerdings erhält man wegen der komplexen Strukturen weniger Information als bei den Atomspektren. Bei größeren Molekülen oder Clustern sind dann die Linien so zahlreich, dass sie

meist nicht mehr voneinander getrennt sind. Stattdessen gehen die Spektren mit zunehmender Molekül- und Clustergröße in die quasikontinuierlichen und kontinuierlichen Spektren kompakter Materie über. Dieser Übergangsbereich vom Molekül zum Festkörper gehört zur *Nanomaterie* (Kap. 5.4) und ist deshalb von besonderem Interesse, weil sich nicht nur die Spektren stark ändern sondern fast alle physikalischen und chemischen Materialeigenschaften.

Entsprechendes gilt auch für *Biomoleküle*. Bei den biologischen Makromolekülen des Hämoglobins mit ca.  $10^4$  Atomen, beispielsweise, lassen sich spezielle, noch vorhandene Absorptionslinien zur Identifikation des sauerstoffbeladenen bzw. des sauerstofffreien Zustandes verwenden (siehe Abb. 18.22 a).

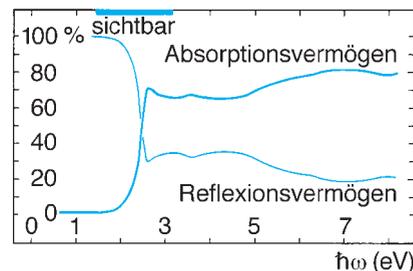
## 17.9 Emission und Absorption glühender Stoffe

Im Folgenden sollen die komplizierten Spektren kompakter, makroskopischer Materie eingehender behandelt werden.

Atome im engen Verband des festen Zustandes, der Flüssigkeit oder auch des Gases unter extrem hohem Druck, wie in der Sonne, verhalten sich anders. Sie beeinflussen einander durch ihre Wechselwirkungs- und speziell ihre Bindungskräfte. Dies hat zur Folge, dass die Zahl der Elektronen-Energieniveaus zunimmt und diese nicht mehr dem Einzelatom, sondern dem Stoff als Ganzem zuzuordnen sind. Die wechselseitige Beeinflussung ist besonders stark bei den äußeren Hüllenelektronen, die die Emission von Strahlung im Sichtbaren und IR bewirken. Sie sind es ja auch, die hauptsächlich zur chemischen Bindung beitragen. Hinzu kommen andersartige Anregungen wie beispielsweise die Schwingung der Atome als Gitterbausteine im Kristallgitter, die ebenfalls zu Absorption und Emission elektromagnetischer Strahlung führen kann. Die Folge ist, dass elektromagnetische Strahlung nicht mehr nur bei diskreten Frequenzen emittiert oder absorbiert werden kann, sondern in breiten,

praktisch kontinuierlichen Bereichen des Frequenzspektrums. Ein Beispiel gibt das Absorptionsspektrum der Abb. 17.7. Diese Spektren nennen wir, um sie von den Linienspektren der Atome und den Bandenspektren der Moleküle zu unterscheiden, *kontinuierliche Spektren*. Weder Emissions- noch Absorptionsspektren fester und flüssiger Körper haben also Ähnlichkeit mit den Linienspektren der isolierten Atome bzw. Moleküle.

Strahlt man Licht auf eine Probe kondensierter Materie ein, so kann daher im ge-



**Abb. 17.7** Kontinuierliche Spektren des Absorptionsvermögens und des Reflexionsvermögens eines massiven Stückes Gold (bei Raumtemperatur).

samen optischen Spektrum Absorption erfolgen. Ein Teil der absorbierten Energie kann durch Emission wieder emittiert werden, durch komplizierte Folgeprozesse wird aber der größte Teil der absorbierten Energie in thermische Energie umgewandelt. Man kann also allgemein sagen, dass die Absorption optischer Strahlung zur Erwärmung des Absorbers führt. (Es gibt jedoch Ausnahmen, die in Kap. 17.11 zusammengestellt sind.)

Analog gibt es den inversen Prozess: Erhitzen wir einen festen oder flüssigen Körper oder ein Gas unter hohem Druck, dann beobachten wir Lichtemission mit einem kontinuierlichen Spektrum, die *Temperaturstrahlung* (*thermische Strahlung*), die um so intensiver wird, je höher die Temperatur ist. Zugleich verschiebt sich das Spektrum mit zunehmender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen.

Bei niedrigen Temperaturen, z. B. Körpertemperatur, besteht diese Strahlung im wesentlichen aus Infrarot (*Wärmestrahlung*; Kap. 17.3); sie kommt im wesentlichen durch Schwingungsanregung (Wärmebewegung) der elektrisch ge-

ladenen Gitterbausteine des Körpers zustande. Auch die Leitungselektronen der Metalle absorbieren und emittieren im Infraroten.

Enthält das Emissionsspektrum eines Stoffes bei höherer Temperatur auch sichtbares Licht, so sagen wir, der Körper *glüht*. Bei starkem Erhitzen wird ein Gegenstand nacheinander dunkelrot-, hellrot-, gelb- und weißglühend.

Dies macht man sich z. B. in der *Glühlampe* zunutze, in der eine dünne Spirale aus Metall-Draht (oft sind es Osmium-Wolfram-Legierungen) durch die Joule'sche Wärme eines elektrischen Stromes aufgeheizt wird, bis sie bei ungefähr 3000 K hellgelb glühend wird, und ein Teil ihrer thermischen Strahlung in den sichtbaren Spektralbereich fällt. Der größere Teil der elektrischen Leistung (90–95%) dient allerdings nicht der Licht-, sondern, unerwünscht, der Wärmezeugung. Da das Spektrum sich (wenn auch mit unterschiedlicher Intensität) vom infraroten über den ganzen sichtbaren Bereich erstreckt, erscheint uns das Licht nicht farbig sondern praktisch *weiß*. Bei diesem *Farbeindruck* spielt auch der physiologische Effekt eine Rolle, dass das Auge sich auf Frequenzgemische von Licht ähnlich dem der Sonne einstellen kann, um es als *Weiß* wahrzunehmen.

Durch Emission von Strahlung verliert der erhitzte Körper Wärmeenergie; er kühlt sich also ab, wenn ihm nicht ständig Energie zugeführt wird.

## 17.10 Temperaturstrahlung und Temperaturgleichgewicht

Ein heißer Körper und ein kälterer emittieren beide Temperaturstrahlung, aber, entsprechend ihren Temperaturen, in unterschiedlichem Maße. Bei niedrigen Temperaturen besteht sie, wie schon betont, im Wesentlichen aus infraroter Wärmestrahlung. Die Emission führt zu unterschiedlichen Wärmeverlusten beider Körper. Stehen beide Körper nebeneinander, so absorbieren die beiden gegenüberliegenden Seiten Temperaturstrahlung des Nachbarn, ihre Wärmeenergien werden dabei in unterschiedlichem Maße geändert. Die Bilanz der ausgetauschten Energien führt dazu, dass der heiße Körper abkühlt, der kältere sich erwärmt. Neben der Wärmeleitung und der Konvektion trägt also elektromagnetische

Strahlung zum *Wärmetransport* bei. Im Gegensatz zur Wärmeleitung muss kein direkter Kontakt des Körpers mit seiner Umgebung bestehen. Denn Temperaturstrahlung kann sich als elektromagnetische Strahlung auch im Vakuum ausbreiten.

Die Übertragung von Wärmeenergie des glühenden Sonnenballs auf die Erde erfolgt ausschließlich durch Temperaturstrahlung; sie schafft die Voraussetzung zur Existenz von Leben auf der Erde. Wenn wir annehmen, dass die Sonnenstrahlen auf dem Wege durch die Atmosphäre nicht geschwächt werden, so fällt auf eine Fläche auf der Erde, die senkrecht zur Einfallrichtung des Sonnenlichtes steht, 1,36 kW als Wärmeleistung pro m<sup>2</sup>. Man nennt diesen Wärmeleistungswert *Solarkonstante*. Tatsächlich wird ein Teil der Strahlung aber doch in der Atmosphäre absorbiert und rückgestreut, so dass die Erdoberfläche eine Wärmeleistung pro Flächeneinheit von

etwa  $1 \text{ kW m}^{-2}$  aufnimmt. Zugleich strahlt die Erde, entsprechend ihrer niedrigeren Temperatur in geringerem Maße, selbst Wärmestrahlung in den Weltraum ab.

Die emittierte Temperaturstrahlung hängt ausschließlich von der Temperatur und den optischen Eigenschaften des strahlenden Körpers, nicht aber von der Umgebungstemperatur ab. (Allerdings wird natürlich ein Körper bei hoher Umgebungstemperatur erhitzt, wenn man nicht geeignete Vorkehrungen zur Konstanthaltung seiner Temperatur trifft, und dann ändert sich auch die Temperaturstrahlung!) Sie wird von allen Körpern bei *beliebiger* Temperatur abgestrahlt. Ist der Körper wärmer als seine Umgebung, so hat die von ihm ausgehende Strahlung eine höhere Intensität als diejenige, die er aus seiner Umgebung absorbiert. Es ist umgekehrt, wenn der Körper kälter als seine Umgebung ist. Dies führt zum Ausgleich von Temperaturdifferenzen zwischen einem Körper und seiner Umgebung. Im *Temperaturgleichgewicht* der beiden oben betrachteten Körper schließlich sind die pro Zeiteinheit von jedem der Körper ausgestrahlte und aus der Umgebung absorbierte Energie genau gleich. Wir werden aber sehen, dass das nicht bedeuten muss, dass die Temperaturen von Körper und Umgebung dann gleich sind.

Natürlich liegen ganz andere Verhältnisse vor, wenn der Körper selbst Wärmeenergie erzeugt. Ein Beispiel ist die Sonne, in der infolge von im Innern ablaufenden Kernreaktionen (Kap. 21.2.1) dauernd Wärmeenergie erzeugt wird.

### 17.10.1 Thermische Emission und Absorption

Die zuvor besprochene Temperaturstrahlung kann quantitativ durch einfache Bilanzgleichungen beschrieben werden.

Die von der Flächeneinheit der Oberfläche eines Körpers in den Halbraum der Umgebung pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie der Temperaturstrahlung wird als *Emissionsvermögen* ( $E$ ) bezeichnet ( $E$  ist also – im Gegensatz zum Absorptionsvermögen oder zum Reflexionsvermögen, die wir weiter un-

ten kennenlernen werden – eine dimensionsbehaftete Größe).  $E$  hängt außer von der Temperatur auch von speziellen Eigenschaften der Oberfläche des strahlenden Körpers ab. Diese Eigenschaften bestimmen, wieviel der von außen auffallenden Strahlungsenergie absorbiert und wieviel reflektiert und gestreut wird. Als *Absorptionsvermögen* (*Absorptionsgrad*)  $A$  definieren wir das Verhältnis von absorbierter zu auffallender Strahlungsleistung  $P$  (das als dimensionslose Zahl auch in Prozent angegeben werden kann):

$$A = \frac{P_{\text{abs}}}{P_{\text{auffallend}}} \quad (17-12)$$

Der nicht absorbierte Anteil wird reflektiert bzw. gestreut. Er wird durch das *Reflexionsvermögen* (*Reflexionsgrad*)  $R$  charakterisiert:

$$R = \frac{P_{\text{auffallend}} - P_{\text{abs}}}{P_{\text{auffallend}}} \quad (17-13)$$

oder

$$R = 1 - A \quad (17-14)$$

Diese Größen wurden allgemein bereits in Kap. 7.8 eingeführt und in Kap. 19.3 nochmals behandelt. Gl. (17-14) können wir auch umgekehrt lesen: Die Summe aus Reflexionsvermögen und Absorptionsvermögen ist gleich 1 (bzw. 100%). Diese einfache Beziehung gilt natürlich nur für Körper, die so dick sind, dass alle eindringende Strahlung im Innern absorbiert wird. Für dünnere oder schwach absorbierende Proben, durch die ein Teil der Strahlung hindurchtritt, muss noch das *Transmissionsvermögen* (*Transmissionsgrad*)

$$T = \frac{P_{\text{durch}}}{P_{\text{auffallend}}} \quad (17-15)$$

berücksichtigt werden, wobei  $P_{\text{durch}}$  der nicht absorbierte, die Probe an ihrer Rückseite wieder verlassende Anteil ist. Es gilt dann sinngemäß:  $T + R + A = 1$  (bzw. 100%). Wichtig ist, dass  $A$ ,  $R$  und  $T$  einer realen Probe  $< 1$  sind und i. A. mit der Frequenz der Strahlung in einer für das Material und die Probenbeschaffenheit charakteristischen Wei-

se variieren, wodurch Farbe und Glanz der Probe entstehen. Zudem verändern sie sich auch mit der Probentemperatur (Vorsicht: ebenfalls mit  $T$  bezeichnet!). Ein Beispiel solcher Spektren zeigt Abb. 17.7.

Emissions- und Absorptionsvermögen hängen, wie gesagt, von der Beschaffenheit der Oberflächen ab. Beispielsweise werden die sehr kleinen Werte von  $E$  und  $A$  eines Metallspiegels größer, wenn man seine Oberfläche mit Ruß bedeckt, sie also *schwärzt*. Das gilt sowohl für Frequenzbereiche der Wärmestrahlung (im IR) als auch für die Temperaturstrahlung im Sichtbaren und UV.

Da Absorption und Emission durch dieselben Anregungsvorgänge verursacht werden, sind sie nicht unabhängig voneinander. Ganz allgemein gilt:

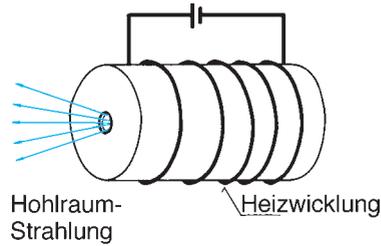
Das Verhältnis von Emissions- zu Absorptionsvermögen ist für beliebige Oberflächen gleich, d. h.

$$\frac{E}{A} = \text{konstant.} \quad (17-16)$$

Man bezeichnet einen Körper als *Schwarzen Körper* oder *Ideal-Schwarzen Körper*, wenn er das Absorptionsvermögen 1 besitzt, also alle auffallende Strahlung absorbiert und vollständig in Wärme umwandelt. Nach Gl. (17-16) hat er zugleich das höchstmögliche Emissionsvermögen aller (auf gleicher Temperatur befindlichen) Körper. Aus Gl. (17-14) folgt zudem  $R = 0$ .

Viele Stoffe erfüllen in begrenzten Spektralbereichen diese Bedingung in guter Näherung, so z. B. ein berußter Körper, der im Sichtbaren (nicht aber im UV) schwarz ist. Es gibt aber keinen Stoff, dessen Absorptionsvermögen für alle Wellenlängen gleich 1 ist, der also als *Ideal-Schwarzer Körper* gelten könnte.

Es gibt dennoch eine Möglichkeit, einen Ideal-Schwarzen Körper zu konstruieren, um nicht nur die Absorption sondern auch die Emission experimentell untersuchen zu können. Das Absorptionsvermögen 1 besitzt die als Schwarzer Körper wirkende Öffnung eines



**Abb. 17.8** Geheizter Hohlraum zur Realisierung eines *Ideal-Schwarzen Körpers*.

Hohlkörpers, der elektrisch geheizt werden kann, (Abb. 17.8). Ist die Öffnung genügend klein gegenüber den Dimensionen des Hohlkörpers, so werden durch sie *von außen* einfallende Lichtstrahlen im Innern so oft hin- und herreflektiert, bis sie schließlich vollständig absorbiert sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese im Innern reflektierten und gestreuten Strahlen wieder die Öffnung verlassen, ist desto geringer, je kleiner die Öffnung und je größer der Hohlraum ist. Das Absorptionsvermögen kann also unabhängig von der Wellenlänge stets praktisch gleich 1 gemacht werden.

Auch bezüglich des Emissionsvermögens ist ein solcher Schwarzer Körper gegenüber anderen Körpern ausgezeichnet: Aus Gl. (17-16) sehen wir, dass er wegen  $A = 1$  für alle Wellenlängen das höchstmögliche Emissionsvermögen besitzt. Die aus der Öffnung austretende *Temperaturstrahlung* der Hohlraumwände ist also gleich der Strahlung eines Ideal-Schwarzen Körpers, der dieselbe Temperatur hat wie die Innenwände des Hohlraumes. Man bezeichnet diese Strahlung daher auch als *Hohlraumstrahlung*. Durch Aufheizen kann man diese verändern. Zwar haben derartige Strahlungsquellen, außer zur Kalibrierung anderer Strahlungsquellen, keine praktische Bedeutung, sie waren aber von grundsätzlichem Interesse bei der Aufklärung der *Strahlungsgesetze* und haben den Anstoß zur Entwicklung der Quantentheorie gegeben.

Auch der menschliche Körper stellt eine Quelle ständiger Wärmestrahlung dar. Er ist aber kein Ideal-Schwarzer Körper (Fig. 17.7). (Sichtbare und UV-Strahlungsanteile sind praktisch gleich Null.) Wenn die Körpertemperatur, wie üblich, höher als die Umgebungstemperatur ist, verliert der Körper also laufend Energie infolge dieser Strahlung. Der Energieverlust muss durch Nahrungs-Umset-

zung im Körper als Teil des *Grundumsatzes* wieder zugeführt werden. Dies ist ein typisches Beispiel für ein *Fließgleichgewicht* (Kap. 4.1).

## 17.10.2 Strahlungsgesetze

**Kirchhoff'sches Strahlungsgesetz** Die Beziehung Gl. (17-16) gilt für beliebige Flächen. Für  $A = A_{\text{schwarz}} = 1$  können wir den Zahlenwert der Konstanten für jede Temperatur angeben:

$$\frac{E}{A} = E_{\text{schwarz}} \quad (17-17)$$

Diese Beziehung bezeichnen wir als *Kirchhoff'sches Strahlungsgesetz*.

In Worten: Bei jeder Temperatur ist für alle Körper das Verhältnis von Emissionsvermögen zu Absorptionsvermögen gleich dem Emissionsvermögen  $E_{\text{schwarz}}$  des Schwarzen Körpers bei gleicher Temperatur. Daher ist der Schwarze Körper für Messzwecke wichtig.

Gl. (17-17) gilt sowohl für die übertragene Strahlungsleistung eines beliebigen Wellenlängenspektrums, als auch für jede einzelne Wellenlänge  $\lambda$  getrennt:

$$\frac{E(\lambda, T)}{A(\lambda, T)} = E_{\text{schwarz}}(\lambda, T) \quad (17-18)$$

Ist also das Emissionsvermögen eines Körpers für einen bestimmten Spektralbereich besonders groß, so muss dort auch das Absorptionsvermögen sehr hoch sein.

Von den Atomspektren ist uns das bereits bekannt: Absorptions- und Emissionslinien liegen bei denselben Wellenlängen. Erinnern wir uns aber: Das Absorptionsvermögen des Ideal-Schwarzen Körpers ist, unabhängig von Wellenlänge und Temperatur, stets gleich 1, Atome im Gas stellen also nie Schwarze Körper dar, da sie nur frequenzselektiv absorbieren und emittieren. Breitere schwarze Spektralbereiche findet man nur bei Festkörpern, z. B. ist rußförmiger Kohlenstoff im Sichtbaren, nicht aber im ultravioletten Spektralbereich schwarz. Umgekehrt ist das im Sichtbaren absorptionsfreie Glas in breiten infraroten Spektralbereichen schwarz.

Das Kirchhoff'sche Gesetz ist u. A. wichtig für das Verständnis und die Konstruktion von Sonnenkollektoren zur Nutzung der Sonnenenergie und von Wärmeschutzfenstern.

**Stefan-Boltzmann'sches Gesetz** Dieses Gesetz betrifft die Emission und beschreibt, wie sich die über alle Wellenlängen von  $\lambda = 0$  bis  $\lambda = \infty$  integrierte Gesamtstrahlungsleistung pro Flächeneinheit,  $E_{\text{SB}}$ , des Schwarzen Körpers mit der Temperatur ändert. Es gilt:

$$E_{\text{SB}} = \sigma T^4 \quad (17-19)$$

Die Konstante  $\sigma$  hat den Wert  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

$E_{\text{SB}}$  ist also proportional zur vierten Potenz von  $T$  und ändert sich deswegen extrem stark mit der Temperatur. Verdoppeln wir beispielsweise die Temperatur des Wolframfadens einer Glühlampe von 1000 auf 2000 K, so wächst die Gesamtstrahlungsleistung auf das 16fache an. Angenähert gilt das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz auch für reale Stoffe (d. h. nichtschwarze Körper mit  $A(\lambda) < 1$ ); für sie ist jedoch der Zahlenwert von  $\sigma$  kleiner und vom Material abhängig, und kann für unterschiedliche Wellenlängen verschieden sein.

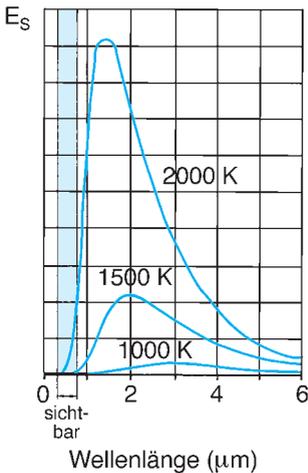
**Planck'sches Strahlungsgesetz** Das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz (Gl. (17-19)) macht eine Aussage für die *Gesamtstrahlung* über den ganzen Wellenlängen- bzw. Frequenzbereich. Die *Wellenlängen- oder Frequenzabhängigkeit* der Temperaturstrahlung des Schwarzen Körpers bei einer beliebigen Temperatur  $T$  wird durch das Planck'sche Strahlungsgesetz beschrieben. (Wir geben es hier mit der Frequenz als Variabler an. Wählt man statt dessen die Wellenlänge, so sieht die Formel etwas anders aus.)

$$E_s(\nu) d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (17-20)$$

Exakt gilt auch dieses Gesetz nur für Ideal-Schwarze Körper, näherungsweise aber auch für reale Stoffe.  $E_s(\nu) d\nu$  ist die Strahlungsleistung, die pro Flächeneinheit des Schwarzen Körpers im Frequenzintervall zwischen  $\nu$  und  $\nu + d\nu$  ausgestrahlt wird ( $k =$  Boltzmann-Konstante,  $c =$  Lichtgeschwindigkeit,  $h =$  Planck'sches Wirkungsquantum).

Das für die ganze moderne Physik grundlegende Planck'sche Wirkungsquantum  $h$  tauchte in diesem Gesetz erstmals auf, denn Planck führte zu seiner Herleitung den Begriff des Lichtquantums ein. Er nahm an, dass sich in den Wänden eines als Schwarzer Körper wirkenden Hohlraumes Oszillatoren mit bestimmten Eigenfrequenzen  $\nu$  befinden, welche Energiequanten abgeben können, deren Energie der Frequenz proportional ist. Die Proportionalitätskonstante ist gerade das Planck'sche Wirkungsquantum,  $E = h\nu$ .

Abb. 17.9 zeigt die spektrale Verteilung der Schwarzkörper-Strahlung bei verschiedenen Temperaturen. Man sieht, dass die Gesamtstrahlung, d. h. die Fläche unter den Kurven,



**Abb. 17.9** Spektrale Verteilung der Strahlung eines Schwarzen Körpers bei verschiedenen Temperaturen: a) 1000 K, b) 1500 K, c) 2000 K. (Als Variable wurde hier nicht, wie in Gl. (17-20), die Frequenz gewählt, sondern die Wellenlänge.)

mit  $T$  sehr stark zunimmt, während sie sich gleichzeitig zu höheren Frequenzbereichen (d. h. zu kleineren Wellenlängen) hin verschiebt. Die Temperatur  $T$  kann zur Charakterisierung der Farbe der (thermischen) Lichtquelle dienen. Bei niedriger  $T$  erscheint die emittierte Strahlung rötlich. Sie verschiebt sich zum Blau-Weißen, wenn  $T$  ansteigt. Daher heißt  $T$  auch die *Farbtemperatur*.

Diese beiden Effekte waren bereits vor Entdeckung des Planck'schen Strahlungsgesetzes mit dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz und dem Wien'schen Verschiebungsgesetz beschrieben worden. Integriert man nämlich Gl. (17-20) über alle Frequenzen von Null bis Unendlich, so erhält man für die Gesamtstrahlungsleistung pro Flächeneinheit,  $E_{\text{sg}}$ , das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz (Gl. (17-19)). Die Abhängigkeit der Frequenzverteilung von der Temperatur behandelt das Wien'sche Verschiebungsgesetz, das ebenfalls implizit in Gl. (17-20) enthalten ist; es hat historische Gründe, dass man ihm einen eigenen Namen gegeben hat.

**Wien'sches Verschiebungsgesetz** Die Verschiebung des Intensitätsmaximums in Abb. 17.9 mit der Temperatur folgt einem einfachen Gesetz, das direkt aus dem Planck'schen Strahlungsgesetz resultiert:

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{C_w}{T} \quad (17-21)$$

Die Wellenlänge maximaler Intensität ändert sich also umgekehrt proportional zur absoluten Temperatur. Die Konstante  $C_w$  hat dabei den Wert  $2,9 \cdot 10^{-3}$  K m.

Dieses Gesetz gilt angenähert auch für viele reale, d. h. nichtschwarze Körper. So hat die von einem Menschen ausgesandte Wärmestrahlung in Übereinstimmung mit Gl. (17-21) bei  $\lambda \approx 10 \mu\text{m}$  ihr Maximum.

Bei Glühlampen sind bei unterschiedlichen Temperaturen die Intensitätsmaxima ungefähr dort, wo sie bei Schwarzen Körpern liegen, z. B. für  $T = 1000$  K bei  $2,9 \mu\text{m}$  und für  $T = 2000$  K bei  $1,4 \mu\text{m}$ . In beiden Fällen fällt das Maximum weit ins Infrarote. Eine Glühlampe ist demnach im wesentlichen *nicht* eine Lichtquelle im Sichtbaren, sondern eine Wärmestrahlungsquelle (siehe Abb. 17.9). Dennoch ist sichtbares Licht, wenn auch in beiden Fällen in unterschiedlichem Maße, enthalten, und daher glüht die Lampe bei  $1000$  K schwach dunkelrot, bei  $2000$  K dagegen gelb. Selbst bei der extrem hohen Gebrauchstemperatur von Halogenleuchtstofflampen ( $\approx 3500$  K) ist der Anteil der sichtbaren Strahlung noch weniger als 10%. Im Spektrum des Sonnenlichtes ist dagegen bei einer Temperatur der Sonnenoberfläche von  $5700$  K (im Innern ist die Sonne einige Millionen K heiß) das Maximum in den Bereich des sichtbaren Lichtes gerückt, nämlich zu  $\lambda_{\text{max}} \approx 0,5 \mu\text{m}$ .

Moderne Lichtquellen wie *Kompakt-Leuchtstofflampen* (die auf dem Prinzip der Gasentladung beruhen) oder *lichtemittierende Halbleiter-Dioden, LEDs*, weisen keine den Planckschen Kurven (Fig. 17.9) ähnelnden Spektren auf, weil es sich nicht um Wärmestrahlungsquellen handelt. Ihr Licht-Wirkungsgrad ist aber erheblich höher.

**Licht Emittierende Dioden (LED's):** Wird eine Halbleiterdiode (Kap. 15.2.4 und 15.3.1) durch eine Gleichspannung in Durchlassrichtung gepolt, dann fließt ein Elektronenstrom, im n-dotierten Teil im Leitungsband, im p-dotierten Teil im Valenzband. Im Bereich der Sperrschicht springen die Elektronen über die Bandlücke ins Valenzband hinunter und geben pro Elektron die Bandlückenenergie  $W$  in Form eines Photons der Wellenlänge  $\lambda = h c/W$  ab. In der Interpretation als *Rekombination von Elektronen und Löchern* wird die Abgabe dieser Photonen als *Rekombinationsleuchten* bezeichnet.

Dieser neue Typ von Lichtquellen wird aus dünnen transparenten Schichten in Halbleitertechnologie aufgebaut.

Die Lichtausbeute ist 10mal besser als die von Glühlampen und auch besser als die von Kompakt-Gasentladungslampen. Mehr als 30 % der elektrischen Verbrauchsleistung wird in Licht umgesetzt. Als „Abfall“ wird Stromwärme produziert. In physiologischen Einheiten gemessen wurde 2012 als höchster Wert für die Lichtausbeute 250 Lumen/Watt erreicht. Das ist nicht mehr sehr weit vom theoretischen Maximum von 350 lm/W, (wenn die *gesamte* elektrische Energie in Licht umgewandelt wird), entfernt. In kommerziellen LEDs sind Werte um 80 lm/W üblich. (Zum Vergleich: Glühlampen 11, Kompaktröhren 55 lm/W).

Ein weiterer Vorteil ist die extreme Lebensdauer, die mit  $10^5$  h angegeben wird, die allerdings in kommerziellen Lampen wieder reduziert wird. Ein Nachteil ist, dass der Wirkungsgrad abnimmt, wenn man die Diode zwecks höheren Stroms vergrößert. Daher bestehen starke LEDs aus bis zu 80 einzelnen kleinen Quellen, deren Lichtströme sich addieren.

Die emittierten Frequenzspektren sind schmalbandig aber nicht monochromatisch.

Eine Vielzahl von Farben vom nahen IR (AlGaAs – Halbleiter mit  $\lambda = 1000$  nm) bis zum UV (AlGaN – Halbleiter mit  $\lambda = 230$  nm) kann durch Auswahl von Halbleitermaterialien mit geeignetem W erzeugt werden. Um *weiße Lampen* zu erzeugen, werden blaue LEDs mit einer gelblichen Lumineszenzschicht (z. B. Ce-dotiertes Yttrium-Aluminium-Granat, YAG) lackiert, wie sie auch in Kompaktleuchtstoffröhren Verwendung findet, deren primäre Emission (UV-Strahlung) aus einer Hg-Gasentladung stammt.

Obwohl LEDs keine Wärmestrahlungsquellen (Temperaturstrahler) sind, ist es üblich, den *Weißton* ihrer Strahlung wie beim Ideal-Schwarzen Strahler durch eine *Farbtemperatur* zu charakterisieren, indem man ihr Emissionsspektrum möglichst gut durch ein Planck'sches Strahlungsspektrum (Kap. 17.10.2) fittet, (wenngleich es wesentlich anders aussieht). *Kaltweißem* (tageslichtähnlichem) Licht werden Farbtemperaturen von 5500 K bis 6000 K zugeordnet, warmweißem (glühlampenähnlicherem) Licht 2700 bis 3000 K.

## 17.11 Fluoreszenz, Phosphoreszenz, Lumineszenz

Eine Anregung eines Elektrons kann durch Einstrahlen von Licht der passenden Frequenz erfolgen, es gibt aber auch andere Anregungsmechanismen. Dazu gehören

1. Stöße der Atome mit geladenen Teilchen (Elektronen oder Ionen), die im elektrischen Feld einer Gasentladung (Kap. 15.2.2) beschleunigt wurden (*Stoßanregung*),

2. Stöße der Atome mit anderen neutralen Atomen, deren Bewegungsenergie durch hohe Temperatur genügend groß ist (*thermische Anregung von Gasen*),

3. *Lumineszenz*.

*Lumineszenz* ist die übergeordnete Bezeichnung für Erzeugung von Licht durch eine Vielzahl von Anregungsarten, die nicht über Erwärmung oder eine Gasentladung zur Emission führen (*nichtthermische Emission, Kaltlicht*).

Dazu gehören *Radiolumineszenz* bei Anregung eines Elektronensystems mit  $\alpha$ -,  $\beta$ - oder  $\gamma$ -Strahlung, *Tribolumineszenz* bei der mechanischen Zerteilung von Festkörpern, d. h. dem Aufbrechen chemischer Bindungen (z. B. beim Zerschneiden von Kreide oder Zucker, auch beim Abreißen von Plastik-Klebestreifen ist dieser Effekt im Dunkeln deutlich zu beobachten), *Sonolumineszenz* bei Einstrahlung von sehr intensivem Ultraschall in Flüssigkeiten, die zur Bildung und Wiedervernichtung von Gasblasen und einer damit verbundenen Lichtemission führt, und auch die *Chemolumineszenz*. Letztere entsteht, wenn die bei einer exothermen chemischen Reaktion freiwerdende Energie direkt, d. h. ohne Umweg über Erhitzung, in Strahlungsenergie umgewandelt wird. Ein Beispiel ist das Leuchten des Glühwürmchens, das durch

enzymatisch gesteuerte Oxydation einer organischen Verbindung, des *Luziferins*, entsteht.

Zur Lumineszenz gehören auch *Fluoreszenz* und *Phosphoreszenz*:

Bei dem Vorgang der Absorption elektromagnetischer Strahlung (Kap. 17.8) haben wir offengelassen, was nach Absorption mit dem durch das absorbierte Lichtquant angeregten Atom geschieht. Neben anderen Möglichkeiten, in den Grundzustand zurückzukehren (z. B. Umwandlung in Wärme bei kondensierter Materie), besteht die Möglichkeit, dass das angeregte Elektron unmittelbar (d. h. in Zeiten  $\leq 10^{-8}$  s) wieder auf das Energieniveau zurückspringt, von dem es angehoben wurde und dabei ein Lichtquant emittiert, das dieselbe Frequenz hat, wie das zuvor absorbierte (*Resonanzfluoreszenz*). Es kann auch über mehrere andere, dazwischenliegende energieärmere Niveaus nacheinander in den Ausgangszustand zurückkehren und dabei mehrere Lichtquanten verschiedener Frequenzen (z. B. im Infraroten) aussenden (*Fluoreszenz*).

Auch wenn das eingestrahelte Licht gerichtet ist, also zum Beispiel als paralleles Strahlenbündel einfällt, verteilt sich die Fluoreszenzstrahlung diffus auf alle verschiedenen Raumrichtungen. In vielen Flüssigkeiten und Festkörpern beobachtet man Fluoreszenz — besonders nach Absorption von ultravioletter Strahlung —, allerdings entstehen meist nicht Spektrallinien, sondern breite Emissionsbanden, da viele ähnliche Prozesse nebeneinander statt finden.

Ein Beispiel: In der *Leuchtstoffröhre* brennt eine Quecksilber-Gasentladung, die bevorzugt ultraviolette Strahlung erzeugt. Diese wird durch Fluoreszenz in einer auf die Innenseite der Glasröhre aufgetragenen Schicht in *weißes* Licht umgewandelt. (Die UV-absorbierende Glasröhre verhindert, dass Teile der gesundheitsschädlichen UV-Strahlung nach außen dringen.)

Ein weiteres Beispiel: Weißmacher in Waschmitteln sind Fluoreszenzstoffe, die den UV-Anteil des Tageslichtes (oder von Disco-Beleuchtung) in bläuliches Licht umwandeln und so Sauberkeit vortäuschen.

Wird absorbierte Strahlung erst in längeren Zeitspannen, die bis zu Tagen dauern

können, wieder als Strahlung re-emittiert, so nennt man den Vorgang *Phosphoreszenz*. (Er hat übrigens nichts mit dem chemischen Element Phosphor zu tun.) Dieses *Nachleuchten* findet man in Kristallen, in denen geringe Mengen von Schwermetallen als Verunreinigungen enthalten sind, und auch in organischen Stoffen.

Ein Beispiel ist Cu-dotiertes ZnS. Es wird nicht nur durch elektromagnetische Strahlung, sondern auch durch auftreffende Elektronen zum Leuchten angeregt und wird daher in Schwarz-Weiß-Fernsehröhren, im Oszilloskop und im Elektronenmikroskop für den Bildschirm verwendet.

Eine interessante Anwendung ist aus der Archäologie bekannt:

In prähistorischen Keramiken oder Backsteinen sind oft lumineszierende Bestandteile enthalten, die im Laufe der Jahrhunderte ihre Lumineszenzfähigkeit verringert haben. Aus der in der Gegenwart gemessenen, noch vorhandenen Lumineszenz-Intensität lässt sich das Alter der Keramiken bestimmen (*Lumineszenz-Archäologie*).

Weitere Arten der Re-Emission eingestrahelter elektromagnetischer Strahlung stellen die *Reflexion* an glatten Oberflächen und die elastische (d. h. frequenzerhaltende) *Lichtstreuung* an rauen Oberflächen, körnigen Pulvern, Kolloiden u. ä. dar. Bei der Streuung erfolgt die Ausstrahlung auch in Richtungen, die sich von der Einfall- und der Reflexionsrichtung des anregenden Lichtes unterscheiden. Eine Besonderheit von Reflexion und Streuung ist, daß sie auch in Spektralbereichen auftritt, in denen das streuende oder reflektierende Material absorptionsfrei ist.

Ein Beispiel dazu: Steinsalzkrystalle sind im Sichtbaren durchsichtig. Wir können sie nur wahrnehmen, weil sie an der Oberfläche Licht reflektieren. Salzpulver dagegen ist wegen des intensiven, ungerichteten Streulichtes an den Pulverkörnern weiß und undurchsichtig.

**Fluoreszenz in der Nanobiophotonik** Längst ist die biomedizinische Forschung und auch die medizinische Diagnostik durch faszinierende physikalische Methoden auf der Größenskala bis zur Dimension der Zelle und deren Inhalten, hauptsächlich Proteinen, Nucleinsäuren oder Lipiden, vorgestoßen deren Ausmaße im Bereich der Nanostrukturen liegen. Dabei geht es nicht mehr nur um Ortsdarstellungen sondern auch um Zeitaufnahmen, d. h. um dynamische Prozesse (chemische Reaktionen) in der Zelle oder z. B. um den Angriff von Viren auf Zellwände.

Ziele sind die Analyse von *Einzelmolekülen*, ihre individuelle Diffusionsbewegung in der Zelle und die Aufklärung von in der Zelle ablaufenden komplexen Reaktionen („die Zelle als das Reagenzglas des 21. Jahrhunderts“).

Die vergrößernden bildgebenden Verfahren (*Mikroskopie-Methoden*) haben sich demgemäß in den biomedizinischen Wissenschaften zu den wichtigsten Werkzeugen (*Nanobiophotonik*) entwickelt. Die optischen Methoden haben den Nachteil der Begrenzung der Ortsauflösung durch die Abbe-Grenze (Kap. 20.3.3), aber den Vorteil (z. B. im Gegensatz zu den üblichen Elektronenmikroskopen (Kap. 20.4)), in-situ-Untersuchungen an lebenden Zellen zu erlauben. Die Abbe-Grenze lässt sich aber unwirksam machen, wenn man auf eine geometrisch-optische Abbildung verzichtet und sich mit dem Nachweis des Aufenthaltsortes z. B. eines einzelnen Proteins und der Konzentration seiner Spezies in einer Zelle begnügt. Damit erreicht man die molekulare Ebene und kann auch komplexe Reaktionen in der Einzelzelle (*Biomolekulare Funktionsdynamik*) erforschen.

In Kap. 20 werden einige Beispiele solcher Mikroskope vorgestellt. Viele dieser Geräte arbeiten mit der *Fluoreszenz-Marker-Methode*. Damit werden die zu untersuchenden

Makromoleküle selbst zu einer punktförmigen Lichtquelle, die man im Mikroskop sieht und anhand ihrer speziellen Farben identifizieren kann. Im Mikroskop sieht man aber nur das Beugungsbild der punktförmigen molekularen Lichtquelle, nicht aber geometrische Objektstrukturen, d. h., die Abbe-Auflösungsgrenze für die *Bildgebung* von  $\sim 200$  nm gilt bei diesen Verfahren weiterhin.

Nur bei einigen raffinierten aber komplizierten Methoden, echte Abbildungen zu erzeugen, ist es gelungen, die Beugungsgrenze aufzuheben und zu Auflösungen von Bildstrukturen um 10 nm zu gelangen. Dazu gehören 1) das Nahefeld und 2) das Stimulated Emission Depletion (STED-) Mikroskop. Sie werden aber für die Praxis erst in Zukunft relevant werden.

Da Fluoreszenz gewöhnlich durch intensives kurzwelliges Licht angeregt wird, Zellen und Bestandteile des Zellinneren aber durch UV zerstört werden können, hat man spezielle stabilere Fluoreszenz-Farbstoffe mit unterschiedlichen Farben entwickelt, z. B. organische Moleküle (Rhodamin, Oxazin, Cyanin), die in vielen Fällen durch spezifisch reaktive Gruppen an das zu untersuchende Objekt „geklebt“ werden können (*Marker-Methode*). Oft scheidet aber auch durch Zusammenwirken von Lichteinwirkung und chemischen Reaktionen zwischen Objekt und Farbstoff diese Methode. In jüngster Zeit hat das *Grün-Fluoreszierende-Protein* (GFP) einen Siegeszug angetreten, weil es besonders gut geeignet ist und speziell durch UV-Strahlung nur wenig „ausbleicht“ wird. Ein anderer, neuartiger Weg ist, das Objekt durch Nanopartikel aus Halbleitern oder auch aus Gold (Kap. 5.1.3) zu markieren, die mit für das zu untersuchende Protein spezifischen Antikörpern beschichtet sind und daher selektiv „andocken“. Solche Proben sind mit typischen Teilchendurchmessern von 5–20 nm auch im Elektronenmikroskop zu untersuchen, das diese Nanopartikel direkt sichtbar macht.

Im normalen Mikroskop wird die ganze Objektenebene bestrahlt, im *Konfokalen Fluoreszenz-Mikroskop* (Kap. 20) dagegen wird ein fokussierter Laserstrahl benutzt (Beobachtungsvolumen etwa  $10^{-15}$  Liter; das Anregungslicht wird spektral ausgefiltert), und die Probe wird zur Bilderzeugung mit dem Fluoreszenzlicht „abgerastert“. Dabei bleibt die Strahlenbelastung wesentlich geringer. Trotzdem tritt „Ausbleichen“ und „Löschen“ der Fluoreszenz des Farbstoffes durch strahlungsbedingte Molekülschädigung nach der Emission von etwa  $10^5$  Photonen auf.

## 17.12 LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

### 17.12.1 Funktionsweise und Eigenschaften

Wie in Kap. 17.6 dargestellt, sind gewöhnliche Lichtquellen Rauschquellen und erzeugen durch spontane Emission Strahlung geringer Kohärenz.

Mit dem Laser ist es gelungen, durch Ausnutzung der *stimulierten (induzierten) Emission* eine Quelle für optische Strahlung hoher Kohärenz und hoher Strahlungsleistung zu entwickeln, die auch für den medizintechnischen Bereich neue Gebiete zur Anwendung der Optik erschlossen hat. Man unterscheidet zwischen Lasern, die ihre Strahlung kontinuierlich, permanent erzeugen (*continuous wave – oder cw-Betrieb*) und solchen, die periodisch Folgen kurzer (ms) bis ultrakurzer (fs und as) Pulse mit langen Dunkelpausen dazwischen emittieren (*Puls-Betrieb*).

Seit dem ersten funktionsfähigen Laser im Jahre 1960, dem *Rubin-Laser*, sind zahlreiche unterschiedliche Typen entwickelt worden, deren Strahlung sich in ihren Eigenschaften unterscheidet, so daß man für spezielle Anwendungszwecke (z. B. in der Medizin) eine Auswahl treffen kann. Das einfache Beispiel eines der ersten Gas-Laser zeigt Abb. 17.10. Eine Zusammenstellung von derzeit gängigen Laser-Typen ist in der Tabelle 17.1 gegeben.

Die *LASER-Strahlung* ist eine völlig neuartige Art des Lichtes mit vielen Realisations- und Variationsmöglichkeiten, sie hat vielfältige Eigenschaften, die einzigartig sind und sowohl tiefgehendes Grundlagenverständnis als auch weitgefächerte und wichtige praktische und technische Anwendungen ermöglichen. Dank des Lasers ist die Optik zu einer der wichtigsten Phänomene der Physik geworden, und es ist nicht übertrieben zu sagen, der Laser habe das Mittelalter der Optik beendet.

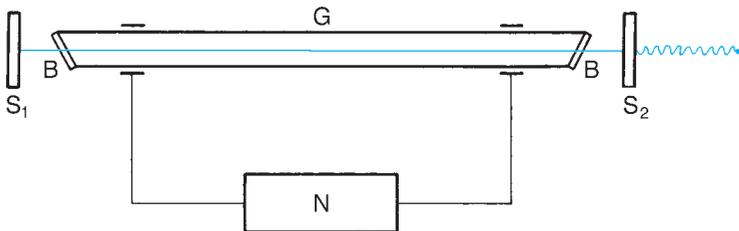
Gemeinsam sind der Laserstrahlung folgende Eigenschaften:

1. Das Licht ist fast völlig monochromatisch, d. h. die Linienbreite (Kap. 17.7) ist extrem schmal. Es kann in dieser Eigenschaft das mit Spektrometern (Kap. 20.7) monochromatisch gemachte Licht um viele Größenordnungen übertreffen.

2. Das Laserlicht ist weitgehend kohärent mit Kohärenzlängen von einigen mm bis zu einigen km.

3. Bei den meisten Lasertypen ist die emittierte Strahlung auf wenige diskrete Frequenzen beschränkt, die, je nach Lasertyp, im infraroten, im sichtbaren oder im ultravioletten Spektralbereich liegen können.

Es gibt aber auch Lasertypen, bei denen diskrete Laserlinien aus breiten Spektralbereichen durch Veränderung der Betriebsbedingungen ausgewählt werden können (*durchstimbare Laser*).



**Abb. 17.10** Prinzip eines He-Ne-Gaslasers: G: Gasgefülltes Rohr, in dem eine Gasentladung gezündet ist. B: Fenster, unter dem Brewster-Winkel (Kap. 18.5.2.3) geneigt, um Reflexionen unwirksam zu machen.  $S_1$ ,  $S_2$ : Spiegel ( $S_1$  reflektiert  $\approx 100\%$ ,  $S_2$  läßt  $\approx 2\%$  der Strahlung nach außen). N: Spannungsversorgung für die Gasentladung. (In der Praxis sind heutzutage Fenster und Spiegel zumeist integriert.)

4. Laserlicht wird in einem Strahlenbündel emittiert, das eine nur sehr geringe Divergenz aufweist. Daher hat es auch in sehr großen Entfernungen noch einen kleinen Strahldurchmesser. (So hat man von der Erde kommende Laserstrahlen, die auf der Mondoberfläche reflektiert wurden, wieder auf der Erde auffangen können.) Eine Ausnahme stellen Halbleiter-Laser dar, bei denen die Strahlformung nachträglich durch zusätzliche Tricks erreicht wird.

Eine direkte Konsequenz dieser Strahlform ist, dass man Laserlicht mit Sammellinsen auf einen extrem kleinen Brennfleck (mit Durchmesser um  $1\ \mu\text{m}$ ) fokussieren kann, der dadurch sehr stark aufgeheizt wird. Auf diese Weise kann man mit Lasern Werkstoffe schneiden, schweißen, bohren oder Material abtragen, also in vielerlei Weise Material berührfrei bearbeiten. Schweißlaser (z. B.  $\text{CO}_2$ -Laser) werden heute mit Strahlungsleistungen bis etwa  $10\ \text{kW}$  zur Herstellung von Autokarosserien eingesetzt.

Die ersten Laser hatten mit einigen Milliwatt nur geringe Strahlungsleistungen. Inzwischen sind kurzzeitig Lichtleistungen erreichbar, die um viele Größenordnungen höher sind als sie mit irgend einer anderen Lichtquelle (die Sonnenstrahlung auf der Erde eingeschlossen!) erreicht werden können. Für Materialbearbeitung in der Industrie sind Laser entwickelt worden, die auf Dauer mehr als  $10\ \text{Kilowatt}$  Strahlungsleistung in einer Laserlinie liefern (z. B.  $\text{CO}_2$ -Laser bei  $\lambda = 10,6\ \mu\text{m}$ ).

**Kurzzeit- und Ultrakurzzeit-Pulslaser** Der Laser entwickelt sich zunehmend zu einem vielseitig – auch in den biomedizinischen und *nanobiomedizinischen* Bereichen – angewendeten Werkzeug. Neben der Nutzung als kohärente Lichtquelle für spektroskopische Untersuchungen wird er zunehmend zur Materialbearbeitung, als Schweiß- und Bohrgerät und in der Medizin für Operationen z. B. zur Netzhautfixierung oder zur Zahnbehandlung (Kap. 17.12.2) eingesetzt. Für die meisten Bearbeitungen von Materie ist nicht die verfügbare Energie sondern die Leistung, also Energie pro Zeitintervall, entscheidend. Sie erfordern also Laserstrahlung hoher Leistungen. Während die erreichbare Strahlungsenergie des Lasers durch seine Konstruktion und technische Realisierung vorgegeben ist, kann die Momentanleistung nachträglich durch Zerteilen des Strahls in kurze Strahlungspakete (*Laserpulse*) mit mehr oder weniger langen strahlungslosen Zwischenzeiten um viele Größenordnungen erhöht wer-

den. Je kürzer bei einem Laser vorgegebener Energie das Zeitintervall gewählt wird, umso höher kann kurzzeitig die Leistung werden. Zur Zerstörung einer Zelle beispielsweise braucht es hohe Leistung, die aber nur kurzzeitig zur Verfügung stehen muss. Daher verwendet man *Puls-Laser*.

Anstatt eines Dauerstrichlasers im *continuous wave*-(cw-)Betrieb hoher Leistung, der viel Energie verbraucht und letzten Endes viel Wärmeenergie erzeugt, kann die Gesamtenergie sehr niedrig sein, wenn der Laser nur kurze, gut auf das Objekt fokussierte Laserpulse aussendet und zwischendurch inaktiv ist. Für die Zerstörung von Biomaterial reichen kurzzeitig sehr hohe elektrische Feldstärken, um chemische Bindungen aufzubrechen, wobei aber die Pulslängen zu kurz sind, um viel zerstörende Wärme zu erzeugen. Man kann solche Pulse zeitlich stark komprimieren, sodass im Pulsmaximum enorme Momentanleistungen entstehen, die jedes Material in ein Plasma (d. h. eine gasförmige Ansammlung von Ionen und Elektronen) verwandeln. Ein solcher Laserpuls von  $30\ \text{fs}$  Dauer besteht aus einem etwa  $10\ \mu\text{m}$  dicken (bzw. etwa  $10$  Wellenlängen langen) „Lichtscheibchen“, das sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Seine Momentanleistung kann heute unglaublich hoch sein. Beispielsweise kann sie der entsprechen, die man erhalten würde, wenn man das gesamte auf die Erde auftreffende Sonnenlicht auf eine Bleistiftspitze fokussieren könnte. Allerdings beträgt die Dauer des Laserpulses nur wenige Femtosekunden.

Ein anderes Beispiel: Die elektrischen Felder in einem Kurzpuls können so groß sein wie die zwischen Elektron und Kern in einem Atom.

Der Grund für die extreme Momentanleistung ist die immens kurze Dauer des Laserpulses. Die in einem Puls gespeicherte Gesamtenergie  $E_{\text{gesamt}}$  ergibt sich aus dem Produkt von Maximumleistung  $P_{\text{max}}$  und Pulsdauer  $\tau$ :  $E_{\text{gesamt}} \sim P_{\text{max}} \cdot \tau$ . Wird  $\tau$  z. B. um  $12$  Zehnerpotenzen verkleinert, dann erhöht sich  $P_{\text{max}}$  um  $12$  Zehnerpotenzen. Wenn der Laser aber nur  $10$  Pulse pro s mit einer Dauer von jeweils  $30\ \text{fs}$  emittiert, dann ist er die meiste Zeit inaktiv, verbraucht also wenig Energie. (Das alles gelingt überhaupt nur, wenn das höhere Energieniveau *metastabil* ist, sodass die angeregten Elektronen dort aufgrund der langen Aufenthaltsdauer angereicht werden können.) Derartige Laser sind heute als kleine *table-top* Geräte (Anschlussleistung etwa  $20\ \text{kWatt}$ ) erhältlich. Sie basieren üblicherweise auf dem Titan-Saphir Laser (Tab. 17.1) oder Ytterbium-YAG-Laser.

Die kürzesten Pulse dauern heute nurmehr etwa  $100$  Attosekunden (as), und ein solcher Puls enthält z. B. bei sichtbarem Licht weniger als eine ganze Schwingung.

Typische biomedizinische Anwendungen beruhen auf nichtlinearer Wechselwirkung des Lichtes mit Biomaterie. Dabei ist für die Praxis wichtig, dass kurze Pulse Gewebe gezielt verändern können, ohne durch zusätzliche Wärmezeugung umgebendes Gewebe in Mitleidenschaft zu ziehen (oder beispielsweise bei der Zahnbehandlung durch Wärme zusätzliche Zahnschmerzen zu verursachen).

Im Folgenden sind einige Daten zusammengefasst:  
 Ti-Sa-Laser:  $\lambda = 800 \text{ nm}$ ;  $h \cdot \nu \approx 1,5 \text{ eV}$   
 Einzelpuls-Gesamtenergie:  $1 \mu\text{J}$  bis  $1 \text{ Joule}$   
 Einzelpulsdauer:  $10^{-13}$  –  $10^{-15} \text{ s}$  (daher der Name *Femtosekunden-Laser*)  
 Momentan-Intensitäten  $P_{\text{max}}$ :  $10^{20} \text{ W/cm}^2$   
 Zugehörige elektrische Feldstärken:  $10^{11} \text{ V/cm}$  (das ist  $10^2$  mal größer als das Feld im H-Atom zwischen Elektron und Kern)  
 Lichtdruck im Fokus: einige Gbar

Bei der Wechselwirkung extremer Ultrakurzzeit-Laserpulse mit *jeder* Art von Materie entstehen zusätzlich Röntgen-, Elektronen- und Ionen-Strahlungen hoher Energien, und die Materie nimmt Zustände an, die man sonst nur mit riesigen Elementarteilchen-Beschleunigern erzeugen kann.

Man muss bei Pulsbetrieb zwischen Pulsleistung und mittlerer Leistung unterscheiden. Während der Pulsdauer seien Pulsenergie und Pulsdauer beispielsweise  $0,1 \text{ Joule}$  und  $0,1 \text{ s}$ . Dann ist die *mittlere Pulsleistung* während des Pulses  $P_p = 0,1 \text{ J}/0,1 \text{ s} = 1 \text{ W}$ . Nehmen wir an, der Laser habe eine Pulsfolgefrequenz von  $1 \text{ s}^{-1}$ , dann ist die *mittlere Leistung* dagegen  $P_m = 0,1 \text{ J}/1 \text{ s} = 0,1 \text{ W}$ . Es gibt z. B. Laser, die Pulsenergien von  $1 \text{ J}$ , aber Pulsdauern von nur  $1 \mu\text{s}$  haben. Dann unterscheiden sich  $P_p$  und  $P_m$  noch stärker voneinander. Nehmen wir als Pulsfolgefrequenz einmal  $10 \text{ s}^{-1}$  an, so ist  $P_p = 1 \text{ MW}$ , aber  $P_m = 10 \text{ W}$ . Fokussiert man einen solchen Puls so weit wie möglich (durch Beugungseffekte liegt die untere Grenze für den Fokus-Durchmesser bei etwa  $1 \mu\text{m}$  (Kap. 18.2.3)), so erhält man eine Bestrahlungsstärke *während* der Pulsdauer von  $10^{18} \text{ W m}^{-2}$ . Die mittlere Bestrahlungsstärke beträgt dagegen – und auch dies ist noch ein hoher Wert! –  $10^{13} \text{ W m}^{-2}$ .

Eine negative Eigenschaft von Laserlicht muss aber auch erwähnt werden: Wegen ihrer besonderen Kohärenz, d. h. Interferenzfähigkeit eignet sich Laserstrahlung nicht zu Beleuchtungszwecken für optische Abbildungen (z. B. in konventionellen Mikroskopen), da dann die Bilder in der Praxis mit Interferenzfiguren übersät sind (siehe hierzu Kap. 18.1). Das gilt, wenn das Objekt als Ganzes beleuchtet wird, nicht aber für das *konfokale Mikroskop* (Kap. 20.3), in dem das Objektiv aberastert wird.

Im folgenden Kapitel werden Beispiele zur Anwendung von Lasern in der Medizin und die speziellen Anforderungen an diese Laser besprochen. Zunächst soll aber wegen der Wichtigkeit dieses Geräts seine prinzipielle Funktionsweise dargestellt sowie eine Tabelle von Laser-Typen gegeben werden.

**Erzeugung der Laserstrahlung** Laserstrahlung wird durch das Zusammenwirken mehrerer Funktionselemente erzeugt:

1. Man braucht ein Laser-aktives Medium mit einem metastabilen Anregungszustand (Kap. 17.6) und einen Anregungsmechanismus zur dauernden Neubesetzung dieses Niveaus, der effektiv genug ist, Inversion der Besetzung zu erreichen.

*Laser-aktiv*, d. h. zur Lichtverstärkung mittels induzierter Emission (Kap. 17.6) geeignet, sind nur Substanzen mit passenden metastabilen Niveaus. Für unterschiedliche Lasertypen ist im Laufe der Zeit eine Vielzahl von Anregungsmechanismen entwickelt worden. Das Problem ist nämlich, dass das induzierte Strahlungsfeld im Laser diejenige Frequenz hat, die dem elektronischen Übergang zwischen elektronischem Anfangs- und Anregungszustand zukommt. Damit trägt diese Strahlung auch *selbst* zur Anregung bei, sie wird wieder absorbiert. Dies schwächt aber das induzierte und induzierende Feld anstatt es zu verstärken; im Normalfall besetzen nämlich mehr Elektronen den energetisch stabilen Anfangszustand als den angeregten Zustand. Dadurch ist die Absorptionswahrscheinlichkeit größer als die Wahrscheinlichkeit der induzierten Emission. Nur dann, wenn es gelingt, dass mehr Elektronen den angeregten Zustand besetzen als sich im Anfangszustand befinden, wenn also eine *Besetzungsinversion* der Energieniveaus erreicht wird, dann überwiegt die Emission, und die Welle im Laser wird verstärkt.

Wir können also als *Laser-Bedingung* formulieren: die induzierte Emission muss intensiver als die gleichzeitig auftretende Absorption sein. Dies lässt sich dadurch erreichen, dass die Anregung (d. h. die Besetzung des angeregten Zustandes mit Elektronen) durch einen zusätzlichen Mechanismus (z. B. eine Gasentladung, Kap.15.2.2) erfolgt, der nicht die Welle im Laser schwächt, und dass der angeregte Zustand metastabil ist, also eine lange Lebensdauer bezüglich spontaner Emission hat, damit sich möglichst viele Elektronen im angeregten Zustand sammeln, deren Rückkehr in den Anfangszustand dann durch induzierte Emission bewirkt wird.

2. Zumeist erfolgt eine frequenzselektive Verstärkung des elektromagnetischen Strahlungsfeldes im Lasermaterial durch optische Rückkopplung, um die induzierte Emission in schmalen Frequenzbereichen zu erhöhen.

Wie in Kapitel 14.9.6 besprochen, werden langwellige elektromagnetische Wellen (z. B. Radiowellen) durch *Resonatoren* (Resonanzschwingkreise) erzeugt, die durch *Rückkopplung* zu großen Amplituden hochgeschaukelt werden.

Dieses Prinzip der Verstärkung ist auch im Laser wirksam: als optischer *Resonator* dient ein Paar von

Spiegeln, zwischen denen die durch induzierte Emission bereits erzeugte elektromagnetische Welle hin und her reflektiert wird und eine *stehende Welle*, ähnlich wie in Kap. 7.9 für die Musikinstrumente besprochen, ausbildet. Als Verstärker dienen die Laser-aktiven Atome, die durch externe Energiezufuhr angeregt und dann von der Welle im Resonator zur stimulierten Emission (und damit zu deren eigener Verstärkung) veranlasst werden. Dies ist der *Rückkopplungsmechanismus*. Die induzierte Emission ist in den Amplitudenbäuschen der stehenden Lichtwelle besonders stark und in den Knoten besonders gering, so dass die emittierten Wellenzüge sich mit der bereits vorhandenen stehenden Welle im Resonator *phasengerecht*, d. h. *kohärent*, überlagern. Eigentlich sollte dadurch die Intensität dieser Welle immer weiter ansteigen. Wenn aber einer der beiden Spiegel des Resonators weniger als 100% reflektierend ist (beispielsweise nur 98%), wird die Rückkopplung kleiner; ein Teil der elektromagnetischen Wellen wird aus dem Resonator *ausgekoppelt*, und dieser Anteil ist die Strahlung, die der Laser als *Lichtquelle* emittiert.

Es können hochreflektierende dielektrische Spiegel (Abb. 18.5) verwendet werden, z. B.  $R = 98\%$  bei Gaslasern) oder aber direkt die Endflächen eines Laserkristalls selbst. Deren  $R$  ist üblicherweise wesentlich kleiner (z. B. 30%).

Das einfachste Modell für den Anregungsmechanismus eines Laser-aktiven Stoffes ist das *Drei-Niveau-System* (Abb. 17.11).

Zunächst werden im Laser-aktiven Atom oder Ion z. B. durch eine elektrisch betriebene Gasentladung (Kap. 15.2.2), durch einen Pumpplaser oder durch Einstrahlung von Lichtblitzen aus einer Blitzlampe Elektronen angeregt und auf Energiezustände  $E_i$  angehoben (Abb. 17.11a); wir sagen, der Laser wird *gepumpt*. In Abb. 17.11 sind willkürlich drei Niveaus  $E_i$  eingezeichnet. (Für das Drei-Niveau-System aus den Niveaus  $E_0$ ,  $E_m$  und  $E_1$  würde ein Niveau  $E_1$  auch reichen).

Der Weiterentwicklung sind Vier-Niveau-Laser zu verdanken, deren Effizienz deutlich höher ist

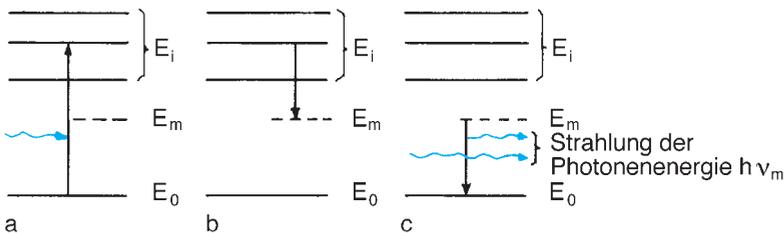
*Laser-aktive* Stoffe sind dadurch ausgezeichnet, dass diese Anregungen zur Besetzung von langlebigen, *me-*

*tastabilen* Zuständen  $E_m$  führen, indem z. B. die angeregten Elektronen vom *Pump-Niveau*  $E_i$  auf ein solches Niveau *herunterspringen* (Abb. 17.11b). Von dort können dann Elektronen nicht in den üblichen kurzen Zeiten von  $\leq 10^{-8}$  s spontan in den Grundzustand  $E_0$  zurückgelangen; ihre Aufenthaltsdauer im metastabilen  $E_m$  ist wesentlich größer. Daher sammeln sich nach und nach in verschiedenen Atomen Elektronen in diesem Niveau an. Trifft nun eine Lichtwelle der Frequenz  $\nu = (E_m - E_0)/h$  auf diese Atome, so bewirkt ihr elektrisches Feld, dass Elektronen aus den Zuständen  $E_i$  in den Grundzustand  $E_0$  übergehen und dabei selbst ein Photon der Energie  $h\nu$  in das Wellenfeld emittieren (Abb. 17.11c). Die so durch stimulierte Emission aus  $E_m$  *phasengerecht* verstärkte Lichtwelle im Spiegel-Resonator kann nun weitere Emissionen aus den metastabilen Zuständen  $E_m$  anderer Atome abrufen, und damit wird eine Art Kettenreaktion ausgelöst. Zur gleichen Zeit werden durch die Anregung von außen mit der *anderen* Pulsfrequenz  $\nu^* = (E_i - E_0)/h$  (z. B. durch Blitzlichteinstrahlung) weitere Elektronen angeregt, so dass die Niveaus  $E_i$  und  $E_m$  ständig neu besetzt werden, und sich der Vorgang der stimulierten Emission dauernd wiederholen kann. So entsteht mit der Zeit ein langer kohärenter Lichtwellenzug hoher Amplitude zwischen den Spiegeln des Resonators, wovon dann ein Teil (typisch einige Prozent) als Laserstrahlung ausgekoppelt wird.

Alternativ zum Dauerstrich-Betrieb (*continuous-wave-Betrieb*, *cw-Betrieb*) werden beim *Puls-Betrieb* heute durch gepulstes Pumpen *Laserpulse* unterschiedlicher Pulsdauern zwischen Attosekunden und Millisekunden erzeugt. Dies kann mit Blitzlampen oder Laserdioden oder durch elektrische Schaltung der Durchlässigkeit der Spiegel des Resonators geschehen.

Auch Pulsformen, spektrale Zusammensetzung und Polarisationszustände kann man in weiten Bereichen beeinflussen.

Laser-aktive Atome, Ionen oder Moleküle können sich als Gas oder aber eingebettet, in



**Abb. 17.11** Der einfachste Laser: das Drei-Niveau-System a) Absorption, b) spontaner Übergang vom angeregten Zustand  $E_i$  in den metastabilen Zustand  $E_m$ , c) stimulierte Emission. ( $E_0$ : Grundzustand;  $E_m$ : metastabiler Zustand;  $E_i$ : angeregte Zustände).

niedriger Konzentration, in eine Flüssigkeit oder in optisch transparente Festkörper im Innern des Spiegel-Resonators befinden. Ein prinzipiell anders funktionierender Typ des Festkörper-Lasers ist der *Halbleiter-Laser*.

**Halbleiter-Laser** Obwohl die Qualität seiner Laser-Strahlung wegen größerer Strahldivergenz und schlechterer Monochromasie und Kohärenz geringer ist als die anderer Laser-Typen, erobert sich der Halbleiter-Laser zunehmend den Markt, da er kleiner und preisgünstiger ist und mit den Techniken der integrierten Elektronik herstellbar ist.

In diesem Laser erfolgt die stimulierte Emission nicht von isolierten Zentren atomarer Dimension, wie bei allen anderen Laser-Typen, sondern bei Stromdurchgang durch die Sperrschicht einer p-n-Halbleiter-Diode. In Kap. 15.3.1 wurde darauf hingewiesen, dass die Elektronen und Löcher bei Stromfluss durch die Sperrschicht sich neutralisieren, d. h. *rekombinieren* können. Bewegliche Elektronen, die aus dem n-dotierten Bereich in den p-dotierten Bereich übertreten, werden von den dort zahlreich vorhandenen Löchern eingefangen. Durch die Neutralisierung ursprünglich räumlich getrennter Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens wird Energie frei, und diese kann bei geeigneter Bauweise der Diode zum großen Teil als Licht emittiert werden. Eine solche Diode nennt man *Photodiode* (oder *light emitting diode, LED*, Kap. 17.10). Der nächste Schritt zum Halbleiter-Laser ist nun im Prinzip einfach: Wir müssen einen Licht-Resonator durch spiegelnde Wände schaffen, und wir müssen (durch Steigerung des Stromes) erreichen, dass die Laser-Bedingung erfüllt wird, und der Rekombinationsvorgang durch induzierte Emission erfolgt. Typische Beispiele sind auf der Basis von Verbindungshalbleitern (GaAs oder AlGaAs) aufgebaut. (Die geläufigsten Halbleiter Si und Ge sind für diese Zwecke nicht geeignet.)

In der Tabelle 17.1 sind für technische und auch medizinische Anwendungen wichtige Lasertypen zusammengestellt.

### 17.12.2 Laser in der Medizin

Laser finden vielfältige und zunehmende Anwendungen in der Medizin, von der Forschung bis zum Einsatz in der Praxis. Da Wechselwirkungen von Laserstrahlung mit biologischer Materie stark mit der Wellenlänge der Strahlung und mit der Intensität variieren, wendet man für spezielle Zwecke unterschiedliche Typen von Lasern an.

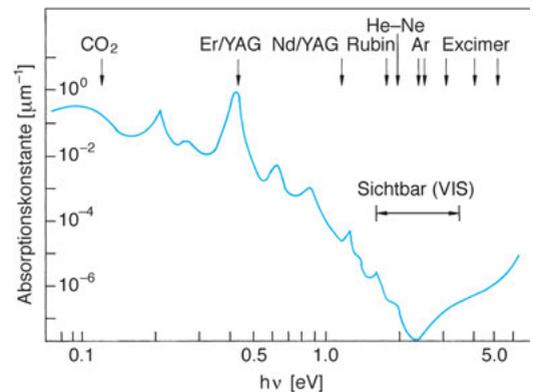
Die Nutzung von Laserstrahlung ist nicht auf die Körperoberfläche beschränkt: Durch

Verwendung von Lichtleitfasern, verbunden mit *Endoskopen* (Kap. 19.3.6) zur Beobachtung können auch im Körperinnern Behandlungen vorgenommen werden.

Die Wechselwirkungen bei Laser-Bestrahlung von biologischer Materie lassen sich grob klassifizieren:

1. Lichtinduzierte Reaktionen im Gewebe und in inkorporierten Fremdstoffen (*Photochemische Reaktionen*)
2. Thermische und nichtthermische Zerstörung (*Photothermische Prozesse bzw. Photo-Ablation*)
3. Eiweißgerinnung durch Laser-Erhitzung (*Photo-Koagulation*)
4. Schneiden und Verdampfen von Gewebe (*Laser-Chirurgie*)
5. Mechanische Zerstörung durch Schockwellen infolge explosionsartiger laserinduzierter Verdampfung (*Laser-Lithotripsie, Photo-Disruption, Photo-Ablation*)

Kurzwellige Laser-Strahlung bewirkt in biologischen Substanzen vor allem photochemische Prozesse, bei langwelliger Strahlung (IR) überwiegt die Wärmeschädigung. Wird Gewebe auf eine Temperatur von 50 °C ge-



**Abb. 17.12** Zur medizinischen Anwendung von Lasern. Dargestellt sind das Absorptionsspektrum von Wasser als dem wesentlichen Bestandteil biologischen Gewebes und Emissionslinien unterschiedlicher Laser-Typen. Die Eindringtiefe  $W$  in das Gewebe ist umgekehrt proportional zur Absorptionskonstante  $K$ :  $W = 1/K$ .

Tab. 17.1 Lasertypen und ihre Eigenschaften

Lasertyp	Anregungsmechanismus	Emissionswellenlängen	Leistungen	Puls(p)- oder Dauer(cw)-Betrieb	Medizinische Anwendung
<b>Gas-Laser</b> He-Ne-Laser	Gasentladung $E_1$ im Ne, $E_m$ , $E_0$ im He Energieübertragung von Ne zu He durch Stöße	632,8 nm + weitere schwächere	$\sim 1$ mWatt	cw	ja
Ar-Ionen-Laser Kr-Ionen-Laser	Ionisierung der Gase im Magnetfeld Gasentladung hoher Stärke	Serie von Linien Ar: 514,5...454,5 nm Kr: 799,3...457,7 nm	1 – $10^2$ Watt	cw	ja
CO <sub>2</sub> -Laser	Gasentladung	Hauptlinie: 10,6 $\mu$ m	Industrie-Laser: $10^4$ Watt (cw) Einzelepulse: GWatt	p, cw	ja
<b>Eximer-Laser</b> (Edelgas-Halogen- Verbindungen)	Gasentladung Bildung von Eximeren (z. B. Xe <sub>2</sub> , KrF, ArF)	Xe <sub>2</sub> : 171 – 175 nm KrF: 249 nm ArF: 193 nm		p Dauer: $\geq 5$ – 50 ns	ja
<b>Farbstoff-Laser</b> (viele organische Farbstoff- Moleküle (z. B. Rhodamin) in flüssigen Lösungsmitteln)	Pumpen mit Licht (Blitzlampe, Laser) Photo-Ionisation	abhängig vom Farbstoff 300 – 1200 nm Da viele Moleküllinien: durchstimmbar. Beispiel: Rhodamin 6G: 610 nm $\pm$ 15 nm	cw: $\sim 10^1$ Watt Einzelepulse: $10^7$ Watt	p, cw sehr kurz: $> 10$ fs	
<b>Festkörper-Ionen-Laser</b> z. B.: Rubin-Laser (Cr-Ionen in Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) Titan-Saphir-Laser (Ti-Ionen in Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) Alexandrit-Laser (Cr-Ionen in Chrysoberyll) Lanthaniden-Ionen in Y-Al-Granat (Nd/YAG, Er/YAG, Ho/YAG, Tm/YAG) Faser-Laser (Er-, Ho-, Tm-, Yb-Ionen in Glasfaser)	Pumpen mit Licht (Blitzlampe, LED, Laser)	Rubin: 694,3 nm TiSa: 660 – 1060 nm Alexandrit: 710 – 820 nm Nd/YAG: 1064 nm Yb/YAG: 1030 nm Ho/YAG: 2,1 $\mu$ m Er-Faser: 1535 – 1580 nm Tm-Faser: 1930 nm	Einzelepulse: $10^7$ Watt Alexandrit cw: 1 Watt	meist p sehr kurz: TiSa $\gtrsim 1$ fs } cw	ja ja
<b>Halbleiter-Laser</b> z. B. GaAs	Ladungsrekombination bei Stromfluss durch die Sperrschicht einer Halbleiter-Diode	Je nach Halbleiter- und Dotierungsmaterial vom infraroten bis zum blauen Spektralbereich	cw: bis 1 kWatt	meist cw	ja

bracht, so tritt Schädigung nach etwa 5 min ein, bei 70 °C ist diese bereits nach 1 s vorhanden, während bei 100 °C die Zerstörung praktisch sofort beginnt. Dies nutzt man in der Medizin zur lokalen und gezielten Zerstörung aus, z. B. bei Operationen. Dabei werden beschädigte Blutgefäße durch Auslösung von *Photoakoagulation* verschlossen, so dass Blutungen vermieden werden können. Meistens werden *Puls-Laser* eingesetzt, die in regelmäßiger und steuerbarer Wiederholung kurzzeitige und energiereiche Lichtpulse aussenden. Typisch sind Pulsenergien von 0,1 J und Pulsdauern von 0,1 s. Je länger die Einwirkungszeit der Strahlung auf biologisches Gewebe ist, desto stärker wird durch Wärmeleitung auch die Umgebung des bestrahlten Bereiches erhitzt. Bei Pulsdauern unter  $10^{-9}$  s (*Nanosekundenpulse*, *Picosekundenpulse*, *Femtosekundenpulse*) spielt die Wärmeleitung hingegen keine Rolle mehr.

Bei der Arbeit mit Lasern ist unbedingt zu vermeiden, dass der Strahl zufällig direkt auf das Auge treffen und die Netzhaut beschädigen kann. Da er praktisch ein Parallelstrahl ist, bleibt er auch viele Meter vom Laser entfernt noch gefährlich. Das gilt auch dann, wenn der Strahl zuvor irgendwo reflektiert oder gestreut wurde. Die Verwendung von *Laser-Schutzbrillen* ist daher bei Laserbehandlungen für alle Beteiligten vorgeschrieben. Diese Brillen filtern nur die schmalen Laserlinien aus und erscheinen daher oftmals völlig farblos und durchsichtig. Da sich die Frequenzen unterschiedlicher Laser-Typen unterscheiden, ist im Prinzip für jeden Laser-Typ eine andere Schutzbrille erforderlich.

Da menschliches Gewebe zu mehr als 70% aus Wasser besteht, ist insbesondere der Absorptionskoeffizient des Wassers für die unterschiedlichen Laser-Typen wichtig. Dieser ist zusammen mit der mittleren Eindringtiefe in Abhängigkeit von der Wellenlänge in Abb. 17.12 dargestellt. Zusätzlich sind die Hauptemissionslinien einiger Laser-Typen eingezeichnet.

Die langwellige infrarote Strahlung des *CO<sub>2</sub>-Lasers* ( $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$ ) wird vom Gewebe stark absorbiert, so dass die erzeugte Wärme lokalisiert bleibt. Daher dient dieser Laser für die Laser-Chirurgie. Die kürzerwellige Strahlung des *Neodym/YAG-Lasers* ( $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$ ) dagegen kann bis zu einigen Millimetern ins Gewebe eindringen und wird durch Streuung im Gewebe auf große Bereiche verteilt. Sie ist für Tumorzerstörung und Gewebe-Koagulation sowie zur Blutstillung besonders geeignet. Die Laserlinie des *Er/*

*YAG-Lasers* fällt mit der stärksten Absorptionsbande des Wassers bei 2,9  $\mu\text{m}$  zusammen und hat daher die geringste Eindringtiefe (etwa 1  $\mu\text{m}$ ). Die Strahlung des im Sichtbaren emittierenden *Argon-Lasers* wird stark von Hämoglobin und Melanin absorbiert, aber nur wenig in blutleerem Gewebe. Der Argon-Laser wird allgemein in der Dermatologie sowie in der Augenheilkunde für Operationen an der Netzhaut eingesetzt. Die Fokussierung des Laser-Strahls geschieht im letzteren Fall durch das Auge selbst; typisch sind Fokusflächen von 50  $\mu\text{m}$  Durchmesser. Mit der kurzwelligen UV-Strahlung des *Excimer-Lasers* werden Sehkorrekturen an der Hornhaut vorgenommen. Noch im Versuchsstadium befindet sich die Bearbeitung von Zähnen, wozu *Er/YAG-* und *Excimer-Laser* geeignet sind. Zahnschmelz lässt sich durch *CO<sub>2</sub>-Laser* zur Kariesprophylaxe glätten. Die Praxiseignung von Laserbehandlungen ist ein derzeit, beispielsweise in der Zahnheilkunde, sehr intensives Forschungsgebiet und lässt weitere Überraschungen erwarten.

**Optische Kohärenztomographie (OCT):** IR-Laserstrahlen haben in weichem Körpergewebe erhebliche Eindringtiefen. An Gewebe-Inhomogenitäten im Körperinneren (z. B. Netzhaut, Stimmlippen, Hautkrebs) wird ein Teil zurückreflektiert und gestreut, und dieser überlagert sich mit dem einfallenden Bündel zu einer Interferenzfigur, einem *Interferogramm*, wenn die Strahlung hinreichend kohärent ist. Hat der Lichtstrahl nur eine *partielle* Kohärenz (begrenzte Kohärenzlänge, Kap. 18.1.1), so bildet sich ein Interferenzmuster nur dann, wenn die Lage des Hindernisses im Körperinneren weniger weit von der Körperoberfläche entfernt ist, als der Kohärenzlänge entspricht. Auf diese Weise kann man dessen Position berührungsfrei bestimmen. Durch Änderung der Kohärenzlänge mittels der Breite des Frequenzspektrums kann die Messtiefe variiert und ein axiales Tiefenprofil dargestellt werden.

Rastert man das Präparat unter variierten Einfallswinkeln ab, so lässt sich mittels eines Computerprogramms aus den Datensätzen der Interferogramme ein dreidimensionales *Tomogramm* gewinnen. Zur Kalibrierung wird ein zusätzliches *Michelson-Interferometer* (Kap. 18.1.2) benutzt. Diese Methode heißt *Optische Kohärenztomographie (OCT)*.

Anwendungen findet das Verfahren neuerdings häufiger in der Augenheilkunde zur berührlosen Untersuchung des Augenhinter-

grundes (Netzhautdicke etwa 300  $\mu\text{m}$ , axiale Strukturauflösung  $\geq 3 \mu\text{m}$ ) und zu Hautuntersuchungen. Eine analoge Methode mit Schallwellen ist übrigens das *Sonogramm*.

Die Zahl der medizinischen Anwendungen wächst laufend; einige weitere seien aufgelistet: Messung der Blutzirkulation, Netzhautverschweißung, Abtragung von Hornhaut zur Korrektur von Fehlsichtigkeit (z. B. LASIK-Verfahren), Endoskopie, Laserskalpell für Schnitte, Verödungen und Gefäßkoagulation, Epilation, Abtrag und Bohrung von Zahnhartsubstanz, Wurzelkanalbehandlung, Nieren- und Harnleitersteinbeseitigung und viele mehr.

**Gesundheitsgefährdungen durch Laser:** Wichtig ist, darauf hinzuweisen, dass Laserstrahlungen, die Körperteile direkt oder indirekt durch ihr Streulicht treffen, wegen der extrem konzentrierten elektromagnetischen Energie zu *gefährlichen Gesundheitsgefahren* führen. Je nach der Intensität, Wellenlänge und möglichen Bestrahlungsdauer ihrer Strahlung sind Laser in verschiedene Gefahrenklassen eingeteilt, die von amtlich bestellten *Laserschutzbeauftragten* überwacht werden. Die Sicherheitsbestimmungen sind in der EN 60601-2-22 enthalten.

## 18. Wellen Teil II: Wellenoptik

Das Spektrum elektromagnetischer Wellen kann anstatt nach der Wellenlänge (Abb. 14.47) auch nach der Art ihrer Entstehung und den dadurch bedingten Eigenschaften der Wellen klassifiziert werden:

1. Mit Schwingkreisen (Kap. 14.9.6) kann man niederfrequente harmonische Wellen mit gleichbleibender Amplitude und Phasenkonstante über beliebig lange Zeiten erzeugen; diese Wellen sind kohärent (Kap. 17.6) und monochromatisch.

2. Infrarote, sichtbare, ultraviolette und Röntgen-Strahlung entsteht in Atomen, und zwar meist durch Übergänge der Elektronen. Bei üblichen Rauschquellen (Kap. 17.6) ist sie weitgehend inkohärent und polychromatisch. Mit speziellen Geräten (Monochromatoren) kann die spektrale

Bandbreite der Strahlung eingeengt werden, die Strahlung wird monochromatischer und die Kohärenzlänge nimmt zu. Da dies durch Ausfiltern geschieht, wird aber die Intensität der Strahlung dadurch geringer.

3. Mit Lasern (Kap. 17.12) kann Strahlung im IR-, VIS- und UV-Bereich und neuerdings auch Röntgenstrahlung mit hoher Monochromasie, hoher Kohärenz und hoher Intensität erzeugt werden.

Im folgenden Kapitel werden wir sehen, dass Kohärenz eine notwendige Voraussetzung zur Beobachtung von Welleneigenschaften ist, deren wichtigste die *Interferenz* ist. In Kap. 17.6 wurde bereits gezeigt, dass die Interferenz — *vice versa* — zur Messung der Kohärenzeigenschaften von Licht dienen kann.

## 18.1 Interferenz von Wellen

### 18.1.1 Interferenzfähigkeit

Auch elektromagnetische Wellen folgen dem in Kap. 7.6 behandelten *Superpositionsprinzip*. Das bedeutet, dass zwei (oder mehrere) Wellen, die sich im selben Raumbereich in verschiedenen Richtun-

gen  $\vec{s}_1$  bzw.  $\vec{s}_2$  ausbreiten, sich überlagern können, und zwar so, dass zu jeder Zeit in jedem Raumpunkt die momentanen Feldstärken des elektrischen und des magnetischen Feldes vektoriell addiert werden:  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  und  $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ .

grundes (Netzhautdicke etwa 300  $\mu\text{m}$ , axiale Strukturauflösung  $\geq 3 \mu\text{m}$ ) und zu Hautuntersuchungen. Eine analoge Methode mit Schallwellen ist übrigens das *Sonogramm*.

Die Zahl der medizinischen Anwendungen wächst laufend; einige weitere seien aufgelistet: Messung der Blutzirkulation, Netzhautverschweißung, Abtragung von Hornhaut zur Korrektur von Fehlsichtigkeit (z. B. LASIK-Verfahren), Endoskopie, Laserskalpell für Schnitte, Verödungen und Gefäßkoagulation, Epilation, Abtrag und Bohrung von Zahnhartsubstanz, Wurzelkanalbehandlung, Nieren- und Harnleitersteinbeseitigung und viele mehr.

**Gesundheitsgefährdungen durch Laser:** Wichtig ist, darauf hinzuweisen, dass Laserstrahlungen, die Körperteile direkt oder indirekt durch ihr Streulicht treffen, wegen der extrem konzentrierten elektromagnetischen Energie zu *gefährlichen Gesundheitsgefahren* führen. Je nach der Intensität, Wellenlänge und möglichen Bestrahlungsdauer ihrer Strahlung sind Laser in verschiedene Gefahrenklassen eingeteilt, die von amtlich bestellten *Laserschutzbeauftragten* überwacht werden. Die Sicherheitsbestimmungen sind in der EN 60601-2-22 enthalten.

## 18. Wellen Teil II: Wellenoptik

Das Spektrum elektromagnetischer Wellen kann anstatt nach der Wellenlänge (Abb. 14.47) auch nach der Art ihrer Entstehung und den dadurch bedingten Eigenschaften der Wellen klassifiziert werden:

1. Mit Schwingkreisen (Kap. 14.9.6) kann man niederfrequente harmonische Wellen mit gleichbleibender Amplitude und Phasenkonstante über beliebig lange Zeiten erzeugen; diese Wellen sind kohärent (Kap. 17.6) und monochromatisch.

2. Infrarote, sichtbare, ultraviolette und Röntgen-Strahlung entsteht in Atomen, und zwar meist durch Übergänge der Elektronen. Bei üblichen Rauschquellen (Kap. 17.6) ist sie weitgehend inkohärent und polychromatisch. Mit speziellen Geräten (Monochromatoren) kann die spektrale

Bandbreite der Strahlung eingeengt werden, die Strahlung wird monochromatischer und die Kohärenzlänge nimmt zu. Da dies durch Ausfiltern geschieht, wird aber die Intensität der Strahlung dadurch geringer.

3. Mit Lasern (Kap. 17.12) kann Strahlung im IR-, VIS- und UV-Bereich und neuerdings auch Röntgenstrahlung mit hoher Monochromasie, hoher Kohärenz und hoher Intensität erzeugt werden.

Im folgenden Kapitel werden wir sehen, dass Kohärenz eine notwendige Voraussetzung zur Beobachtung von Welleneigenschaften ist, deren wichtigste die *Interferenz* ist. In Kap. 17.6 wurde bereits gezeigt, dass die Interferenz — *vice versa* — zur Messung der Kohärenzeigenschaften von Licht dienen kann.

## 18.1 Interferenz von Wellen

### 18.1.1 Interferenzfähigkeit

Auch elektromagnetische Wellen folgen dem in Kap. 7.6 behandelten *Superpositionsprinzip*. Das bedeutet, dass zwei (oder mehrere) Wellen, die sich im selben Raumbereich in verschiedenen Richtun-

gen  $\vec{s}_1$  bzw.  $\vec{s}_2$  ausbreiten, sich überlagern können, und zwar so, dass zu jeder Zeit in jedem Raumpunkt die momentanen Feldstärken des elektrischen und des magnetischen Feldes vektoriell addiert werden:  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  und  $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ .

Dabei werden also die Feldstärken der einen Welle durch die Anwesenheit der anderen Welle nicht verändert (*lineare Superposition*). Bei sehr großen Feldstärken, wie sie nur mit Lasern erzeugbar sind, gilt dies zwar weiterhin im Vakuum, aber nicht mehr, wenn sich die Wellen in Materie ausbreiten.

Die Polarisation  $P$  bzw. das Dipolmoment (Kap. 14.7.5.4) können nicht beliebig anwachsen, wenn das elektrische Feld erhöht wird. Bei kleinen bis mittleren Feldstärken  $E$  des angelegten elektrischen Feldes folgt  $P$  proportional zu  $E$ , hängt also *linear* von  $E$  ab: Wir sprechen vom *Linearitätsbereich*. Bei extrem großen Feldern (wie sie heute z. B. durch Laser routinemäßig erzeugt werden können) gilt dies aber nicht mehr. Dann wächst  $P$  nicht mehr linear mit  $E$ . Dies bezeichnet man als *nichtlinearen* Effekt oder auch *Nichtlineare Optik* (s. Kap. 7.5.1; 20.3.9).

Das Gebiet der *Nichtlinearen Optik* wird zunehmend auch für die medizinische Forschung wichtig.

Wir bleiben bei der *Linearen Optik* und wollen vorerst annehmen, beide Wellen seien harmonisch, vollständig kohärent, gleichartig linear polarisiert (Kap. 18.5.1) und monochromatisch, dann gilt nach Gl. (14-94) für die beiden Wellen:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_{1,0} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{s}_1), \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{2,0} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{s}_2), \end{aligned} \tag{18-1}$$

wobei  $s_1$  und  $s_2$  die Abstände von den Quellen der beiden Wellen angeben. (Entsprechende Gleichungen gelten für  $\vec{H}$ .) Im Überlagerungsbereich (Abb. 18.1) gibt es nun, wie bereits in Kap. 7.6 beschrieben, Orte, an denen die resultierende Feldstärkenamplitude größer ist als die Einzelfeldstärken (*konstruktive*, d. h. *verstärkende* Interferenz), und auch Orte, an denen das Umgekehrte der Fall ist (*destruktive*, d. h. *auslöschende* Interferenz).

Wir wollen den Vorgang der optischen Interferenz an zwei Beispielen genauer betrachten: An bestimmten Orten unterscheiden sich die Momentanphasen  $\Psi$  (d. h. die Argumente der Sinus-Funktionen) um Vielfache von  $2\pi$ , die Sinus-Funktionen selbst sind dort also gleich. Die Vektoraddition von  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  führt

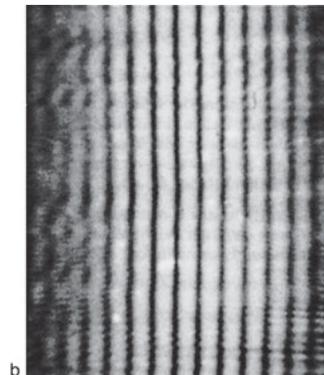
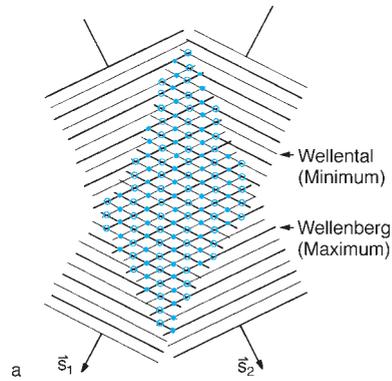
dann zur maximalen Verstärkung (Abb. 18.2a):

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{res}} &= (\vec{E}_{1,0} + \vec{E}_{2,0}) \sin \Psi, \\ \text{mit} \\ \Psi &= \omega t - ks_1 = \omega t - ks_2 + n2\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \tag{18-2}$$

An anderen Orten, wo sich die Phasen der beiden Wellen dauernd um einen Winkel  $(2n + 1)\pi$  unterscheiden (bzw. die Wellen um ungerade Vielfache von  $\lambda/2$  gegeneinander räumlich verschoben sind), ist die resultierende Welle am schwächsten. Mit der trigonometrischen Beziehung  $\sin(\Psi + (2n + 1)\pi) = -\sin \Psi$  ergibt sich dann (Abb. 18.2b):

$$\vec{E}_{\text{res}} = (\vec{E}_{1,0} - \vec{E}_{2,0}) \sin \Psi. \tag{18-3}$$

Bei Übereinstimmung der beiden Amplituden ( $\vec{E}_{1,0} = \vec{E}_{2,0}$ ) ist an diesen Orten die resultierende Am-



**Abb. 18.1** a) Schematische Darstellung des Momentanbildes der Interferenz zweier ebener Wellen gleicher Wellenlänge (die  $\bullet$ -Punkte bedeuten maximale Verstärkung, die  $\circ$ -Punkte bedeuten Abschwächung).  $s_1$  und  $s_2$  geben die Ausbreitungsrichtungen an. b) Interferenzstreifen, wie sie im Experiment der Abb. a) auf einer Photoplatte registriert werden, die man senkrecht zur Zeichenebene in den Überlagerungsbereich stellt.

plitude sogar für alle Zeiten gleich Null (*Auslöschung*). Dies ist kein Verstoß gegen den Energieerhaltungssatz: Die Wellenenergie wird bei dem Interferenzvorgang in die benachbarten Maxima verlagert und verstärkt diese zusätzlich. In den Maxima entsteht nämlich die doppelte Amplitude, und, da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist, die *vierfache* Intensität.

Bei anderen Phasendifferenzen als  $n2\pi$  oder  $(2n + 1)\pi$  gibt es Abschwächung oder Verstärkung, die zwischen den in Gln. (18-2) und (18-3) formulierten Extremfällen liegen. (Völlig analog zur Superposition des elektrischen Anteils der Welle addieren sich die magnetischen Einzelfeldstärken  $\vec{H}_1$  und  $\vec{H}_2$  zur resultierenden Feldstärke  $\vec{H}_{res}$ .)

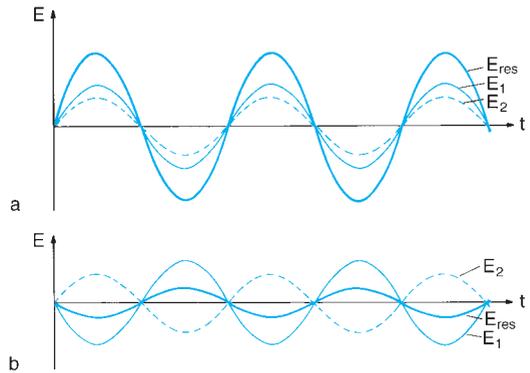
Im dreidimensionalen Überlagerungsbereich zweier ebener Wellen stellt sich auf diese Weise ein kompliziertes Muster ein, in dem in regelmäßiger Folge große und kleine Amplituden der resultierenden elektrischen und magnetischen Feldstärke aufeinander folgen. Entscheidend ist, dass diese Muster ortsfest sind (da eine *stehende* Welle entsteht (Kap. 7.9)) und wir sie daher beobachten können. Wir bezeichnen dieses Muster als *Interferenzfigur*; die zugehörige Intensitätsverteilung lässt sich zum Beispiel auf einem fotografischen Film registrieren, den wir im Überlagerungsbereich aufstellen (Abb. 18.1).

Aus der Interferenz wurde in Kap. 17.6 eine Definition und eine Messvorschrift für die *Kohärenz* angegeben, und wir können nochmals zusammenfassen:

Wellen sind in einem Raumbereich kohärent zueinander, wenn durch ihre Überlagerung Interferenzmuster (Hell-Dunkel-Muster wie z. B. die Interferenzstreifen in Abb. 18.1) entstehen, die (während der Beobachtungsdauer) räumlich festliegen.

Führen wir nun statt dessen ein Überlagerungsexperiment mit zwei *inkohärenten* Lichtwellen durch, die aus kurzen Wellenzügen mit sich unregelmäßig ändernden Phasenkonstanten bestehen, dann tritt zwar zu jeder Zeit wieder ungestörte Superposition auf, die Maxima und Minima verändern aber wegen der sich nach Ablauf einer Kohärenzzeit (Kap. 17.6) ändernden Phasendifferenzen ihre Lage. Das Auge, das nur relativ langsame Veränderungen (mit Bilddauern  $\sim 10^{-1}$  s) verfolgen kann, vermag diese Superpositionsbilder nicht einzeln zu erkennen, sondern sieht lediglich einen gleichmäßig hellen Bereich.

Entsprechendes geschieht, wenn sich zwei Wellen *verschiedener* Frequenz überlagern;

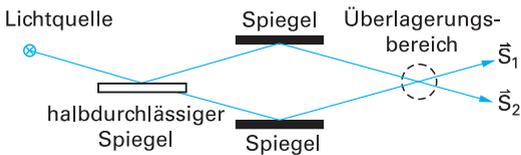


**Abb. 18.2** Interferenz zweier Wellen an einem festen Ort, für verschiedene Zeiten. a) Die Wellen sind gleichphasig und führen zu maximaler Verstärkung von  $E_{res}$ ; b) die Wellen sind um  $T/2$  gegeneinander verschoben und führen zu maximaler Abschwächung.

auch dann verändert sich das momentane Interferenzmuster so schnell, dass es vom Auge nicht wahrgenommen wird. Das Auge kann Änderungen nur bis zu  $1/20$  s auflösen und erkennt nur eine räumlich und zeitlich gemittelte Helligkeit. Zwei Wellen sind also inkohärent zueinander, sowohl wenn die Phasendifferenzen sich schnell ändern als auch wenn die Frequenzen sich unterscheiden.

Allgemein gilt, dass wir bei kohärentem Licht in jedem Punkt und zu jedem Zeitpunkt die Feldstärken zu addieren haben (da sie auch negativ werden, ist Auslöschung möglich); bei inkohärentem Licht genügt es, die dem Quadrat der Feldstärken proportionalen Intensitäten zu addieren (die stets größer Null sind).

Es mag nun scheinen, als sei mit Licht aus üblichen Lichtquellen, mit Ausnahme des Lasers, keine räumlich feste, beobachtbare Interferenzfigur zu erzeugen. Das trifft tatsächlich zu für aus zwei *verschiedenen* Lichtquellen kommendes Licht. Spaltet man aber das Licht ein und derselben Lichtquelle, beispielsweise mit halbdurchlässigen Spiegeln, in zwei Teilbündel auf, wie in Abb. 18.3 gezeigt, so folgen in beiden Teilbündeln die einzelnen Wellenzüge mit gleichen Abständen und fester Phasendifferenz aufeinander. Wir wollen annehmen, dass das Licht aus der Quelle nur einen engen Frequenzbereich umfasst, also praktisch monochromatisch ist. Löschen sich bei der Überlagerung der beiden Teilbündel an irgendeinem Ort zwei Wellenzüge gegenseitig



**Abb. 18.3** Schematischer Aufbau eines Experiments zur Erzeugung von Interferenzen wie in Abb. 18.1. Die kohärenten Teilwellen werden durch Aufspaltung an einem teildurchlässigen Spiegel erzeugt.

aus, so tun dies auch alle nachfolgenden. Die aus einer Lichtquelle stammenden Teilwellen können also bei geeigneter optischer Anordnung zueinander kohärent sein. Erst wenn die eine Teilwelle zeitlich so weit gegenüber der anderen verzögert oder durch einen längeren Weg räumlich verschoben wird, dass beide um mehr als die Kohärenzlänge der Welle gegeneinander verschoben sind, können die Teilwellen nicht mehr raumfeste Interferenzmuster erzeugen, sind also nicht mehr kohärent zueinander. Dies zeigt, dass zueinander kohärente Wellen allmählich in inkohärente übergehen können; dazwischen liegt der Bereich der *partiellen Kohärenz* (Kap. 17.6). Mit solchen Wellen kann man zwar noch Interferenzmuster erzeugen, aber ihr Hell-Dunkel-Kontrast nimmt mit dem Grad der Kohärenz ab.

Auch im Alltag kann man Interferenzfiguren beobachten, die von Licht erzeugt werden. Ein Beispiel sind die farbigen *Newton'schen Ringe*, die zum Beispiel die schillernden Farben auf Schmetterlingsflügeln, in Seifenblasen, in Ölschichten verschmutzter Gewässer usw. hervorufen.

## 18.1.2 Anwendung der Interferenz: Die Interferometrie

Interferenzfiguren im Überlagerungsbereich kohärenter Wellen ändern sich schon deutlich, wenn die interferierenden Teilwellen in der Phasendifferenz nur um Bruchteile von  $2\pi$  geändert werden, z. B. indem sie um Bruchteile der Lichtwellenlänge räumlich gegeneinander verschoben werden. Interferenz setzt also nicht direkt messbare Phasendifferenzen in gut beobachtbare Intensitätsschwankungen innerhalb der Interferenzfigur um. Hiervon macht man messtechnischen Gebrauch bei den *Interferometern*. Dies sind optische Präzisionsmessgeräte für kleinste Längenänderungen und auch für Brechungsindexänderungen.

Im Interferometer wird eine Lichtwelle (besonders geeignet ist dazu Laser-Licht wegen seiner guten Kohärenz) in zwei oder mehrere Teilwellen aufgespalten, z. B. so, wie es in Abb. 18.3 skizziert ist. Diese legen unter-

schiedliche optische Wege zurück und werden dann wieder zusammengeführt. Die im Überlagerungsbereich entstehenden Interferenzmuster können beobachtet und die Positionen der hellen und dunklen Streifen ausgemessen werden. Wird einer der Spiegel geringfügig verschoben, oder wird der Brechungsindex (z. B. durch Temperaturänderung) und damit die Wellenlänge verändert, so ändert sich die Position der Streifen.

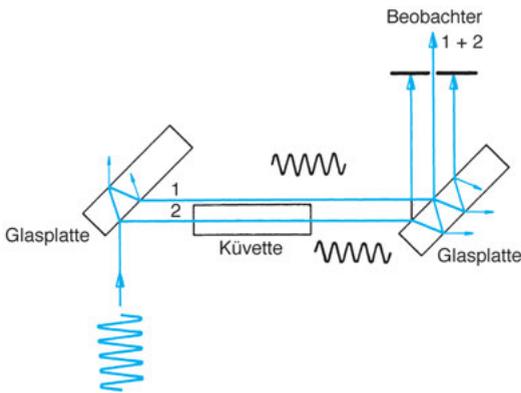
Mit der Anordnung der Abb. 18.3 lassen sich auf diese Weise kleinste *Längenänderungen* messen, wenn man einen der beiden Spiegel an einem sich (etwa durch Temperaturerhöhung oder durch ein piezoelektrisches Stellelement) ändernden Objekt befestigt und die dadurch entstehende Verschiebung der Interferenzstreifen misst. Auf interferometrischem Wege kann man heute Längen oder Längenänderungen bis unter 5 nm messen; das entspricht etwa  $1/100$  der Wellenlänge des sichtbaren Lichts oder 10 bis 20 Atomabständen im Festkörper!

Aus den Abständen der Streifen im Interferenzmuster können auch direkt *Lichtwellenlängen* mit höchster Präzision bestimmt werden.

Der geläufigste *Interferometer*-Typ ist das *Michelson-Interferometer*.

Die Anordnung der Abb. 18.4 stellt einen anderen Interferometer-Typ dar, der sich zur Bestimmung geringster Konzentrationen gasförmiger, flüssiger oder fester Substanzen durch Messung ihres *Brechungsindex* (Kap. 18.3.1) eignet. In diesem Fall wird die eine, durch die mit der Messsubstanz gefüllte Küvette laufende Welle wegen der veränderten Ausbreitungsgeschwindigkeit gegenüber der anderen Teilwelle verzögert, was wieder zu einer Verschiebung des Interferenzstreifensystems gegenüber dem Bild bei leerer Küvette führt. Auf diese Weise lassen sich Brechungsindexänderungen von der Größenordnung  $10^{-5}$  messen. Da sich der Brechungsindex einer Substanz mit der Konzentration von darin gelösten anderen Substanzen ändert, erhält man aus der Interferometermessung auch deren Konzentration.

Eine weitere Anwendung findet die Interferenz bei der Zerlegung von Licht in seine Spektralfarben. Das einfachste Beispiel dafür ist das *Interferenzfilter*. Im Prinzip braucht man dazu nur ein dünnes, durchsichtiges Plättchen (z. B. eine Aufdampfschicht aus Kryolith auf einem dicken Glasträger). An beiden Grenzflächen der dünnen Schicht in Abb. 18.5 (hier ohne Glasträger) wird ein Teil der senkrecht einfallenden ebenen Lichtwelle (1) reflektiert, und die so entstandenen Teilwellen (2) und (3) (hier der Deutlichkeit halber nebeneinander gezeichnet) können miteinander interferieren. Auch die durchlaufende Teilwelle (1) interferiert, und zwar mit den mehrfach (an  $G_2$  und  $G_1$ ) reflektierten Wellen, z. B. mit der Welle (4).



**Abb. 18.4** Interferometer. Die Welle wird durch die linke Glasplatte in zwei räumlich gegeneinander versetzte und gegeneinander phasenverschobene Teilwellen aufgespalten. In der Küvette ist ein Stoff enthalten, dessen Brechungsindex bestimmt werden soll. Er bewirkt eine zusätzliche Phasenverschiebung zwischen den Teilwellen. Diese bleibt übrig, nachdem die Phasenverschiebung von der linken Platte durch die unterschiedlichen Reflexionen an beiden Oberflächen der rechten Glasplatte wieder rückgängig gemacht worden ist. Zugleich werden dadurch die beiden Teilwellen zur Überlagerung gebracht, so dass Interferenz entsteht.

Es hängt nun von der Schichtdicke  $d$  im Vergleich zur Wellenlänge ab, ob die Interferenzen der reflektierten bzw. der durchgehenden Wellen verstärkend oder auslöschend sind. Dabei gilt allgemein: Wenn sich die *reflektierten* Wellen bei einer bestimmten Dicke (oder, falls die Dicke fest vorgegeben ist, bei einer bestimmten Wellenlänge) gerade maximal schwächen, so verstärken sich die *durchgehenden* Wellen maximal und umgekehrt. Für gewisse Wellenlängen  $\lambda_1$  wirkt eine solche Schicht für das durchgehende Licht als Sperre (*Sperrfilter*), für andere Wellenlängen  $\lambda_2$  ist sie besonders gut durchlässig (*Durchlassfilter*). Wellenlängen zwischen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  werden teilweise durchgelassen und teilweise reflektiert; und zwar werden sie um so besser durchgelassen, je näher sie bei  $\lambda_2$  liegen. Die Schicht wirkt also als *Farbfilter* begrenzter Bandbreite. Durch geeignete Wahl der Schichtdicke  $d$  lassen sich Interferenzfilter für alle gewünschten Wellenlängen herstellen. Engere spektrale Durchlassbereiche (*Bandbreiten*) sind erreichbar, wenn man statt einer einzelnen Schicht

Pakete mehrerer verschiedener Schichten übereinanderschichtet, so dass die Zahl der Reflexionen und der interferierenden Teilwellen größer wird. Solche Interferenzfilter haben die herkömmlichen Farbpigmente, die auf selektiv absorbierenden Farbpigmenten beruhen, weitgehend verdrängt. Sie werden auch zur *Entspiegelung* von optischen Linsen und Brillengläsern verwendet.

Die erforderliche Dicke des einfachen Filters (ohne Glasträger) in Abb. 18.5 lässt sich leicht bestimmen, indem man die Phasendifferenzen der interferierenden Teilwellen berechnet. Im Schichtinnern ist die Wellenlänge gegenüber der in Luft verkürzt:  $\lambda' = \lambda_{\text{Luft}}/n$  ( $n = \text{Brechungsindex}$ ) (s. hierzu Kap. 18.3.1). Damit sich die Wellen (1) und (4) maximal verstärken, muss die Phasendifferenz ein Vielfaches von  $2\pi$  betragen, d. h. Welle (4) muss in der Schicht einen Weg zurücklegen, der um  $m\lambda'$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  länger ist. Bei senkrechtem Lichteinfall ist dieses zusätzliche Wegstück gleich  $2d$ , so dass die *Durchlass-Wellenlängen*  $\lambda'_d$  des Filters gegeben sind durch die Bedingung

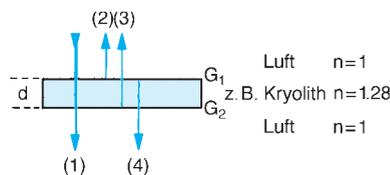
$$2d = m\lambda'_d, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{18-4}$$

und die *Sperr-Wellenlängen*  $\lambda'_s$  entsprechend durch

$$2d = \frac{2m + 1}{2} \lambda'_s, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{18-5}$$

(Diese Bedingungen haben eine andere Form, wenn die Schicht auf einem Glasträger mit großem  $n$  aufgebracht ist und auch wenn, wie in der Praxis üblich, viele Schichten aus unterschiedlichem Material übereinandergeschichtet sind.)

Eine spezielle Form des Interferenzfilters ist das *Verlauf-Interferenzfilter*, bei dem die Schicht keilförmig ist und die Schichtdicke  $d$  in einer Richtung von einer Seite zur anderen auf das Doppelte anwächst. Dadurch ist die Durchlassbedingung (Gl. (18-4)) für unterschiedliche Wellenlängen an verschiedenen Orten des Filters erfüllt, und man kann alle gewünschten Spektralfarben des sichtbaren Lichts ausfiltern, wenn man ein schmales Bündel des Lichts auf verschiedene Stellen des Filters fallen lässt.



**Abb. 18.5** Prinzip der Interferenz an einer dünnen Schicht (Interferenzfilter). Gezeichnet sind der einfallende Strahl, der durchgehende Strahl (1) und drei (z. T. mehrfach) reflektierte Strahlen (2), (3) und (4). (Der Deutlichkeit halber sind die reflektierten Strahlen nach rechts seitlich versetzt gezeichnet.)

### 18.1.3 Holografie

Optische Strahlung lässt sich ebenso wie ionisierende Strahlung auf fotografischem Wege registrieren (Kap. 21.2.7). Dabei ist die Schwärzung des Filmmaterials ein Maß für die während der Belichtungszeit aufgetroffene Gesamtenergie der Strahlung und damit auch für deren Intensität. Bringt man also einen Film in die Bildebene eines optischen Instruments, z. B. einer fotografischen Kamera, so zeichnet er die Intensitätsverteilung in dieser Ebene auf. Man registriert dabei vom räumlichen Bild eines dreidimensionalen Gegenstandes nur die in der Filmebene bestehende zweidimensionale (flächenhafte) Helligkeitsverteilung. Die räumliche Struktur des Bildes geht bei der herkömmlichen Fotografie für die Betrachter verloren.

Mit der *Holografie* ist es gelungen, auf fotografischem Wege Bilder auf einem Film zu speichern, die bei geeigneter Betrachtung räumlich (dreidimensional) erscheinen, wie das abgebildete Objekt selbst.

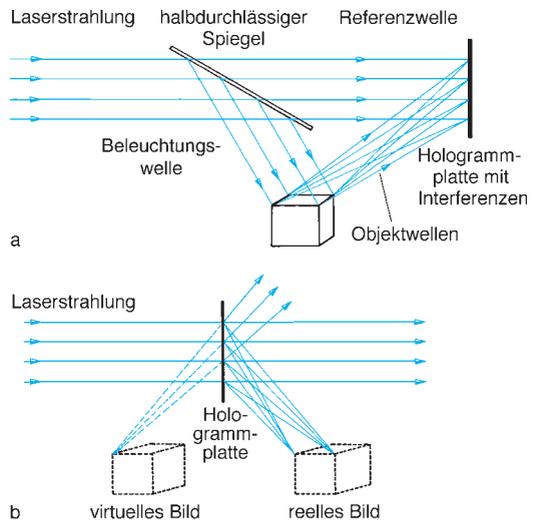
Beleuchten wir einen dreidimensionalen Gegenstand, so entstehen an den beleuchteten Oberflächen und Strukturen durch Reflexion, Streuung und Beugung Sekundärwellen, deren Amplituden sich durch Farbe und Oberflächenbeschaffenheit, und deren Phasenkonstanten sich aus der räumlichen Struktur des Gegenstandes ergeben. Aus diesen Streuwellen lässt sich mit einer Linse ein räumliches (reelles oder virtuelles) Bild des Gegenstandes entwerfen, wobei sich die Streuwellen im Bildbereich ungestört superponieren. Das nennen wir eine optische Abbildung.

Will man aber eine Abbildung auf einem fotografischen Film so speichern, dass sich das *räumliche* Bild später daraus wieder rekonstruieren lässt, so reicht nicht die Information über Intensitäten. Dann benötigt man zusätzlich Informationen über Amplituden *und* Phasen. Es genügt also nicht, wie bei der üblichen Fotografie nur die Intensitätsverteilung der Lichtwellen in der Bildebene zu registrieren, sondern man muss zusätzlich auf der Photoplatte Informationen über die Phasenkonstanten der Streuwellen speichern. Zu diesem Zweck sind die Phasenkonstanten in den *Objektwellen*, die durch die Streuung des Lichts am Objekt entstanden sind, aufzuzeichnen. Phasen lassen sich nicht direkt aufzeichnen, wohl aber *interferometrisch*, indem man durch Interferenz der Objektwelle mit einer dazu *kohärenten Referenzwelle* ein räumlich festes Interferenzmuster erzeugt und dieses z. B. fotografisch oder durch eine elektronische Bildkamera aufzeichnet

und so Information über Amplitude *und* Phase der Objektwellen festhält (Abb. 18.6a).

Optische Interferenzmuster sind wegen der kurzen Wellenlängen derart fein strukturiert, dass ein sehr feinkörniges Filmmaterial zu ihrer Aufzeichnung erforderlich ist. Auf dem Foto selbst ist also nur das Interferenzmuster festgehalten, aus dem wir bei direkter Betrachtung keinerlei Ähnlichkeit mit dem abzubildenden Objekt erkennen können. Eine Aufnahme eines solchen Interferenzmusters bezeichnet man als *Hologramm*. Um ein Bild des Objekts selbst sichtbar zu machen, beleuchtet man dann in einem zweiten Schritt (Abb. 18.6b) den entwickelten Film mit kohärentem Licht aus derselben Richtung, aus der die Referenzwelle bei der Aufnahme fiel, und es entstehen durch Beugung (Kap. 18.2) an den Interferenzmustern zwei abgelenkte Lichtbündel, von denen das eine ein räumliches reelles Bild hinter dem Hologramm und das andere ein räumliches virtuelles Bild (Kap. 19.3.2.1) vor dem Hologramm erzeugt. Beide Bilder können mit dem Auge direkt beobachtet werden, wobei die Ansicht des virtuellen Bildes sich mit der Position des Beobachters so ändert, wie die Ansicht des Gegenstandes (zum Zeitpunkt der Aufnahme) selbst; bei stereoskopischem Sehen mit beiden Augen erscheint dann das Bild dreidimensional, d. h. plastisch.

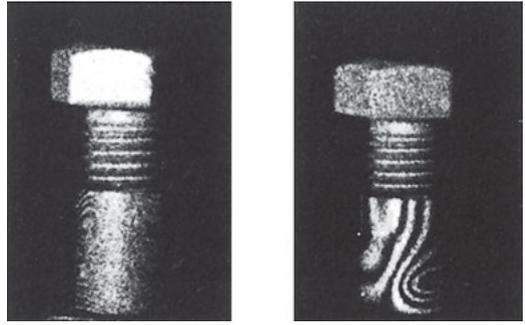
Um deutliche Interferenzmuster auf dem Hologramm zu erzeugen, müssen natürlich Beleuchtungswelle und Referenzwelle monochromatisch und zueinander kohärent sein, daher bedient man sich zur Aufnahme von Hologrammen des Laserlichts. Normalerweise benötigt man auch für die Betrachtung monochromati-



**Abb. 18.6** a) Anordnung zur Herstellung eines Hologramms, b) Anordnung zur Betrachtung eines Hologramms. (Es entsteht ein reelles und ein virtuelles dreidimensionales Bild.)

sches, kohärentes Licht. Die sog. *Weißlichthologramme*, auf denen Interferenzmuster von mehreren Wellen verschiedener Frequenzen gespeichert sind, können jedoch auch mit Tageslicht (üblich sind auch Halogen-spotlight-Lampen) betrachtet werden.

Technisch wird die Holografie u. a. genutzt, um kleinste Verformungen in der Größenordnung der Lichtwellenlänge nachzuweisen (Abb. 18.7). Gegenüber der normalen Interferometrie hat dies den Vorteil, dass man zugleich ein Bild des verformten Körpers erhält. Will man allerdings z. B. ein Porträt aufnehmen, benötigt man dazu einen Laser, der extrem kurze Lichtpulse aussendet (*Puls-Laser*, Kap. 17.12), da die Hautoberfläche in ununterbrochener Bewegung ist, wodurch die Interferenzmuster nur kurzzeitig räumlich stabil sind, und das holografische Bild schneller fluktuiert, als es das Auge zeitlich auflösen kann.



**Abb. 18.7** Interferometrischer Nachweis der Verformung eines Gewindestücks beim Eindrehen einer Schraube. Die holographisch hergestellten Bilder sind bei unterschiedlichen Einschraubtiefen aufgenommen; die Streifen zeigen Verformungen um Vielfache einer Wellenlänge ( $\sim 5 \cdot 10^{-7}$  m). (Für die Aufnahme danken wir Herrn Prof. J. Gutjahr.)

## 18.2 Beugung elektromagnetischer Wellen

### 18.2.1 Beugung an Spalten

In Kap. 7.7 haben wir das *Huygens'sche Prinzip* als ein anschauliches und sehr nützliches Modell für die Wellenausbreitung mit Hindernissen kennengelernt. Es beruht auf der Interferenz zueinander kohärenter Kugelwellen, der Huygens'schen *Elementarwellen*.

Trifft Licht auf enge Öffnungen oder kleine Gegenstände, so wird es gebeugt, d. h. aus der geradlinigen Ausbreitungsrichtung abgelenkt. Im Gegensatz zur Brechung (Kap. 18.3.1) ist nicht erforderlich, dass das Licht dabei in ein Medium mit *anderem* Brechungsindex übergeht.

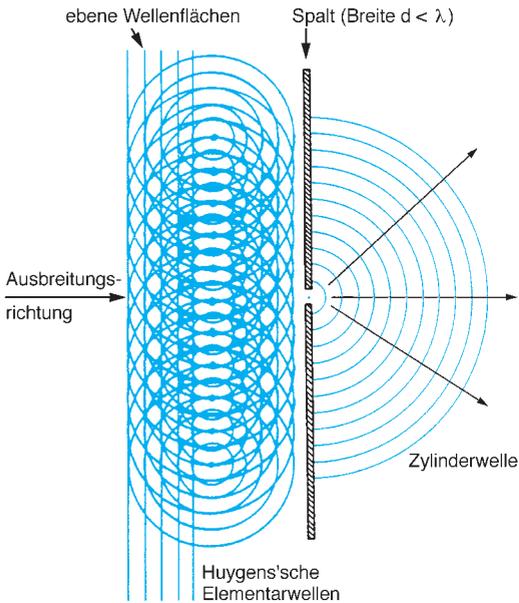
Besonders übersichtlich ist dies am *Spalt* zu beobachten. Eine ebene, monochromatische Welle treffe auf einen engen Spalt der Breite  $d$ . Dann können nur noch diejenigen Huygens'schen Elementarwellen, die *in* der Spaltöffnung angeregt werden, zur Ausbreitung der Welle *hinter* dem Spalt beitragen. Das führt dazu, dass die Welle hinter dem Spalt keine ebene Wellenfront mit geradliniger Ausbreitung in einer Richtung mehr hat. Es

heben sich dann nämlich die seitlichen Anteile der Kugelwellen nicht mehr alle durch Interferenz weg, sondern es entsteht z. B. eine Welle, wie in Abb. 18.8 stark schematisch vereinfacht dargestellt. Ist die Öffnung ein sehr enges Loch bzw. ein Spalt, so stellt die Welle eine auslaufende Kugelwelle bzw. Zylinderwelle dar.

Wir wollen dies an einigen Beispielen näher betrachten:

1. *Enger Einfachspalt* ( $d < \lambda$ ): Einen anschaulichen Versuch zur Beugung kann man selbst durchführen. In einen Pappdeckel schneidet man einen 1 cm breiten Schlitz und stellt den Deckel senkrecht in eine Wasserrinne. Mit einem zweiten Pappdeckel erzeugt man ebene Wellen, die auf den Spalt zulaufen. Dann sieht man hinter dem Spalt eine einzelne, fast kreisförmige Welle weiterlaufen (Abb. 18.8). Auf die Lichtwelle übertragen bedeutet das, dass die Überlagerung der Elementarwellen aus dem engen Bereich des Spaltes zu einer zylinderförmigen Welle führt, die sich in jeder Ebene senkrecht zum Spalt ähnlich wie die zweidimensionale Oberflächenwelle auf dem Wasser ausbreitet.

2. *Doppelspalt*: Betrachten wir nun eine Kombination von zwei engen Spalten ( $d < \lambda$ ), deren Abstand  $D$  aber größer als die Wellenlänge ist (Abb. 18.9). Wir greifen je eine Huygens'sche Sekundärquelle in beiden Spalten mit dem Abstand  $D$  heraus. Durch Überlagerung der von diesen beiden Quellen ausgehenden Wellen ergibt zu einem bestimmten Zeitpunkt das Interferenzbild wie in Abb. 18.9 skizziert. Wir sehen im

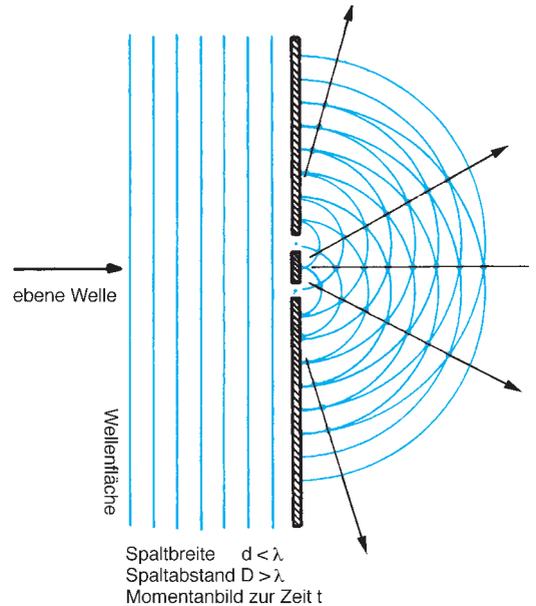


**Abb. 18.8** Momentanbild einer monochromatischen Welle hinter einem engen Spalt ( $d < \lambda$ ), auf den eine ebene Welle auftrifft. Die ebene Welle ist entsprechend Abb. 7.15 durch ihre Huygens'schen Elementarwellen und die daraus durch deren Überlagerung resultierenden ebenen Wellenflächen charakterisiert.

Überlagerungsbereich der Wellen Orte mit Verstärkung und mit Abschwächung. Entsprechend können wir beliebig viele Huygens'schen Sekundärquellen in beiden Spaltöffnungen paarweise derart zusammenfassen, dass je zwei den Abstand  $D$  haben und die gleiche Interferenzfigur liefern wie in Abb. 18.9. Die momentane Interferenzfigur der Abb. 18.9 verändert sich mit der Zeit, denn die Kugelwellen breiten sich aus, und damit laufen die Interferenzmaxima längs der eingezeichneten Linien. In deren Richtungen, gekennzeichnet durch die Winkel  $\alpha_n$  ist also die Amplitude und damit die Intensität der resultierenden Welle stets maximal. Zwischen je zwei dieser Richtungen liegt bei Winkeln  $\alpha_m$  eine Richtung, längs der sich die Elementarwellen gerade löschen, so dass dort die resultierende Welle verschwindet. In den Richtungen  $\alpha_n$  haben die beiden Teilwellen gerade den Gangunterschied  $s = n\lambda$ . Die Abb. 18.11 zeigt, dass diese Winkel festgelegt sind durch die in Tab. 18.1 angegebene Verstärkungs-Bedingung.

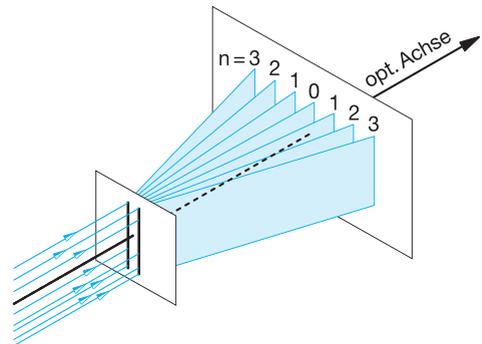
Entsprechend tritt Auslöschung in den Richtungen  $\alpha_m$  ein, bei denen die Gangunterschiede zwischen den beiden Elementarwellen  $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \dots$  betragen. Allgemein gilt also die in Tab. 18.1 angegebene Minimum-Bedingung.

Wir bezeichnen die Maxima und Minima, die zu den Winkeln  $\alpha_n$  bzw.  $\alpha_m$  gehören, als Maxima  $n$ -ter

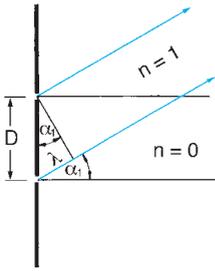


**Abb. 18.9** Momentanbild der Beugung einer monochromatischen Welle am Doppelspalt. (Mit einer Sammellinse können Strahlen gleicher Richtung im Beugungsbild in einem Strich gesammelt werden.)

und Minima  $m$ -ter Ordnung. So gehört beispielsweise das ohne Richtungsänderung die Spalte durchlaufende Licht dem Maximum 0-ter Ordnung an. Je ein Maximum  $n$ -ter bzw. Minimum  $m$ -ter Ordnung liegt auf beiden Seiten der 0-ten Ordnung. Abb. 18.10 zeigt die Anordnung eines Doppelspalt-Beugungsversuches mit Maxima bis zur 3. Ordnung.



**Abb. 18.10** Schematische Darstellung des entstehenden Streifenmusters mit den durch den Index  $n$  gekennzeichneten Interferenzmaxima für  $n \leq 3$  (Abbildungslinsen sind zur Vereinfachung weggelassen, und die komplizierteren Verhältnisse unmittelbar hinter den Spalten sind nicht berücksichtigt.)



**Abb. 18.11** Interferenz am Doppelspalt. Bedingung für den Winkel des ersten Nebenmaximums. (Gezeichnet sind nur die Strahlen, die zum 0-ten und ersten Maximum führen.)

3. *Breiter Einfachspalt* ( $d > \lambda$ ): Die Fälle 1. und 2. sind einfach überschaubar, weil wir uns damit begnügen können, eine bzw. zwei Elementarwellen stellvertretend für alle anderen zu untersuchen. Komplizierter ist der Fall, wenn der Einzelspalt breiter ist als die Wellenlänge. Dann sind nämlich auch schon beim Einfachspalt Interferenzfiguren zu beobachten. Allerdings gelten hier für die Winkel  $\alpha_n$  bzw.  $\alpha_m$  andere Bedingungen als beim Doppelspalt (s. Tab. 18.1).

Die Intensität der Maxima nimmt mit der Ordnungszahl  $n$  sehr schnell ab; schon in den beiden ersten Nebenmaxima zu beiden Seiten der 0-ten Ordnung sind nurmehr je 4,5% der Intensität des Maximums

0-ter Ordnung enthalten. Abb. 18.12 zeigt die Intensitätsverteilung im Beugungsbild, das weit hinter dem Spalt aufgezeichnet wurde.

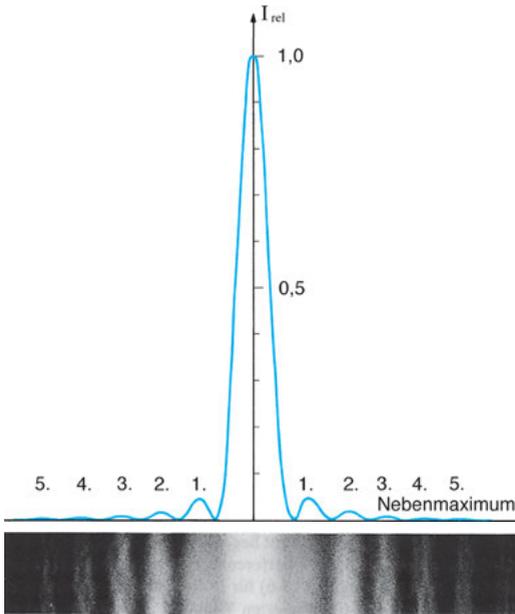
Nicht nur Spalte oder Kreisblenden (wie z. B. die Pupille des Auges) erzeugen Beugungsbilder. Ersetzen wir die Spaltblende durch einen *dünnen Draht* entsprechender Dicke, den wir ins Licht halten, so entsteht im Bereich des geometrischen Schattens ebenfalls eine Beugungsfigur, die der am Spalt entstandenen weitgehend entspricht.

Allgemein gilt: Eine Blende beliebiger Form erzeugt eine ähnliche Beugungsfigur, wie ein undurchsichtiger Gegenstand von der Gestalt der Blendenöffnung.

Aus den Gln. der Tab. 18.1 können wir ablesen, dass sich die Beugungserscheinungen in immer engeren Winkelbereichen abspielen, wenn die Spaltbreite  $d$  zunimmt, und bei Spaltbreiten, die sehr groß sind verglichen mit der Lichtwellenlänge, folgen Maxima und Minima so dicht aufeinander, dass Beugungs-

**Tab. 18.1** Beugung eines Parallel-Lichtbündels mit senkrechtem Einfall auf die beugenden Objekte

Beugungsobjekt	Winkel maximaler Intensität (Beugungswinkel $\alpha_n$ ; Glanzwinkel $\gamma_n$ ) $n = 0, 1, 2, 3 \dots$	Winkel minimaler Intensität (Beugungswinkel $\alpha_m$ )  $m = 0, 1, 2, 3 \dots$
<b>Einfach-Spalt</b> Spaltbreite $d > \lambda$	$\sin \alpha_n = (1/d) (2n + 1) (\lambda/2)$ (ohne $n = 0$ ) Hinzu kommt noch das Maximum 0-ter Ordnung bei $\alpha = 0$ .	$\sin \alpha_m = (1/d) (m + 1) \lambda$
<b>Draht</b> Durchmesser $d > \lambda$	Im geometrischen Schatten: Beugung ähnlich wie beim Spalt	
<b>Doppelspalt</b> Spaltabstand $D$	$\sin \alpha_n = (1/D) n \lambda$	$\sin \alpha_m = (1/2D) (2m + 1) \lambda$
<b>Lochblende</b> Radius $r > \lambda$		$\sin \alpha_m = (1/2r) z_m \lambda$ mit $z_m = 1.22; 2.23; 3.24; 4.24 \dots$
<b>Kreisscheibe</b> Radius $r > \lambda$	Im geometrischen Schatten: Beugung ähnlich wie bei Lochblende	
<b>Optisches Strichgitter</b> Gitterkonstante $g$	Hauptmaxima: $\sin \alpha_n = (1/g) n \lambda$	
<b>Dreidimensionales Gitter</b> Kubisch mit Gitterkonstanten $a_x = a_y = a_z$	$\sin \alpha_{x,n} = (1/a_x) n_x \lambda$ $\sin \alpha_{y,n} = (1/a_y) n_y \lambda$ $\sin \alpha_{z,n} = (1/a_z) n_z \lambda$ (Laue'sche Gleichungen; simultan zu erfüllen)	
Alternative Beschreibung: Netzebenenabstand $\delta$	$\sin \gamma_n = (1/\delta) n (\lambda/2)$ (Bragg'sche Reflexionsbedingung; der Winkel $\gamma$ ist in Abb. 18.19 definiert)	



**Abb. 18.12** Beugung am weiten Einfachspalt ( $d \gg \lambda$ ); a) Intensitätsverteilung im Beugungsbild ( $I_{\text{rel}} = \text{Intensität bezogen auf die Intensität im Maximum}$ ); b) Fotografie eines Experimentes. (Durch einen fotografischen Kunstgriff wurden die Nebenmaxima in ihrer Intensität stark hervorgehoben.)

erscheinungen kaum mehr zu beobachten sind. Dann breitet sich das Licht praktisch geradlinig durch den größten Teil der Öffnung aus. Die praktische Konsequenz: Nur wenn abzubildende Strukturen wesentlich größer sind als die Wellenlänge des verwendeten Lichts, dann kann man auf die komplizierte Wellenoptik verzichten und mit der Geometrischen Optik (Kap. 19) die Lichtwege und das Zustandekommen eines Bildes beschreiben.

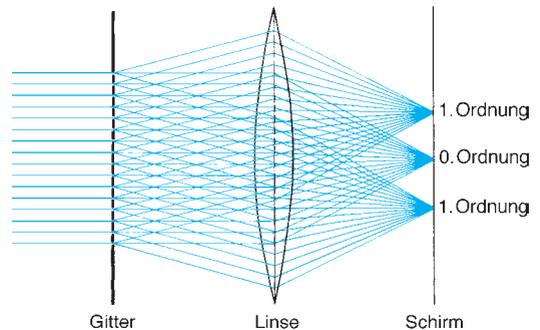
Beugung spielt keine wesentliche Rolle, wenn Öffnungen (Blenden) in ihren Abmessungen gegenüber den Lichtwellenlängen groß sind. Dies kennzeichnet den Gültigkeitsbereich der *Geometrischen Optik*.

### 18.2.2 Das Beugungsgitter

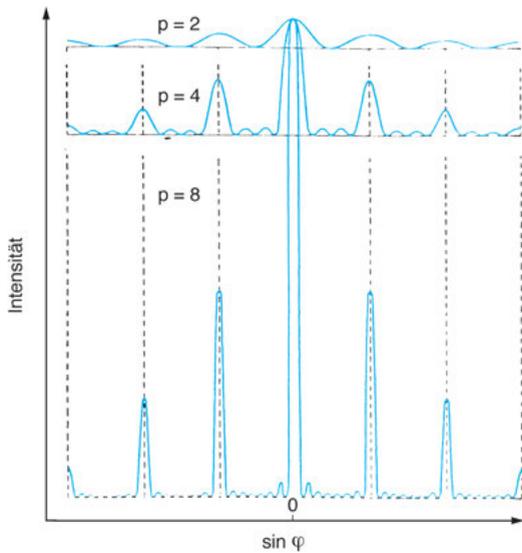
Von praktischer Bedeutung für die spektrale Zerlegung von Licht ist das *Beugungsgitter*

(*Strichgitter*). Es besteht aus einer großen Zahl paralleler Einzelspalte mit gleichen Abständen (der Gitterkonstante  $g$ ) (Abb. 18.13). Man kann Furchen in eine Glasplatte ritzen, und die Zwischenräume wirken dann als lichtdurchlässige Spalte. Einfacher erhält man Beugungsgitter, indem man Interferenzstreifen-Muster fotografiert (*holografische Gitter*). Es gibt optische Gitter mit über 1000 Spalten pro mm.

Neben der Einzelspaltbeugung entstehen durch das gesamte Gitter Auslöschungen und Verstärkungen wie beim Doppelspalt, jetzt aber aufgrund der Interferenz von Wellen jedes Spaltes mit denen seines nächsten, übernächsten, drittnächsten Nachbarn usw. Je größer der Abstand zwischen den beteiligten Spalten, um so kleiner sind die Winkel  $\alpha_m$ , unter denen Auslöschung zu beobachten ist. Dazwischen liegen Nebenmaxima, die intensitätsschwach sind, weil bei diesen Winkeln zugleich Wellen weit voneinander entfernt liegender Spalte sich auslöschten; nur unter wenigen Winkeln tragen *alle* Spalte zu einem Interferenzmaximum bei. Diese *Hauptmaxima* liegen bei den Winkeln  $\alpha_n$  des Doppelspaltes (s. Tab. 18.1), wenn wir für  $D$  die Gitterkonstante  $g$  einsetzen. Dies ist plausibel, da für die in Tab. 18.1 definierten Winkel  $\alpha_n$  zwischen zwei benachbarten Spalten der Gangunterschied genau  $n\lambda$ , zwischen übernächsten Spalten genau  $2n\lambda$ , usw. beträgt. Die Interferenzfigur des Gitters unterscheidet sich von der des Doppelspaltes dadurch, dass die Maxima extrem schmal sind, also extrem schmale helle Streifen entstehen, die durch breite, praktisch dunkle



**Abb. 18.13** Beugung am Gitter. (Die Gitterkonstante ist im Vergleich zur Linse vergrößert gezeichnet.) Die Strahlen hinter dem Gitter geben die Richtungen an, in denen sich die Huygens'schen Elementarwellen benachbarter Spalte in ihrer Phase um 0 bzw.  $\pm 2\pi$  unterscheiden. Die Linse sammelt sie in den Intensitätsmaxima 0-ter und 1. Ordnung auf dem Schirm (Beugungsbild). Zusätzlich gibt es für  $n > 1$  weitere Maxima.



**Abb. 18.14** Intensitätsverteilung im Beugungsbild bei der Beugung an 2, 4 und 8 Spalten mit monochromatischer Beleuchtung. (Der Winkel  $\varphi$  gibt die Abweichung von der geradlinigen Ausbreitung an.)

Gebiete getrennt sind. Abb. 18.14 zeigt, dass dieser Effekt bereits deutlich einsetzt, wenn die Zahl der Spalte noch weniger als 10 beträgt.

Allgemein gilt: Je höher die Zahl der Gitterspalte im Wellenfeld ist, desto schmaler werden die Interferenzmaxima, und zugleich werden die Maxima dabei intensitätsstärker.

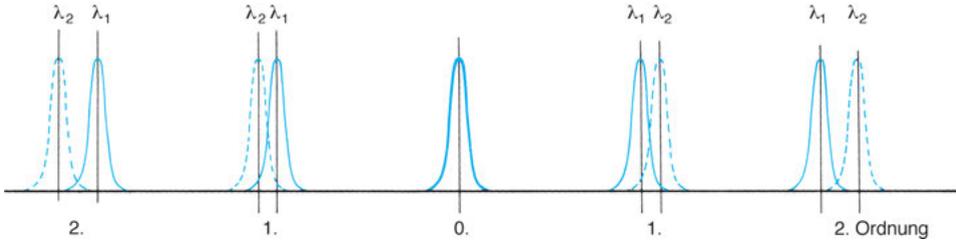
### Gitter als Bestandteil von Monochromatoren

Die wesentliche Bedeutung des Gitters für Anwendungszwecke liegt in der Möglichkeit, mit seiner Hilfe vielfarbiges Licht in seine spektralen Bestandteile zu zerlegen. Für den Bau von *Monochromatoren*, *Spektralapparaten*, *Photometern* (deren Aufbau in Kap. 20.7 näher beschrieben wird) und bei der für die chemische Analyse grundlegend wichtigen *Spektralanalyse* hat das Gitter das früher dafür verwendete Prisma (Kap. 19.3.5) fast völlig vom Markt verdrängt.

Das Funktionsprinzip des *Gittermonochromators* ist einfach: Fällt Licht *mehrerer* Wellenlängen aus einer Richtung auf das Gitter, so liegen auf einem dahinter angeordneten Beobachtungsschirm die zu verschiedenen Wellenlängen gehörenden Interferenzmaxima als schmale farbige Linien räumlich getrennt nebeneinander (Abb. 18.15), denn aus den Gleichungen der Tab. 18.1 geht hervor, dass die Maxima gleicher Ordnung für größere Wellenlängen bei größeren Winkeln  $\alpha_n$  liegen, als für kleinere Wellenlängen (ausgenommen ist davon das Maximum 0-ter Ordnung). Da die Linien beim Gitter sehr schmal sind, wenn man eine optische Anordnung, wie in Abb. 18.13 gezeigt, verwendet, lassen sich auch eng benachbarte Wellenlängen trennen (*auflösen*); mit sehr guten Beugungsgittern gelingt dies bei sichtbarem Licht ( $\lambda \approx 600 \text{ nm}$ ) noch für Wellenlängenunterschiede von  $10^{-2} \text{ nm}$ ! Ein Beugungsgitter ist also ein hervorragendes und einfaches Gerät, um mehrfarbiges Licht in seine Spektralbestandteile zu zerlegen, also (nahezu) *monochromatisches* Licht zu erzeugen. Dazu muss man anstelle des Beobachtungsschirms eine spaltförmige Blende anbringen. Verschiebt man sie über die Orte der verschiedenfarbigen Maxima, so kann man die Wellenlänge des durchgelassenen Lichtes verändern. In kommerziellen *Monochromatoren* ist diese Anordnung etwas abgewandelt: Es hat sich als praktischer erwiesen, durch Verdrehen des Gitters die Beugungmaxima über eine feststehende Spaltblende zu verschieben. Der Drehwinkel ist dann ein Maß für die Wellenlänge des durchgelassenen Lichtes.

Man verwendet in Monochromatoren Gitter mit komplizierter Struktur der Striche (*Blaze-Gitter*), um die Lichtintensität nicht auf viele Beugungsordnungen zu verteilen wie in Abb. 18.13, sondern sie bevorzugt in einer Ordnung (meist  $n = 1$ ) zu konzentrieren.

Mit dem Gitter kann man nicht nur die spektralen Bestandteile von elektromagnetischen Wellen voneinander trennen, sondern auch die Wellenlängen messen. Dazu ist mit der in Tab. 18.1 angegebenen Gleichung nur nötig, die Gitterkonstante  $g$  zu kennen und die Winkel  $\alpha_n$  zu bestimmen.

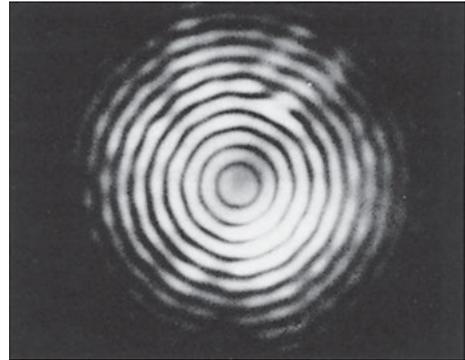


**Abb. 18.15** Lage der bezüglich der Intensität normierten Interferenzmaxima 0-ter, 1. und 2. Ordnung im Beugungsbild eines mit zwei Spektralfarben  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  beleuchteten Gitters.

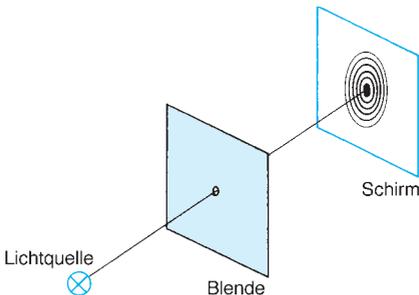
### 18.2.3 Beugung an kreisförmigen Blenden (Beugungsunschärfe)

Beugungserscheinungen sind nicht auf Spalte oder Strichgitter beschränkt. Sie sind immer dann zu beobachten, wenn eine Welle auf ein Hindernis fällt, dessen Dimensionen nicht allzu groß sind verglichen mit der Wellenlänge. So beobachten wir auf dem Schirm hinter der Anordnung der Abb. 18.16 nicht etwa einen Schattenwurf der Blende, sondern ein System konzentrischer heller und dunkler Ringe, wenn die Öffnung nur klein genug ist (Abb. 18.17). Dunkle Ringe erscheinen unter den in Tab. 18.1 angegebenen Winkeln  $\lambda_m$ , wobei  $z_m$  nun im Gegensatz zur Beugung am Spalt nicht ganzzahlig ist.

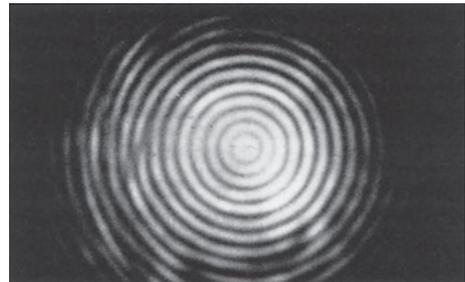
Auch hier gilt wieder, dass die Beugungsmaxima und -minima um so enger zusammenrücken, je größer die Blende ist. Wie beim Spalt gilt auch für die Lochblende die Umkehrung: Ersetzt man die Blende durch ein scheibenförmiges Hindernis derselben Größe, so entsteht auch hier ein weitgehend ähnliches Beugungsmuster aus konzentri-



**Abb. 18.17** Ergebnis eines Experimentes zur Beugung an einer runden Lochblende. (Durch einen fotografischen Kunstgriff wurden die äußeren Ringe in ihrer Helligkeit stark hervorgehoben; tatsächlich nimmt die Intensität ähnlich stark mit der Beugungsordnung ab wie beim Spalt, vgl. Abb. 18.12.)



**Abb. 18.16** Schematische Darstellung der Beugung an einer runden Lochblende.



**Abb. 18.18** Beugung an einer undurchsichtigen Scheibe, die so groß ist wie die Lochblende in Abb. 18.17. (Durch einen fotografischen Kunstgriff wurden die äußeren Ringe in ihrer Helligkeit stark hervorgehoben; tatsächlich nimmt die Intensität ähnlich stark mit der Beugungsordnung ab wie beim Spalt. Die Streifenabstände sind ebenso groß wie in Abb. 18.17.)

schen Ringen auf dem Schirm und nicht etwa nur ein geometrischer Schatten (Abb. 18.18).

Die Beugung ist für die Optik insbesondere bei Abbildungen entscheidend wichtig, da sie die Güte der Bilder prinzipiell begrenzt.

Bei allen optischen Instrumenten stellen nämlich die Linsenhalterungen Lochblenden dar, so dass jede Abbildung notwendigerweise mit einer Beugungsfigur verbunden ist. Durch eine Linse kann also ein Parallel-Lichtbündel nie exakt im Brennpunkt gesammelt werden; stets entsteht dort eine Beugungsfigur, die von der begrenzenden Öffnung für das Lichtbündel herrührt und von deren Durchmesser abhängt.

Entsprechendes gilt für jede Abbildung eines beliebigen Gegenstandspunktes: Die Abbildung eines Punktes liefert niemals exakt einen Bildpunkt, sondern stets ein ausgedehntes Beugungsscheibchen. Das Bild wird also infolge der Beugung unscharf (*Beugungsunschärfe*).

Daher erhält man beispielsweise selbst mit den größten astronomischen Fernrohren von entfernten Sternen nicht etwa Bilder, auf denen man Strukturen erkennen kann, sondern stets nur deren *Beugungsscheibchen*. Auch für das Mikroskop, das Fernglas, die Kamera usw. ist die prinzipielle Grenze bei der Abbildung extrem kleiner Objekte durch die Beugungsunschärfe gegeben (Grenze des *Auflösungsvermögens*; s. Gl. (20-3)).

Aber nicht nur für die Optik ist die Beugung wichtig: Bei jeder Art von Wellen tritt sie auf. Deshalb ist die Darstellung feiner Strukturen beispielsweise mit dem Elektronenmikroskop im nm-Bereich (Kap. 20.4) oder mittels der Ultraschalldiagnostik im mm-Bereich (Kap. 7.12) ebenfalls durch die Beugung der beteiligten Wellen (Materiewellen bzw. Schallwellen) begrenzt.

Für die Abbildung im Auge ist die *Pupille* die beugende Öffnung. Man kann ausrechnen, dass die durch sie auf der Netzhaut entstehenden Beugungsscheibchen einen Durchmesser haben, der vergleich-

bar mit dem Abstand benachbarter Sehzellen ist. Die Detail-Auflösung des Auges würde also nicht weiter gesteigert werden, wenn die Sehzellen in der Netzhaut dichter lägen.

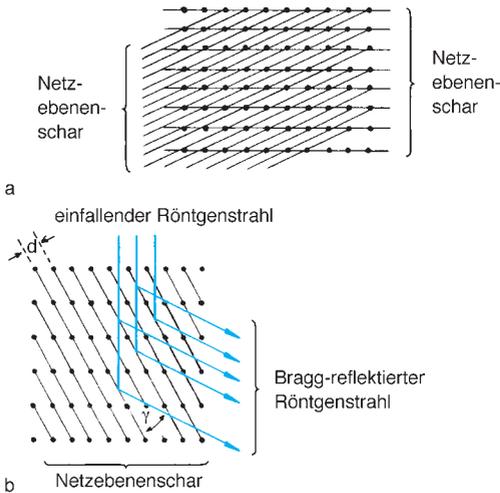
## 18.2.4 Beugung von Röntgenstrahlen

Auch Röntgenstrahlen (s. Kap. 21.3) sind elektromagnetische Wellen, wenn auch mit tausendfach kleinerer Wellenlänge als bei sichtbarem Licht. Daher treten auch bei ihnen die bisher besprochenen Beugungsphänomene auf, doch müssen dazu die beugenden Objekte — entsprechend der kleineren Wellenlänge — tausendmal kleiner sein. Strukturen dieser Größe (0,5 nm) können durch einzelne Atome gebildet sein.

Im Kristall sind Atome in der regelmäßigen Form eines *räumlichen Gitters* angeordnet, das infolge der Interferenz der an den einzelnen Atomen gebeugten Wellen Beugungsmaxima und -minima liefert, ähnlich wie das in Kap. 18.2.2 besprochene lineare Beugungsgitter. Beim *räumlichen* Punktgitter sind jedoch Interferenzbedingungen in allen *drei* Raumrichtungen simultan zu erfüllen, damit Maxima entstehen (Tab. 18.1).

Diese Beugung ist mit dem Gleichungssystem der drei *Laue-Gleichungen* in Tab. 18.1 schwierig zu handhaben, da drei Bedingungen simultan zu erfüllen sind. Es gibt aber auch eine einfachere Betrachtungsweise. Wir wollen die auf einer beliebig gewählten Ebene liegenden Atome im Kristallgitter herausgreifen. Der ganze Kristall baut sich dann aus solchen, in regelmäßigem Abstand übereinander geschichteten Ebenen, den *Netzebenen*, auf. In einem Kristall gibt es Netzebenenscharen mit vielen verschiedenen Richtungen. Zwei Beispiele dafür zeigt die Abb. 18.19a. Nun kann man sich die Beugung des Röntgenstrahls formal auch als eine „Reflexion“ an einer geeigneten Netzebenenschar vorstellen, allerdings tritt sie — im Gegensatz zur normalen optischen Reflexion — nur bei ganz bestimmten Winkeln zwischen Röntgenstrahlrichtung und Netzebene auf, die durch die Interferenz der an benachbarten Netzebenen „reflektierten“ Wellen festgelegt sind.

Diese ausgewählten Winkel werden durch die *Bragg'sche Reflexionsbedingung* erfasst, die besagt, dass maximale Intensität unter einem Ablenkungswinkel  $\gamma$  des Strahls beobachtet wird, der mit einer der Netzebenenscharen die in Tab. 18.1 angegebene Bedingung erfüllt. Dabei ist  $d$  der Netzebenenabstand und  $\lambda$  die



**Abb. 18.19** a) Zwei Beispiele von Netzebenenscharen in einem Punktgitter. (Die Ebenen hat man sich senkrecht zur Zeichenebene vorzustellen.) b) Bragg-Reflexion von Röntgenstrahlen an einer Netzebenenschar (d: Netzebenenabstand). Von den reflektierten Strahlen sind nur einige als Beispiele gezeichnet.

Röntgenstrahl-Wellenlänge. (Wie Abb. 18.19b zeigt, wird der Winkel  $\gamma$ , der sog. *Glanzwinkel*, nicht, wie der Winkel  $\alpha$  vom Lot, sondern von der Netzebene aus gemessen.) Wir können diesen Vorgang mit dem von Licht an einem aus vielen gleichen Schichten bestehenden Interferenzfilter (Kap. 18.1.2) vergleichen. Auch dort müssen für maximale Intensität sowohl das Refle-

xionsgesetz als auch eine Interferenzbedingung zugleich erfüllt sein.

*Röntgenbeugung* ist eine weit verbreitete Methode, um Gitterstrukturen kristalliner Stoffe aufzuklären, indem man Netzebenenabstände und daraus Gitterkonstanten bestimmt. Die Fotografie eines Röntgenbeugungsbildes ist in Abb. 18.39b wiedergegeben. Sie ist nicht an einem idealen Einzelkristall, sondern an polykristallinem (d. h. aus vielen mikroskopisch kleinen Kristalliten in unterschiedlichen Orientierungen bestehendem) Material aufgenommen. Bei solchen Proben erhält man nicht einzelne diskrete Beugungsmaxima, vielmehr bilden sich aus den Maxima der vielen Kristallite ganze Ringsysteme.

Auch bei biologischen Systemen spielt die Röntgenbeugung eine wichtige Rolle: sie wurde zu einer höchstempfindlichen Methode für die Analyse von *Molekülstrukturen* entwickelt, wobei allerdings Voraussetzung ist, dass man aus diesen biologischen Makromolekülen einen Kristall züchten kann.

Die Strukturanalyse von Molekülen und Festkörpern steht in Konkurrenz mit der Elektronenbeugung und direkten Abbildung mittels des Elektronenmikroskops, wobei letzteres zur Zeit die Nase vorne hat.

Es sei angemerkt, dass bei der Aufnahme normaler Röntgen-Durchleuchtungsbilder Beugungserscheinungen ohne Bedeutung sind: hier handelt es sich um den auf einem Film aufgezeichneten *Schattenwurf* dreidimensionaler grober Strukturen im Körper, die in unterschiedlichem Maße für die Röntgenstrahlen durchlässig sind. Eine echte Abbildung mit Hilfe optischer Komponenten (Linsen) wird hierbei nicht vorgenommen (da Linsen für Röntgenstrahlen noch kompliziert und von begrenzter Leistungsfähigkeit sind). Die untere Grenze der Strukturauflösung dieser Schatten-Röntgenbilder liegt nur bei einigen mm.

## 18.3 Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Materie

Im Wesentlichen ist es der elektrische Feldvektor  $\vec{E}$  der elektromagnetischen Welle, der mit den Atomen in Wechselwirkung tritt, sobald die Welle auf Materie trifft. Denn ein hochfrequentes elektrisches Feld vermag die Ladungsverteilung in einem Atom, Molekül oder Festkörper in ähnlicher Weise zu beeinflussen, wie ein statisches Feld es tut, wenn man Materie zwischen die Platten eines Kondensators schiebt (Kap. 14.7.5).

Dabei werden die Schwerpunkte von positiver und negativer Ladung in den Atomen gegeneinander verschoben (*elektrische Polarisation*; Kap. 14.7.5), und infolge der periodischen Änderung des Feldes werden die Ladungsträger dabei zu er-

zwungenen Schwingungen angeregt. Diese Reaktion der Materie hat für die elektromagnetische Welle zweierlei Folgen: Erstens wird die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* der Welle geändert, und zweitens wird die Amplitude der Welle in bestimmten Spektralbereichen geschwächt (*Absorption*).

Auf beide Effekte gehen wir im folgenden ein.

### 18.3.1 Der Brechungsindex und das Brechungsgesetz

In Materie kann sich Licht nicht ungehindert ausbreiten, vielmehr wird die elektro-

magnetische Welle begleitet von einer Welle von Ladungsverschiebungen in den Atomen, einer *Polarisationswelle*, was zu einer Verringerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes führt. Dies gilt für durchsichtige, d. h. nicht-absorbierende Stoffe; in absorbierenden Stoffen sind die Verhältnisse noch komplizierter.

Der Einfluss von Materie auf eine elektromagnetische Welle in absorptionsfreien Spektralbereichen lässt sich charakterisieren, indem man das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit  $c$  im Vakuum zu der in einem transparenten, homogenen Medium,  $c_m$ ,

$$\frac{c}{c_m} = n. \quad (18-6a)$$

$n$  heißt *Brechungsindex* (Brechzahl) des Stoffes und ist eine Zahl, d. h. dimensionslos. Der Brechungsindex  $n$  steht in direkter Beziehung zur Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_{\text{rel}}$  aus (Gl. (14-41)): Es gilt  $\varepsilon_{\text{rel}} = n^2$ . Beide Größen variieren im optischen Bereich i. A. mit der Frequenz, so dass  $\varepsilon_{\text{rel}}$  keine Konstante ist, sondern als *Dielektrizitätsfunktion* bezeichnet wird.

Bei hohen Intensitäten, d. h. großen Feldstärken  $E$  wird  $\varepsilon_{\text{rel}}$  abhängig von  $E$ :  $\varepsilon_{\text{rel}} = \varepsilon_{\text{rel}}(E)$ . Zu ihrer Beschreibung dienen neben der *linearen* Dielektrizitätskonstante der Gl. (14-41a) (oder, alternativ im Bereich der Optik, dem Brechungsindex  $n = \sqrt{\varepsilon}$  (Kap. 18.3.1)) weitere *nichtlineare* Beiträge zu  $\varepsilon_{\text{rel}}$ , die nach unterschiedlichen Potenzen vom elektrischen Feld abhängen:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{lin}} + \varepsilon_{\text{nl}}E + \varepsilon_{\text{n2}}E^2 + \dots$$

Dabei nennt man  $\varepsilon_{\text{lin}}$  die lineare Dielektrizitätskonstante,  $\varepsilon_{\text{nl}}$  die nichtlineare Dielektrizitätskonstante erster Ordnung,  $\varepsilon_{\text{n2}}$  zweiter Ordnung usw. Entsprechend können wir auch den *nichtlinearen Brechungsindex* einführen.

Die Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit ist gleichbedeutend mit einer Änderung der Wellenlänge, da sich die Frequenz *nicht* ändert. Aus der Beziehung  $c = \nu\lambda$  (Gl. (14-95)) folgt dann statt Gl. (18-6a) auch  $\lambda/\lambda_m = n$ .

Der Grund für den Namen *Brechungsindex* wird deutlich, wenn wir die Richtungsänderung einer schräg auf eine Grenzfläche auftreffenden Lichtwelle untersuchen.

Wir nehmen an, der Ausbreitungsvektor einer ebenen Welle, der die Richtung der Lichtstrahlen angibt, falle unter dem Winkel  $\alpha_1$  auf die Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  (Abb. 18.20). Dann erfolgt eine abrupte Richtungsänderung zum Winkel  $\alpha_2$ , bedingt durch die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ .

Es gilt das Brechungsgesetz (Snellius), das wir schon in Gl. (7-30) kennengelernt haben:

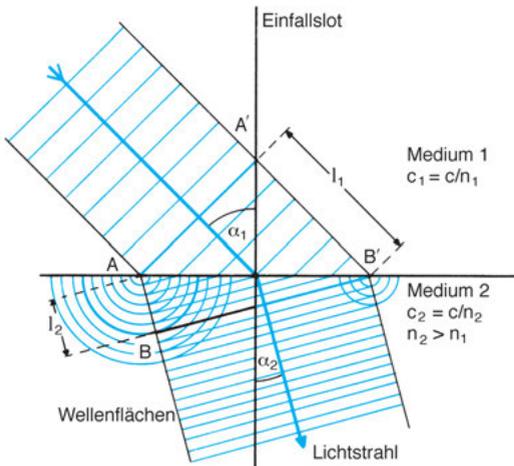
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (18-6b)$$

Wenn Medium 1 Vakuum oder Luft ist ( $n_1 \simeq 1$ ), so vereinfacht sich Gl. (18-6b), und wir können Brechungsindex  $n_2$  direkt durch Messung der Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  bestimmen. Einige Zahlenwerte sind in Tabelle 18.2 zusammengestellt.

Zur Begründung von Gl. (18-6b) greifen wir auf das Huygens'sche Prinzip (Kap. 7.7) zurück, das uns ermöglicht, den Vorgang an der brechenden Fläche im Wellenbild zu beschreiben (Abb. 18.20). Es falle eine ebene Welle schräg auf die Grenzfläche vom optisch dünneren zum optisch dichteren Medium (d. h.  $n_2 > n_1$ ). Die zugehörigen parallelen Lichtstrahlen stehen senkrecht auf den Wellenflächen. Wir wählen die Wellenfläche  $AA'$  aus. Zur Zeit  $t = t_1$  ist sie gerade am Ort  $A$  auf der brechenden Fläche angelangt; von dort zeichnen wir die weiterlaufenden Huygens'schen Kugelwellen für Zeiten  $t > t_1$ . Die Wellenfläche können wir uns nach Huygens durch Überlagerung beliebig vieler gleichphasiger Kugelwellen zusammengesetzt denken, von denen wir hier nur zwei herausgreifen wollen. Der Punkt  $A'$  der Wellenfront trifft auf die Grenzfläche im Punkt  $B'$  zur Zeit  $t_2 = t_1 + l_1/c_1$ . Erst dann beginnen dort die zugehörigen Kugelwellen im zweiten Medium von  $B'$  aus loszulaufen. Die Kugelwelle vom Punkt  $A$  hingegen hat während des Zeitintervalls  $t_2 - t_1$  sich um die Strecke  $l_2 = (t_2 - t_1) c_2$  zum Punkt  $B$  ausgebreitet.  $l_2$  ist kleiner  $l_1$ , da im op-

**Tab. 18.2** Brechzahlen  $n$  einiger Stoffe bei 20 °C für die gelbe Spektrallinie des Natriums ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ )

Stoff	$n$
Vakuum	1
Luft bei Normaldruck	1,000 272
Wasser	1,333
Diamant	2,417
Glas	1,3 bis 2,1



**Abb. 18.20** Zur Begründung des Brechungsgesetzes (Gl. 18-6b) mit dem Huygens'schen Prinzip.

tisch dichteren Medium sich das Licht langsamer ausbreitet. Nun können wir zu den beiden Kugelwellen an den Punkten  $B$  und  $B'$  die Wellenfläche und die darauf senkrecht stehenden Lichtstrahlen einzeichnen, und wir sehen, dass wegen der langsameren Ausbreitung im zweiten Medium die Welle, charakterisiert durch die Strahlen, zum Einfallslot hin gebrochen wird. Bezeichnen wir noch die Strecke  $AB'$  mit  $L$ , so erhalten wir:  $\sin \alpha_1 = l_1/L = (t_2 - t_1) c_1/L$  und  $\sin \alpha_2 = l_2/L = (t_2 - t_1) c_2/L$ . Dividieren wir diese beiden Gleichungen durcheinander, so steht das Brechungsgesetz in der Form der Gl. (18-6b) da.

Diese Herleitung macht deutlich, dass zwar die Brechung der Lichtstrahlen an der Grenzfläche erfolgt, dass sie tatsächlich aber durch den Unterschied der Volumen-Materialeigenschaften beider Medien, nämlich der verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten, begründet ist.

In der einfachen Form der Gl. (18-6b) gilt das Brechungsgesetz nur für nichtabsorbierende, isotrope Stoffe. Bei *doppelbrechenden* Stoffen z. B. muss die Richtungsabhängigkeit von  $n$  berücksichtigt werden. Abb. 18.25 in Kap. 18.3.4 zeigt, dass dann bestimmte Strahlen auch bei senkrechtem Einfall gebrochen werden können, also nicht mehr Gl. (18-6b) folgen.

Der Brechungsindex ist in durchsichtigen Stoffen stets größer als 1; er hängt zudem von der Frequenz ab, so dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit für Wellen verschiedener Frequenzen im Unterschied zum Vakuum nicht mehr dieselbe ist. Die Änderung des Brechungsindex mit der Wellenlänge,  $dn/d\lambda$ , oder – was im Prinzip gleichbedeutend ist – mit der Frequenz,  $dn/d\omega$ ,

wird *Dispersion* genannt. Sie steht in direktem Zusammenhang mit der Absorption, weshalb wir in Kap. 18.3.3 nochmals auf die Dispersion zurückkommen werden.

In absorbierenden Stoffen (z. B. Metallen) treten verwickelte Verhältnisse auf. An die Stelle der reellen Zahl  $n$  tritt eine komplexe Größe aus Realteil (der die Wellenausbreitung beschreibt) und Imaginärteil (der die Absorption erfasst).

Bei starker Absorption kann der Realteil von  $n$  kleiner als 1 sein, und aus Gl. (18-6a) würde folgen, dass  $c_m$  größer als  $c$  ist. Man kann aber zeigen, dass dies nicht gegen die Existenz der Grenzgeschwindigkeit (Kap. 14.9.7.1) verstößt, denn in diesem Falle breitet sich die Strahlungsenergie nicht mehr mit der Geschwindigkeit  $c_m$  aus.

### 18.3.2 Das Absorptionsgesetz

Eine durch ein System schwingungsfähiger Bausteine (Oszillatoren) laufende Welle, deren Frequenz einer der Eigenfrequenzen des Systems entspricht, erzeugt eine Resonanz. Wie bei der Schaukel (Kap. 6.4), die stets zu gleichen Zeiten mit gleicher Phase angestoßen wird, führt Resonanz allgemein zu einer Amplitudenzunahme. Da in der Realität aber Schwingungen stets gedämpft sind, führt Resonanz zu Absorption von Energie aus der erregenden Welle, wie wir dies schon in Kap. 6.4 bei den mechanischen Schwingungen kennengelernt haben. Bei elektromagnetischen Wellen freilich versagt dieses klassische Modell der erzwungenen Schwingung zur *quantitativen* Beschreibung der Absorption. Erst die Quantentheorie vermag, den Absorptionsvorgang im Innern eines Atoms im Detail zu beschreiben, und die Lage der Absorptionsbereiche im Spektrum richtig wiederzugeben (Kap. 17.7; 17.8).

Wollen wir die insgesamt in einer Probe absorbierte Strahlungsleistung nur pauschal beschreiben, so können wir das in Gl. (17-12) definierte *Absorptionsvermögen* heranziehen.

Wie ändert sich nun die elektromagnetische Welle auf ihrem Weg durch die Probe, wenn ihr laufend durch Absorptionsprozesse

Lichtquanten d. h. Energie entzogen werden, sei es durch Anregung der Elektronen in Atomen, Ionen oder Molekülen, sei es durch Schwingungsanregung von Ionen in Molekülen oder im Festkörper, oder auch durch Streuung, indem Strahlung diffus in alle Raumrichtungen wieder ausgesandt wird? — Fällt eine Welle auf Materie (die wir uns vereinfachend als aus atomaren Resonatoren aufgebaut denken können), so erfolgt die Absorption nicht abrupt, vielmehr wird die Intensität beim Eindringen allmählich verringert. Normalerweise sind in einer Lichtwelle so viele Lichtquanten enthalten, dass die Abnahme praktisch kontinuierlich erfolgt.

Experimentell ist nachgewiesen worden, dass die in einer *dünnen* Schicht am Ort  $x$  des absorbierenden Stoffes absorbierte *Strahlungsleistung*  $dP$  proportional ist der Schichtdicke  $dx$  und der Strahlungsleistung der Welle  $P(x)$  in dieser Schicht:

$$dP = -K \cdot P(x) dx, \quad (18-7)$$

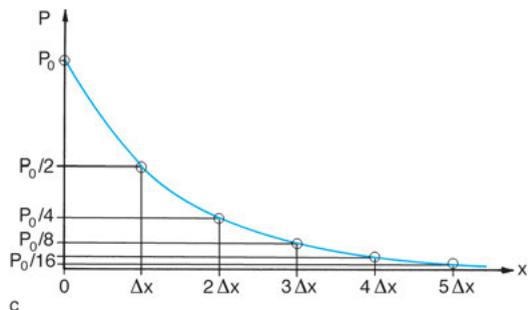
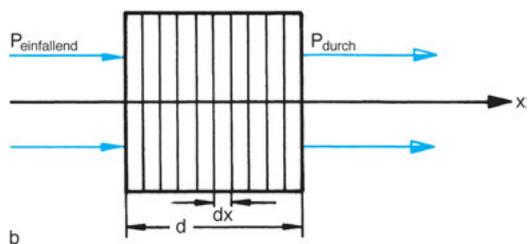
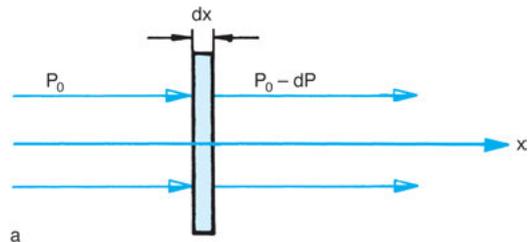
wobei  $K$  eine Proportionalitätskonstante ist, und das negative Vorzeichen darauf hinweist, dass  $P$  abnimmt. Wir können auch sagen, dass die relative Abnahme  $dP/P$  der Strahlungsleistung in jeder Schicht der Dicke  $dx$  desselben Stoffes dieselbe ist (Abb. 18.21a), nämlich  $-K dx$ . Gl. (18-7) ist ein weiteres Beispiel für die im Anhang A4 behandelte Exponentialfunktion.

Ob ein Stoff bei der Frequenz des einfallenden Lichtes stark oder schwach absorbiert, ist durch die Größe der von den Eigenschaften des Stoffes abhängigen Konstante  $K$ , der *Absorptionskonstante*, bestimmt.

Wird die durch die Probe laufende ebene Welle durch *Streuung* in andere Raumrichtungen geschwächt, so folgt die Intensitätsabnahme dieser ebenen Welle ebenfalls einem Gesetz von der Art der Gl. (18-7), auch wenn in diesem Falle nur die Richtung der Photonen, nicht aber ihre Zahl verändert wird. An die Stelle

der Absorptionskonstante  $K$  tritt dann die *Streuungskonstante*  $K'$ . Sind an der Schwächung einer Lichtwelle sowohl Absorption als auch Streuung beteiligt (wie z. B. bei kolloidalen Systemen, Kap. 18.4.2), dann spricht man zusammenfassend von *Extinktion* und bezeichnet die zugehörige Verlustgröße  $E = K + K'$  als *Extinktionskonstante*.

Nehmen wir an, die Strahlung durchläuft eine *dicke* Schicht des Stoffes. Dann interessiert es, welcher Bruchteil der Strahlung nach Durchlaufen übrig bleibt. Wir können uns die Probe als ein Paket vieler dünner Schichten vorstellen (Abb. 18.21b), für welche je Gl. (18-7) gilt. An einem Beispiel wollen wir zeigen, was geschieht. Wir



**Abb. 18.21** Abnahme der Strahlungsleistung  $P$  durch Absorption a) in einer dünnen Schicht, b) in einer dicken Schicht, die man sich aus vielen dünnen Schichten zusammengesetzt denken kann. c) Abnahme der Strahlungsleistung  $P$  in einer absorbierenden Schicht gemäß dem Absorptionsgesetz Gl. (18-8).

wollen willkürlich annehmen, dass in jeder Schicht der Dicke  $\Delta x$  die Hälfte der Strahlungsleistung absorbiert wird. Dann ist nach der ersten Schicht von der einfallenden Leistung  $P_0$  noch die Hälfte,  $P_1 = 1/2P_0$ , nach der zweiten wieder die Hälfte der dann noch vorhandenen Strahlung, d. h.,  $P_2 = 1/2P_1 = 1/4P_0$ , nach der dritten Schicht  $P_3 = 1/2P_2 = 1/8P_0$  usw. übrig. In Abb. 18.21c ist die nach Durchlaufen der Schichten jeweils übrig bleibende Strahlungsleistung  $P$  als Funktion der Schichtdicke  $x = n \Delta x$  ( $n =$  Zahl der durchlaufenen Einzelschichten) aufgetragen. Verbindet man die Punkte durch eine glatte Kurve, so folgt diese einer *Exponentialfunktion* (s. Anhang A4).

In absorbierenden Stoffen nimmt die Strahlungsleistung  $P$  also exponentiell mit zunehmender Schichtdicke  $x$  ab,

$$P(x) = P_0 e^{-Kx},$$

oder in anderer Schreibweise:

$$P(x) = P_0 \exp(-Kx). \quad (18-8)$$

Ist auch Streuung im Spiel, so tritt an die Stelle der Absorptionskonstante  $K$  die Extinktionskonstante  $E$ .

Entsprechend Gl. (18-8) gilt auch für die Intensität, d. h. die Strahlungsleistung pro Querschnittsfläche, ein Absorptions- bzw. Extinktionsgesetz

$$I(x) = I_0 e^{-Kx} \quad \text{bzw.} \quad I(x) = I_0 e^{-Ex}, \quad (18-9)$$

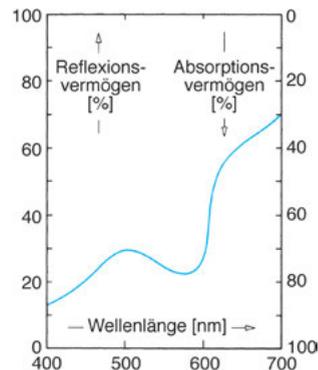
wenn es sich um eine ebene Welle handelt (s. auch Kap. 7.4).

Die Absorptionskonstante bzw. Extinktionskonstante eines Stoffes ändert sich mit der Frequenz des einfallenden Lichtes:  $K = K(\omega)$ . Sie wird in Absorptionsbereichen besonders groß. Gase unter niedrigem Druck absorbieren nur in sehr engen Spektralbereichen (*Absorptionslinien*, s. Kap. 17.8); nur dort ist  $K \neq 0$ . Gase unter hohem Druck, Flüssigkeiten und feste Körper dagegen besitzen ausgedehnte Spektralbereiche, in denen sie absorbieren, und diese sind oft von Bereichen getrennt, in denen der Stoff durchsichtig ist, d. h.  $K = 0$ . Fensterglas etwa absorbiert sowohl im Ultravioletten als auch im Infraroten, und nur im sichtbaren Spektralbereich liegt ein praktisch absorptionsfreies Gebiet

( $K \sim 0$ ). Ähnliches findet man bei Wasser. Viele Metalle sind wegen der starken Absorption der Leitungselektronen in keinem Spektralbereich durchsichtig; ihre Absorptionskonstante ist übrigens viel größer als die der besten schwarzen Farbe. Es liegt an dem hohen Anteil *reflektierter* Strahlung, dass die Metalle dennoch nicht schwarz erscheinen. ( $K$  gibt nur Auskunft über die Absorption der in den Stoff *eingedrungenen* Strahlung, nachdem der Reflexionsprozess an der Probenoberfläche stattgefunden hat.)

Bestimmt man  $K$  für einen ausgedehnten Spektralbereich, so erhält man das *Absorptionsspektrum* (bzw., wenn Streuung an den Lichtverlusten mitbeteiligt ist, das *Extinktionsspektrum*). Es ist hierbei gleichermaßen üblich,  $K$  bzw.  $E$  als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$ , der Wellenzahl  $1/\lambda$ , der Frequenz  $\nu$ , der Kreisfrequenz  $\omega$  oder der Lichtquantenenergie  $h\nu$  grafisch darzustellen.

Das Absorptionsspektrum von Wasser wurde bereits in Abb. 17.12 gezeigt. Wasser ist Hauptbestandteil von Körpergewebe. Dessen Absorption nimmt, vom Sichtbaren aus, mit wachsender Frequenz zu. Für den Bereich des sichtbaren Spektrums zeigt dies nochmals zusammen mit der diffusen Reflexion Abb. 18.22. Die Eindringtiefe ist für langwelliges rotes Licht etwa 3 mm, so dass man hautnahe Adern erkennen und mit Rotlichtbestrahlung

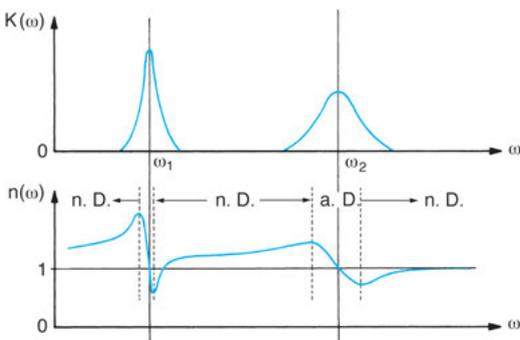


**Abb. 18.22** Absorption und (diffuse) Reflexion der Körperoberfläche des Menschen im sichtbaren Spektralbereich.

oberflächennahe Organe erwärmen kann. Im Langwelligen führt die Absorption im wesentlichen zur Erwärmung; im Sichtbaren und UV dagegen werden vielfältige chemische Prozesse ausgelöst, wie die Bildung des Vitamins D, die Reaktionen in der Netzhaut und Zerstörungen in Hautzellen (z. B. beim Sonnenbrand). Krankheitsbedingte Veränderungen in den Nebenhöhlen oder Hydrozephalus bei einem Neugeborenen können an der Lichtstreuung mit Rotlicht erkannt werden (*Diaphanoskopie*).

### 18.3.3 Der Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion

Absorptionskonstante  $K$  und Brechungsindex  $n$  jedes Stoffes ändern sich mit der (Kreis-) Frequenz  $\omega$  der einfallenden Strahlung, allerdings in unterschiedlicher, stoffspezifischer Weise. In Absorptionsbereichen ist  $K(\omega)$  groß, außerhalb davon ist  $K(\omega)$  Null, und der Stoff ist durchsichtig. In der Umgebung der Absorptionsbereiche ändert sich aber auch  $n(\omega)$  erheblich; die *Dispersion*  $dn/d\omega$ , d. h. die Änderung von  $n(\omega)$  mit  $\omega$ , ist besonders stark. Für das einfache Beispiel zweier schmaler Absorptionsbereiche ist dieser Zusammenhang in Abb. 18.23 skizziert: Die Dispersion  $dn/d\omega$  ist besonders ausgeprägt nahe der Absorptionsstelle, wird aber auch außerhalb des Absorptionsbereiches nicht Null.



**Abb. 18.23** Spektren der Absorptionskonstante  $K(\omega)$  und des Brechungsindex  $n(\omega)$  eines Stoffes mit 2 Absorptionsbereichen. Die Dispersion ist besonders ausgeprägt in der Umgebung der Absorptionsbereiche. Dort tritt statt der normalen Dispersion (n. D.) die anomale Dispersion (a. D.) auf.

In absorptionsfreien Gebieten wächst  $n$  mit der Frequenz,  $dn/d\omega > 0$  (*normale Dispersion*). Hingegen nimmt im Absorptionsbereich  $n$  mit der Frequenz ab,  $dn/d\omega < 0$  (*anomale Dispersion*).

Die Tatsache, dass sich  $n$  auch in durchsichtigen Bereichen mit der Frequenz ändert, nutzt man z. B. aus, um mit Hilfe des Glasprismas Licht in seine Spektralfarben zu zerlegen (*Prismen-Spektralapparat*, Kap. 19.3.5, 20.6). Die Dispersion bewirkt auch, dass verschiedene monochromatische Bestandteile von Licht sich unterschiedlich schnell in einem Stoff ausbreiten. Bei  $dn/d\omega > 0$  (z. B. Wasser im Sichtbaren) ist blaues Licht schneller als rotes. In der Nähe eines Absorptionsbereiches ist dies umgekehrt.

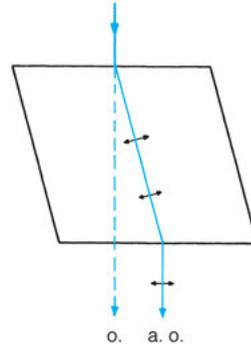
### 18.3.4 Dichroismus und Doppelbrechung

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass Absorption und spektraler Verlauf des Brechungsindex miteinander verknüpft sind, und dass sich der Brechungsindex in der Nähe einer Absorptionsstelle besonders stark mit der Wellenlänge ändert.

Bei *isotropen Stoffen* — das sind Stoffe, deren atomare Struktur keine ausgeprägte Vorzugsrichtung aufweist, wie z. B. eine Flüssigkeit, ein NaCl-Kristall oder Glas — ist die spektrale Lage der Absorptionsbereiche für Licht, das aus verschiedenen Richtungen auf die Probe fällt, gleich, und auch der Brechungsindex hat für eine vorgegebene Wellenlänge jeweils den gleichen Wert, unabhängig davon, aus welcher Richtung das Licht auf den Stoff einfällt. Es gibt aber *anisotrope Stoffe*, z. B. organische Moleküle oder anorganische Kristalle wie etwa Kalkspat oder Turmalin, deren Kristallstruktur eine Vorzugsrichtung besitzt. Zu ihnen gehört auch spezielles Plastikmaterial, in dem langgestreckte Moleküle in einer Vorzugsrichtung ausgerichtet sind, und das man für den Bau

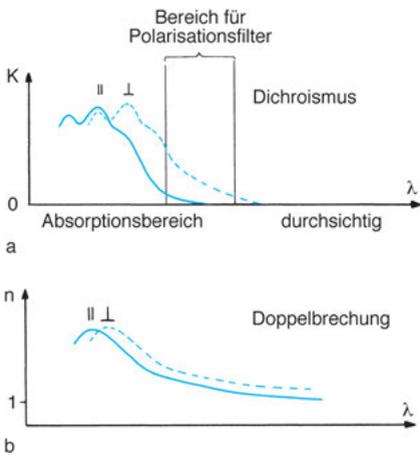
von Polarisationsfiltern (Kap. 18.5.2) verwendet. In solchen Stoffen sind Bindungskräfte und Resonanzfrequenzen richtungsabhängig, und daher hängen Absorption und Brechungsindex von der Richtung des elektrischen Feldvektors des Lichtes im Kristall ab. Beide ändern sich daher mit der Richtung und mit dem Polarisationszustand des einfallenden Lichtes. (In Kap. 18.5 wird die Analyse des Polarisationszustandes von Licht und seine Beeinflussung durch *Polarisatoren* eingehend behandelt.)

Stoffe mit richtungsabhängiger Absorption nennt man *dichroitisch*. Aus Abb. 18.23 geht hervor, dass eine richtungsabhängige Absorption eine entsprechende Abhängigkeit des Brechungsindex zur Folge hat. Diese erstreckt sich auch in die absorptionsfreien Spektralbereiche und wird als *Doppelbrechung* bezeichnet (da man für unterschiedliche Polarisierung des einfallenden Lichtes unterschiedliche Wer-



**Abb. 18.25** Doppelbrechung an einem anisotropen Kalkspatkristall. Das einfallende natürliche Licht wird in eine senkrecht zur Zeichenebene (ordentlicher Strahl) und eine in der Zeichenebene linear polarisierte Teilwelle (außerordentlicher Strahl) aufgespalten. Der ordentliche Strahl (o.) folgt dem Brechungsgesetz (wird also bei senkrechtem Einfall nicht gebrochen), der außerordentliche Strahl (a. o.) folgt dem Brechungsgesetz nicht (wird auch bei senkrechtem Einfall gebrochen).

te des Brechungsindex finden kann). Ein dichroitischer Stoff ist also in den absorptionsfreien Spektralbereichen doppelbrechend.



**Abb. 18.24** a) Absorptionsspektren eines dichroitischen Stoffes für verschieden linear polarisiertes Licht. (Der eingezeichnete Bereich für Polarisationsfilter bezieht sich darauf, dass  $\perp$ -polarisiertes Licht im Filter absorbiert wird, während das Filter für  $\parallel$ -polarisiertes Licht praktisch durchlässig ist. b) Spektren des Brechungsindex eines dichroitischen Stoffes (Doppelbrechung) für verschieden linear polarisiertes Licht. ( $\perp$  und  $\parallel$  bedeuten, dass das Licht senkrecht bzw. parallel zu einer ausgezeichneten Richtung des dichroitischen Stoffes polarisiert ist.)

In Abb. 18.24 sind an einem Beispiel  $K(\lambda)$  und  $n(\lambda)$  eines anisotropen Stoffes für zwei zueinander senkrechte Polarisationsrichtungen einer aus einer vorgegebenen Richtung einfallenden Lichtwelle gezeigt.

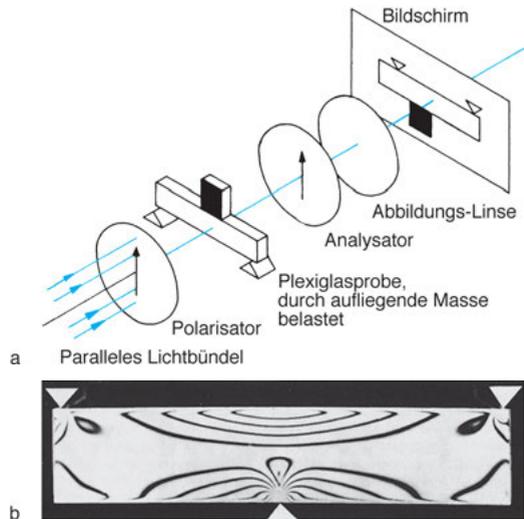
Bei doppelbrechenden Kristallen gibt es Polarisationsrichtungen der einfallenden Welle, für die das Brechungsgesetz (Kap. 18.3.1) *nicht* gilt. Abb. 18.25 zeigt einen solchen Fall: Der als *außerordentlicher Strahl* (a. o.) gekennzeichnete Strahl wird gebrochen, obwohl das Licht senkrecht auf den Kristall auftrifft.

### 18.3.5 Spannungsdoppelbrechung

Durch mechanische Kräfte (Spannungen) können nichtkristalline Stoffe, wie Glas, Plexiglas oder Plastikmaterial, doppel-

brechend werden (*Spannungsdoppelbrechung*), da durch die Deformierung die Anordnung der Atome eine anisotrope Vorzugsrichtung einnimmt.

In Kap. 18.5.2.2 wird gezeigt werden, dass dies anomale Polarisationsverhalten Einfluss auf den Polarisationszustand durchgehenden Lichtes hat, und wie man dies zur Sichtbarmachung von Deformationskräften technisch ausnutzen kann. Diesem Kapitel vorgehend, wollen wir schon hier den Einfluss auf die Polarisation von Licht zeigen. Durch Spannungsdoppelbrechung wird der Polarisationszustand des durchgehenden Lichtes beeinflusst, entweder indem die Polarisationssebene gedreht wird, oder aber linear polarisiertes Licht elliptische Polarisation erhält. Aus der Stärke der Doppelbrechung kann man daher sogar die räumliche Verteilung und Größe der mechanischen Spannungen in solchen Körpern erkennen. Als eine praktische Anwendung zeigt Abb. 18.26a, wie in einer Plexiglasplatte die Kräfteverteilung bei Belastung durch helle und dunkle Streifen sichtbar gemacht werden kann. Abb. 18.26b gibt ein Beispiel eines Experimentes. Solche Versuche wurden z. B. an aus Plexiglas nachgeformten Hüftgelenken durchgeführt.



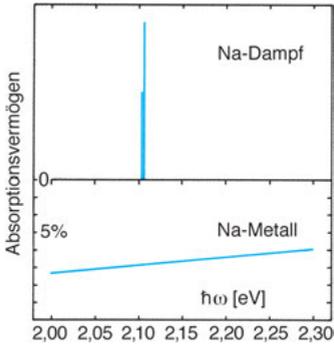
**Abb. 18.26** Spannungsdoppelbrechung an einer an drei durch weiße Dreiecke markierte Stellen belasteten Plexiglasplatte. a) Prinzip der experimentellen Anordnung, b) Fotografie des Spannungsbildes. In den dunklen Bereichen ist die Polarisationssebene in der Probe in Auslöschstellung für den Analysator gedreht worden. (Für die Aufnahme danken wir Herrn Prof. H. Ismar.)

## 18.4 Spektralanalyse

Jedes chemische Element ist im gasförmigen Zustand (bei nicht zu hohen Drucken) durch die *Spektrallinien* seines Absorptionsspektrums oder Emissionsspektrums eindeutig charakterisiert. Dies nützt man in der Praxis seit dem 19. Jh. in weitem Maße durch Anwendung der *Spektralanalyse*, d. h. der chemischen Analyse mittels optischer Spektren, aus. Wegen der Kopplungskräfte zwischen den Ionen oder Atomen eines Moleküls kann dieses zu mechanischen Schwingungen angeregt werden (Kap. 6.6.2). Die Eigenfrequenzen dieser *Molekülschwingungen* liegen zumeist im Frequenzbereich des fernen (langwelligen) Infraroten (IR). Je größer das Molekül, desto größer ist ihre Zahl. Die elektrischen Ladungen der beteiligten Ionen bilden elektrische Dipole, die durch elektromagnetische Wellen (also je nach Größe ihrer Eigenfrequenz durch sichtbares Licht oder IR-Strahlung) angeregt werden können. Misst man die wellenlängenabhängige Absorption (das *Absorptionsspek-*

*trum*), so liefert dieses Informationen über die Bindungsstärken und die Massen der Ionen, also über die chemische Natur und die Struktur der untersuchten Moleküle (*optische Molekülspektroskopie*). Bei chemischen Verbindungen, größeren Molekülen oder bei der Kondensation vieler Atome zu Flüssigkeiten oder Festkörpern sind die Spektren nicht in gleichem Maße charakteristisch. Daher werden bei der Spektralanalyse solcher Proben diese häufig zuvor in den gasförmigen Zustand gebracht.

Bei Molekülen werden die Spektren um so komplizierter, je mehr Atome sich in engem Verband befinden und sich gegenseitig beeinflussen. Das Aufspalten von Resonanzfrequenzen durch Wechselwirkung zwischen benachbarten Atomen und das dadurch bedingte Entstehen breiter Bänder im Spektrum können wir qualitativ vergleichen mit der Kopplung mechanischer Schwingungen (Kap. 6.6), bei der ja ebenso eine Aufspaltung der Resonanzen in Moden unterschiedlicher Frequenzen auftritt. Bei kondensierter Materie geht die Komplexität schließlich so weit, dass sich die Spektrallinien und Banden zu *kontinuierlichen Spektren* überlagern,



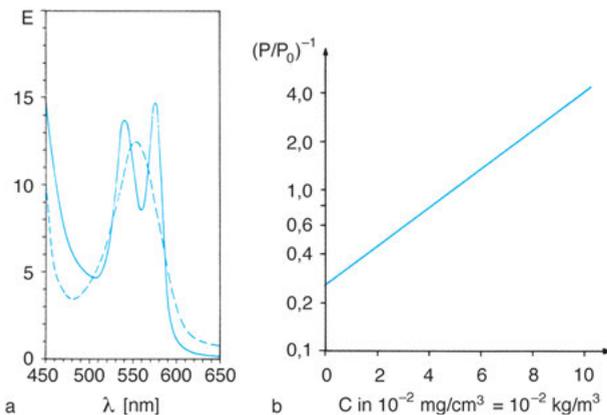
**Abb. 18.27** Absorptionsspektren von atomarem Natrium-Dampf und von festem Natrium-Metall. (Da das Absorptionsvermögen des Na-Dampfes von dessen Dichte abhängt, ist die obere Ordinate nicht beschriftet.)

und wenig strukturierte, mehr oder weniger breite Absorptions- und Extinktionsbereiche entstehen.

Die Veränderung von Spektren durch gegenseitige Beeinflussung benachbarter Atome können wir z. B. beim Natrium beobachten. Atomares Na im Dampf ist durch die beiden Spektrallinien im Gelben leicht zu identifizieren. Metallisches Na hat dagegen im ganzen sichtbaren Bereich eine uncharakteristische Absorption, die durch die Überlagerung sehr vieler, durch die Wechselwirkungen zwischen den Atomen entstehender Linien zustande kommt und kaum von der anderer Metalle zu unterscheiden ist (Abb. 18.27).

Dennoch lassen sich auch viele feste und flüssige Stoffe und Lösungen anhand spezieller charakteristischer Strukturen in speziellen Bereichen ihrer Absorptions- bzw. Extinktionsspektren identifizieren.

Solche Spektren können mehr, und oft in dichten Gruppen zusammenfallende, Linien oder spektral breite Absorptionsbereiche enthalten.



**Abb. 18.28** a) Extinktionsspektrum von sauerstoffbeladenem Hämoglobin (durchgezogene Kurve) und sauerstofffreiem Hämoglobin (gestrichelte Kurve).  $E$ : Extinktionskonstante;  $\lambda$ : Wellenlänge. b) Absorption von Blutplasma bei  $\lambda = 546$  nm in Abhängigkeit von der Konzentration  $C$  an Paraaminohippursäure, einer Substanz zur Überprüfung der Nierenfunktion. Beachten Sie, dass  $(P/P_0)^{-1}$  hier in logarithmischem Maßstab aufgetragen ist. Durch die Sauerstoffbeladung wird die Absorption des Blutes im roten Spektralbereich ( $\lambda > 630$  nm) herabgesetzt, so dass es eine charakteristische hell-kirschrote Durchlicht-Farbe annimmt.

Zwar beeinflussen auch die Moleküle eines Lösungsmittels die Absorption eines darin gelösten Stoffes, so dass sich die Spektren gelöster Atome oder Moleküle von denen isolierter Spezies im Gas unterscheiden. Aber auch sie können oft aus ihren Spektren identifiziert werden.

Daher ist die Spektralanalyse oder photometrische Analyse in speziell ausgewählten Spektralbereichen zu einer Standard-Analysemethode in Chemie, Materialwissenschaften und auch für das medizinische Labor geworden. Mit ihrer Hilfe kann nachgewiesen werden, welche Stoffe in einer Probe enthalten sind (*qualitative* Analyse) und auch, in welcher Konzentration sie enthalten sind (*quantitative* Analyse).

Abb. 18.28a zeigt die unterschiedlichen Extinktionsspektren im Sichtbaren von sauerstoffbeladenem und sauerstofffreiem Hämoglobin aus arteriellem bzw. venösem Blut. Durchgeführt wird eine Spektralanalyse mit dem *Spektralphotometer*, dessen Funktionsweise in Kap. 20.7 beschrieben wird.

#### 18.4.1 Lambert-Beer'sches Gesetz

Die Absorptionsspektren von Lösungen setzen sich zusammen aus der Absorption der gelösten Stoffe und der der Lösungsmittel. Die Absorptionsbereiche üblicher Lösungsmittel, wie Wasser, Alkohole, Aceton, Benzol

usw. liegen außerhalb des Sichtbaren, so dass sie farblos und durchsichtig sind. Die Absorption eines gelösten Stoffes wird im sichtbaren Spektralbereich also zumeist nicht von der Absorption des Lösungsmittels überlagert.

Ist aber auch der gelöste Stoff im Sichtbaren absorptionsfrei, oder hat er dort keine charakteristischen spektralen Strukturen, so muss man zur Analyse die Absorptionsbereiche im Ultravioletten oder Infraroten ausmessen. Dort liegen aber möglicherweise auch Absorptionsbereiche des Lösungsmittels, so dass man dessen optische Eigenschaften gesondert prüfen muss.

Für viele verdünnte Lösungen gilt, dass die Absorptionskonstante des gelösten Stoffes seiner Konzentration  $C$  proportional ist:

$$K(\lambda) = K_{\text{sp}}(\lambda) \cdot C. \quad (18-10)$$

Mit steigender Konzentration ändert sich also die Absorption, der charakteristische Verlauf mit der Wellenlänge, der in der *spezifischen Absorptionskonstante*,  $K_{\text{sp}}(\lambda)$ , enthalten ist, bleibt jedoch unverändert. Das Absorptionsgesetz (Gl. (18-8)) lautet dann

$$\begin{aligned} P(\lambda, x, C) &= P_0(\lambda) \cdot e^{-K(\lambda) \cdot x} \\ &= P_0(\lambda) \cdot e^{-K_{\text{sp}}(\lambda) \cdot C \cdot x} \end{aligned} \quad (18-11)$$

und heißt in dieser Form das *Lambert-Beer'sche Gesetz*.

Es ermöglicht die quantitative Bestimmung des gelösten Stoffes, wenn dessen spezifische Absorptionskonstante  $K_{\text{sp}}$  bekannt ist oder zum Vergleich eine Eichlösung bekannter Konzentration gemessen wird.

Abb. 18.28b gibt ein Beispiel: Sie zeigt die Absorption von Blutplasma bei  $\lambda = 546 \text{ nm}$  in Abhängigkeit von der Konzentration der Paraaminohippursäure. Die Absorption setzt sich zusammen aus der von Paraaminohippursäure und der der übrigen im Plasma gelösten Stoffe.

Gl. (18-11) gilt für niedrige Konzentrationen. Sie gilt z. B. nicht, wenn die Konzentration  $C$  von Proteinen in wässriger Lösung so hoch wird, dass die Hydrathüllen teilweise verloren gehen und dadurch die Struktur des Absorptionsspektrums  $K_{\text{sp}}(\lambda)$  durch  $C$  verändert wird.

Bei Lösungen mit mehreren absorbierenden Bestandteilen setzt sich die Gesamtabsorption  $K_G$  aus den Einzelabsorptionen  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) zusammen:

$$\begin{aligned} K_G &= K_1 + K_2 + K_3 + \dots = (K_{\text{sp},1} \cdot C_1) \\ &\quad + (K_{\text{sp},2} \cdot C_2) + (K_{\text{sp},3} \cdot C_3) + \dots \end{aligned} \quad (18-12)$$

Das Lambert-Beer'sche Gesetz lautet dann:

$$P(\lambda, x, C_i) = P_0(\lambda) \cdot e^{-K_G(\lambda) \cdot x}. \quad (18-13)$$

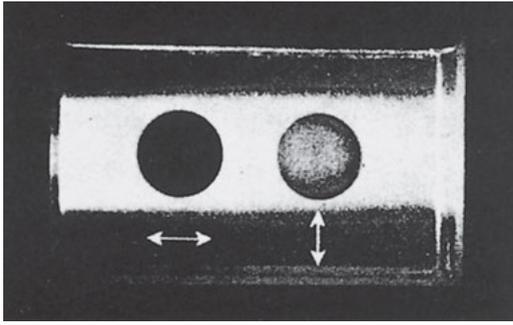
Will man die Konzentrationen  $C_i$  aller gelösten Stoffe bestimmen, so müssen Messungen bei mehreren Wellenlängen vorgenommen werden, bei welchen die spezifischen Konstanten  $K_{\text{sp},i}$  bekannt sind.

## 18.4.2 Extinktion kolloidaler Systeme

*Kolloidale Teilchen* (z. B. kolloidale Metalle, Polymere, Polystyrol-Latex, gelöste Proteine, Fermente oder Toxine) sind, im Gegensatz zu den Molekülen in *echten* Lösungen, groß genug, dass Licht an ihnen mit erkennbarer Intensität gestreut wird. Andererseits sind sie zu klein, um mit dem Lichtmikroskop beobachtbar zu sein. Typische Größen kolloidaler Teilchen liegen zwischen 1 und  $10^2 \text{ nm}$ . Kolloide sind damit typische Vertreter von *Nanostrukturierter Materie* (Anhang A.8).

Licht wird an kolloidalen Nanopartikeln im UV, im VIS und im IR gestreut, speziell auch in den absorptionsfreien Spektralbereichen. Kolloidale Systeme sind daher nie völlig durchsichtig (wenngleich die Streuintensität zu kleinen Teilchengrößen und im Spektrum zu niedrigen Frequenzen gewöhnlich stark abnimmt).

*Kolloidale Systeme* zeigen den *Tyndall-Effekt*, eine Leuchterscheinung, die durch das seitlich gestreute Licht zustande kommt (Abb. 18.29). Er ist einfach zu beobachten, wenn beispielsweise ein gebündelter Lichtstrahl durch mit Wasser verdünnte Milch fällt. Auch die weisse Farbe von Zähnen kommt durch Streustrahlung zustande. Licht kann an kolloidalen Nanopartikeln im UV, im VIS und im IR absorbiert und gestreut werden. Streuung erfolgt auch in den absorptionsfreien Spektralbereichen und führt zur *Trübung* der kolloidalen Systeme (oft: „kolloidale Lösungen“, obwohl es sich nicht um echte Lösungen handelt).



**Abb. 18.29** Tyndall-Effekt (Streuung von Licht an einem kolloidalen System). Das Licht fällt in der Zeichenebene in einen Trog mit Wasser, das durch kolloidale Mastixeteilchen getrübt ist. Durch die Streuung wird das Lichtbündel senkrecht zur Ausbreitungsrichtung sichtbar. Zwei davor gehaltene Polarisatoren zeigen, dass das Streulicht – wie in Kap. 18.5.2.4 erläutert – in senkrechter, nicht aber in waagerechter Richtung polarisiert ist. Daher ist in dieser Polarisationsrichtung kein Streulicht zu beobachten. (aus Bergmann/Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik Band 3, de Gruyter).

Die Intensität  $I$  einer einfallenden ebenen Welle nimmt wegen des durch Streuung in andere Raumrichtungen verschwindenden Anteils mit der Schichtdicke  $x$  des kolloidalen Systems ebenso ab wie bei echter Absorption; es gilt das Extinktionsgesetz (18-9) und das

Lambert-Beer'sche Gesetz (18-11), d. h.  $E$  ist proportional zur Konzentration:  $E = E_{\text{sp}} \cdot C$ .

Die spezifische Extinktionskonstante  $E_{\text{sp}}$  hängt außer von der chemischen Beschaffenheit der Bestandteile auch von der Größe und der Gestalt der Teilchen ab.

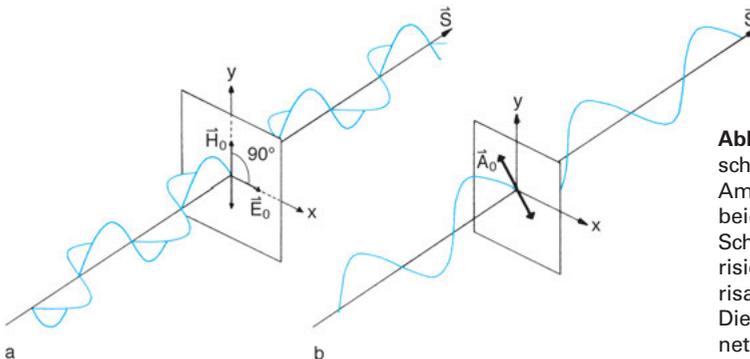
Der Streuteil nimmt stark mit der Teilchengröße zu, bei kleinen Teilchen sogar mit der 6. Potenz des Radius,  $R^6$ . Bei sehr kleinen Teilchen ändert sich die Intensität des Streulichtes zudem auch sehr stark mit der Wellenlänge: In absorptionsfreien Spektralbereichen ist sie proportional zu  $1/\lambda^4$ . Daher erscheinen Magermilch oder Tabakrauch bläulich, denn blaues Licht wird wegen der kürzeren Wellenlänge stärker gestreut als rotes. Auch das Blau des Himmels beruht auf diesem Effekt; das an Inhomogenitäten der Atmosphäre, an kleinsten Wassertropfchen, Molekülen und Staubpartikeln gestreute Licht enthält bevorzugt blaue Anteile. Ohne diese Streuung wäre der Himmel über uns schwarz wie auf dem Mond. Im *nicht*gestreuten Licht der Sonne bleiben in erster Linie die langwelligen Anteile erhalten, und das ist der Grund, weshalb die Sonne beim Untergang rot erscheint. Wenn die Sonne tief steht, müssen nämlich die Sonnenstrahlen einen besonders langen Weg durch die Atmosphäre zurücklegen. Bei größeren nicht absorbierenden Teilchen verschwindet diese Abhängigkeit von der Wellenlänge: Größere Wassertropfchen im Nebel oder in Wolken erscheinen im Streulicht weiß. Wassertropfen, deren Größe die Lichtwellenlänge übersteigt, fallen nicht mehr unter den Begriff der kolloidalen Systeme. Sie zeigen andersartige Lichtstreuung, wie z. B. den *Regenbogen*, der durch das Zusammenwirken von Reflexion, Brechung und Dispersion zustandekommt.

## 18.5 Polarisation elektromagnetischer Wellen

### 18.5.1 Polarisationszustand

Im Gegensatz zur longitudinalen Welle, bei der die Schwingungsrichtung mit der Ausbreitungsrichtung zusammenfällt, sind bei der transver-

salen Welle beliebig viele Richtungen für die Schwingung möglich. Genauer gesagt, die Schwingungsrichtung kann beliebig innerhalb der Schwingungsebene  $F$  liegen, die senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung  $\vec{S}$  steht (Abb. 18.30a).



**Abb. 18.30** a) Elektromagnetische Welle, linear polarisiert. Die Amplituden sind hier  $\vec{E}_0$  und  $\vec{H}_0$ ; beide sind richtungsfest in der Schwingungsebene. b) Linear polarisierte transversale Welle der Polarisationsrichtung  $135^\circ$  (bzw.  $-45^\circ$ ). Die Amplitude ist mit  $\vec{A}_0$  bezeichnet.  $\vec{S}$ : Ausbreitungsvektor.

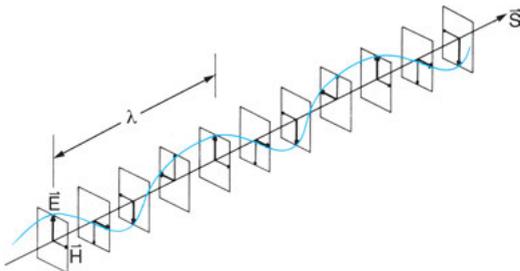
Hieraus folgt, dass zur eindeutigen Beschreibung der transversalen Welle die Schwingungsamplitude als Vektor geschrieben werden muss, worauf schon in Kap. 7.2.2 hingewiesen wurde:

$$\vec{A}_0 = A_0 \cdot \vec{e}. \quad (18-14)$$

Weist der Einheitsvektor  $\vec{e}$  z. B. in die  $y$ -Richtung des Koordinatensystems von Abb. 18.30a, so sagen wir: Die Welle ist in  $y$ -Richtung polarisiert. Die durch den Vektor  $\vec{e}$  und den Vektor der Ausbreitungsrichtung  $\vec{S}$  aufgespannte Ebene nennen wir die *Polarisationsebene*. Diese Bezeichnungen gelten ganz allgemein für transversale Wellen.

Die elektromagnetische Welle ist transversal bezüglich beider Feldgrößen  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ , die sich räumlich und zeitlich periodisch verändern. Beide Vektoren stehen also senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Unabhängig davon, wie die Polarisationsrichtung der Welle auch sein mag, ist der Winkel zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  stets  $90^\circ$  (Kap. 14.9.7).

Zur Angabe der Polarisation müssen wir nun festlegen, ob die Amplitude  $A_0$  der Gl. (18-14) die elektrische oder die magnetische Feldstärke sein soll. Aus historischen Gründen gibt man als Polarisationsrichtung oft die Richtung von  $\vec{H}_0$ , der Amplitude von  $\vec{H}$  an. Bisweilen wird auch die Richtung von  $\vec{E}_0$  als Polarisationsrichtung definiert. Um Unklarheiten zu vermeiden, empfiehlt es sich, zur Beschreibung einer Po-



**Abb. 18.31** Rechtszirkular polarisierte elektromagnetische Welle.  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  laufen mit konstantem Betrag auf einer Spirale um. Ein voller Umlauf entspricht einer Wellenlänge  $\lambda$ . Der Poynting-Vektor  $\vec{S}$  kennzeichnet die Ausbreitungsrichtung.

larisationsrichtung explizit anzugeben, ob es sich um die Richtung von  $\vec{E}_0$  oder  $\vec{H}_0$  handelt.

In Kap. 7.2 wurde auf die verschiedenen möglichen Polarisationszustände hingewiesen; sie gelten auch für Licht:

1. Enthält ein Lichtbündel viele Wellen mit unterschiedlichen Polarisationsrichtungen, so dass keine Richtung besonders ausgezeichnet ist, dann nennen wir es *unpolarisiertes* oder *natürliches Licht*.

2. Enthält das Wellenbündel hingegen zu einem Zeitpunkt  $t$  nur in einer Richtung  $\vec{e}$  polarisiertes Licht, und bleibt diese Polarisationsrichtung auch für beliebige andere Orte und Zeiten unverändert, so nennen wir dieses Licht *linear polarisiert* (Abb. 18.30).

3. Daneben gibt es Licht, das zu einem Zeitpunkt  $t$  in einer bestimmten Richtung polarisiert ist, diese Richtung sich aber mit der Zeit ändert. Beim *zirkular polarisierten* Licht laufen die Feldvektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  gleichmäßig in der Schwingungsebene um, wobei die Beträge der Feldstärken konstant bleiben.

Während jeder Periode der Welle erfolgt ein Umlauf um  $360^\circ$ , die Wellenlänge ist hier also nicht durch periodische Änderung des Betrags, sondern der Richtung der Feldvektoren bestimmt. Ist, in Ausbreitungsrichtung gesehen, der Umlaufsinn wie beim Zeiger einer Uhr, so nennen wir das Licht *rechts-zirkular polarisiert* (Abb. 18.31), bei umgekehrtem Umlaufsinn *links-zirkular polarisiert*.

Eine zirkular polarisierte Welle lässt sich durch Überlagerung von zwei linear polarisierten Wellen derselben Frequenz, Amplitude und Ausbreitungsrichtung erzeugen, die zueinander senkrecht polarisiert sind und zudem eine Phasendifferenz von  $\pi/2$  aufweisen. Umgekehrt erhält man linear polarisiertes Licht, wenn eine rechts-zirkulare Welle und eine links-zirkulare Welle mit der Phasendifferenz 0 überlagert werden.

4. Das *elliptisch polarisierte* Licht nimmt eine Zwischenstellung zwischen linear und zirkular polarisiertem Licht ein, weil hier

die Feldvektoren wie bei der zirkularen Welle rotieren, sich aber zugleich ihre Beträge ähnlich wie bei der linear polarisierten Welle periodisch ändern.

Die verschiedenen Typen von polarisiertem Licht können wir demnach folgendermaßen zusammenfassen:

Polarisation	Richtungen der Feldvektoren	Beträge der Feldvektoren
elliptisch polarisiertes Licht	ändern sich zeitlich periodisch (mit der Frequenz) bzw. räumlich periodisch (mit der Wellenlänge)	ändern sich zeitlich periodisch (mit der Frequenz) bzw. räumlich periodisch (mit der Wellenlänge)
linear polarisiertes Licht	zeitlich und räumlich unverändert	ändern sich zeitlich periodisch (mit der Frequenz) bzw. räumlich periodisch (mit der Wellenlänge)
zirkular polarisiertes Licht	ändern sich zeitlich periodisch (mit der Frequenz) bzw. räumlich periodisch (mit der Wellenlänge)	zeitlich und räumlich unverändert

man in den Strahlengang stellt und um seine Achse dreht (Abb. 18.32). Dabei zeigt sich, dass das Licht besonders gut hindurchgelassen wird (*Durchlassstellung*), wenn der Analysator ebenso ausgerichtet ist wie der Polarisator, der das polarisierte Licht erzeugt hat. In der dazu um 90° gedrehten Stellung (der *Sperrstellung*) wird dagegen kein Licht durchgelassen. (Zirkular oder elliptisch polarisier-

Unter Polarisation haben wir bisher vollständige Polarisation verstanden. Häufig enthält Licht aber sowohl Anteile polarisierten als auch natürlichen Lichtes; das Licht ist dann teilweise polarisiert. Den Anteil polarisierten Lichtes geben wir mit dem *Polarisationsgrad* an. Zum Beispiel ist er gleich 50%, wenn ebensoviel polarisiertes wie natürliches Licht in der Welle enthalten ist.

### 18.5.2 Erzeugung und Untersuchung von linear polarisiertem Licht

Linear polarisiertes Licht lässt sich aus natürlichem Licht durch *Polarisatoren* (*Polarisationsfilter*) herausfiltern. Sie lassen Licht einer bestimmten Polarisationsrichtung optimal hindurch, während sie für andere Polarisationsrichtungen als Sperre wirken. Zum Nachweis der Polarisation einer Lichtwelle dienen *Analysatoren*.

Bei linear polarisiertem Licht dient als Analysator ebenfalls ein Polarisationsfilter, das

tes Licht kann hingegen durch *keine* Stellung des Analysators völlig ausgelöscht werden.)

An einer Seilwelle kann man sich die Wirkung des Analysators veranschaulichen (Abb. 18.33): Auf dem Seil werde eine linear polarisierte Welle erzeugt. Als *Analysator* verwenden wir das Gitter eines Gartenzauns. Ist die Welle senkrecht polarisiert, passiert sie den Analysator, waagrecht polarisierte Wellen dagegen werden durch den Zaun abgefangen.

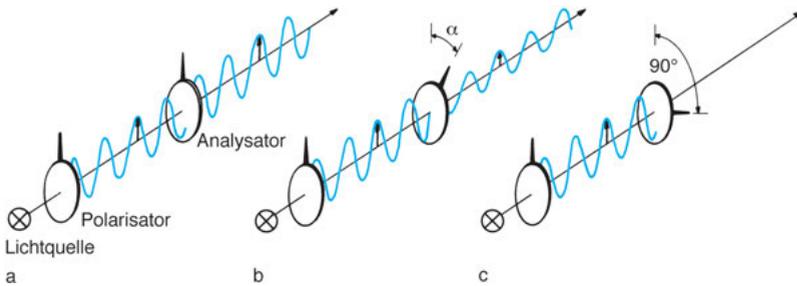
Wie sich die von der Kombination Polarisator/Analysator durchgelassene Intensität  $I_d$  mit dem Winkel  $\alpha$  zwischen Polarisator- und Analysatorstellung ändert, beschreibt

das *Gesetz von Malus*:

$$I_d = I_0 \cdot \cos^2(\alpha) \tag{18-15}$$

Dabei bedeutet  $I_0$  die bei Durchlassstellung ( $\alpha = 0$ ) durchgelassene Intensität.

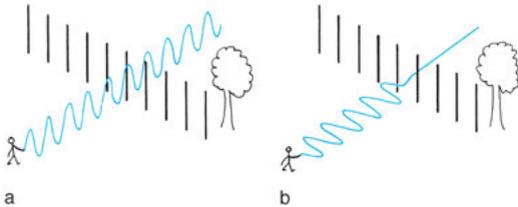
Abb. 18.34 zeigt, wie diese Beziehung zustande kommt. Von der Amplitude  $\vec{A}_0$  der linear polarisierten Welle hinter dem Polarisator wird nur die zur Durchlassrichtung des Analysators parallele Vektorkomponente  $A_{0//}$  durch den Analysator hindurchgelassen:  $\vec{A}_d = \vec{A}_{0//} = \vec{A}_0 \cdot \cos \alpha$ . Da die Intensität einer Welle proportional zum Quadrat der Amplitude ist (vgl. Kap. 7.2.7), folgt daraus sofort Gl. (18-15).



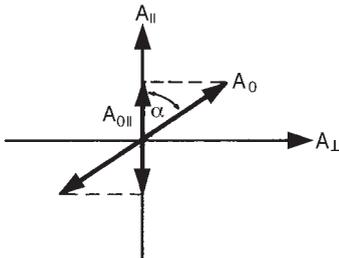
**Abb. 18.32** Nachweis des Polarisationszustandes von linear polarisiertem Licht. a) Polarisator und Analysator in Durchlassstellung (Winkel  $\alpha = 0$ ), b) in einer Zwischenstellung ( $\alpha \neq 0$ ), c) in Sperrstellung ( $\alpha = 90^\circ$ ).

Aus dem Gesetz von Malus ergibt sich die für die Praxis wichtige Möglichkeit, mit der Kombination Polarisator/Analysator Lichtintensitäten auf einfache Art und Weise kontinuierlich und anhand des Winkels  $\alpha$  messbar zu variieren, und zwar unabhängig von der Wellenlänge des Lichtes.

Polarisiertes Licht lässt sich auf mannigfache Weise erzeugen. Die für die technische Anwendung wichtigen Methoden sind die Polarisation durch Dichroismus und durch Doppelbrechung, sowie durch Reflexion und Streuung.



**Abb. 18.33** Gartenzaun als *Analysator* für linear polarisierte Seilwellen. a) Durchlassstellung, b) Sperrstellung.



**Abb. 18.34** Zur Herleitung des Gesetzes von Malus (Gl. 18-15). Die Lichtwelle breitet sich senkrecht zur Zeichenebene aus und habe die Amplitude  $A_0$ .

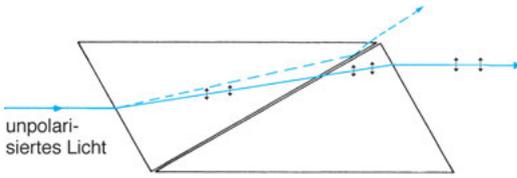
**Polarisation durch Dichroismus** Die einfachste Methode, aus natürlichem Licht linear polarisiertes Licht herauszufiltern, beruht auf dem Dichroismus (Kap. 18.3.4). Ein Beispiel für einen auf Dichroismus beruhenden Polarisator ist das *Polaroid-Filter*, bei dem kleine anisotrope Kristallnadeln parallel zueinander in eine Plastikfolie eingebettet sind. Fällt Licht auf eine solche Folie, so absorbieren diese Kristalle bei einer bestimmten Polarisationsrichtung  $\vec{e}_\perp$  im Sichtbaren, für die dazu senkrechte Polarisationsrichtung  $\vec{e}_\parallel$  dagegen ist der Absorptionsbereich ins Ultraviolette verschoben, und die Folie ist daher für sichtbares Licht dieser Polarisation  $\vec{e}_\parallel$  durchlässig (vgl. Abb. 18.24a).

**Polarisation durch Doppelbrechung** Mit Hilfe der Doppelbrechung (Kap. 18.3.4) lässt sich ebenfalls linear polarisiertes Licht aus natürlichem Licht herausfiltern. Allerdings ist diese Methode umständlicher als mit Hilfe des Dichroismus.

Ein Beispiel ist das *Nicol'sche Prisma* (kurz auch *Nicol* genannt (Abb. 18.35)), das aus zwei aufeinander gekitteten Kalkspatprismen besteht. Kalkspat ist doppelbrechend.

Der Kitt im Zwischenraum zwischen den beiden Prismen hat einen kleineren Brechungsindex als der Kalkspat. Ein Strahl natürlichen Lichtes wird beim Auftreffen auf das erste Prisma wegen der Doppelbrechung in zwei Teilbündel, den ordentlichen und den außerordentlichen Strahl, aufgespalten, von denen das eine Bündel in der Zeichenebene polarisiert ist, das andere senkrecht dazu (vgl. Abb. 18.25). Das letztere wird stärker gebrochen und trifft daher auf die verkitete Grenzfläche so flach auf, dass es dort totalreflektiert (Kap. 19.3.6) und aus dem Prisma nach oben herausgelenkt wird. Der parallel polarisierte Anteil hingegen fällt steiler auf die gekittete Grenzfläche und geht kaum geschwächt durch sie hindurch, da der Winkel der Totalreflexion nicht erreicht wird. So verlässt das *Nicol* in Strahlrichtung nur Licht *einer* Polarisation; das *Nicol* wirkt also als Polarisationsfilter. Heute gibt es viele Varianten dieses Prinzips mit anderen geometrischen Formen des Kristalls.

**Polarisation durch Reflexion an einem durchsichtigen Stoff** Ein Bündel natürlichen Lichts, das schräg auf



**Abb. 18.35** Nicol'sches Prisma aus zwei Kalkspatkristallen zur Erzeugung linear polarisierten Lichts.

eine Glasplatte trifft, ist nach der Reflexion teilweise polarisiert, und zwar steht der  $E$ -Vektor der bevorzugten Polarisationsrichtung senkrecht zur Einfallsebene. Es ist sogar vollständig polarisiert, wenn der Einfallswinkel gleich dem *Brewster'schen Winkel*  $\alpha_B$  ist, der durch die Bedingung

$$\tan \alpha_B = n \tag{18-16}$$

festgelegt ist. Für Glas ( $n \approx 1,5$ ) ist  $\alpha_B \approx 57^\circ$ , für Wasser ( $n = 1,33$ ) ergibt sich  $\alpha_B = 53^\circ$ .

Zur Deutung dieser Beobachtung können wir uns als Modell vorstellen, dass die Atome in der Oberfläche der reflektierenden Fläche wie kleine elektrische Dipol-Empfangsantennen wirken (Abb. 18.36a), die durch das elektrische Feld der einfallenden (also bereits gebrochenen) Welle zu Schwingungen angeregt werden und dadurch zugleich als Sender wirken und wieder Wellen abstrahlen. Durch Interferenz benachbarter Dipole entstehen sowohl der reflektierte als auch der durchgehende Strahl (Huygens'sches Prinzip, Kap. 7.7). Von Kap. 14.9.7 wissen wir, dass eine Dipol-Antenne keine Strahlung in Richtung ihrer Achse abstrahlen kann, und daher wird bei demjenigen Einfallswinkel  $\alpha_B$ , bei dem diese Achse gerade mit der aus dem Reflexionsgesetz (Kap. 7.8) folgenden Richtung des reflektierten Strahles zusammentrifft, keine Strahlung reflektiert.

Aus der Abb. 18.36 geht hervor, dass dies

1. nur bei Licht geschieht, dessen elektrischer Vektor  $\vec{E}$  in der Einfallsebene schwingt und
2. nur wenn reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander stehen.

Das Brechungsgesetz (Gln. 7-30, 18-6b) lässt sich für diesen Fall umschreiben in:

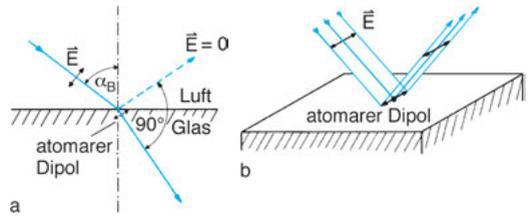
$$\sin \alpha_B / \sin \alpha_2 = \sin \alpha_B / \cos \alpha_B = \tan \alpha_B$$

und liefert damit die Bedingung für den Brewster-Winkel  $\alpha_B$ , Gl. (18-16).

Der Anteil der einfallenden Strahlung, dessen  $\vec{E}$ -Vektor senkrecht zur Einfallsebene schwingt, wird hingegen von den Dipolen zurückgestrahlt (Abb. 18.36b), und so findet man in dem reflektierten Licht nur diesen Polarisationszustand.

Bei der Reflexion an metallischen Stoffen sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter weil Metalle stark absorbieren. Hier bleibt das reflektierte Licht nicht linear, sondern ist im Allgemeinen elliptisch polarisiert.

**Polarisation durch Streuung** Wie in Kap. 18.4.2 beschrieben, wird an kolloidalen oder makromolekularen Suspensionen Licht gestreut. Verwenden wir natürliches

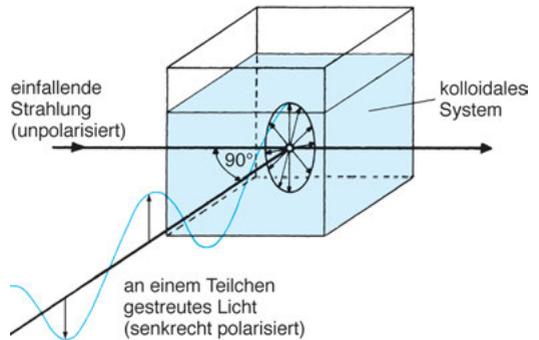


**Abb. 18.36** Modell zur Erklärung der Polarisation von Licht bei Reflexion an nicht absorbierenden Stoffen durch Anregung atomarer Dipole. a)  $\vec{E}$  in der Einfallsebene und  $\alpha = \alpha_B$ : es wird kein Licht reflektiert; b)  $\vec{E}$  senkrecht zur Einfallsebene: Licht wird reflektiert.

Licht, so sehen wir Streulicht in allen Richtungen (Tyndall-Streuung, Kap. 18.4.2). Dieses Streulicht erweist sich je nach Streurichtung als mehr oder weniger polarisiert. Bei sehr kleinen kolloidalen Teilchen beobachten wir, dass speziell senkrecht zur Ausbreitungsrichtung das Streulicht vollständig linear polarisiert ist und sein elektrischer Vektor  $\vec{E}$  senkrecht zur Ebene weist, die durch die Richtungen des einfallenden und des gestreuten Lichtes festgelegt ist (Abb. 18.29 und Abb. 18.37).

Zur Erklärung können wir wieder die Strahlungseigenschaften von Dipol-Antennen heranziehen. Fassen wir jetzt das ganze kolloidale Teilchen in der Abb. 18.37 als Dipol auf, so schwingt dieser Dipol nur senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des einfallenden Lichts, da dieses ja eine transversale Welle ist. Das Teilchen kann also auch nur entsprechend polarisiertes Licht als Streulicht aussenden.

In der atmosphärischen Luft sind stets kolloidale Teilchen sowie Inhomogenitäten wie Dichteschwankungen infolge der Wärmebewegung der Luftmoleküle, Staubteilchen oder Wassertropfen enthalten, die dazu führen, dass das Sonnenlicht gestreut wird (Kap. 18.4.2). Hier interessiert uns, dass auch dieses Streulicht (*Himmelsblau*) mehr oder weniger polarisiert ist. In Richtungen senkrecht zur Richtung der Sonnenstrah-



**Abb. 18.37** Polarisation durch Tyndall-Streuung an einem nicht absorbierenden kolloidalen System. Senkrecht zur Einfallsrichtung ist das Licht senkrecht linear polarisiert (s. auch Abb. 18.29).

len ist der Polarisationsgrad am größten. Es ist nachgewiesen, dass Bienen mit ihren Facettenaugen diese Polarisation des Himmelslichtes erkennen und zur Orientierung verwenden.

### 18.5.3 Optische Aktivität und Faraday-Effekt

Ein weiterer Polarisierungseffekt ist bei vielen organischen Substanzen in wässriger Lösung (Zucker, Stärke, Weinsäure, Serumalbumin) und auch in einigen Kristallen (Quarz) zu beobachten. Die Moleküle dieser Stoffe haben eine strukturelle Unsymmetrie, die z. B. beim Zucker durch ein *asymmetrisches C-Atom* entsteht, dessen 4 Valenzen mit verschiedenen Atomgruppen besetzt sind.

Wenn linear polarisiertes Licht durch solche Substanzen fällt, so wird die Polarisationsrichtung um die Strahlachse gedreht (*optische Aktivität*). Dabei kann die Drehung je nach Art des Stoffes sowohl im Uhrzeigersinn (Rechtsdrehung) als auch entgegen dem Uhrzeigersinn (Linksdrehung) erfolgen. Bisweilen treten Stoffe gleicher chemischer Konstitution sowohl in rechts- wie auch in linksdrehender Form auf (Quarz, Zucker); bei Mischung beider Formen in gleicher Konzentration wirkt der Stoff nichtdrehend (*razemisch*).

Bei Lösungen optisch aktiver Substanzen ist der Drehwinkel  $\alpha$  der Konzentration  $C$  proportional, und es gilt:

$$\alpha = \alpha_0 \cdot C \cdot d, \quad (18-17)$$

wobei  $d$  die Dicke der Küvette mit der Lösung ist, und  $\alpha_0$ , eine spezifische Stoffkonstante, die *spezifische Drehung* genannt wird.

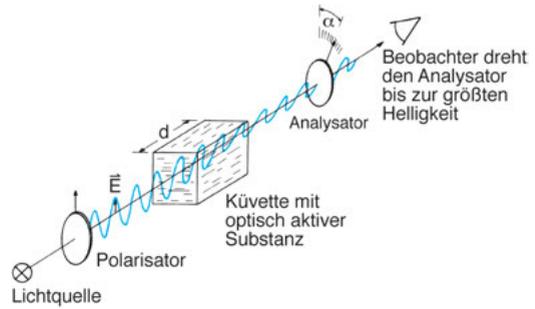


Abb. 18.38 Polarimeter zur Messung der optischen Aktivität einer Lösung.

Man braucht also nur die Lösung zwischen einen Polarisator und einen Analysator in Durchlass-Richtung zu stellen, den Analysator dann so lange zu drehen, bis wieder maximale Helligkeit des durchgelassenen Lichts erreicht ist, und den Drehwinkel  $\alpha$  zu messen, um die Konzentration  $C$  des gelösten Stoffes zu bestimmen. Apparate zur Konzentrationsbestimmung aus der optischen Aktivität werden *Polarimeter* genannt; in medizinischen Labors werden sie zum Beispiel zur Zuckerbestimmung im Harn eingesetzt (Abb. 18.38).

Bei Stoffen, die optisch inaktiv sind, wie z. B. Glas oder Schwefelkohlenstoff, kann man durch Anlegen eines statischen magnetischen Feldes künstlich eine Asymmetrie erzeugen und erreichen, dass die Polarisationsebene eines in Feldrichtung einfallenden, linear polarisierten Lichtbündels gedreht wird. Der Drehwinkel wächst dabei linear mit der Stärke des Magnetfeldes. Man nennt diese Erscheinung der durch ein Magnetfeld erzeugten optischen Aktivität den *Faraday-Effekt*.

## 18.6 Materiewellen

Einen wesentlichen Fortschritt der modernen Physik brachte die Erkenntnis, dass *bewegte* Materie Verhaltensweisen zeigt, die im Rahmen der klassischen Physik völlig unverständlich bleiben und nur zu

erklären sind, wenn man der bewegten Materie *Welleneigenschaften* zuschreibt. Freilich werden diese Eigenschaften erst deutlich, wenn man mit extrem kleinen Massen, d. h. im wesentlichen mit Elemen-

tarteilchen, experimentiert, und dies erklärt auch, weshalb sie im Alltag weitgehend unbekannt sind.

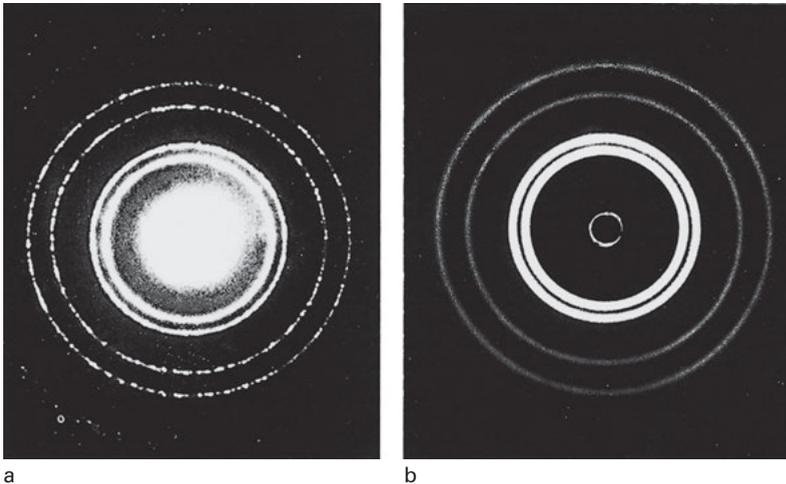
Eine typische Eigenschaft von Wellen ist, dass sie an Hindernissen gebeugt werden. Wir haben in Kap. 18.2 gesehen, dass Wellen durch einen Spalt oder ein Gitter so gebeugt werden, dass eine regelmäßige Beugungsfigur entsteht, vorausgesetzt, die Gitterkonstante ist, verglichen mit der Wellenlänge, nicht zu groß. Einem Strahl von Elektronen, die durch eine elektrische Spannung von einigen kV beschleunigt wurden, ist beispielsweise eine Wellenlänge zuzuordnen, die mit etwa  $10^{-2}$  nm weit unter der des Lichtes liegt. Also müssen wesentlich kleinere Hindernisse für Beugungsexperimente mit diesen *Materiewellen* benutzt werden als für optische Experimente. Wie im Fall der Röntgenstrahlen (Kap. 18.2.4) bietet sich dazu die regelmäßige atomare Struktur kristalliner Festkörper an (Abb. 5.7), die als räumliche Gitter aufgebaut sind. Und tatsächlich wurde beobachtet, dass die Materiewellen schneller Elektronen an Kristallgittern gebeugt werden (Abb. 18.39a), ganz entsprechend der Beugung elektromagnetischer Röntgenwellen gleicher Wellenlänge

(Abb. 18.39b). Heute ist die Bestimmung von Kristallstrukturen aus der Beugung von Elektronenstrahlen ebenso zur Routine-Methode geworden wie die analoge Untersuchung mit Röntgenstrahlen. Beugungs- und Interferenzeffekte hat man beispielsweise auch bei bewegten Neutronen und Protonen gefunden.

Mit Teilcheneigenschaften lassen sich die Beugungs- und Interferenzfiguren nicht deuten, sondern nur unter der Annahme, dass ein Strahl sich bewegender Teilchen Welleneigenschaften besitzt. Andererseits gibt es aber viele Experimente, die deutlich zeigen, dass Elektronen auch als Teilchen anzusehen sind.

Die merkwürdige Eigenschaft der Materie, bei einem Experiment Teilcheneigenschaften (z. B. den Impuls  $\vec{p} = m\vec{v}$ ) und bei einem anderen Experiment Welleneigenschaften (z. B. die Wellenlänge  $\lambda$ ) zu besitzen, bezeichnet man als *Welle-Teilchen-Dualismus* oder *-Dualität* (Kap. 17.1). Einen Zusammenhang zwischen beiden gegensätzlichen Bildern stellte *de Broglie* (Nobelpreis 1929) mit seinem Vorschlag her,  $\vec{p}$  und  $\lambda$  durch die Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (18-18)$$



**Abb. 18.39** Beugung von a) Elektronenstrahlen und b) Röntgenstrahlen am Kristallgitter von polykristallinem Aluminium; die Wellenlänge der verwendeten Strahlungen ist in beiden Fällen gleich (aus K. Atkins: Physik, de Gruyter).

zu verknüpfen, wobei  $\lambda$  heute als *de Broglie-Wellenlänge* der bewegten Teilchen in einem Teilchenstrahl bezeichnet wird.

Die Wellenlänge hängt also von Masse und Geschwindigkeit der Teilchen im Strahl ab, sie wird um so kürzer, je größer  $m$  und  $v$  sind.  $h$  ist das Planck'sche Wirkungsquantum (Kap. 3.3 und 17.5).

Welcher Art ist nun diese der Materie zuzuschreibende Welle? Zwar trägt das Elektron eine elektrische Ladung, ebenso wie das Proton, dennoch hat die Welle nichts mit elektromagnetischen Wellen zu tun. (Auch dem elektrisch neutralen Neutron ist eine de Broglie-Wellenlänge zuzuordnen.) Vielmehr besteht die physikalische Interpretation einer Materiewelle darin, dass deren Intensität an irgendeinem Ort (die, wie bei jeder Welle, dem Quadrat der Amplitude proportional ist (s. Kap. 7.2.7)) die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass sich ein Teilchen an diesem Ort aufhält. Wir sprechen daher – ungenau – auch von *Wahrscheinlichkeitswellen*; ungenau deshalb, weil erst das Quadrat der Wellenamplitude mit der Wahrscheinlichkeit verknüpft ist. Die Amplitude selbst hat keine physikalisch anschauliche Bedeutung, sie kann zudem nicht direkt beobachtet werden. Sie gehorcht jedoch dem mathematischen Formalismus für Wellen, den wir in Kap. 7 in seinen einfachsten Ansätzen kennengelernt haben. Eine Besonderheit ist, dass die Amplitude von Materiewellen keinen Vektor darstellt (wie z. B. bei elektromagnetischen Wellen), Materiewellen also nicht polarisierbar sind.

Für im Atom gebundene, bewegte Elektronen haben wir die Materiewelle bereits in Kap. 17.4 kennengelernt. Das Quadrat dieser Materiewelle ist ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons im Atom und wird durch *Elektronen-Orbitale* (Abb. 17.3) visualisiert. In diesem Kapitel wird nun der Begriff der Materiewelle auf freie, bewegte Teilchen erweitert.

Gl. (18-18) gilt ebenso für Elementarteilchen wie für makroskopische Körper, aber deren de Broglie-Wellenlänge ist wegen der

großen Masse so klein, dass Beugungserscheinungen jenseits jeder Beobachtbarkeit liegen. Einem 1 kg schweren Brocken, der mit  $v = 1$  m/s bewegt wird, wäre formal  $\lambda \approx 10^{-25}$  nm zuzuschreiben, d. h. der  $10^{-24}$ -te Teil eines Atomdurchmessers. Über derartige Größen zu diskutieren, erscheint wenig sinnvoll. Wir können daher bei makroskopischen Körpern getrost weiterhin mit der klassischen Mechanik arbeiten, die ausschließlich den Teilchencharakter der Materie berücksichtigt.

**Das Unbestimmtheitsprinzip** Eine harmonische Welle mit fester Wellenlänge  $\lambda$ , wie sie durch Gl. (7-7) beschrieben wird, ist räumlich nicht begrenzt. Ein *Wellenpaket* dagegen, dessen Ausdehnung begrenzt und dessen Ort lokalisierbar ist, entsteht nach dem Satz von Fourier (Kap. 6.5.2 und 7.4) erst durch Überlagerung von vielen harmonischen Wellen verschiedener Wellenlängen. (Beim Schall wäre das Analogon ein *Knall*.) Dies gilt auch für Materiewellen und führte zu einer Konsequenz, die für die Quantentheorie grundlegend ist: Nach Gl. (18-18) sind Teilchen mit konstantem, einheitlichem Impuls  $p$  an allen Orten des Raumes mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu finden, da ihre de-Broglie-Wellenlänge festgelegt und daher die Welle ausgedehnt ist. Solche bewegten Teilchen sind also nicht lokalisierbar, d. h. ihr Ort ist prinzipiell unbestimmt.

Umgekehrt können wir einem Wellenpaket, das auf enge Raumbereiche beschränkt ist und lokalisierbare bewegte Teilchen beschreibt, keine einzelne Wellenlänge  $\lambda$  und damit nach Gl. (18-18) keinen festen Impuls  $mv$  zuschreiben: Je kürzer das Wellenpaket ist, um so breiter ist nach dem Satz von Fourier der Spektralbereich der harmonischen Wellen, aus denen sich das Wellenpaket zusammensetzt, und auch das Intervall möglicher beitragender Impulse. Je genauer wir also den Ort eines durch ein Wellenpaket beschriebenen Teilchens kennen, um so unbestimmter wird der Teilchenimpuls, d. h. der Bewegungszustand. Diese prinzipielle Grenze für die gleichzeitige experimentelle Bestimmung von Impuls und Ort eines Teilchens ist quantitativ in der *Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation (Unschärferelation)* zusammengefasst:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h, \quad (18-19a)$$

wobei  $\Delta x$  und  $\Delta p$  die Genauigkeitsintervalle sind, innerhalb derer der Ort  $x$  und der Impuls  $p$  von Teilchen in einem Experiment gemeinsam bestenfalls bestimmbar sind. Auch hier erscheint wieder das Planck'sche Wirkungsquantum  $h$ . Ein Beispiel: In einem Elektronenmikroskop (Kap. 20.4) haben die Elektronen eine de Broglie-Wellenlänge von etwa 0,005 nm. Wollen wir die Wellenlänge, d. h. nach Gl. (18-18) den Impuls auf 1% genau bestimmen, so ist die Ortsunschärfe der einzelnen Elektronen  $\Delta x$  etwa 1 nm (das sind etwa 5 Atomdurchmesser). Dadurch wird die Messgenauigkeit des Elektronenmikroskops erheblich eingeschränkt.

Das Unbestimmtheitsprinzip ist von Bedeutung nur bei Teilchen mit extrem kleinen Massen, wie Elektronen, Neutronen, Protonen usw. Wollen wir Ort und Impuls eines makroskopischen Körpers messen, so liefert die Unschärferelation keine praktische Einschränkung der Messbarkeit.

Eine Unschärferelation gilt nicht nur für die Größen Ort und Impuls, sondern auch für das Variablenpaar Energie und Zeit ( $E$  und  $t$ ). Analog zu Gl. (18-19a) ergibt sich:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h, \quad (18-19b)$$

wobei  $\Delta E$  und  $\Delta t$  die Genauigkeitsintervalle sind, innerhalb derer die Energie  $E$  von Teilchen und die Zeit  $t$  des Experiments zugleich experimentell bestimmbar sind.

Ein Beispiel: Gibt  $\Delta t$  die mittlere Lebensdauer eines angeregten Elektronenzustandes  $E_i$  in einem Atom an, so beschreibt die aus Gl. (18-19b) folgende Relation  $\Delta E \sim h/\Delta t$  die Energieunschärfe des elektro-

nischen Übergangs zwischen  $E_i$  und dem Grundzustand, d. h. auch die minimale Breite der zugehörigen Spektrallinie. Die Emissionsspektren von Gasen unter hohem Druck (wie im Innern der Sonne) sind gegenüber den Emissionslinien isolierter Gasatome energieverbreitert (breite Frequenzintervalle (Kap. 17.7)), da wegen der häufigen Stöße zwischen den Atomen im hochkomprimierten Gas die elektronischen Übergänge schneller, d. h. innerhalb eines kleineren  $\Delta t$ , erfolgen als bei der Emission von Atomen unter Normaldruck. Die *Stoßverbreiterung* von Spektrallinien ist also eine direkte Folge der Unschärferelation zwischen Lebensdauer  $\Delta t$  und Energieunschärfe  $\Delta E$ . (Im Gas der Sonne ist die Stoßverbreiterung sogar so groß, dass man nicht – wie üblicherweise bei Gasen – ein Linien-Emissionsspektrum findet, sondern ein kontinuierliches Spektrum, das man sonst nur bei Flüssigkeiten oder festen Körpern beobachtet.)

## 19. Geometrische Optik

Optik dient, etwas vereinfachend gesagt, zwei Zwecken: Einerseits der Kenntnis und Vorhersage der Ausbreitung der Wellen zur Erzeugung von Bildern mittels optischer Instrumente (*Abbildende Optik*) sowie andererseits zum Verständnis der vielseitigen Wechselwirkungen von Licht mit Materie, wie Emission, Absorption usw. (*Intensitätsoptik*). Wir können auch sagen: Einerseits steht die Richtung, andererseits der Betrag des Ausbreitungsvektors (Poynting-Vektors) des Lichtes im Vordergrund.

Die Entwicklung der *Quantentheorie* hat die Intensitätsoptik zu hoher Blüte gebracht. Auch die Abbildende Optik verfügt mit den *Maxwell'schen Feldgleichungen* zur Beschreibung der Ausbreitung der Wellen im leeren oder mit Materie gefüllten Raum über eine sehr leistungsfähige Theorie. Dies gilt im Prinzip, in der Praxis aber ist die Berechnung der Felder zumeist so kompliziert, dass man sie auch mit Hochleistungscomputern nur in einfachen Fällen durchführen kann.

Als eine stark vereinfachende alternative Beschreibungsmethode für die Abbildende Optik hat sich die *Geometrische Optik* seit über 2000 Jahren entwickelt, die anstelle der Feldgrößen auf dem Modell des *Lichtstrahls* beruht.

Im Wesentlichen sind es drei Grundgesetze, die die Geometrische Optik bestimmen:

1. das Gesetz der geradlinigen Ausbreitung
2. das Brechungsgesetz
3. das Reflexionsgesetz.

Eine Eigenart der Geometrischen Optik ist die Bevorzugung von *grafischen* Methoden zur Konstruktion von *Strahlengängen*. Daneben weist aber die Geometrische Optik auch ein höchst anspruchsvolles mathematisches Fundament auf. Zur Entwicklung von Linsensystemen beispielsweise stehen heute komplizierte Computer-Programme (sog. *Strahlverfolgungs-Programme*, *ray-tracing-Programme*) zur Verfügung. Wir werden uns in diesem Buch auf die Darstellung der einfachen Grundlagen der Geometrischen Optik beschränken.

Das Unbestimmtheitsprinzip ist von Bedeutung nur bei Teilchen mit extrem kleinen Massen, wie Elektronen, Neutronen, Protonen usw. Wollen wir Ort und Impuls eines makroskopischen Körpers messen, so liefert die Unschärferelation keine praktische Einschränkung der Messbarkeit.

Eine Unschärferelation gilt nicht nur für die Größen Ort und Impuls, sondern auch für das Variablenpaar Energie und Zeit ( $E$  und  $t$ ). Analog zu Gl. (18-19a) ergibt sich:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq h, \quad (18-19b)$$

wobei  $\Delta E$  und  $\Delta t$  die Genauigkeitsintervalle sind, innerhalb derer die Energie  $E$  von Teilchen und die Zeit  $t$  des Experiments zugleich experimentell bestimmbar sind.

Ein Beispiel: Gibt  $\Delta t$  die mittlere Lebensdauer eines angeregten Elektronenzustandes  $E_i$  in einem Atom an, so beschreibt die aus Gl. (18-19b) folgende Relation  $\Delta E \sim h/\Delta t$  die Energieunschärfe des elektro-

nischen Übergangs zwischen  $E_i$  und dem Grundzustand, d. h. auch die minimale Breite der zugehörigen Spektrallinie. Die Emissionsspektren von Gasen unter hohem Druck (wie im Innern der Sonne) sind gegenüber den Emissionslinien isolierter Gasatome energieverbreitert (breite Frequenzintervalle (Kap. 17.7)), da wegen der häufigen Stöße zwischen den Atomen im hochkomprimierten Gas die elektronischen Übergänge schneller, d. h. innerhalb eines kleineren  $\Delta t$ , erfolgen als bei der Emission von Atomen unter Normaldruck. Die *Stoßverbreiterung* von Spektrallinien ist also eine direkte Folge der Unschärferelation zwischen Lebensdauer  $\Delta t$  und Energieunschärfe  $\Delta E$ . (Im Gas der Sonne ist die Stoßverbreiterung sogar so groß, dass man nicht – wie üblicherweise bei Gasen – ein Linien-Emissionsspektrum findet, sondern ein kontinuierliches Spektrum, das man sonst nur bei Flüssigkeiten oder festen Körpern beobachtet.)

## 19. Geometrische Optik

Optik dient, etwas vereinfachend gesagt, zwei Zwecken: Einerseits der Kenntnis und Vorhersage der Ausbreitung der Wellen zur Erzeugung von Bildern mittels optischer Instrumente (*Abbildende Optik*) sowie andererseits zum Verständnis der vielseitigen Wechselwirkungen von Licht mit Materie, wie Emission, Absorption usw. (*Intensitätsoptik*). Wir können auch sagen: Einerseits steht die Richtung, andererseits der Betrag des Ausbreitungsvektors (Poynting-Vektors) des Lichtes im Vordergrund.

Die Entwicklung der *Quantentheorie* hat die Intensitätsoptik zu hoher Blüte gebracht. Auch die Abbildende Optik verfügt mit den *Maxwell'schen Feldgleichungen* zur Beschreibung der Ausbreitung der Wellen im leeren oder mit Materie gefüllten Raum über eine sehr leistungsfähige Theorie. Dies gilt im Prinzip, in der Praxis aber ist die Berechnung der Felder zumeist so kompliziert, dass man sie auch mit Hochleistungscomputern nur in einfachen Fällen durchführen kann.

Als eine stark vereinfachende alternative Beschreibungsmethode für die Abbildende Optik hat sich die *Geometrische Optik* seit über 2000 Jahren entwickelt, die anstelle der Feldgrößen auf dem Modell des *Lichtstrahls* beruht.

Im Wesentlichen sind es drei Grundgesetze, die die Geometrische Optik bestimmen:

1. das Gesetz der geradlinigen Ausbreitung
2. das Brechungsgesetz
3. das Reflexionsgesetz.

Eine Eigenart der Geometrischen Optik ist die Bevorzugung von *grafischen* Methoden zur Konstruktion von *Strahlengängen*. Daneben weist aber die Geometrische Optik auch ein höchst anspruchsvolles mathematisches Fundament auf. Zur Entwicklung von Linsensystemen beispielsweise stehen heute komplizierte Computer-Programme (sog. *Strahlverfolgungs-Programme*, *ray-tracing-Programme*) zur Verfügung. Wir werden uns in diesem Buch auf die Darstellung der einfachen Grundlagen der Geometrischen Optik beschränken.

## 19.1 Lichtausbreitung

Der Weg von Laserlicht oder Sonnenlicht, erkennbar durch das von Staub- oder Rauchpartikeln verursachte Streulicht, erweist sich unserem Auge oder auch verlässlicheren optischen Instrumenten als völlig geradlinig. Auch aus der Tatsache, dass Gegenstände scharf begrenzte Schatten werfen, können wir auf die geradlinige Ausbreitung von Licht schließen (Abb. 19.1a, b).

Man kann deshalb den *Lichtweg* zur geodätischen Landvermessung mit dem Theodoliten oder in der Astronomie zur Angabe von Entfernungen (Einheit: *Lichtjahr*, 1 Lichtjahr ist die Entfernung, die ein Lichtsignal im Vakuum innerhalb eines Jahres zurücklegt:  $1 \text{ L} \approx 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}$ ) verwenden. Geringe Abweichungen von der geraden Bahn, durch die *Relativitätstheorie* für Lichtwege in der Nähe großer astronomischer Massen postuliert (und experimentell auch bestätigt), sind ohne praktische Bedeutung.

Das erste Grundgesetz der Geometrischen Optik ist das *Gesetz der geradlinigen Lichtausbreitung*: Licht breitet sich in homogenen Stoffen geradlinig aus. Die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle ist vereinfacht dadurch zu beschreiben, dass man das Modell des *Lichtstrahls* einführt, der die Ausbreitungsrichtung angibt.

Geradlinig verläuft ein Lichtstrahl im Vakuum und in optisch homogenen Stoffen; an der Grenzfläche zwischen zwei Stoffen dagegen kann sich die Ausbreitungsrichtung durch *Brechung* und *Reflexion* ändern, und der

Lichtstrahl „knickt“ dort ab. Nicht geradlinig breitet sich Licht auch in inhomogenen Stoffen wie beispielsweise der Augenlinse aus.

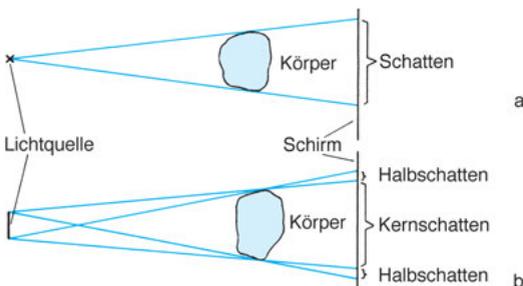
Der Lichtstrahl kennzeichnet die Richtung, in die sich die Strahlungsenergie des Lichts ausbreitet; sie wird durch die Richtung des *Ausbreitungsvektors* (*Poynting-Vektors*)  $\vec{S}$  gegeben (Kap. 14.9.7.2 und 17.2.1):

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \tag{19-1}$$

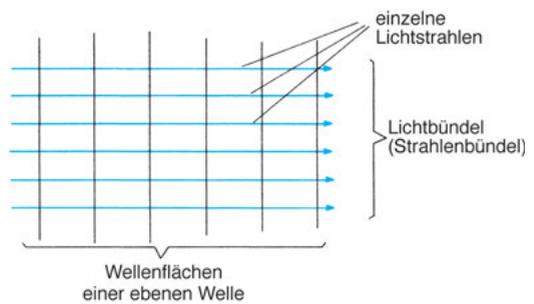
Durch die Beziehung (19-1) wird die Wellenoptik mit der Geometrischen Optik verknüpft, denn aus Gl. (19-1) folgt, dass der Lichtstrahl sowohl auf dem Vektor der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  als auch auf dem der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  senkrecht steht. Das Modell des Lichtstrahls gibt jedoch keine Auskunft über die Intensität des Lichts, d. h. über den Betrag von  $\vec{S}$ .

Ein *Lichtbündel* kann durch den Strahl längs seiner Achse oder auch durch die das Bündel begrenzenden Strahlen gezeichnet werden. Lichtstrahlen sind *umkehrbar*, d. h., wenn man z. B. Lichtquelle und Bild vertauscht, verlaufen die Lichtstrahlen genau in umgekehrter Richtung.

Ein Spezialfall elektromagnetischer Wellen sind die in Kap. 7.1, 7.7 behandelten *Ebenen Wellen* (Abb. 19.2). Da Lichtstrahlen stets senkrecht auf der durch die



**Abb. 19.1** Schattenwurf: a) punktförmige, b) ausgedehnte Lichtquelle.



**Abb. 19.2** Parallel-Lichtbündel (Ebene Wellen) mit Wellenflächen und Wellennormalen (Lichtstrahlen).

Vektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  aufgespannten *Wellenflächen* (den Flächen, auf denen die Phasen, d. h. die Argumente der sinus- oder cosinus-Funktionen, gleich sind, s. Kap. 7.1) stehen, sind sie in diesem Fall parallel zueinander; man spricht dann von einem *Parallel-Lichtbündel*. (Nahezu paralleles Licht erhält man z. B. von sehr weit entfernten, im Vergleich zum Abstand kleinen Lichtquellen, beispielsweise von der Sonne.) Eine auslaufende Kugelwelle (Abb. 7.11) wird hingegen durch divergierendes Lichtstrahl-Bündel dargestellt.

Im Laufe der Zeit hat sich zur praktischen Berechnung optischer Geräte eine komplizierte und auch mathematisch anspruchsvolle Theorie der Geometrischen Optik entwickelt, die wir hier allerdings nur in ihren elementaren Grundlagen streifen werden. In der Praxis ist die Trennung der beiden Darstellungsformen (elektromagnetische Welle oder Lichtstrahl) nicht scharf; so haben wir beispielsweise bei den Abbildungen des *Kap. 18, Wellenoptik*, vielfach Licht durch Strahlen charakterisiert.

Gültigkeitsbedingung für die Geometrische Optik ist, dass Wellenphänomene wie z. B. Beugungserscheinungen gering sind, und nach Kap. 18.2.3 heißt dies, dass der Durchmesser  $d$  eines Bündels von Lichtstrahlen überall groß gegen die Wellenlänge des Lichtes  $\lambda$  sein muss ( $d \gg \lambda$ ).

Wichtig sind Strahlengänge zur Veranschaulichung optischer Abbildungen (Kap. 19.3.2; 19.4).

Das Modell des Lichtstrahls ist auch zum Verständnis der Interferenz unzureichend, denn von den Lichtstrahlen der Geometrischen Optik wird angenommen, dass sie unabhängig voneinander sind, sich also überlagern, *ohne* sich gegenseitig zu beeinflussen (*inkohärente, lineare Überlagerung*). Das Zustandekommen und die Eigenschaften polarisierten Lichts werden von der Geometrischen Optik ebenfalls nicht erfasst.

## 19.2 Optische Symbole, Strahlengänge und Bilder

Ein Vorteil der Geometrischen Optik ist, dass man sehr einfach *grafische* Darstellungen von Lichtbündeln in optischen Instrumenten, die *Optischen Strahlengänge*, anfertigen kann. Sie stellen zweidimensionale Prinzip-Skizzen dar und müssen nicht die wirkliche geometrische Anordnung der Bauteile im Instrument wiedergeben.

Um solche Strahlengänge übersichtlich gestalten zu können, verwendet man – ähnlich den Schaltkreisen in der Elektrizitätslehre – spezielle Symbole:

1. Optische Achse: ———
2. Lichtstrahl reell:  $\longrightarrow$  virtuell:  $\dashrightarrow$
3. Sammellinse:  $\bigcirc$  oder  $\updownarrow$   
Zerstreuungslinse:  $\bowtie$  oder  $\nabla$
4. Prisma:  $\triangle$
5. Gitter:  $\vdots$
6. Lichtquelle:  $\otimes$
7. Gegenstand:  $\uparrow$

8. Blende:  $\mid$
9. Polarisator:  $\square$  oder  $\mid$  <sup>P</sup>
10. Beobachtung mit dem Auge:  $\triangleright$  oder  $\bigcirc$

Zur *Konstruktion* des Strahlenganges für *Abbildungen* mit den Gesetzen der Geometrischen Optik (Kap. 19.3) wählt man aus dem abzubildenden Gegenstand *stellvertretend* einen einzelnen *Gegenstandspunkt* aus und konstruiert den zugehörigen *Bildpunkt*. Man setzt nun voraus, dass sich für benachbarte Gegenstandspunkte entsprechend benachbarte Bildpunkte ergeben, und kann so darauf verzichten, das Bild des gesamten ausgedehnten Gegenstandes zu konstruieren. Diese Annahme vereinfacht die Methoden der Geometrischen Optik erheblich, und wir werden im folgenden so vorgehen. Es sei aber bemerkt, dass für die technisch präzise Konstruktion von Abbildungsoptiken wegen möglicher *Abbildungsfehler* dieses Verfahren nicht ausreicht.

Ein Bild eines Gegenstandes entsteht (Abb. 19.16), wenn die durch Eigenleuchten oder Streureflexion vom *Gegenstandspunkt G* in unterschiedliche Richtungen ausgehenden Lichtstrahlen so in ihrer Richtung abgelenkt werden, dass sie in einem *Bildpunkt B* wieder zusammentreffen. Dazu verwendet man üblicherweise Linsen und Spiegel, d. h. optische Bauelemente, die auf Brechung und/oder Reflexion beruhen. Diese Art eines Bildes heißt *reelles Bild*. Ein Beispiel ist das Bild, das bei der Projektion eines Dias auf einem Schirm aufgefangen wird und dort nachgezeichnet oder auf einer fotografischen Schicht festgehalten werden kann. Ein andersartiges Bild, das *virtuelle Bild* entsteht, wenn nicht die Lichtstrahlen sich in ihrer Ausbreitungsrichtung schneiden sondern ihre *rückwärtigen* Verlängerungen über *G* hinaus. Zu dieser zweiten Art von Bildern gehört das Bild im Planspiegel (Abb. 19.3); aber auch mit Hohlspiegeln (Abb. 19.5) und Linsen (Abb. 19.25, 20.1) kann man sie erzeugen. Wir nennen diese Bilder virtuell (scheinbar), da sie nicht

direkt auf einem Schirm oder auf einem Film aufzufangen, sondern nur mit dem Auge oder einem anderen geeigneten optischen Instrument, z. B. einem Kameraobjektiv, zu beobachten sind, wobei erst durch diese zusätzliche Abbildung ein reelles Bild (z. B. auf der Netzhaut oder dem fotografischen Film) entsteht.

#### Zusammenfassung:

*Reelle Bilder* entstehen, wenn sich die Lichtstrahlen, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen, in einem Punkt, dem zugehörigen Bildpunkt, schneiden; sie können zum Beispiel direkt auf einem Film aufgenommen werden. *Virtuelle Bilder* kommen nicht am Schnittpunkt der wirklichen Strahlen zustande, sondern am Schnittpunkt der durch geradlinige rückwärtige Verlängerung entstehenden virtuellen Strahlen. Sie sind nur wahrnehmbar mittels einer weiteren Abbildung (z. B. im Auge).

## 19.3 Reflexion und Brechung in der Geometrischen Optik

Zusammen mit dem Gesetz der geradlinigen Ausbreitung und dem Gesetz der inkohärenten Überlagerung von Lichtstrahlen (Kap. 19.1) sind Brechungsgesetz und Reflexionsgesetz die grundlegenden Gesetze im Rahmen der Geometrischen Optik.

Beide Gesetze wurden bereits in Kap. 7 und Kap. 18 eingeführt, so dass sie hier nur soweit nochmals behandelt werden, wie dies für das Folgende erforderlich ist.

### 19.3.1 Reflexion

Wenn wir uns im Spiegel betrachten, machen wir dabei Gebrauch vom *Reflexionsgesetz* (Kap. 7.8). Fällt Licht auf die Grenzfläche zwischen zwei Stoffen (z. B. Luft-Glas, Glas-

Metall oder Vakuum-Metall), so wird dort ein Teil des Lichts reflektiert. Der nicht reflektierte Anteil tritt in den zweiten Stoff ein, wobei er i. A. in einer anderen Richtung verläuft als der einfallende und der reflektierte Strahl; er wird gebrochen.

Die Aufteilung des einfallenden Lichts in reflektiertes und gebrochenes Licht erfolgt wie für mechanische oder akustische Wellen, wie schon in Kap. 7.8 gezeigt wurde. Die Aufteilung ändert sich mit dem Einfallswinkel  $\alpha_1$  (Abb. 7.17) und wird bestimmt durch die optischen Materialkonstanten beider Stoffe, d. h. den Brechungsindex und die Absorptionskonstante.

An einer glatten und ebenen Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Stoffen ist die Richtung des reflektierten Strahls

festgelegt durch das *Reflexionsgesetz* Gl. (7-31):

$$\alpha_1 = \alpha'_1,$$

wobei einfallender und reflektierter Strahl mit der Flächennormalen, dem Lot, in einer Ebene, der *Einfallebene*, liegen.

Die Grenzfläche zwischen Glas und Luft reflektiert z. B. bei senkrechtem Einfall des Lichtes etwa 4%, ein Metallspiegel dagegen bis zu 99%. Daher sind übliche Spiegel mit Metall (meist mit Aluminium) hinterlegte Glasplatten, wobei das Glas als Träger der spiegelnden Metallschicht dient.

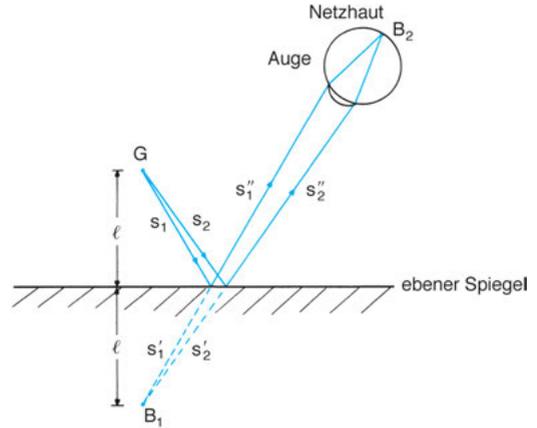
An *rauen* Oberflächen wird das aus einer Richtung einfallende Licht mit verschiedener Intensität in unterschiedliche Raumrichtungen reflektiert, es wird *streureflektiert* oder *gestreut*.

Eine Mattscheibe aus rauem Glas erscheint daher milchig und undurchsichtig, obgleich das Glasmaterial selbst durchsichtig ist. In Wirklichkeit ist jede Oberfläche zumindest in atomaren Dimensionen uneben. Als *optisch glatt* bezeichnet man Flächen, deren Oberflächenrauigkeit sehr klein, gemessen an der mittleren Wellenlänge des Lichtes ( $\lambda \approx 550 \text{ nm}$ ) ist. Daneben kann die Oberfläche auch großflächig (z. B. durch Welligkeit infolge des Herstellungsprozesses) von der ideal ebenen Fläche abweichen. Die obere Grenze dieser Abweichungen wird durch die *Planität* angegeben und in Bruchteilen oder Vielfachen von  $\lambda$  gemessen. So kann ein hochwertiger optischer Planspiegel z. B. auf  $\lambda/10$  plan sein. Für Mikroskop-Deckgläser ist gute Planität wichtig.

### 19.3.2 Abbildung durch Spiegel

**Planspiegel** Betrachten wir eine Buchseite über einen ebenen Spiegel (*Planspiegel*), so können wir das Schriftbild aufrecht aber seitenverkehrt sehen. Wir sehen dabei das Spiegelbild des Buches ebenso weit hinter dem Spiegel, wie das Buch vom Spiegel entfernt ist. Dies ist ein einfaches Beispiel für eine *optische Abbildung*, bei der ein virtuelles Bild entsteht.

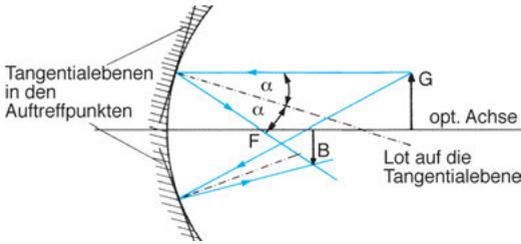
Der Strahlengang der Abb. 19.3 macht deutlich, wie ein virtuelles Bild am Planspiegel entsteht: Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich als abzubildender Gegenstand  $G$  im Abstand  $l$  vor dem Spiegel. Wir



**Abb. 19.3** Virtuelles Bild  $B_1$  des Gegenstandspunktes  $G$  bei Reflexion am Planspiegel. Hornhaut und Augenlinse erzeugen davon ein reelles Bild  $B_2$  auf der Netzhaut.

greifen zwei Lichtstrahlen  $s_1$  und  $s_2$  heraus. Ohne Spiegel würden sie sich ungehindert geradlinig ausbreiten. Durch den Spiegel werden die Strahlen jedoch nach dem Reflexionsgesetz in die durch  $s_1'$  und  $s_2'$  angegebenen Richtungen umgelenkt und fallen bei Betrachtung mit dem Auge auf die Netzhaut. Dort erzeugen sie ein reelles Bild  $B_2$ , das vom Gehirn als Bildeindruck des virtuellen Bildes  $B_1$  registriert wird.  $B_1$  konstruieren wir dadurch, dass wir die reellen (wirklichen) Strahlen  $s_1''$  und  $s_2''$  geradlinig rückwärts verlängern, wobei wir die gestrichelten virtuellen (scheinbaren) Strahlen  $s_1'$  und  $s_2'$  erhalten, die sich in  $B_1$  schneiden. Das virtuelle Bild  $B_1$  liegt im Abstand  $l$  hinter dem Spiegel. Läge dort der Gegenstand  $G$  selbst (allerdings seitenverkehrt), und wäre der Spiegel nicht vorhanden, so würden wir auf der Netzhaut des Auges dasselbe Bild  $B_2$  wahrnehmen. Wir haben in beiden Fällen denselben Bildeindruck, weil unser Gesichtssinn nicht zu unterscheiden vermag, ob die Lichtstrahlen zuvor durch Reflexion oder Brechung in ihrer Richtung geändert wurden oder nicht. Das virtuelle Bild sehen wir deshalb, weil die Bildverarbeitung im Gehirn stets unter der Annahme erfolgt, Lichtwege seien geradlinig.

**Hohlspiegel** Ersetzen wir den Planspiegel durch einen Spiegel, der die Form einer Kugelfläche, eines Ellipsoids oder eines Paraboloids hat, so können wir mit ihm sowohl virtuelle Bilder als auch reelle Bilder erzeugen. An jedem Auftreffpunkt eines Lichtstrahls auf dem Spiegel gilt wieder das Reflexionsgesetz, wobei wir zur Konstruktion eines reflektierten Strahls (Abb. 19.4) die spiegelnde Fläche um diesen Auftreffpunkt herum durch ihre (ebene) Tangentialfläche ersetzen. Abb. 19.4 zeigt am Beispiel zweier willkürlich herausgegriffener Strahlen am spärischen Spiegel, dass die vom Gegenstand  $G$  ausgehenden Lichtstrahlen im Bild  $B$  vereinigt werden. Wir erhalten somit ein reelles



**Abb. 19.4** Abbildung am konkaven Hohlspiegel: Reelles, verkleinertes, umgekehrtes Bild ( $G$ : Gegenstandspunkt,  $B$ : Bildpunkt,  $F$ : Brennpunkt) des sphärischen Hohlspiegels.

Bild, das umgekehrt ist, d. h. auf dem Kopf steht. Solche reellen Bilder entstehen z. B. bei astronomischen Spiegelteleskopen (Abb. 19.6).

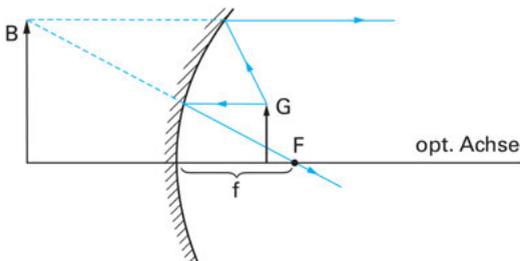
Nähern wir den Gegenstand  $G$  dem Spiegel genügend, so können wir auch virtuelle Bilder  $B$  erzeugen (Abb. 19.5). Ein solches ist aufrecht und vergrößert, d. h., das Bild ist größer als der Gegenstand. Man braucht nur einen Blick in einen Kosmetikspiegel zu werfen, um ein virtuelles, vergrößertes, aufrechtes Bild zu sehen.

Liegt der Gegenstand sehr weit entfernt, treffen also die Strahlen (näherungsweise) parallel auf den Hohlspiegel (z. B. Licht von der Sonne), so werden sie in einem Punkt  $F$ , dem *Brennpunkt* gesammelt. Der Abstand des Brennpunktes vom Spiegelscheitel, die *Brennweite*  $f$ , charakterisiert die Abbildungseigenschaften des Hohlspiegels. Aus der Bildkonstruktion mittels des Reflexionsgesetzes ergibt sich für diesen Abstand:

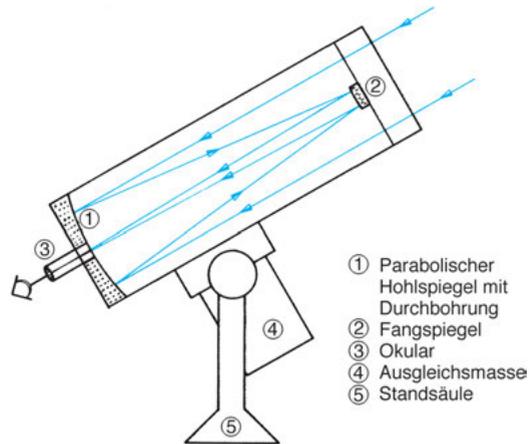
$$f = r/2, \tag{19-2}$$

wobei  $r$  der Krümmungsradius des Hohlspiegels ist. Der Brennpunkt liegt also halb so weit vom Spiegelscheitel entfernt wie der Krümmungsmittelpunkt.

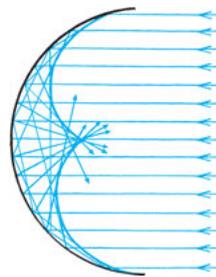
Freilich gilt die einfache Konstruktion der Abb. 19.4 und 19.5 nur für Strahlen nahe der Symmetrieachse des Spiegels, deren Einfallswinkel zudem klein sind. (In der Abbildung sind diese Bedingungen der Deutlichkeit halber nicht eingehalten.) Leuchtet man größere Bereiche des Hohlspiegels aus, so entsteht anstelle



**Abb. 19.5** Abbildung am konkaven Hohlspiegel: Virtuelles, vergrößertes, aufrechtes Bild ( $G$ : Gegenstandspunkt,  $B$ : Bildpunkt,  $F$ : Brennpunkt des sphärischen Hohlspiegels,  $f$ : Brennweite).



**Abb. 19.6** Astronomisches Spiegelteleskop.



**Abb. 19.7** Durch Sonnenstrahlen (breites Parallelstrahlenbündel) am Hohlspiegel mit großer Öffnung erzeugte Brennfläche (*Kautistik-Figur*).

des Bildpunktes  $B$  ein merkwürdiges Gebilde, die sogenannte *Kautistik-Figur* (Abb. 19.7); der Grund hierfür ist, dass bei großen Einfallswinkeln und großen Abständen von der optischen Achse *Abbildungsfehler* (*Öffnungsfehler* des Hohlspiegels) auftreten (Kap. 19.4.11).

### 19.3.3 Brechung

Brechung wurde für Wellen allgemein in Kap. 7.8 und für elektromagnetische Wellen speziell in Kap. 18.3 behandelt. Das Brechungsgesetz gehört auch zu den Grundgesetzen der Geometrischen Optik, und mit dem Modell des Lichtstrahls lässt es sich übersichtlich darstellen.

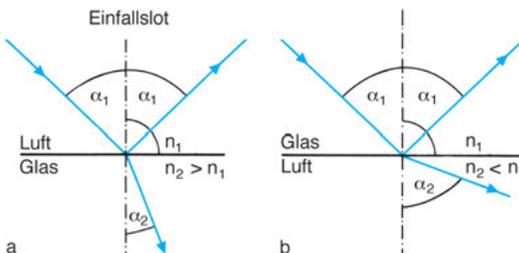
In Kap. 18.3.1 wurde gezeigt, dass die Lichtgeschwindigkeit in einem durchsichtigen Medium,  $c_m$ , kleiner ist als im Vakuum,  $c$ . Um einen quantitativen Zusammenhang zwi-

schen  $c_m$  und  $c$  herzustellen, wurde über Gl. (18-6a) eine vom Material abhängige Konstante, der *Brechungsindex*  $n$  eingeführt. Diese Konstante bestimmt – und daher stammt ihr Name – die Brechung der Lichtstrahlen an der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Stoffen. Fällt ein Strahl, wie in Abb. 19.8 skizziert, schräg aus dem Medium 1 auf die ebene Grenzfläche zu einem anderen durchsichtigen Stoff (Medium 2), dann tritt er unter Richtungsänderung in das Medium 2 ein, er wird gebrochen. Zusätzlich entsteht der reflektierte Strahl.

Die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  hängen über das *Brechungsgesetz* Gl. (7-30) und Gl. (18.6a, b) mit den Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  und den Brechungsindices  $n_1$  und  $n_2$  der beiden Medien zusammen:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{19-3}$$

Mit Hilfe von Gl. (19-3) lässt sich der Strahlengang an einer Grenzfläche konstruieren. Handelt es sich nicht um eine ebene, sondern um eine gekrümmte Fläche (wie bei Linsen), dann legt man – analog zum Fall der Reflexion am Hohlspiegel, Abb. 19.4 – zur Bestimmung der Winkel die Tangentialebene in den Auftreffpunkt des Strahls.



**Abb. 19.8** Brechungsgesetz an der Grenzfläche zwischen Glas und Luft: a) Der Lichtstrahl wird im optisch dichteren Medium zum Lot hin gebrochen ( $n_2 > n_1$ ). b) Der Lichtstrahl wird im optisch dünneren Medium vom Lot weg gebrochen ( $n_2 < n_1$ ). Zusätzlich wird in beiden Fällen ein reflektierter Strahl beobachtet.

Von zwei Medien wird das mit dem kleineren Brechungsindex als das *optisch dünnere*, das andere als das *optisch dichtere* bezeichnet. Im optisch dichteren Medium breitet sich Licht langsamer aus. Dringt Licht also vom optisch dünneren ins optisch dichtere Medium ( $n_2 > n_1$ ), so wird der Strahl zum Einfallslot hin gebrochen (Abb. 19.8a). Läuft das Licht dagegen in umgekehrter Richtung, d. h. vom dichteren zum dünneren Medium, so wird es vom Einfallslot weg gebrochen (Abb. 19.8b).

### 19.3.4 Intensitäten von gebrochenem und reflektiertem Strahl

Die Richtungen von reflektiertem und gebrochenem Strahl werden durch Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz festgelegt. Wie schon erwähnt, geben Lichtstrahlen aber keine Auskunft über Intensitäten. Ist deren Kenntnis erforderlich (z. B. zur Bestimmung der Helligkeit eines Bildes), so verwendet man Formeln, die im Rahmen der Wellenoptik hergeleitet werden.

Die Intensität bestimmt – neben dem Einfallswinkel – der Brechungsindex. Bei senkrechtem Einfall sind die Verhältnisse am einfachsten:

Das *Reflexionsvermögen* (der *Reflexionsgrad*) ist dann für den Übergang von einem durchsichtigen Stoff mit Brechungsindex  $n_1$  in einen durchsichtigen Stoff mit dem Brechungsindex  $n_2$  wegen der Gln. (7-33) und (7.32b) und wegen  $Z = 1/n$  gegeben durch

$$R = \frac{(n_2 - n_1)^2}{(n_2 + n_1)^2} \tag{19-4a}$$

Für das *Transmissionsvermögen* (den *Transmissionsgrad*) erhalten wir mit Gl. (7-32c) wegen der Bedingung  $R + T = 1$ :

$$T = \frac{4n_1n_2}{(n_2 + n_1)^2} \tag{19-4b}$$

Beispielsweise finden wir für die Grenzflächen zwischen Luft ( $n_1 \approx 1$ ) und einer Glasplatte mit  $n_2 = 1,5$ , dass an jeder der beiden Oberflächen etwa 4% reflektiert und 96% durchgelassen werden.

### 19.3.5 Zerlegung von Licht in seine Spektralfarben mit Hilfe des Prismas

Die Tatsache, dass der Brechungsindex sich mit der Wellenlänge des Lichtes ändert (*Dispersion*; Kap. 18.3.1) und damit für einen vorgegebenen Einfallswinkel  $\alpha_1$  gemäß Gl. (19-3) der Brechungswinkel  $\alpha_2$  für verschiedenfarbiges Licht unterschiedlich ist, nützt man aus, um mischfarbiges Licht oder Weißlicht in seine monochromatischen Bestandteile zu zerlegen.

Für diesen Zweck sind durchsichtige Stoffe in Form eines Dreieck-Prismas besonders geeignet, denn Lichtstrahlen werden beim Durchlaufen an den beiden den Prismenwinkel  $\varphi$  einschließenden Grenzflächen in gleicher Richtung abgelenkt (Abb. 19.9), so dass sich die Unterschiede der Brechungswinkel verschiedenfarbiger Strahlen an den beiden Grenzflächen summieren. (Anders wäre das beispielsweise bei einer schräg durchstrahlten planparallelen Platte: Dort kompensieren sie sich.)

Für sichtbares Licht werden Prismen aus Gläsern mit hoher Dispersion (Flintglas) verwendet; für das Ultraviolette und Infrarote nimmt man Quarz, NaCl, KBr usw., da Glas dort nicht durchsichtig ist.

Lässt man auf das Prisma, wie in Abb. 19.10 gezeigt, ein Parallelbündel weißen Lichtes auffallen, so verlassen die darin enthaltenen Wellen verschiedener Wellenlänge das Prisma unter unterschiedlichen Winkeln  $\beta_2$  (siehe Abb. 19.9). Da in Glas der Brechungsindex vom Roten zum Blauen hin zunimmt (*normale*

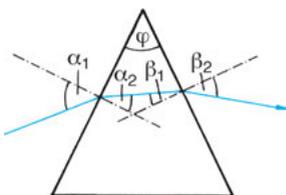


Abb. 19.9 Brechung am Prisma: Strahlengang.

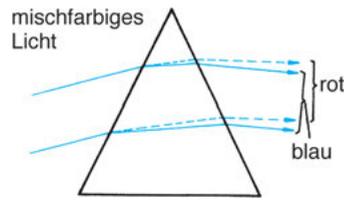


Abb. 19.10 Brechung am Prisma: Dispersion.

*Dispersion*, Kap. 18.3.3), wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes. Ein Prisma sortiert also aus mischfarbigem und damit inkohärentem Licht die in einem Parallelbündel enthaltenen verschiedenen Farben nach verschiedenen Brechungswinkeln. Diese monochromatischen Bestandteile haben größere Kohärenz. Durch eine geeignete optische Anordnung, den *Spektralapparat* oder *Monochromator* — wir werden sie in Kap. 20.7 näher kennenlernen — kann man aus mischfarbigem Licht jede der enthaltenen Spektralfarben aussondern.

Beispielsweise erzeugt ein Prismen-Spektralapparat aus dem Licht einer Glühbirne auf einem Schirm ein in allen Spektralfarben leuchtendes Bild, das *kontinuierliche* Spektrum des Glühlichtes, in dem die verschiedenen Farben in der Reihenfolge rot-orange-gelb-grün-blau-violett nebeneinander liegen.

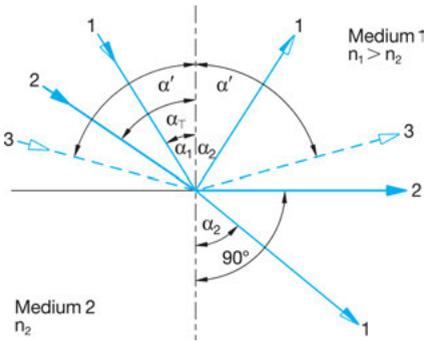
Im Licht des leuchtenden Na-Dampfes sind dagegen nur einige diskrete Spektrallinien enthalten, wobei zwei gelbe Linien in ihrer Intensität weitaus überwiegen.

### 19.3.6 Totalreflexion

Bei dem Übergang vom optisch dichteren zum dünneren Medium ( $n_1 > n_2$ ) wird in Abb. 19.11 der Strahl 1 vom Lot weg gebrochen. Zugleich wird ein Teil der einfallenden Intensität normal reflektiert. Vergrößern wir den Einfallswinkel  $\alpha_1$  (Strahl 1  $\rightarrow$  Strahl 2  $\rightarrow$  Strahl 3), so wird bei einem bestimmten Wert  $\alpha_1 = \alpha_T$  der Brechungswinkel  $\alpha_2 = 90^\circ$ ; der Strahl 2 läuft parallel zur Grenzfläche und dringt nicht mehr in Medium 2 ein. Für diesen Grenzfall folgt aus Gl. (19-3) mit  $\sin 90^\circ = 1$ :

$$\frac{\sin \alpha_T}{\sin 90^\circ} = \sin \alpha_T = \frac{n_2}{n_1}. \quad (19-5)$$

Bei Einfallswinkeln  $\alpha' > \alpha_T$  ist Gl. (19-3) gar nicht mehr zu erfüllen, weil sonst  $\sin \alpha_2 > 1$



**Abb. 19.11** Totalreflexion ( $\alpha_T =$  Grenzwinkel der Totalreflexion).

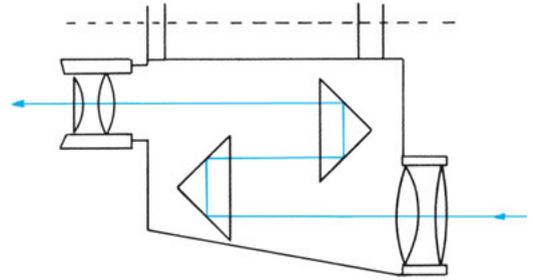
werden müsste, was nicht möglich ist, da die Werte der trigonometrischen Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  nur zwischen  $+1$  und  $-1$  liegen. Physikalische Konsequenz ist, dass das Licht überhaupt nicht mehr in das zweite Medium eintreten kann. Vielmehr wird Strahl 3 vollständig an der Grenzfläche reflektiert: Es tritt *Totalreflexion* mit Reflexionsvermögen  $R = 1$  auf.

Dies lässt sich beobachten, wenn man ein leeres Trinkglas in Wasser eintaucht und zunehmend schräger auf die innere Glaswand schaut. Man sieht dann zusätzlich vor dem Übergang zur Totalreflexion einen farbigen Saum; der Winkel der Totalreflexion hängt wegen der Dispersion des Glases und des Wassers geringfügig von der Farbe des Lichtes ab.

Von der in Kap. 19.3.1 besprochenen normalen Reflexion unterscheidet sich die Totalreflexion dadurch, dass *alles* Licht reflektiert wird. Das Reflexionsvermögen ist also exakt 1 (bzw. 100 %), weil kein Anteil des Lichts in das zweite Medium eintreten kann.

Daher verwendet man zur Strahlenumlenkung in optischen Instrumenten (Prismenfernglas, binokulares Mikroskop usw.) anstelle von Metallspiegeln totalreflektierende Glasprismen (Abb. 19.12).

**ATR-Spektroskopie** Nur im Rahmen der Geometrischen Optik nehmen wir an, dass die Lichtstrahlen *direkt* an der Grenzfläche reflektiert oder totalreflektiert werden. Tatsächlich dringen die Lichtwellen aber bis zu einem Abstand etwa der Lichtwellenlänge in das zweite Medium ein, bis sie total reflektiert werden. Nehmen wir einmal an, das zweite Medium sei Luft. Bringt man nun bis auf etwa den Abstand einer Licht-



**Abb. 19.12** Hälfte eines Prismen-Fernrohrs (Kap. 20.6) mit viermaliger Strahlumlenkung mittels Totalreflexion an Glasprismen. (Für starke Vergrößerungen ist ein großer Abstand zwischen beiden Linsensystemen erforderlich; durch die Strahlumlenkung kann das Fernrohr dennoch kompakt gebaut werden.)

wellenlänge einen weiteren Stoff an das erste Medium heran, so dringt die Lichtwelle auch noch in dieses dritte Medium ein. Dadurch wird die Totalreflexion insbesondere in denjenigen Spektralbereichen behindert, in denen dieser dritte Stoff absorbiert. Durch Analyse der reflektierten Intensität kann man daher Auskunft über die optischen Eigenschaften des dritten Stoffes erhalten. Diese Methode der *behinderten Totalreflexion* (*attenuated total reflection, ATR-Methode*) hat auch für die chemische Analyse praktische Bedeutung erlangt, da der dritte Stoff eine Flüssigkeit sein kann, in die man den ATR-Messkopf einfach eintaucht. Vorteil gegenüber der konventionellen Transmissions-Spektroskopie (Kap. 20.7) ist, dass Proben dick und lichtundurchlässig sein können, da nur eine dünne Oberflächenschicht mit dem Licht in Wechselwirkung tritt.

**Flexible Lichtleiter** Die Ausnutzung der Totalreflexion zur Weiterleitung von Licht in dünnen Fasern aus transparenten Materialien (üblicherweise Glas, seltener Kunststoffe oder Quarz) hat – neben der Anwendung zu *optischer Nachrichtenübertragung* – interessante Anwendungsmöglichkeiten auch in der Medizin gefunden. Dadurch wurden z. B. die früher üblichen, aus vielen Feld- und Abbildungslinsen bestehenden, starren *Endoskope* zur Inspektion von Körperhöhlräumen verdrängt (s. unten).

Man kann heute meter-, ja kilometerlange *optisch isolierte* Glasfasern mit Durchmessern von nur 5 bis 100  $\mu\text{m}$  (d. h. etwa 10 bis 200 Lichtwellenlängen) herstellen und zu Faserbündeln zusammenfassen, indem man Anfang und Ende der Bündel verkittet. Fällt ein Lichtstrahl genügend schräg auf die Wand ei-

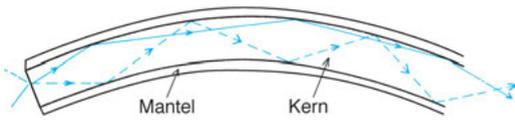


Abb. 19.13 Totalreflexion in einer Glasfaser.

ner Lichtleitfaser, so wird er im Innern un- ständig wiederholter Totalreflexion im Zick- Zack-Kurs weitergeleitet und tritt schließlich am Faserende wieder aus (Abb. 19.13). Da  $R = 1$ , geschieht dies (im Idealfall) ohne jeg- lichen Lichtverlust. In der Praxis kann infolge von Oberflächenrauigkeiten und Inhomoge- nitäten des Glases doch ein (sehr geringer) Verlust durch Streuung und auch durch schwache Absorption des Glases nicht ver- mieden werden. In guten Fasern macht sich dies aber erst bei Längen im Kilometer-Ber- eich störend bemerkbar. Dünne Glasfasern sind elastisch genug, bis auf Krümmungs- radien einiger Zentimeter gekrümmt werden zu können, ohne zu brechen. Der Mechanis- mus der Lichtleitung wird durch Krümmung praktisch nicht gestört.

An und für sich würde zur Totalreflexion die Grenzflä- che Glas/Luft sehr geeignet sein. Damit aber der Lichtstrahl nicht an den Stellen, wo sich zwei Fasern berühren, den Lichtleiter verlassen kann (*optischer Kurzschluss*), müssen die Glasfasern mit einer Isolier- schicht (dem *Mantel*) ummantelt sein. Deren Bre- chungsindex wählt man wesentlich kleiner als den des Fasermaterials (dem *Kern*). Dann findet die Totalreflexion an der Grenze Faserkern/Fasermantel statt.

Wegen ihrer Biegsamkeit können Lichtleiter zum Ausleuchten schwer zugänglicher Hohlräume (z. B. Blase, Verdauungstrakt, Adern) verwendet werden. Überdies lassen sich *geordnete Bündel* herstellen, bei denen die Lage jeder einzelnen Faser an beiden End- flächen des Lichtleiters übereinstimmt. Projiziert man ein Bild auf das eine Ende, so wird es durch den ge- ordneten Lichtleiter als Rasterbild ans andere Ende übertragen. Auf diese Weise können selbst kleinste Details bis zur Größenordnung des Faserdurchmessers (ca.  $5 \mu\text{m}$ ) wiedergegeben werden. Das Prinzip eines solchen *Lichtleiter-Endoskops* mit Beleuchtungs- und Abbildungs-Lichtleiter zeigt Abb. 19.14.

Eine andere Art der Anwendung im Bereich der Medizin ist der Transport von Lichtleistung einer externen Laser-Lichtquelle, beispielsweise für Koagula- tionsoperationen oder Zahnbehandlung.

Das Prinzip des Lichtleitens kann auch im Infraro- ten und Ultravioletten angewendet werden. Dazu sind allerdings spezielle, nicht aus Glas bestehende Lichtlei- ter erforderlich.

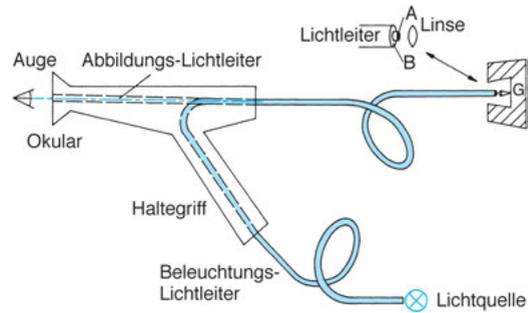


Abb. 19.14 Lichtleiter-Endoskop zur Beobach- tung in Körperhöhlen. Der flexible Lichtleiter be- steht aus dem geordneten Kern A zur Bildübertra- gung und dem Beleuchtungslichtleiter B, der mit einer Lichtquelle verbunden ist. Die visuelle Be- obachtung des Gegenstandes G erfolgt über das Okular.

### 19.3.7 Optoelektronik

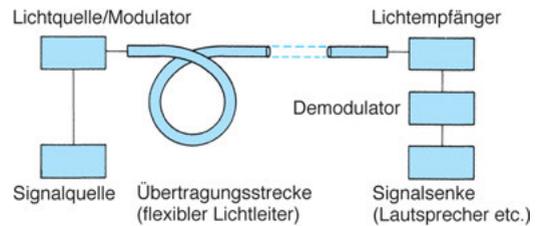
Nachrichtenübermittlung erfolgt heute in zu- nehmendem Maße auf optischem Wege über *flexible Lichtleiter*, sei es für die Datenver- arbeitung, das Telefon oder das Kabelfern- sehen. Sie haben die Nachrichtenübertragung revolutioniert: mit Hilfe von Glasfaserkabeln werden Informationen heute über alle Kon- tinenten, durch die Weltmeere und in viele Häuser transportiert. Neben technischen Vor- zügen (höhere Informationsübertragungsdich- te, gute Übertragungsqualität für Digital- technik, Vorteile der optischen Signalträger) spricht für dieses System der kommerzielle Grund, dass Glasbestandteile leicht verfügbar und preisgünstiger als das für elektrische Lei- tungen nötige Kupfer sind. Das Gebiet der op- tischen Signal- und Nachrichtenübermittlung als Weiterentwicklung der Nachrichtenelek- tronik wird *Optoelektronik* genannt.

Allgemein gilt, dass der Informationsfluss über eine Trägerwelle (Kap. 16.2.4) um so größer sein kann, je höher deren Frequenz ist. Die Weiterentwicklung von der Langwelle über Mittel- und Kurzwellen zu Ultra- kurzwellen führt daher konsequenterweise zu op- tischen Wellen. An eine freie Ausbreitung optischer Wellen in der Atmosphäre wie bei Radiowellen ist al- lerdings nicht zu denken, denn im Gegensatz zu diesen werden Lichtwellen durch Streuung an Nebel, Wolken, Schnee und Staub stark in ihrer Ausbreitung behin- dert. Daher kommen nur *geführte Wellen* in Betracht; realisieren lässt sich dies mit den Lichtleiterfasern, die

heute mit geringen Dämpfungsverlusten (1 dB/km; siehe Kap. 6.2) bis zu vielen hundert Kilometern Länge herstellbar sind. Bündel solcher Fasern können wie herkömmliche Telefonkabel in der Erde verlegt werden und tausende Ferngespräche (oder einige Fernsehprogramme) gleichzeitig übertragen. Als *Sender* dienen dabei licht-emittierende Halbleiter-Dioden (LED, Kap. 17.10.3) oder, wegen ihrer guten Kohärenz, Laser. Meist wird die Lichtquelle selbst mit dem zu übertragenden Signal (z. B. einem gesprochenen Wort) moduliert, so dass zusätzliche Modulatoren entfallen. Als besonders günstig hat sich neben der Modulation der Lichtintensität die Pulsmodulation (Kap. 16.2.4) erwiesen, da die verwendeten Lichtquellen sehr schnell ein- und auszuschalten sind (die Schaltzeiten betragen nur wenige Nano- bis Picosekunden). Empfänger sind Photodetektoren, die das optische Signal wieder in ein elektrisches verwandeln, das nach elektronischer Aufarbeitung (*Demodulation*, Kap. 16.2.4) einem Telefonhörer, einem Lautsprecher oder auch einem Fernsehbildschirm zugeführt wird. Das Schema der optischen Nachrichtenübertragung ist in Abb. 19.15 dargestellt.

Die Weiterentwicklung geht dahin, einige der auf dem Weg von der Signalquelle zum Empfänger erforderlichen elektrischen Bauteile (z. B. die wegen der Lichtverluste längs langer Übertragungstrecken erforderlichen Zwischenverstärker) durch optische zu ersetzen. Verschiedene optische Effekte sind ausgenutzt worden, um spezielle optoelektronische Bauteile zu entwickeln (beispielsweise in der Technik der *Integrierten Optik*).

Eine Ausdehnung der Optoelektronik vom Datentransport auf die Datenverarbeitung (vgl. Kap. 15.3.4) hat stattgefunden, seit es gelungen ist, auf optischem oder magnetischem Wege Daten zu lesen und zu speichern. Hierfür sind unterschiedliche Wege eingeschlagen worden, die alle das Ziel haben, hohe Daten-Spei-



**Abb. 19.15** Schema optoelektronischer Nachrichtenübertragung.

cherdichten zu erreichen. Einfache optische Speicher in Form der mit einem Laserstrahl lesbaren Kompaktschallplatten und Disketten (compact disk, abgekürzt CD) haben weite Verwendung gefunden. In fortgeschrittenem Entwicklungsstadium befinden sich Stoffe, die durch Licht vom amorphen in den kristallinen Zustand überführt (*Phasenwechsel-Materialien*), und damit geschaltet, werden können. In speziellen Kristallen (z. B. Fe-dotiertem  $\text{LiNbO}_3$ ) gelang es, optische Signale (in Form von lokalen Brechungsindexänderungen) in einer extrem hohen Dichte zu speichern. So könnte man im Prinzip bis zu  $10^{10}$  bit (das entspricht dem Inhalt von 10 bis 100 Telefonbüchern!) in einem  $1 \text{ cm}^3$  großen Kristall speichern. Mit solchen Speichern, die mit Hilfe eines Lasers gelesen werden, könnte die Leistungsfähigkeit von Elektronenrechnern weiter erhöht werden.

Derzeit steht die Optoelektronik in Konkurrenz zu anderen Methoden (magnetischer Speicher, USB-Stick etc.). Allgemein ist zu erwarten, dass die Bedeutung des Lichts und der optischen Methoden für die Digitalelektronik weiter wachsen wird (z. B. die Entwicklung des *Quanten-Computers*).

## 19.4 Abbildung mit Linsen

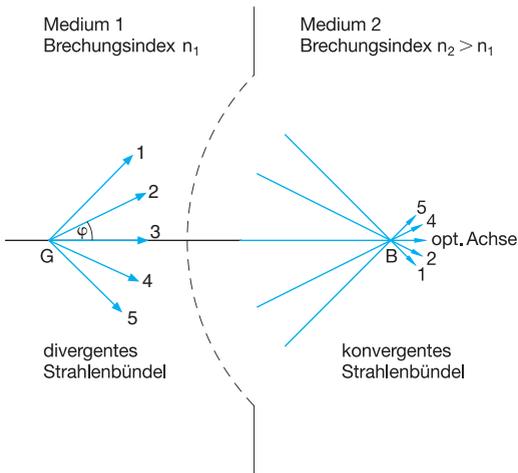
### 19.4.1 Abbildung durch brechende Flächen

Das Auge ist der wichtigste Informationskanal zwischen dem Menschen und seiner Umwelt. Im Laufe von Jahrhunderten wurde eine Vielzahl diesen Informationskanal unterstützender *optischer Instrumente* entwickelt, die auf der Erzeugung optischer Bilder beruhen, die dann vom Auge anstelle des Objektes betrachtet werden können.

Für die Erzeugung reeller optischer Bilder ist die Abbildung mit Linsen von größerer praktischer Bedeutung als die Ab-

bildung mit Hohlspiegeln: Erstens lassen sich die bei der Abbildung auftretenden Bildfehler mit Linsen einfacher korrigieren, und zweitens liegen, von der Linse gesehen, reelles Bild und Gegenstand auf entgegengesetzten Seiten, was für die Konstruktion optischer Geräte, z. B. von Kameras, vorteilhaft ist.

Als Linsenmaterial wird für den sichtbaren Bereich eine Vielzahl von Gläsern unterschiedlicher chemischer Zusammensetzung und unterschiedlicher Brechungsindizes verwendet. Für das UV und IR dagegen, wo



**Abb. 19.16** Zur Abbildung durch Brechung von Licht an einer gekrümmten Grenzfläche.

normales Glas absorbiert, benutzt man Quarzglas bzw. Steinsalz, Flußspat, Germanium oder Silizium.

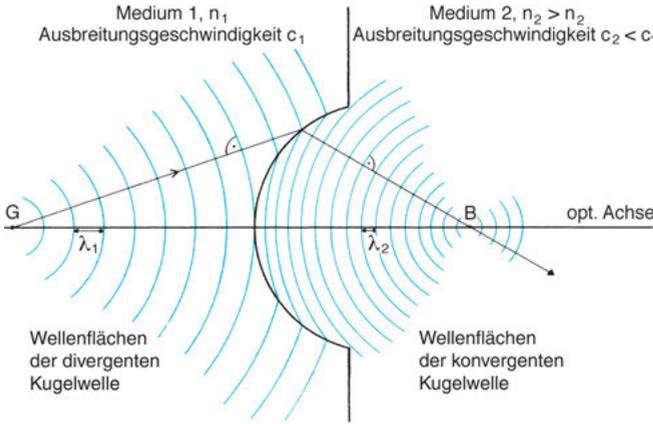
Zur Abbildung eines Gegenstandes (Abb. 19.16), der entweder beleuchtet wird, so dass Streustrahlung entsteht (*Sekundärstrahler*), oder aber selbst Licht emittiert (*Primärstrahler*), müssen die von jedem Gegenstandspunkt  $G$  divergent ausgehenden Lichtstrahlen so konvergent gemacht werden, dass sie sich allesamt in einem Punkt, dem Bildpunkt  $B$ , wieder schneiden. Dieses Prinzip haben wir schon in Kap. 19.2 kennengelernt. Geschieht dies durch Brechung an der Grenzfläche zweier durchsichtiger Medien, wie in Abb. 19.16, so müssen dort die Strahlen 1 und 5 stärker gebrochen werden als etwa die Strahlen 2 und 4, während Strahl 3 nicht abgelenkt werden soll. Nach dem Brechungsgesetz ist die Brechung um so stärker, je schräger ein Lichtstrahl auf eine Grenzfläche auftrifft. Berechnet man, wie diese Grenzfläche für den Fall der Abb. 19.16, in der — wie z. B. beim Auge — das Bild im Medium 2 liegt, aussehen müsste, so findet man, wie in der Abbildung durch die gestrichelte Kurve angedeutet, eine sehr kompliziert gekrümmte Fläche, die für jede Lage des Gegenstandspunktes eine (geringfügig) andere Form hat, jedoch für kleine Öffnungswinkel ( $\varphi < 5^\circ$ ) durch eine, vom Gegenstand her gesehen, kon-

vexe *Kugelfläche* angenähert werden kann. Kugelflächen werden in der technischen Optik für Linsen deshalb gerne verwendet, weil sie einfach herzustellen sind, und zwar auch für wesentlich größere Öffnungswinkel  $\varphi \leq 45^\circ$ . Allerdings müssen dadurch entstehende Abbildungsfehler nachträglich wieder korrigiert werden, wozu Kombinationen mehrerer brechender Flächen, d. h. mehrerer Linsen (*Objektive*) erforderlich sind. Erst in neuester Zeit sind Versuche erfolgreich, die eigentlich vom Brechungsgesetz geforderten komplizierten asphärischen Flächen in Massenproduktion herzustellen (*asphärische Linsen*).

Bei größerem  $\varphi$  treffen in Abb. 19.16 die Randstrahlen bei *sphärischen Grenzflächen* nicht mehr genau im Bildpunkt mit den achsnahen Strahlen zusammen, wodurch der Bildpunkt von einem diffusen Lichthof umgeben wird; ein aus vielen Punkten zusammengesetztes Bild wirkt dadurch unscharf. Diesen Abbildungsfehler nennt man den *Öffnungsfehler* oder auch *sphärischen Fehler* (Kap. 19.4.11.3). Es besteht aber Interesse, den Öffnungswinkel der vom Gegenstandspunkt  $G$  ausgehenden und durch die brechende Grenzfläche tretenden Lichtstrahlen sehr groß zu machen, denn je größer dieser ist, um so mehr Licht trifft im Bildpunkt zusammen, desto heller wird also das Bild. Um den sphärischen Abbildungsfehler bei lichtstarken Abbildungen zu verringern, ersetzt man die zwei brechenden Kugelflächen einer einfachen Linse durch komplizierte Objektive, die bis zu etwa 20 verschiedene brechende Kugelflächen enthalten können. Beispiele zeigt Abb. 20.5.

Wegen der Umkehrbarkeit von Lichtwegen (Kap. 19.1) können wir die Punkte  $B$  und  $G$  in Abb. 19.16 auch vertauschen und uns vorstellen, dass der Gegenstand  $G$  im optisch dichteren Medium 2 liege. Um die Lichtstrahlen dann in dem im Medium 1 liegenden Bildpunkt  $B$  zu sammeln, ist eine, vom Gegenstand her gesehen, *konkav* gekrümmte sphärische Kugelfläche nötig.

Der Vorgang der Abbildung ist in Abb. 19.17 im Wellenbild anschaulich dargestellt: Vom Gegenstandspunkt  $G$  gehen Kugelwellen aus und treffen auf die Grenzfläche. Diejenigen Teile der Wellenfläche, die ins



**Abb. 19.17** Abbildung durch eine gekrümmte Grenzfläche, dargestellt im Wellenbild ( $\lambda_1 > \lambda_2$ , da  $c_1 > c_2$ ).

Medium 2 eingedrungen sind, laufen dort entsprechend dem größeren Brechungsindex langsamer als die weiter von der optischen Achse entfernten Teile, die noch länger im Medium 1 bleiben. Dadurch kehrt sich die Krümmung der Wellenfläche beim Durchgang durch die sphärische Grenzfläche um, und die Welle läuft als umgekehrte Kugelwelle im Bildpunkt *B* zusammen. Die Geometrische Optik drückt diesen Vorgang dadurch aus, dass an der Grenzfläche die (senkrecht auf den Wellenflächen stehenden) Lichtstrahlen zum Bildpunkt hin gebrochen werden.

in Abb. 19.18 klein ist, d. h. für Lichtstrahlen, die nahe der optischen Achse verlaufen.

### 19.4.2 Die Abbildungsgleichung für eine brechende Fläche

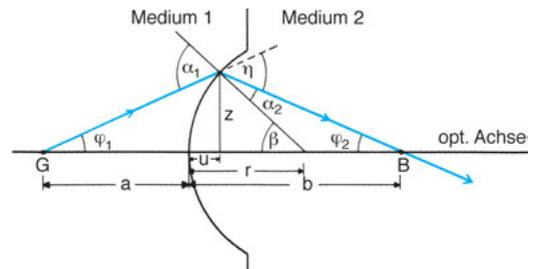
Eine geeignet gekrümmte Grenzfläche zwischen zwei durchsichtigen Stoffen kann also von einem im Medium 1 gelegenen Gegenstand im Medium 2 ein Bild erzeugen und, wegen der Umkehrbarkeit von Lichtwegen, auch umgekehrt.

Bezeichnen wir, wie in Abb. 19.18, den Abstand des Gegenstandspunktes *G* von der brechenden sphärischen Fläche mit *a* und den Abstand des Bildpunktes mit *b*, so gilt die Abbildungsgleichung für eine brechende Fläche

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}, \tag{19-6}$$

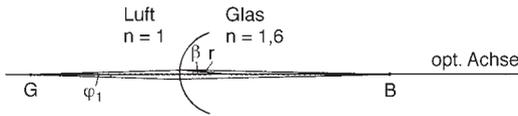
wobei *r* der Krümmungsradius der sphärischen Grenzfläche ist.  $n_1$  und  $n_2$  sind die Brechungsindices der aneinandergrenzenden Stoffe. Wir definieren den Radius *r* als negativ, wenn der Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche auf der Seite des Gegenstandes liegt (konkave Krümmung), als positiv, wenn er auf der anderen Seite liegt (konvexe Krümmung).

Für die Medizin ist dieser Fall von Bedeutung, weil der Hauptbeitrag zur Abbildung im Auge von der Brechung an der gekrümmten Luft/Hornhaut-Grenzfläche (Kap. 19.5.1) herrührt. (Die veränderliche Augenlinse besorgt im wesentlichen nur die Feinkorrektur der Bildschärfe auf der Netzhaut (Kap. 19.5.1)).



Bei der Abbildung mittels einer sphärisch gekrümmten Grenzfläche besteht eine einfache Beziehung zwischen der Lage des Gegenstandes und der des Bildes, die durch die *Abbildungsgleichung* Gl. (19-6) ausgedrückt wird. Sie gilt allerdings mit großer Genauigkeit nur unter der einschneidenden Näherungsannahme, dass der Öffnungswinkel  $\varphi_1$

**Abb. 19.18** Zur Herleitung der Abbildungsgleichung für eine Grenzfläche (Gl. (19-6)). (Die Bedingung, dass  $\varphi_1$  klein sei, ist hier der Deutlichkeit der Zeichnung halber nicht beachtet.)



**Abb. 19.19** Maßstabsgetreuer Strahlengang mit  $\varphi_1 = 5^\circ$ .

Für Strahlen, die unter größeren Winkeln als  $\varphi_1 \approx 5^\circ$  einfallen, werden die Näherungen, die zu Gl. (19-6) führen, wegen des Öffnungsfehlers zunehmend schlechter. Die Bildweite  $b$  wird dann vom Winkel  $\varphi_1$  abhängig, und das bedeutet, dass nicht alle vom Gegenstandspunkt  $G$  ausgehenden Strahlen sich in einem Bildpunkt treffen.

In den meisten Abbildungen von Lehrbüchern – so auch hier – sind der Deutlichkeit halber Lichtstrahlen mit viel größeren Winkeln gezeichnet, für die Gl. (19-6) längst nicht mehr gilt. Die maßstabgetreue Abb. 19.19 soll dies veranschaulichen; sie zeigt ein Lichtbündel mit einem Öffnungswinkel von  $\varphi_1 = 5^\circ$ .

### 19.4.3 Spezialfälle der Abbildungsgleichung

1. Fallen parallele Lichtstrahlen auf eine konvexe brechende Fläche, liegt also der Gegenstand (fast) im Unendlichen ( $a \approx \infty$ ), dann schneiden sie sich hinter der brechenden Fläche in einem Punkt, den wir *bildseitigen Brennpunkt* nennen und dessen Bildweite wir als *bildseitige Brennweite*  $f$  bezeichnen. Aus Gl. (19-6) folgt für  $f$ :

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_2} \frac{1}{r} \tag{19-7}$$

2. Liegt der Gegenstand aber so, dass die gebrochenen Strahlen hinter der brechenden Fläche parallel verlaufen, der Bildpunkt also *im Unendlichen* liegt ( $b \approx \infty$ ), dann heißt der Gegenstandspunkt *gegenstandsseitiger Brennpunkt* und die Gegenstandsweite die *gegenstandsseitige Brennweite*  $f'$ . Aus Gl. (19-6) folgt für  $f'$ :

$$\frac{1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \frac{1}{r}, \text{ und es gilt also: } \frac{1}{f'} = \frac{1}{f} \frac{n_2}{n_1} \tag{19-8}$$

Setzen wir die beiden Brennweiten  $f$  und  $f'$  in Gl. (19-6) ein, so erhalten wir nach kurzer Rechnung als weitere Form der Abbildungsgleichung für *eine* Grenzfläche:

$$\frac{f'}{a} + \frac{f}{b} = 1. \tag{19-9}$$

### 19.4.4 Die Abbildungsgleichung für eine Linse

Soll das Bild im selben Medium wie der Gegenstand liegen (normalerweise Luft mit  $n_1 \approx 1$ ), so ist eine zweite Begrenzungsfläche des Mediums 2 nötig, die dann ebenfalls zur Abbildung beiträgt: Somit erhalten wir eine *Linse* (mit Brechungsindex  $n_2$  des Linsenmaterials).

Die zwei Einzelabbildungen an den beiden brechenden Flächen einer Linse der Dicke  $d$  (Abb. 19.20), nacheinander mit Gl. (19-6) durchgerechnet, ergeben als Beziehung zwischen der Gegenstandsweite  $a$  und der Bildweite  $b$ :

$$\frac{n_1}{n_2} \cdot d = \frac{1}{\frac{1}{f'_1} - \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{f_2} - \frac{1}{b}} \tag{19-10}$$

Dabei ist  $f'_1$  die gegenstandsseitige Brennweite der ersten brechenden Fläche, und  $f_2$  ist die bildseitige Brennweite der zweiten Fläche.

Ist die Linse sehr dünn ( $d \approx 0$ ), wird daraus die bekannte *Abbildungsgleichung für eine dünne Linse*:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \tag{19-11}$$

Die zwei Einzelabbildungen an den beiden brechenden Flächen einer Linse kann man sich also ersetzt denken durch einen einzigen Abbildungsvorgang mit der Brennweite  $f$  der Linse.

Aus Gl. (19-7) und (19-8) finden wir als Zusammenhang der Brennweite mit den Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  der beiden Linsenflächen:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{19-12}$$

Wenn Gegenstand und Bild im selben Medium liegen und zudem die Linse sehr dünn ist, lässt sich die Linse also durch eine einheitliche Brennweite  $f$  charakterisieren, die von  $r_1, r_2, n_1$  und  $n_2$  abhängt.

Das Reziproke der Brennweite,  $1/f$ , wird als die *Brechkraft* oder der *Brechkwert* bezeichnet und erhält in der Ophthalmologie die Einheit *Dioptrie* (Dptr). Misst man die Brennweite in Metern, so erhält man die Brechkraft in Dioptrien:  $1 \text{ Dptr} = 1 \text{ m}^{-1}$ . Eine Linse mit der Brennweite  $f = 0,25 \text{ m}$  hat demnach eine Brechkraft von 4 Dptr.

Bei Gegenständen, die, verglichen mit der Brennweite, weit entfernt sind, ist die Bildweite nur geringfügig größer als die Brennweite. Daher kann man die Brennweite einer Sammellinse (Brillenglas o. Ä.) leicht abschätzen, indem man auf einem Stück Papier ein Bild der weit entfernten Deckenlampe oder eines Fensterkreuzes entwirft. Die Bildweite ist dann ungefähr gleich der Brennweite. Eine zweite Methode zur Abschätzung der Brennweite ist, die Sammellinse als Lupe (Kap. 20.1) zu verwenden, aber weit weg vom Auge zu halten und sie so lange vom Objekt weg zu verschieben, bis das aufrechte, virtuelle, vergrößerte Bild umschlägt in ein umgekehrtes Bild. Dieser Übergang erfolgt, wenn die Gegenstandsweite ungefähr gleich der Brennweite ist.

Die Linsenformel, Gl. (19-11), gilt für sphärische Systeme nur dann präzise, wenn neben der Bedingung  $d \approx 0$  die in Kap. 19.4.2 für die Einzelabbildung genannten Voraussetzungen erfüllt sind, d. h., für sehr schmale Lichtbündel. Wie bei der einzelnen brechenden Fläche tritt sonst der in Kap. 19.4.1 besprochene *Öffnungsfehler* auf. Diese Einschränkungen beziehen sich jedoch nur auf sphärische Einzellinsen; mit Hilfe von Mehrlinsensystemen (*Objektiven*), die zur Korrektur von Abbildungsfehlern speziell konstruiert werden, kann man selbst bei extrem großen Öffnungswinkeln von  $45^\circ$  und mehr, wie sie in Mikroskopen üblich sind, einwandfreie Abbildungen erzielen. In Kap. 19.4.7 werden wir sehen, dass es möglich ist, auch für solche Linsensysteme Gl. (19-11) anzuwenden.

Für die Verwendung der einfach herstellbaren sphärischen Linsen nimmt man also den Öffnungsfehler in Kauf und korrigiert ihn nachträglich wieder, indem man Objektive einführt. Alternativ kann man natürlich auch für eine bestimmte Gegenstandsweite  $g$  eine einzelne nichtsphärische Linsen einsetzen, die (mit größerem Herstellungsaufwand) mit dem *exakten* Krümmungsverlauf der Grenzflächen versehen sind. Dies betrifft allerdings nur den Öffnungsfehler. Mit Objektiven korrigiert man aber auch andersartige Abbildungsfehler (Kap. 19.4.11).

Gl. (19-11) gehört zu den geläufigsten physikalischen Formeln. Tatsächlich ist sie jedoch nur eine Näherungsbeziehung, die zudem so grob ist, dass sie bei einfachen Linsen fast nie mit genügender Genauigkeit gilt. An diesem Beispiel zeigt sich deutlich das Bemühen, in der Physik Zusammenhänge durch einfache mathematische Beziehungen darzustellen, selbst wenn

dies nur unter Einbuße von Allgemeingültigkeit und Exaktheit möglich ist. Sie dienen allgemein der übersichtlichen und schnellen Abschätzung eines Vorganges; ihre quantitative Auswertung ist aber nur berechtigt, wenn gleichzeitig abgeschätzt wird, wie groß der durch die Näherungsannahmen bedingte Fehler ist (s. Anhang).

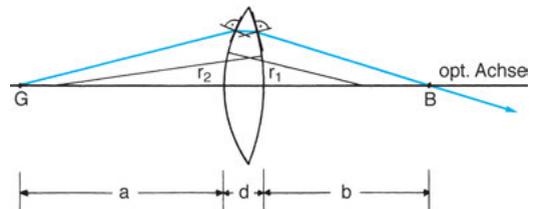
In Zeiten ohne Computer boten vereinfachte Formeln oft die einzige Möglichkeit, mit vertretbarem Zeitaufwand zu numerischen Ergebnissen zu gelangen; heute werden Brillengläser, Photo- oder Mikroskopobjektive u. Ä. ohne Verwendung von Näherungsformeln mit numerischen Methoden exakt berechnet.

### 19.4.5 Klassifizierung von Linsen

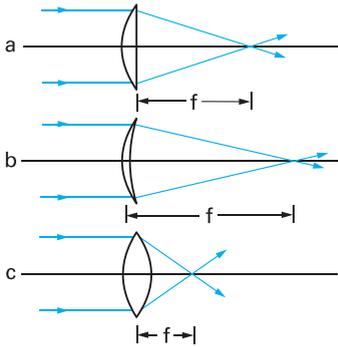
In Gl. (19-12) genügt es nicht, die Krümmungsradien  $r_1$  und  $r_2$  der Abb. 19.20 dem Betrage nach einzusetzen, vielmehr muss unterschieden werden, ob die Fläche konvex (nach außen) oder konkav (nach innen) gekrümmt ist. Die Radien werden als positiv definiert, wenn die Mittelpunkte ihrer Krümmungskreise von dem Gegenstand aus gesehen hinter der Linse liegen, als negativ, wenn sie vor der Linse liegen.

Wir unterscheiden *Sammellinsen*, bei denen parallel auf die Linse treffende Strahlen im reellen Brennpunkt hinter der Linse gesammelt werden, und *Zerstreuungslinsen*, die parallel auftreffende Strahlen divergent machen, so dass der Brennpunkt virtuell ist und vor der Linse liegt.

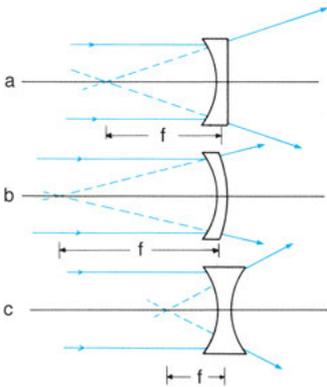
Beide Linsentypen können verschiedene Formen der brechenden Flächen haben; sie sind in Abb. 19.21 und 19.22 zusammen mit ihren Bezeichnungen zusammengestellt.



**Abb. 19.20** Zur Herleitung der Abbildungsgleichung einer Linse (Gl. (19-11)).



**Abb. 19.21** Sammellinsen: a) Plan-konvex-Linse, b) Konkav-konvex-Linse, c) Bikonvex-Linse ( $f$ : Brennweite).



**Abb. 19.22** Zerstreuungslinsen: a) Plan-konkav-Linse, b) Konkav-konkav-Linse, c) Bikonkav-Linse ( $f$ : Brennweite).

Berücksichtigen wir die Vorzeichen der Krümmungsradien, so erhalten wir aus Gl. (19-12) für Sammellinsen positive Brennweiten,  $f > 0$ , für Zerstreuungslinsen aber negative Brennweiten,  $f < 0$ . Zerstreuungslinsen liefern stets virtuelle Bilder; die Abbildungsgleichung (Gl. (19-11)) besagt, dass bei diesen die Bildweiten  $b$  negativ sind. Da  $b$  von der Linse aus gemessen wird, liegen diese Bilder also vor der Linse. Sammellinsen dagegen können sowohl reelle als auch virtuelle Bilder entwerfen. Für reelle Bilder folgt aus der Abbildungsgleichung, dass  $b$  positiv ist, das Bild also, vom Gegenstand gesehen, hinter der Linse liegt.

Bei Bikonvex- und Bikonkav-Linsen addieren sich die Beiträge beider Grenzflächen zur Gesamtbrechkraft  $1/f$ ; sie haben also unter den verschiedenen Linsenformen die jeweils stärksten Brechkräfte, d. h. die kürzesten Brennweiten.

Für Brillengläser (Kap. 19.5.2) bevorzugt man konkav-konvexe und konvex-konkave Formen, da deren Abbildungsfehler gegenüber den bikonvexen und bikonkaven Formen geringer sind.

Heute gibt es billige Methoden, für spezielle Zwecke auch nichtsphärische Linsen mit geringen Abbildungsfehlern herzustellen. Die Gleitsichtbrillen beruhen auf nichtsphärisch gekrümmten Linsen. Auch die kleinen Abbildungslinsen in einfachen digitalen Kameras oder Fotohandys sind nichtsphärisch.

#### 19.4.6 Die Abbildungsgleichung für ein System aus zwei Linsen

Gl. (19-10) können wir so interpretieren, dass sich die Abbildungen durch die beiden hintereinander geschalteten brechenden Flächen der Einzellinse so zur Gesamtabbildung kombinieren, dass sich die Brechkräfte addieren. Dies gilt ganz analog auch für die Hintereinanderschaltung von mehreren Linsen, also z. B. für die Korrektur des Auges mittels Sehhilfen.

Ordnet man zwei dünne Linsen der Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  dicht hintereinander zu einem Linsensystem (*Objektiv*) an, so gilt die Abbildungsgleichung (Gl. (19-11)) ebenfalls, wenn wir die aus den beiden Linsen resultierende Brennweite  $f$  folgendermaßen berechnen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (19-13)$$

Die Einzelbrechkräfte addieren sich also zur Gesamtbrechkraft. Legt man beispielsweise die Brille eines Kurzsichtigen mit  $-5$  Dptr und die eines Übersichtigen mit  $+5$  Dptr aufeinander, so kompensieren sich die Brechkräfte zu Null. Vorausgesetzt ist hierbei, dass der Abstand  $D$  der beiden Linsen klein ist gegenüber  $f_1$  und  $f_2$ .

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, dann gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2} \quad (19-14)$$

Variiert man  $D$ , so hat man ein einfaches Beispiel für ein Linsensystem *variabler* Brechkraft (*Vario-Objektiv* oder *Zoom-Objektiv*).

Gl. (19-14) ist anzuwenden, wenn man Brillen zur Korrektur fehlsichtiger Augen berechnen will, da der Abstand  $D$  zwischen Brillenlinse und Augenlinse groß ist. Wir werden in Kap. 19.5.2 darauf zurückkommen.

### 19.4.7 Kardinalelemente von dicken Linsen und Linsensystemen

Zur Korrektur der zahlreichen optischen Abbildungsfehler (Kap. 19.4.11) sind *Objektive* aus mehreren sphärischen Linsen (Linsensysteme) erforderlich, deren Dicke im allgemeinen nicht mehr klein gegen die Brennweite ist. Auch das Auge ist ein solches System mit mehreren brechenden Flächen (Kap. 19.5.1). Im Prinzip kann die Abbildung mittels solcher Systeme durch sukzessive Anwendung der Abbildungsgleichung (Gl. (19-6)) auf jede der brechenden Flächen ermittelt werden. Diese Methode ist aber sehr umständlich. Man kann sie umgehen, indem man eine *gegenstandsseitige* und eine *bildseitige Hauptebene*  $H_1$  bzw.  $H_2$  einführt (Abb. 19.23).

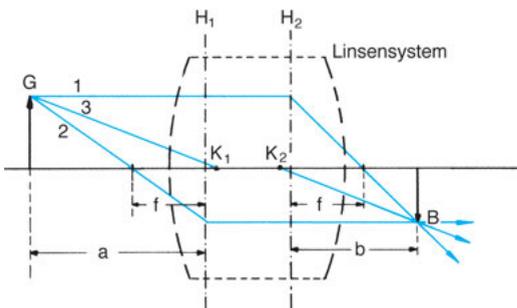


Abb. 19.23 Kardinalelemente von Linsen.

Misst man die Gegenstandsweite  $a$  von der gegenstandsseitigen, die Bildweite  $b$  von der bildseitigen Hauptebene aus, so gilt die Abbildungsgleichung (19-11) auch für Linsensysteme oder für Linsen, deren Dicke groß ist. Beim Auge liegen die Hauptebenen 1,35 mm bzw. 1,65 mm hinter dem Hornhautscheitel (siehe Abb. 19.33b).

Mit den Hauptebenen führt man ein optisches Ersatzbild ein, bei dem die Wege der Lichtstrahlen und ihre Brechungen *innerhalb* des Linsensystems außer acht gelassen werden. Wichtig sind nur mehr die Lichtstrahlen zwischen Gegenstand und Objektiv und zwischen Objektiv und Bild.

Die beiden Hauptebenen brauchen übrigens nicht innerhalb des Linsensystems zu liegen. Einige Beispiele, bei denen dies nicht der Fall ist, zeigt Abb. 19.24. Durch geeignete Wahl der Lage der Hauptebenen kann man z. B. sehr kompakte, kleine Teleobjektive für Fotoapparate konstruieren. Auch in Operationsmikroskopen liegt eine Hauptebene weit vor dem Objektiv, um viel freien Raum vor dem Operationsfeld zu schaffen.

Die Hauptebenen lassen sich durch folgende Konstruktion *fiktiver* Strahlen (Abb. 19.23) finden: Achsenparallel einfallende Strahlen (1) sollen das System unbeeinflusst bis zur bildseitigen Hauptebene  $H_2$  durchlaufen und werden dort durch einmalige Brechung wie bei einer dünnen Linse zum bildseitigen Brennpunkt hin gebrochen. Durch den gegenstandsseitigen Brennpunkt gehende Strahlen (2) dagegen sollen an der gegenstandsseitigen Hauptebene  $H_1$  eine einmalige Brechung erfahren und durchlaufen dann als Parallelstrahlen das System. Den dritten ausgezeichneten Strahl des abbildenden Strahlengangs (Kap. 19.4.8), den Mittelpunktsstrahl, kann man in Linsensystemen nicht einzeichnen. Es gibt jedoch bei allen Abbildungen einen fiktiven Strahl, der in seiner Richtung

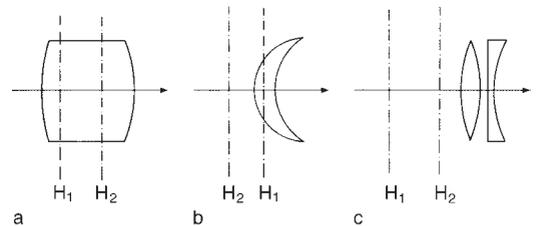


Abb. 19.24 Lage der Hauptebenen  $H_1$  und  $H_2$  von zwei Linsen und einem Linsensystem.

durch das System nicht abgelenkt, sondern nur parallel versetzt wird, nämlich den Strahl (3). Seine Schnittpunkte mit der optischen Achse sind die *Knotenpunkte*  $K_1$  und  $K_2$ . In Abb. 19.23 ist direkt zu sehen, dass die *dünne Linse* sich als Spezialfall ergibt, wenn die Hauptebenen im Innern der Linse zusammenfallen.

Bei Einführung von Hauptebenen und Knotenpunkten — wir bezeichnen sie als *Kardinalelemente* eines Linsensystems — lässt sich eine Abbildung also ähnlich einfach berechnen oder konstruieren wie bei dünnen Linsen. Dies gilt speziell auch für das Auge und dessen Korrekturlemente (Haftschalen oder Brillen). Wir müssen uns dabei aber vor Augen halten, dass die wirklichen Strahlen *innerhalb* des Systems ganz anders verlaufen als die in Abb. 19.23 gezeigten fiktiven Strahlen.

### 19.4.8 Konstruktion von Strahlengängen

Jede optische Abbildung lässt sich im Prinzip exakt berechnen; mit der *Abbildungsgleichung* Gl. (19.11) geht das nur, wenn man sich auf achснаhe Strahlen beschränkt. Übersichtlicher als die numerische Auswertung der Abbildungsgleichung und daher weitgehend üblich ist, zum Entwurf und zum Verständnis eines optischen Aufbaus den *optischen Strahlengang* mit den in Kap. 19.2 zusammengestellten Symbolen heranzuziehen, und die Abbildung zeichnerisch zu ermitteln.

Um den Strahlengang übersichtlich zu zeichnen, wählt man aus dem gesamten Bündel möglicher, divergent vom Gegenstand ausgehender Lichtstrahlen nur einige aus. Man zeichnet zur grafischen Konstruktion des Bildes  $B$  von *einem* Punkt des Gegenstandes  $G$  solche Strahlen, deren Verlauf ohne weitere Zuhilfenahme der Abbildungsgleichung oder des Brechungsgesetzes bekannt ist. Ihr Schnittpunkt liefert den zugehörigen Bildpunkt.

Diese *ausgewählten Strahlen* sind für ein reelles Bild einer Sammellinse und für ein virtuelles Bild einer Zerstreuungslinse in Abb. 19.25 gezeichnet:

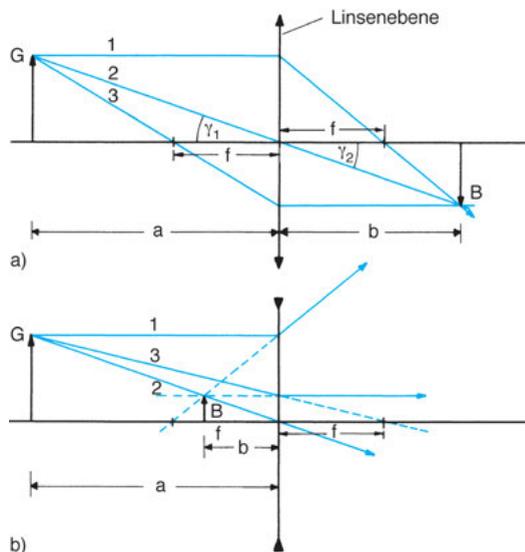
1. Der *Parallelstrahl* (1) verläuft vom Gegenstandspunkt parallel zur optischen Achse und wird daher zum Brennpunkt hin gebrochen. (Bei der Sammellinse ist es der hinter der Linse liegende Brennpunkt; bei der Zerstreuungslinse zeichnet man den virtuellen Strahl zu dem Brennpunkt, der vor der Linse liegt.)

2. Der *Brennstrahl* (3) geht durch einen Brennpunkt und wird daher so gebrochen, dass er danach parallel zur optischen Achse verläuft. (Bei der Sammellinse ist es der vor der Linse liegende, bei der Zerstreuungslinse der hinter der Linse liegende Brennpunkt.)

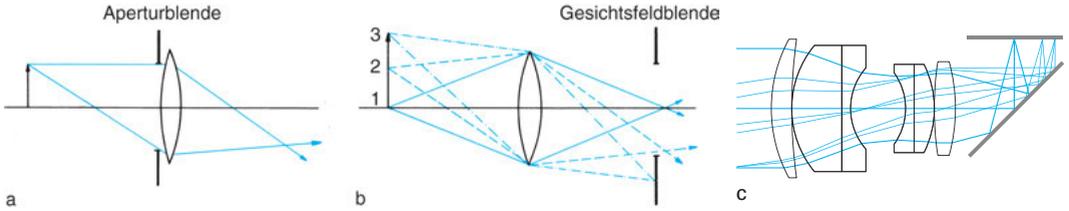
3. Der *Mittelpunktstrahl* (2) geht durch den Durchstoßpunkt der optischen Achse und wird nicht gebrochen (da auf der optischen Achse die zugehörigen Tangentialflächen auf den Linsenflächen parallel sind).

Das reelle Bild liegt auf der dem Gegenstand entgegengesetzten Seite der Linse, das virtuelle Bild hingegen auf derselben Seite wie der Gegenstand.

Die Strahlengänge der Abb. 19.25 nennt man *Abbildende Strahlengänge*. Die drei Strahlen sind dabei nützliche Hilfslinien, fiktive Strahlen, die allerdings nicht im Bündel der wirklichen Strahlen enthalten sein müssen, welche den Bildpunkt erzeugen. So wird, wenn



**Abb. 19.25** Konstruktion von Strahlengängen a) an der Sammellinse und b) an der Zerstreuungslinse.



**Abb. 19.26** a), b): Verwendung von Blenden im Strahlengang. a) Aperturblende, b) Gesichtsfeldblende. c) Mit einem Strahlenverfolgungsprogramm erzeugter Strahlengang für eine Anordnung aus 6 Linsen und einem Spiegel.

man eine Kirche knipsen will, der von der Turmspitze ausgehende Parallelstrahl nie auf das vergleichsweise winzige Fotoobjektiv treffen.

Um die tatsächlich durch eine vorgegebene Linse laufenden Lichtstrahlen darzustellen, zeichnet man den *Bündelstrahlengang*. Dieser gibt die Begrenzungsstrahlen des wirklich vorhandenen Lichtbündels an. Der Querschnitt dieses Bündels ist durch *Blendenöffnungen* begrenzt, beispielsweise durch die Linsenfassung. Im Gegensatz zum Abbildenden Strahlengang, der Auskunft über die Bildlage gibt, ermöglicht der Bündelstrahlengang Aussagen über die relative Helligkeit von Bildpunkten, über das Gesichtsfeld und über Abbildungsfehler. Als Beispiel sind in Abb. 20.4 beide Strahlengänge für das Mikroskop dargestellt.

Heute gibt es Computer-Programme zur Berechnung beliebig komplizierter Strahlengänge, sogenannte *Strahlverfolgungsprogramme* oder *ray-tracing-Programme*. Abb 19.26c zeigt einen Strahlengang für die Kombination eines 6-Linsen-Objektives und eines unter 45° geneigten Planspiegels. Das Bild entsteht auf dem waagerechten Schirm, auf dem sich ein fotografischer Film befinden könnte.

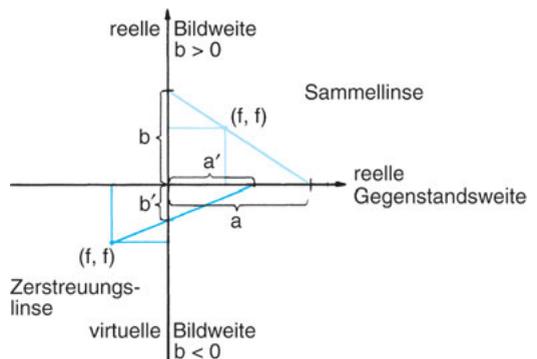
**Die Wirkung von Blenden** Zwei Blenden begrenzen im wesentlichen das tatsächlich durch ein optisches System laufende Strahlenbündel, die *Aperturblende* (Abb. 19.26a) und die *Gesichtsfeldblende* (Abb. 19.26b). Die Aperturblende bestimmt die maximalen Öffnungswinkel der von Gegenstandspunkten ausgehenden und in das optische System eintretenden Lichtbündel und damit die durch das System übertragene Lichtleistung, d. h. die Bildhelligkeit. (Ein weit geöffnetes Strahlenbündel liefert ein helleres Bild als ein schmales Bündel.) Auch für das Auflösungsvermögen optischer Vergrößerungsgeräte ist der Öffnungswinkel, wie wir in Kap. 20.3.3 sehen werden, von Bedeutung.

Als Maß der Aperturblende bei einer Linse oder einem Objektiv gibt man die *relative Öffnung* an, die als das Verhältnis von Blendendurchmesser zu Linsenbrennweite definiert ist. Sie charakterisiert die *Lichtstärke* der Linse. Lichtstarke Fotoobjektive haben beispielsweise eine relative Öffnung von 1 : 1,4 (s. auch Kap. 20.9).

Als *Gesichtsfeld* bezeichnet man diejenige Fläche in der Gegenstandsebene, aus welcher Strahlen durch das abbildende System gelangen. Beim Mikroskop beispielsweise ist das Gesichtsfeld derjenige Objektbereich, den man, ohne das Objekt zu verschieben, über-

blicken kann. Das Gesichtsfeld im Mikroskop ist durch eine schwarze Umrandung begrenzt, die durch die Gesichtsfeldblende (Abb. 19.26b) entsteht.

**Das Czerny-Abbildungsdiagramm** Die vier Abbildungsmöglichkeiten mit Sammellinsen – vergrößert, verkleinert, virtuell oder reell – lassen sich in einem Diagramm zusammenfassen, das wir als grafische Darstellung der Abbildungsgleichung (Gl. (19-11)) auffassen können, und das die Konstruktion von Strahlengängen sehr vereinfacht. Dazu tragen wir, wie in Abb. 19.27 skizziert, die Gegenstandsweite  $a$  gegen die Bildweite  $b$  auf. Bei reellen Bildern liegen die Bildweiten auf der positiven Halbachse ( $b > 0$ ), bei virtuellen dagegen auf der negativen Halbachse ( $b < 0$ ). Gegenstandsweiten sind normalerweise stets positiv und liegen daher auf der positiven Halbachse. Nun zeichnen wir den Punkt  $(f, f)$  ein, wobei  $f$  die Brennweite der verwendeten Linse ist. Bei einer Sammellinse ist  $f$  positiv, und der Punkt liegt im rechten oberen Quadranten, bei ei-



**Abb. 19.27** Abbildungsdiagramm (nach Marianus Czerny). Konstruiert sind das reelle Bild einer Sammellinse ( $f > 0, a > 0, b > 0$ ) und das virtuelle Bild einer Zerstreuungslinse ( $f < 0, a' > 0, b' < 0$ ).

ner Zerstreuungslinse liegt er im linken unteren Quadranten, da hier  $f$  negativ ist. Wenn nun die Gegenstandsweite  $a$  auf der Gegenstandsachse eingezeichnet ist, so findet man die zugehörige Bildweite  $b$ , indem man  $a$  mit dem Punkt  $(f, f)$  durch eine Gerade verbindet, diese weiter verlängert und ihren Schnittpunkt mit der Bildachse aufsucht.

Anhand des Diagramms kann man sich auch leicht verständlich machen, wie bei der Sammellinse reelle in virtuelle Bilder übergehen, wenn  $a$  so klein gewählt wird, dass die Brechkraft nicht mehr ausreicht, die divergenten Objektstrahlen konvergent zu machen. Der Übergang erfolgt bei  $a = f$ , wobei im Czerny-Diagramm  $b$  gegen  $+\infty$  läuft und dann nach  $-\infty$  umschlägt.

Aus der Konstruktion ergibt sich beispielsweise auch: Eine Sammellinse kann reelle wie virtuelle Bilder liefern, eine Zerstreuungslinse nur virtuelle Bilder. In Abb. 19.25 sind ein reelles Bild einer Sammellinse (Gegenstandsweite  $a$ , Bildweite  $b$ ) und ein virtuelles Bild einer Zerstreuungslinse (Gegenstandsweite  $a'$ , Bildweite  $b'$ ) gezeigt.

Mit Hilfe der Beziehung  $b/a = B/G$  (Gl. (19-16)), wobei  $B$  und  $G$  Bild- bzw. Gegenstandsgröße sind, finden wir außerdem unmittelbar den Abbildungsmaßstab der Abbildung (Kap. 19.4.9).

Zur Orientierung der Bilder: Reelle Bilder sind stets umgekehrt, d. h. sie stehen auf dem Kopf, wie etwa das Bild im Auge oder im Fotoapparat. Virtuelle Bilder dagegen sind aufrecht, wie z. B. das Bild, das man mit der Lupe sieht (Kap. 19.5.6).

### 19.4.9 Optische Vergrößerung

Für die Anwendung optischer Abbildungen ist die Größe des Bildes, bezogen auf die Größe des Gegenstandes entscheidend wichtig. Mit optischen Instrumenten wie Lupe oder Mikroskop vermögen wir sehr kleine Gegenstände vergrößert sichtbar zu machen. Verkleinerte Abbildungen werden in Fotoapparaten oder Filmkameras und auch durch das Auge entworfen.

#### Der Abbildungsmaßstab

$$V_A = \frac{B}{G}, \quad (19-15)$$

wobei  $B$  und  $G$  die Größen von Bild und Gegenstand bedeuten, gibt an, ob es sich um ein verkleinertes Bild ( $V_A < 1$ ) oder ein vergrößertes Bild ( $V_A > 1$ ) handelt.

In Abb. 19.25a sind die Winkel  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  gleich, also gilt  $G/a = \tan \gamma_1 = \tan \gamma_2 = B/b$ . Damit erhalten wir für  $V_A$ :

$$V_A = \frac{B}{G} = \frac{b}{a}. \quad (19-16)$$

Die Gegenstandsgröße verhält sich also zur Bildgröße wie die Gegenstandsweite zur Bildweite. Diese Beziehung gilt auch für virtuelle Bilder, wobei man aber den Absolutbetrag  $B/G = |b/a|$  verwendet, da hier  $b$  negativ ist, der Abbildungsmaßstab aber eine positive Größe sein soll.

Aus Gl. (19-16) folgt, dass bei einer vergrößerten Abbildung das Bild weiter von der Linse entfernt ist als der Gegenstand ( $b > a$ ), und dass die Vergrößerung mit dem Bildabstand wächst. Bild und Gegenstand sind gleich groß (*1:1-Abbildung*), wenn  $b = a$  ist. Aus Gl. (19-11) folgt, dass dies nur für eine Gegenstandsweite möglich ist, nämlich für den Abstand der doppelten Brennweite:  $b = a = 2f$ .

Mit einfachen Sammellinsen kann man mit hoher Bildqualität maximal  $V_A \approx 10$  erreichen. Zwar sollten sich nach der Abbildungsgleichung (Gl. (19-11)) beliebig große Bilder erzeugen lassen, aber die Abbildungsfehler einer einfachen Sammellinse verschlechtern bei hohen Vergrößerungen derart die Bildqualität, dass man zu komplizierten Linsensystemen greifen muss; mit guten Objektiven lassen sich dann Abbildungsmaßstäbe z. B. mit dem Mikroskop von  $V_A \approx 100$  erreichen.

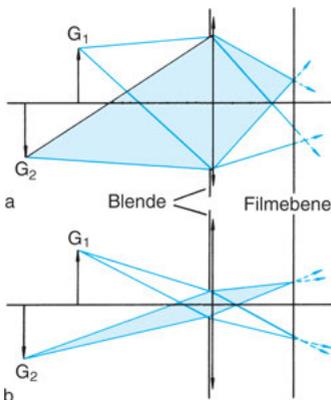
### 19.4.10 Die Schärfentiefe (Tiefenschärfe)

Wollen wir ein *räumlich* ausgedehntes Objekt abbilden – etwa eine Landschaft fotografieren – so wird nach Gl. (19-11) nur eine Gegenstandsebene im Abstand  $a$  auf dem Film im Abstand  $b$  von der bildseitigen Hauptebene des Objektivs scharf abgebildet. In der Filmebene im Abstand  $b$  erscheinen Gegen-

stände aus anderen Entfernungen mehr oder weniger unscharf; aus Gegenstandspunkten werden dadurch Bildscheibchen. Bei der Fotografie nimmt man diese Unschärfe in Kauf, solange sie so gering bleibt, dass sie mit dem bloßen Auge auf dem Bild nicht störend wahrzunehmen ist. Zudem verliert das Bild nichts an maximal möglichem Informationsgehalt, wenn diese Bildscheibchen nicht größer sind als die Körnigkeit des Filmmaterials (d. h. die Größe der Silberhalogenidkristalle) oder der Pixelabstand eines digitalen Bildsensors.

Den Bereich derjenigen Gegenstandsweiten in der Umgebung der eingestellten (scharfen) Gegenstandsweite, bei denen die Bildscheibchen diese Größe nicht wesentlich überschreiten, nennt man den *Schärfentiefenbereich*.

Die Schärfentiefe (bisweilen auch als *Tiefenschärfe* bezeichnet) ist abhängig von der eingestellten Gegenstandsweite; sie ist um so geringer, je kleiner die Gegenstandsweite ist. Während sie beispielsweise bei fotografischen Landschaftsaufnahmen viele Kilometer bis zum Horizont betragen kann, verwendet man bei Mikroskopie-Aufnahmen spezielle Dünnschnitte, damit weiter entfernte Objektbereiche gar nicht existieren, die durch ihre Unschärfe die Bildqualität beeinträchtigen könnten.



**Abb. 19.28** Zur Schärfentiefe: Eine den Gegenstand  $G_2$  auf die Filmebene scharf abbildende Linse entwirft von einem näher (oder ferner) liegenden Gegenstand  $G_1$  in der Filmebene ein Bildscheibchen. Dieses ist a) groß bei großer Blendöffnung (starke Unschärfe), b) kleiner bei enger Aperturblende (geringere Unschärfe).

Wie Abb. 19.28 zeigt, hängt die Schärfentiefe zudem von der Öffnung der Lichtbündel ab. Durch Einengung der Lichtbündel mit einer Aperturblende kann man also die Schärfentiefe einer Abbildung erhöhen. In Kameraobjektiven ist für diesen Zweck eine Blende eingebaut. Im Auge öffnet sich bei schwachen Lichtstärken die Irisblende automatisch und vermindert den Schärfenbereich. Wichtig ist dies auch für Fehlsichtige: Sie können im Dämmerlicht noch schlechter sehen.

### 19.4.11 Abbildungsfehler

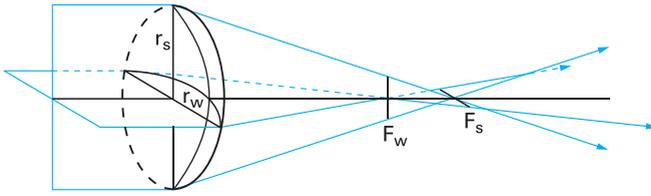
Der Planspiegel ist das einzige optische Instrument, das für beliebige Abbildungen keine Abbildungsfehler erzeugt. Optische Abbildungen mit Linsen dagegen sind durch vielfältige Abbildungsfehler beeinträchtigt. Durch zusätzliche Korrekturlinsen können diese aber verringert werden. Ein gutes Fotoobjektiv enthält z. B. zu diesem Zweck bis an die 10 Linsen, die aus unterschiedlichen Glassorten bestehen können, anstelle einer Einzellinse. Neben dem schon in Kap. 19.4.1 behandelten Öffnungsfehler gehören zu den Abbildungsfehlern u. a.:

#### Der Astigmatismus nichtsphärischer Linsen

Unter den Abbildungsfehlern hat — nach der in Kap. 19.5.2 behandelten Fehlsichtigkeit — der Astigmatismus in der Augenheilkunde die größte Bedeutung, denn er tritt häufig als Fehler des Auges auf und muss durch geeignete Brillengläser korrigiert werden.

Es kommt allgemein zu diesem Bildfehler, wenn eine Linsenfläche nicht kugelförmig, sondern oval ist, d. h., wenn die Linse in zwei zueinander senkrechten Ebenen verschiedene Krümmungsradien und damit nach Gl. (19-12) verschiedene Brennweiten hat (Abb. 19.29).

Dadurch wird ein einfallendes paralleles Strahlenbündel (das von einer sphärischen Linse in einem Brennpunkt gebündelt würde) in verschiedenen Abständen in zwei zueinander senkrechten Striche abgebildet. Von einem Quadrat als Gegenstand werden dann z. B. in einer Bildweite nur die senkrechten, in einer anderen nur die waagerechten Seiten scharf abgebildet. Die dazwischen liegenden Bilder sind ganz unscharf (Abb. 19.30). Die astigmatischen Bilder sind zudem verzerrt;

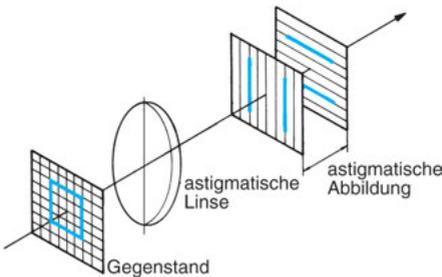


**Abb. 19.29** Astigmatismus einer ovalen Linse (waagerechter Krümmungsradius  $r_w <$  senkrechter Krümmungsradius  $r_s$ ).  $F_w$  und  $F_s$ : zugehörige „Brenn-Linien“

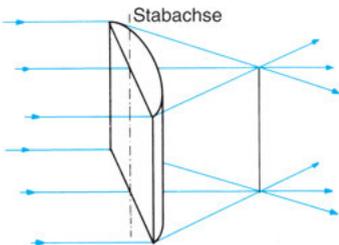
aus dem Quadrat wird ein Rechteck, weil sich wegen der verschiedenen Brechkraften auch die Abbildungsmaßstäbe (Kap. 19.4.9) in den zwei zueinander senkrechten Richtungen in der Bildebene unterscheiden.

Das extreme Beispiel einer astigmatischen Linse ist der halbzylindrische Glasstab, auch *Zylinderlinse* genannt (Abb. 19.31): In der zur Stabachse senkrechten Ebene ist der Krümmungsradius endlich, so dass eine endliche Brechkraft resultiert, in der zur Stabachse parallelen Ebene dagegen ist der Krümmungsradius unendlich, und die Brechkraft ist Null. Ein paralleles Lichtbündel wird daher durch eine Zylinderlinse nicht in einem Punkt (wie bei der sphärischen Linse), sondern in einem Strich gesammelt.

Beim Auge kommt es häufig vor, dass die Hornhaut ungleichmäßig gekrümmt ist, wodurch eine astigmatische Abbildung entsteht.



**Abb. 19.30** Abbildung mit einer astigmatischen Linse.



**Abb. 19.31** Astigmatismus einer Zylinderlinse.

Zur Korrektur des Astigmatismus einer ovalen brechenden Fläche oder Linse (z. B. einer deformierten Hornhaut), die in zwei zueinander senkrechten Ebenen die Brechkraften  $1/f_1$  und  $1/f_2$  haben möge, kann man daher eine geeignete Zylinderlinse der Brechkraft  $1/f_3$  hinzufügen, die so angeordnet wird, dass die niedrigere Brechkraft, z. B.  $1/f_2$ , verstärkt wird, ohne die höhere, z. B.  $1/f_1$ , zu verändern.

Für eine astigmatismusfreie Abbildung muss die Krümmung der Zylinderlinse, d. h. ihre Brechkraft  $1/f_3$ , dazu so gewählt werden, dass die resultierenden Brechkraften in beiden Ebenen gleich werden. Ist der Abstand zwischen astigmatischer Linse und Korrekturlinse klein, so ist nach Gl. (19-13) die Bedingung

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \tag{19-17}$$

zu erfüllen damit in der Bildebene, auf der Netzhaut, ein scharfes Bild entsteht.

Die Stärke des Astigmatismus des Auges beschreibt man durch den Unterschied zwischen der größten Brechkraft  $1/f_1$  und der kleinsten Brechkraft  $1/f_2$  in aufeinander senkrechten Strahlenebenen. Die Größe

$$\delta = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \tag{19-18}$$

heißt *astigmatische Differenz*. Sie wird, wie die Brechkraft, in Dioptrien gemessen.

**Der Astigmatismus sphärischer Linsen** Fällt ein Lichtbündel *schräg* auf eine sphärisch gekrümmte Linsenfläche, so sind in zwei zueinander senkrechten Einfallsebenen die Krümmungsradien ebenfalls verschieden. Abbildungen eines Gegenstandes durch Strahlenbündel, die gegen die optische Achse geneigt sind, sind also auch bei sphärischen Linsen astigmatisch.

**Der Öffnungsfehler oder sphärische Fehler** Bei Linsen mit sphärisch gekrümmten Flächen tritt, wie wir in Kap. 19.4.1 gesehen haben, für mäßige und große Öffnungswinkel ( $>5^\circ$ ) der Öffnungsfehler auf. Das Brechungsgesetz ergibt für *achsferne* Strahlen bei einer Sammellinse einen Bildpunkt, der näher an der Linse liegt als für *achsnah*e Strahlen. Dieser Abbildungsfehler lässt sich verkleinern, indem man die gesamte Brechung in mehrere Schritte jeweils geringerer Brechung zerlegt, d. h. Systeme mit mehreren Linsen verwendet, so dass schließlich die Einfallswinkel auf die einzelnen Linsenoberflächen auch für achsferne Strahlen klein werden.

Auch bei sphärischen Hohlspiegeln tritt der Öffnungsfehler auf; anstelle des Brennpunktes entsteht die komplizierte, *Kaustik* genannte Figur (Kap. 19.3.2.2). Er lässt sich nur korrigieren, indem man den Spiegel asphärisch macht. Ein Beispiel ist der *Parabolspiegel*, der parallele Strahlen in einem Punkt sammelt, unabhängig davon, wie breit das Bündel ist, also keine Kaustik (Abb. 19.7) zeigt. Bringt man, umgekehrt, eine Lichtquelle in diesen Punkt, so sendet der *Parabol-Scheinwerfer* ein Parallel-Lichtbündel besonders großer Reichweite aus.

**Die Bildfeldwölbung** Bei einfachen Linsen liegt das Bild einer Gegenstandsebene nicht exakt in einer Ebene, sondern auf einer gekrümmten Bildfläche. Fotografiert man ein solches Bild, so wird es zum Rand hin unscharf, da dort die Bildpunkte nicht mehr in der Ebene der Fotoschicht liegen. Durch Linsensysteme, die man *Aplanate* nennt, lässt sich das Bildfeld ebenen. Beim Auge wird dieser Fehler durch die Krümmung der Netzhaut, auf der das Bild entsteht, ausgeglichen.

**Der Farbfehler oder chromatische Fehler** Er wird durch die *Dispersion* (Kap. 18.3.3) des Linsenmaterials verursacht, tritt also bei Spiegeln nicht auf. Da der Brechungsindex  $n$  von der Wellenlänge des verwendeten

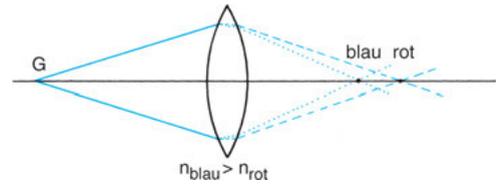


Abb. 19.32 Farbfehler einer Sammellinse.

ten Lichts abhängt,  $n = n(\lambda)$ , hat nach Gl. (19-12) jede Linse für verschiedenfarbiges Licht unterschiedliche Brennweiten (Abb. 19.32). Ein Gegenstand, der weißes Licht aussendet, wird also hintereinander liegende Bilder verschiedener Farbe liefern, und auf dem Bildschirm sind daher Bildkonturen von einem Farbsaum umgeben. Der Farbfehler kann durch Kombinationen von Sammel- und Zerstreuungslinsen aus Linsenmaterial mit unterschiedlicher Dispersion, sogenannte *Achromate*, vermindert werden.

Auch beim Auge tritt der Farbfehler auf; da das Auge aber für Rot und Blau, also an den Grenzen des sichtbaren Spektrums, weniger empfindlich ist als für Gelb und Grün, fallen die farbigen Säume in der Regel nicht störend auf.

**Die Verzeichnung** Sie beruht nicht auf Linseneigenschaften, sondern kann auftreten, wenn Blenden im Strahlengang angeordnet werden, etwa zur Erhöhung der Schärfentiefe (Kap. 19.4.10). Liegt die Blende nicht in unmittelbarer Nähe der Linse, sondern zum Gegenstand hin verschoben, so werden weit von der optischen Achse liegende Gegenstandsbereiche mit kleinerem Abbildungsmaßstab abgebildet als achsnah. Als Folge davon wird ein Quadrat *tonnenförmig* verzeichnet. Bei anderer Lage der Blende kann die Verzeichnung auch *kissenförmig* sein.

## 19.5 Das Auge

Kommunikation über den Bild-Informationskanal erfolgt durch den Sehapparat aus Auge, Sehnerv und Gehirn. Dabei kommt dem Auge nur die Aufgabe zu, ein Bild auf der mit Licht- und Farbsensoren bestückten Netzhaut zu erzeugen, und das Bild durch diese Sensoren für den Transport durch den Sehnerv zu digitalisieren, also in Pixel umzuwandeln.

Die eigentliche Bildverarbeitung erfolgt im Gehirn. Sie ist außerordentlich komplex und bisher kaum erforscht. Signalzerlegung und Neuordnung zur Speicherung erfolgt, soweit man weiß, nicht nach der realen räumlichen Strukturanordnung, sondern nach allgemei-

nen Merkmalen, wie Farbe, parallele Linien, zeitliche Veränderungen etc.

Das menschliche Auge stellt, physikalisch gesehen, ein kompliziertes optisches System dar, das folgende Funktionen erfüllt:

1. Es wird in jedem der beiden Augen ein Bild eines Ausschnittes der direkten Umgebung erzeugt (*optische Abbildung*).
2. Durch Rezeptoren werden elektrische Pulsfolge-Signale erzeugt, die über Nervenfasern zum Gehirn geleitet und dort weiterverarbeitet werden (*Bildverarbeitung*).

3. Durch einen unbewusst erfolgenden Regelungsvorgang wird die Bildschärfe im Auge geregelt (*Akkomodation*).
4. Entsprechend wird auch die Bildhelligkeit geregelt (*Adaption*).
5. Durch Mischung der (zweidimensionalen) Netzhaut-Bilder beider Augen im Gehirn entsteht ein räumlicher Eindruck der Gegenstände (*räumliches Sehen*).
6. Da es auf der Retina unterschiedlich farbempfindliche Rezeptoren gibt, kann aus der Farbmischung des ins Auge fallenden Lichtbündels ein Farbeindruck erzeugt werden (*Farbsehen*).

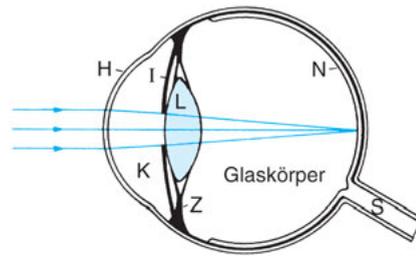
Im folgenden werden einige physikalische Informationen zu diesen Funktionen zusammengestellt. Es wird sich dabei zeigen, dass das Auge ein faszinierendes Beispiel dafür ist, wie die Natur sich vorgegebenen physikalischen Bedingungen optimal anpasst.

### 19.5.1 Optische Abbildung im Auge

Vier Teile des Augapfels (Abb. 19.33a) tragen zur optischen Abbildung bei: Die Hornhaut, das Kammerwasser, die Linse und der gallertartige Glaskörper. Kammerwasser und Glaskörper besitzen beide einen Brechungsindex von  $n = 1,336$ . Die Linse wirkt wie eine einfache Bikonvexlinse mit dem Brechungsindex  $n = 1,437$ . Tatsächlich besteht sie nicht aus homogenem Material, sondern aus einigen tausend übereinanderliegenden Schichten, die sich in ihrem Brechungsindex geringfügig voneinander unterscheiden, so dass das Licht an jeder Schichtgrenze gebrochen wird, die Ablenkung der Lichtstrahlen also über die ganze Linse verteilt in vielen Einzelschritten erfolgt.

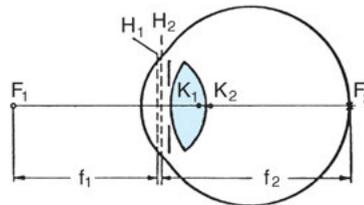
Brechende Flächen sind die gekrümmten Grenzflächen Luft/Hornhaut, Hornhaut/Kammerwasser, Kammerwasser/Linse und Linse/Glaskörper.

Die Brechkraft dieses gesamten optischen Systems beträgt im Ruhezustand etwa 60 Dioptrien (Dptr). Die zugehörige Brennweite ist  $f \simeq 16,7$  mm. Den Hauptbeitrag zur Abbil-



a

H – Hornhaut                      N – Netzhaut  
 I – Iris (Blende)                Z – Ziliarmuskel  
 K – Kammerwasser              S – Sehnerv  
 L – Linse



b

**Abb. 19.33** a) Das Auge als optisches Instrument. b) Lage der Brennpunkte  $F_1$ ,  $F_2$ , der Hauptebenen  $H_1$ ,  $H_2$  und der Knotenpunkte  $K_1$ ,  $K_2$  im Auge (nach Bergmann/Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3, de Gruyter).

dung eines Gegenstandes auf die lichtempfindliche Netzhaut liefert die Grenzfläche Luft/ Hornhaut (sie hat eine Brechkraft von 43 Dptr). Die Linse besorgt im wesentlichen nur die Feineinstellung der Bildschärfe für verschiedene Gegenstandsweiten.

Beobachtungsobjekte können entweder Gegenstände selbst oder aber reelle oder virtuelle Bilder davon sein, die durch optische Instrumente erzeugt wurden. Die Art des auf der Netzhaut erzeugten Bildes ist überraschend, da sie so gar nicht mit unserem subjektiven Seh-Eindruck übereinstimmt: Das reelle Bild auf der Netzhaut ist gegenüber dem zu betrachtenden Gegenstand umgekehrt und wegen der kurzen Brennweite des Auges stets extrem verkleinert. Ein Mensch in 20 m Entfernung wird 1,5 mm groß und auf dem Kopf stehend auf der Netzhaut abgebildet.

Von der physikalischen Optik her beurteilt, ist die Qualität der Abbildung im Auge nur mäßig. Das gilt sowohl für den Strahlengang als auch für den Detektor, die gerasterte Netz-

haut. Erst das Gehirn macht aus dem Auge ein zu bewunderndes Sinnesorgan.

Die Größenbegrenzung des Wahrnehmungsvermögens des Auges liegt darin, dass z. B. zwei nebeneinander liegende Gegenstandspunkte nicht mehr getrennt beobachtet (*aufgelöst*) werden können, wenn das Auge sie unter einem Winkel sieht, der kleiner ist als etwa eine Bogenminute. Dann nämlich fallen deren Bilder auf der Netzhaut nicht mehr auf verschiedene Empfangszellen (*Zäpfchen*, deren minimaler Abstand etwa  $5\ \mu\text{m}$  beträgt), sondern auf ein und dasselbe Zäpfchen und erzeugen nur ein Signal. Dem Winkel von einer Bogenminute entspricht ein Abstand der beiden Gegenstandspunkte von  $1/10\ \text{mm}$ , wenn sie sich in *deutlicher Sehweite*  $s_0 = 25\ \text{cm}$  vor dem Auge befinden.

Die Abbildung im Auge ist aus drei Gründen kompliziert: Zum einen sind die Abstände der brechenden Elemente und ihre Dicken nicht klein gegen die Brennweiten, und zum anderen liegen Gegenstand und Bild in Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex. Daher sind die Kardinalpunkte des Auges (Kap. 19.4.7) wichtig; sie sind in Abb. 19.33b maßstabgerecht dargestellt. Zum dritten durchdringt das Licht eine inhomogene Schicht unterschiedlicher Zellen und der Sehnerven, bevor es die Sehzellen (Sensoren) erreicht (Abb. 19.35).

Das Bild im Auge wird auf der Netzhaut entworfen, und damit liegt die Bildweite fest, so dass scharfe Bilder von Gegenständen in verschiedenen Abständen nur dadurch erzielt werden können, dass die Brechkraft der Linse verändert wird. Mit anderen Worten: Gl. (19-11) ist bei festem  $b$  nur dann zu erfüllen, wenn  $f_{\text{Linse}}$  für jedes  $a$  geeignet eingestellt wird. Dies geschieht dadurch, dass der Krümmungsradius der Linse durch Verformung des elastischen Linsenkörpers mit dem Ziliarmuskel und den Zonulafasern verändert wird (*Akkommodation*). Bei Einstellung des Auges auf Unendlich ist der Ziliarmuskel entspannt und die Zonulafasern sind angespannt; dadurch wird der Linsenkörper gedehnt und abgeflacht. Bei Akkommodation auf ein näher liegendes Objekt wird der Ziliarmuskel angespannt und die Zonulafasern entspannen; dadurch geht die Dehnung der Linse zurück, sie wölbt sich stärker und ihr Krümmungsradius wird kleiner. Nach Gl. (19-12) wird somit die Brechkraft  $1/f_{\text{Linse}}$  größer.

Die beiden Grenzen des Akkomodationsbereiches werden durch den *Fernpunkt* (beim normalsichtigen Auge im Unendlichen) und den *Nahpunkt* gekennzeichnet. Der Nahpunkt liegt bei Jugendlichen in  $s_N = 10\ \text{cm}$  Entfernung, infolge einer Erschlaffung des Ziliarmuskels rückt er mit zunehmendem Alter vom Auge weg und liegt z. B. bei einer 60jährigen Person im Mittel

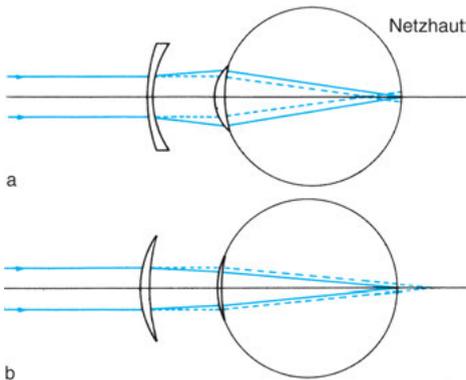
bei  $s_N \approx 200\ \text{cm}$ . Um den ganzen Entfernungsbereich vom Unendlichen bis zum Nahpunkt bei  $s_N = 10\ \text{cm}$  zu überstreichen, genügt es, dass die Linse um etwa  $0,5\ \text{mm}$  dicker wird. Der Krümmungsradius verändert sich dabei von etwa  $10\ \text{mm}$  auf  $5,3\ \text{mm}$ , was eine Zunahme der Brechkraft um etwa  $14\ \text{Dptr}$  bewirkt.

Aus den Abständen von Fernpunkt und Nahpunkt,  $s_F$  und  $s_N$ , definiert man als Maß der Akkomodationsfähigkeit die *Akkommodationsbreite*  $X = 1/s_N - 1/s_F$ . Sie ist wichtig zur Kennzeichnung der Korrekturmöglichkeit fehlsichtiger Augen durch Brillen und andere Sehhilfen.

In der Natur sind auch andere Methoden der Akkommodation zu finden: Bei vielen Tieren ist die Brechkraft der Augenlinse fest und – wie beim Fotoapparat – wird zur Schärfeneinstellung die Linse verschoben und damit die Bildweite angepasst.

## 19.5.2 Fehlsichtigkeit

Die optisch bedingten Abbildungsfehler, die auch beim gesunden Auge auftreten, wurden in Kap. 19.4.11 zusammengestellt. *Zusätzliche Fehlsichtigkeit* des Auges liegt vor, wenn das Bild im Auge nicht auf der Netzhaut liegt, sondern davor (*Kurzsichtigkeit, Myopie*) oder dahinter (*Übersichtigkeit, Hypermetropie*) (Abb. 19.34). Dies kann seine Ursache in einer zu großen bzw. zu geringen Länge des Auges (normale Länge  $\approx 23\ \text{mm}$ ) bei normalem optischem Apparat und/oder in Störungen des optischen Apparates selbst haben. Durch Sehhilfen (*Brillen* oder *Kontaktlinsen*) kann Fehlsichtigkeit korrigiert werden. Die erforderliche Brechkraft einer Brille ist mit Gl. (19-14) (aber nicht mit Gl. 19.13) zu berechnen, denn Brillengläser werden in einem Abstand vor dem Auge getragen, der von gleicher Größenordnung wie die Brennweite des Auges ist, und daher ist  $D$  in dieser Gleichung nicht zu vernachlässigen. In der Praxis wird die passende Korrekturlinse allerdings nicht berechnet, sondern durch Ausmessen bzw. Probieren gesucht. Die zu schwache Brechkraft des übersichtigen Auges wird dabei durch eine Sammellinse verstärkt (Abb. 19.34b). Das kurzsichtige Auge wird dagegen durch eine Zerstreuungslinse korrigiert, deren (negative) Brechkraft die zu große Brechkraft des Auges nach Gl. (19-14) herabsetzt (Abb. 19.34a). Auch die *Weitsichtigkeit* (d. h. *Alterssichtigkeit*,



**Abb. 19.34** Korrektur der a) Kurzsichtigkeit bzw. b) der Übersichtigkeit des Auges mit einer Zerstreuungs- bzw. Sammellinse (gestrichelte Strahlen: Abbildung eines in  $a \rightarrow \infty$  liegenden Gegenstandes ohne Korrekturlinse).

*Presbyopie*), die auf Mangel an Akkomodationsfähigkeit beruht, kann durch Sammellinsen (allerdings nur für eine begrenzte Akkomodationsbreite) korrigiert werden.

Als Linsenform wählt man für Brillen zu meist den Meniskus, d. h. konkav-konvexe bzw. konvex-konkave Linsen (s. Abb. 19.21, 19.22), da dann die Bildfehler klein bleiben, wenn sich der Augapfel dreht und die Lichtstrahlen aus randnahen Bereichen der Brillengläser kommen.

Eine andere Methode der Korrektur von Fehlsichtigkeit besteht darin, direkt auf die Hornhaut eine *Kontaktlinse* aufzusetzen, die dort durch Adhäsion haftet. Im Wesentlichen wirkt sie dadurch, dass die für die Abbildung wichtige gekrümmte Grenzfläche Luft/Hornhaut durch die Grenzfläche Luft/Kontaktlinse ersetzt wird, deren Krümmung man gerade so wählt, dass es zu einer Korrektur der Fehlsichtigkeit kommt. (Der Beitrag der Grenzfläche Kontaktlinse/Hornhaut zur Abbildung ist wegen des kleinen Brechungsindexunterschiedes zwischen Kontaktlinsenmaterial (Glas oder Plastik) und Hornhaut nur gering.)

### 19.5.3 Empfindlichkeit

Das Auge arbeitet nicht als passives Messinstrument, sondern kann sich selbst aktiv der Helligkeit der Umgebung in extremem

Ausmaß anpassen. Diese *Adaption* erfolgt zum einen durch eine Regelung der Pupillengröße mittels der *Irisblende* (Abb. 19.33a), so dass die *relative Öffnung* (Kap. 19.4.8) des Auges (zwischen 1:2 und 1:8,5) und damit der auf die Netzhaut treffende Lichtstrom variiert werden kann. Wie dieser Regelvorgang im einzelnen abläuft, wird in Kap. 22 beschrieben. Würde die Pupille noch enger gemacht, so würde die Beugung an ihr die Bildschärfe (die, wie wir in Abschnitt 19.5.1 erwähnt haben, durch die Anordnung der Sehzellen in der Netzhaut bestimmt ist) wesentlich beeinträchtigen. Wir werden darauf im nächsten Abschnitt nochmals eingehen.

Zum anderen kann das Auge bei schwachen Lichtreizen auf helligkeitsempfindliche (aber farbunempfindliche) Rezeptoren in der Netzhaut umschalten (*Dämmerungssehen* mittels der Stäbchenzellen, siehe nächsten Abschnitt). Im Experiment zeigt sich aber, dass das Auge etwa 20 min in völliger Dunkelheit bleiben muss, bis es seine höchste Empfindlichkeit erreicht hat. Diese liegt bei einigen Photonen des sichtbaren Lichts. Die Lichtempfindlichkeit des Auges  $L^*$  ist umso geringer, je höher die einfallende Lichtintensität  $L$  ist. Die Helligkeitsempfindung  $\Delta L$  wächst nicht linear mit der Lichtintensität  $L$ , sondern folgt ungefähr deren Logarithmus:  $\Delta L_{\min}^* \propto \Delta L/L$  bzw.  $L^* = L_0 \cdot \log(L/L_0)$ , (wobei  $L_0$  die untere Sehschwelle des Auges bedeutet.)

D. h., es gilt das *Weber-Fechnersche Gesetz* (siehe Kap. 7.2). Das Auge kann zwischen Dämmerung und hellem Sonnenschein 10 Dekaden an Leuchtdichte verarbeiten.

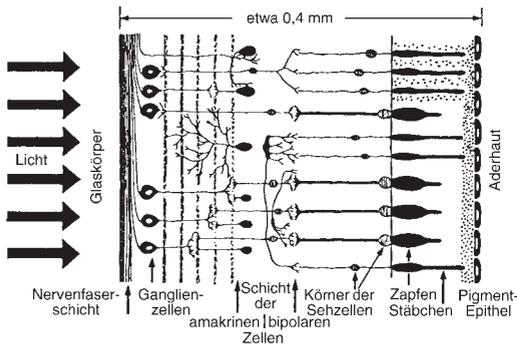
Das Auge misst nicht direkt Lichtintensitäten, vielmehr wird zur Erzeugung eines subjektiven Helligkeitseindrucks die auf die Netzhaut auffallende Lichtleistung während einer gewissen Dauer, der *Summierungszeit*, aufsummiert. Durch ihre Veränderung ist eine weitere Helligkeitsanpassung möglich: Bei Helladaption beträgt sie etwa 0,05 s und steigt bei Dunkeladaption auf 0,5 s.

Infolge dieser Adaptionmöglichkeiten (die freilich das Auge als objektives Messgerät für Lichtintensitäten oder Lichtleistungen un-

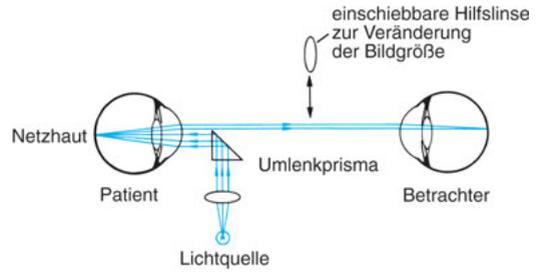
brauchbar machen) ist das Auge dem Unterschied zwischen Tages- und Nachthelligkeit in hervorragender Weise angepasst: Zwischen Blendung und unterer Reizschwelle liegen 12 Zehnerpotenzen der Helligkeit! Die untere Reizschwelle liegt bei etwa  $3 \cdot 10^{-17}$  Watt (bzw.  $2 \cdot 10^{-14}$  Lumen). Das sind etwa 50 Photonen während der Summierungszeit. Schaut man dagegen aus 1 m Entfernung auf eine 100 W-Glühlampe, so trifft die Netzhaut eine Leistung von ca.  $10^{-6}$  W, also das  $10^{11}$ fache! Bei weiterer Steigerung der Strahlungsleistung versagt die Adaption, und das Auge wird geschädigt. Das ist besonders bei den mit Lasern erzeugbaren hohen Strahlungsintensitäten zu beachten (beispielsweise auch bei den heutzutage als Ersatz für den Zeigestock bei Vorträgen benutzten Kleinlasern).

#### 19.5.4 Bildverarbeitung

Den Augenhintergrund überziehen (von außen nach innen) die *Lederhaut*, die *Aderhaut* und die *Netzhaut*; auf der letzteren entsteht das optische Bild. Sie enthält die Licht-Rezeptoren, und zwar die helligkeits- und farbregistrierenden *Zäpfchen-Zellen* und die zahlreicheren, lediglich helligkeitsregistrierenden (aber wesentlich empfindlicheren) *Stäbchen-Zellen*. Die Stäbchen reagieren langsamer auf Lichtpulse als die Zäpfchen-Zellen. Abb. 19.35 zeigt einen mikroskopischen Querschnitt. Diese Zellen erzeugen Signale, die an das Gehirn weitergeleitet werden. Die nachgeschaltete



**Abb. 19.35** Querschnitt durch die Netzhaut eines menschlichen Auges (nach Bergmann/Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3, de Gruyter).



**Abb. 19.36** Prinzip des Augenspiegels (der Name ist irreführend; heute wird die Netzhaut nicht mehr, wie bei Helmholtz, durch einen Hohlspiegel, sondern durch eine Glühlampe und ein Umlenkprisma beleuchtet).

Bildverarbeitung macht aus einer optischen Anordnung mit nur mäßiger Bildqualität ein äußerst sensitives, optimiertes Wahrnehmungsorgan.

Zur Untersuchung des Auges ist es wichtig, die Netzhaut sehen zu können. Dies lässt sich einfach bewerkstelligen, wenn man dazu das abbildende System des Auges selbst verwendet. Bei jeder Abbildung kann man ja Objekt und Bild vertauschen. Würde also die Netzhaut Licht aussenden, dann würde davon ein reelles Bild an derjenigen Stelle außerhalb des Auges entstehen, auf die das Auge gerade akkomodiert ist. Das Problem ist also nur, den Augenhintergrund von außen zu beleuchten. Das geschieht mit dem *Augenspiegel* (Abb. 19.36); in modernen Ausführungen sind eine Lichtquelle und auswechselbare Linsenoptiken eingebaut, die zugleich die Beobachtung mit unterschiedlichen Vergrößerungen ermöglichen.

Die Licht-Rezeptoren sind nicht regelmäßig in der Netzhaut angeordnet. Insgesamt verteilen sich 120 Millionen Stäbchen und 6,5 Millionen Zäpfchen über einen Winkelbereich von etwa  $\pm 60^\circ$  um die Augenachse und legen damit das Gesichtsfeld des Auges fest. Am dichtesten sind sie nahe der Augenachse konzentriert, wo das Bild bei direktem Hinsehen entsteht. Dieser Bereich, der *Gelbe Fleck* (*Fovea centralis*) mit seinem Zentrum, der *Netzhautgrube*, umfasst einen Winkelbereich von  $1^\circ - 1,5^\circ$ . Hier sind die Sehzellen nur etwa  $4 \mu\text{m}$  voneinander entfernt. Es überwiegen die Zäpfchenzellen, wovon jede über eine eigene Nervenfaser mit der Sehrinde des Gehirns verbunden ist. Daher ist hier die Bildschärfe am größten, und Bilddetails können getrennt wahrgenommen werden, wenn

sie auf benachbarten Zellen liegen. Auch der Farbeindruck ist hier am stärksten. Die Zahl der rund 6,5 Millionen Zäpfchen, die für die Grundfarben Rot oder Grün oder Blau empfindlich sind, verteilt sich auf diese im Verhältnis 10:10:1. Weiter entfernt von der Augennachse nehmen die Stäbchenzellen zu, die mit dem Mittelhirn verbunden sind. Die Bildschärfe ist hier wesentlich geringer, einmal wegen der größeren Rezeptorabstände, zum anderen, weil hier nicht jede Zelle eine eigene Nervenleitung besitzt, sondern mehrere Stäbchen und Zäpfchen an eine gemeinsame Faser angeschlossen sind. Stäbchen sind aber wesentlich hell-dunkel-empfindlicher, so dass sie beim Dämmerungssehen wirksamer sind („Bei Nacht sind alle Katzen grau“).

Durch diese Anordnung der Sehzellen ist die Qualität des in den Rezeptorsignalen enthaltenen Bildes nur mäßig, aber auch das stellt wohl eine biologische Optimierung dar, weil auf diese Weise direktes Sehen (mit dem Gelben Fleck) und zugleich Überwachung eines größeren Sehfeldes durch indirektes Sehen möglich ist, und stets die Details hervorgehoben werden, auf die man direkt blickt. Wegen der höheren Empfindlichkeit der Stäbchenzellen kann sich dies jedoch im Dunkeln ins Gegenteil umkehren: Man sieht u. U. seitlich schwache Strukturen, die aber verschwinden, wenn man sie durch direktes Hinsehen fixieren will, so dass man versucht sein kann, „Gespenster zu sehen“.

Diese „Konzentration auf das Wesentliche“ können wir folgendermaßen leicht selbst beobachten: Versuchen Sie einmal, während Sie diese Zeile (mit Hilfe des Gelben Fleckes) lesen, zugleich den Text zehn Zeilen höher oder tiefer zu erkennen. Sie werden sehen, dass das unmöglich ist, obwohl Sie wahrnehmen, dass dort die Buchseite noch nicht zu Ende ist. Sollte dort aber plötzlich eine Fliege landen, so wird das Gehirn die Augenstellung automatisch so verändern, dass jetzt deren Bild auf den Gelben Fleck fällt.

Merkwürdigerweise verlaufen, wie Abb. 19.35 zeigt, die Nervenfasern vom Auginnern gesehen vor den Rezeptoren. Sie werden an einer Stelle als Bündel aus dem Auge herausgeführt, und an dieser Stelle ist das Auge daher lichtunempfindlich (*Blinder Fleck*).

Einzelheiten der Reizerzeugung, Reizleitung und Reizverarbeitung darzustellen, würde über den Rahmen dieses Buches hinausgehen. Es sei nur noch erwähnt, dass die Signalerzeugung mit einer andauern-

den Zitterbewegung des Auges (Frequenz bis  $\sim 100$  Hz, Amplitude 10–20 Bogensekunden) verknüpft ist, und dass der Seheindruck verschwindet, wenn man diese Bewegung künstlich behindert.

Zeitlich veränderliche Vorgänge vermag der Sehapparat nur begrenzt zu erkennen. So hat der Kinobesucher den Eindruck gleichmäßig ablaufender Filmhandlungen, während tatsächlich die einzelnen Filmbilder mit einer Frequenz von  $25 \text{ s}^{-1}$  ruckartig durch den Filmprojektor gezogen werden. Auch das Flackern von Leuchtstoffröhren mit einer Hell-Dunkel-Frequenz von 100 Hz infolge der angelegten Wechsellastspannung wird uns nicht bewusst.

Zur Bildverarbeitung gehört auch das räumliche (*stereoskopische*) Sehen. Infolge des Abstandes zwischen beiden Augäpfeln, der zu unterschiedlichen Blickrichtungen führt, unterscheiden sich die auf beiden Netzhäuten entworfenen zweidimensionalen Bilder geringfügig. Aus diesem Unterschied vermag das Gehirn die dreidimensionale, räumliche Struktur des betrachteten Gegenstandes zu rekonstruieren. Dazu ist allerdings erforderlich, dass die beiden Bilder zur Deckung kommen, wozu ein bestimmter, von der Gegenstandsentsfernung abhängiger Winkel, der *Konvergenzwinkel*, zwischen den Achsen beider Augäpfel einzustellen ist. Diese Konvergenz, die einen Winkelbereich von etwa  $30^\circ$  umfasst, wird vom Gehirn automatisch zugleich mit der Akkomodation geregelt. Versagt dies, so sieht man Doppelbilder.

Dass in speziellen Fällen zur Erzeugung eines räumlichen Bildeindruckes in der Tat ebene Objekte ausreichen, zeigt das *Stereoskop*. Man verwendet dazu ein Paar von Fotos, die von zwei (meist im Abstand der Augen) nebeneinander liegenden Orten aufgenommen wurden und betrachtet es durch eine spezielle Brille, die bewirkt, dass beide Bilder für den Bildeindruck zur Deckung kommen (was bei direkter Betrachtung räumlicher Objekte durch die Konvergenz erreicht wird). Im Gegensatz zur Holografie (Kap. 18.1.3), bei der aus dem Hologramm-Foto ein wirklich dreidimensionales Bild erzeugt wird, das das Auge als solches wahrnimmt, liegt hier also nur ein subjektiver, erst im Gehirn entstehender Raumeindruck vor.

Andere Stereoskopie-Methoden, die den Vorteil haben, dass beide Teilbilder gemeinsam auf einer Druckvorlage dargestellt werden können, sind die bekannte *Rot-Grün-Brillen-Methode*, bei der beide Teilbilder durch Farbfilter voneinander getrennt werden, und die vor einigen Jahren in Mode gekommene *Autostereographie*. Bei dieser wird durch gezielte Störung der au-

tomatischen Konvergenzsteuerung des Auges (z. B. durch gezieltes Schielen) die Überlagerung der Teilbilder bei der Bildverarbeitung erreicht.

Zuletzt sei erwähnt, dass der Sehapparat in manchen Fällen das optische Bild auch aus Optimierungsgründen verfälscht. So werden bei der Bildverarbeitung die Grenzen zwischen geringfügig unterschiedlich hellen Strukturen verstärkt, um die Erkennbarkeit zu steigern (*Kontrastüberhöhung*). Während der Sehapparat nicht in der Lage ist, Lichtintensitäten absolut zu bestimmen, wie wir in Abschnitt 19.5.3 gesehen haben, ist er durch die Kontrastüberhöhung in extremem Maße befähigt, Intensitätsvergleiche simultan vorzunehmen.

### 19.5.5 Farbsehen

*Licht* ist eine physikalische, wesentlich durch Energiefluss und Frequenz beschriebene Erscheinung. *Farben* lassen sich zwar auch nach Frequenzen klassifizieren, sind aber kein physikalisches Phänomen. Vielmehr ist Farbe eine *Erfindung des Gehirns*, ein subjektiver physiologischer Eindruck wie Geschmack, Geruch, Klang und Schmerz. Das Farbempfinden unterschiedlicher Personen ist nicht vergleichbar und nicht quantifizierbar. Da letzteres aber für Technik und Praxis erforderlich ist, hat man die *Farbmetrik* (*Colorimetrie*) entwickelt.

Für den Farbeindruck ist irrelevant, ob er von beleuchteten Körpern (*Körperfarben*) oder von Lichtemissionsquellen (*Selbstleuchtern*) erzeugt wird.

Man unterscheidet *Auflichtfarben* (*Remissionsfarben*) opaker, streuender, absorbierender und undurchsichtiger und *Durchlichtfarben* transparenter Körper. Trifft z. B. weißes Licht auf einen Gegenstand, der rotes Licht streut, absorbiert oder reflektiert, so erscheint dieser rot. Ist er aber transparent, dann ist die zusätzliche Farbe des durchgehenden, transmittierten Lichtes grün. Allgemein kann man sagen: Der Farbeindruck eines transparenten oder durchscheinenden Objekts entsteht durch den Teil des Lichts, der *nicht* absorbiert wird.

In Kap. 17.2.2 wurde darauf hingewiesen, wie die Frequenzabhängigkeit der Augenempfindlichkeit dem Sonnenspektrum angepasst ist. Wie Abb. 17.1 zeigt, fällt sie von ihrem Maximum rasch sowohl zum Roten als

auch zum Blauen hin ab, so dass der Farbfehler der Augenoptik nicht stört (Kap. 19.4.11). Der sichtbare Spektralbereich erstreckt sich von 380 nm bis 760 nm. Zum Roten und Infraroten erfolgt der Abfall gerade so, dass die Strahlung eines schwarzen Körpers bei Bluttemperatur, d. h. ungefähr auch die Eigenstrahlung des Körpers selbst, die zum fernen IR hin ansteigt, nicht wahrgenommen wird. Dadurch wird ein störender Dunkelreiz vermieden. Zum Ultravioletten hin wird die Strahlung, die für die Netzhaut schädlich wäre, abgeschirmt. Dies geschieht zu etwa gleichen Teilen durch Absorption in Hornhaut und Augenlinse, weniger aber durch Glaskörper und Kammerwasser. Linsenfremde Augen (z. B. nach einer Staroperation) sind daher bis ins nahe Ultraviolett empfindlich.

Im Vergleich zur IR-Strahlung kann das Auge durch UV-Strahlung wegen der höheren Lichtquantenenergien viel leichter geschädigt werden, so dass besondere Vorsicht beim Arbeiten mit UV-Lichtquellen geboten ist, und stets Schutzbrillen zu tragen sind.

Die *Farbempfindung* kommt durch ein kompliziertes, bisher nicht hinreichend geklärtes Zusammenspiel von physikalischen Eigenschaften der Strahlung und den den subjektiven Farbeindruck erzeugenden Vorgängen des primären Netzhautreizes und der nachgeschalteten Weiterverarbeitung der Signale im Gehirn zustande. Man schätzt, dass der Normsichtige an die  $10^6$  Farbempfindungen unterscheiden kann.

Die Frequenzspektren als gleich empfundener Farben können sehr unterschiedlich sein (*metamere Farben*). Sie können monochromatisch oder polychromatisch sein. Farben von Licht einer Spektrallinie (z. B. grün) nennen wir *Spektralfarben*. Derselbe Farbeindruck kann auch durch Mischung mehrerer Spektralfarben (*Mischfarben*: gelb + blau  $\rightarrow$  grün) oder auch durch ausgedehnte, kontinuierliche Spektralbereiche hervorgerufen werden. Je steiler in deren Intensitätsspektren Maxima und Minima ausgeprägt sind, umso leuchtender erscheint die resultierende Mischfarbe.

Leuchtende Farben können auch ohne Farbstoffe erzeugt werden: durch Interferenz von Lichtwellen in transparenten dünnen Schich-

ten mit Dicken in der Größenordnung der Lichtwellenlänge. Beispiele sind Schmetterlingsflügel oder Ölschichten auf dem nassen Straßenpflaster.

Der Farbeindruck folgt also nicht streng dem Spektrum des Lichtes, und deshalb kann das Auge nicht unterscheiden, ob beispielsweise rotes Licht aus monochromatischer Strahlung oder aus einer Mischung verschiedener Spektralfarben besteht. Es gibt also keine eindeutige Beziehung zwischen physikalischen Eigenschaften wie der Wellenlänge der Strahlung und dem subjektiven Farbeindruck. Zudem registriert das Auge besondere Farben wie Braun, Rosa oder Weiß, die nicht im Licht-Spektrum zu finden sind, sondern als *Mischfarben* entstehen.

In Grenzen passt sich die Farbempfindung des Gesichtssinnes dem vorhandenen Licht an. Wir können die Farben eines Gemäldes bei Sonnen- wie bei Glühlampenlicht erkennen, obgleich sich die spektralen Zusammensetzungen der beiden Lichtquellen (und entsprechend die am Bild reflektierten und gestreuten Lichtbestandteile) stark unterscheiden. Den Unterschied sehen wir aber dann, wenn wir bei den verschiedenen Lichtverhältnissen Farbfotos anfertigen und diese vergleichen.

Es gibt 3 Arten von Zäpfchen in der Netzhaut, die unterschiedliche spektrale Empfindlichkeiten zeigen. Durch die Mischung ihrer Nervensignale entsteht nach einer komplizierten Weiterverarbeitung ein einheitlicher subjektiver Farbeindruck.

Diese Methode der *trichromatischen Mischung* wird auch in der Technik genutzt, um Farben in allen Varianten zu erzeugen. Man zerlegt dazu die zu erzeugende farbige Fläche in ein Punktraster. Jedes Rasterelement besteht wiederum aus drei Punkten verschiedener Basisfarben. Diese liegen so dicht nebeneinander, dass ihre Abstände bei direkter Beobachtung aus deutlicher Schweite unterhalb der Auflösungsgrenze des Auges liegen und nicht getrennt wahrgenommen werden können, und daher wird im Auge eine Mischung der drei Basisfarben vorgenommen. Unterschiedliche Mischfarben lassen sich durch Veränderung der Helligkeiten (bzw. der Punktgrößen) der einzelnen Rasterpunkte einstellen. Beim *Dreifarbenbuntdruck* verwendet man die Basisfarben gelb, cyan (blaugrün) und magenta (purpurrot). Das *Farbfernsehbild* dagegen ist aus den Basisfarben rot, grün und blau zusammengesetzt. Auf

dem Fernsehschirm können Sie die farbigen Rasterpunkte mit einer Lupe leicht erkennen; auch hier sind die Abstände so gewählt, dass sie bei direkter Beobachtung nicht aufgelöst werden können.

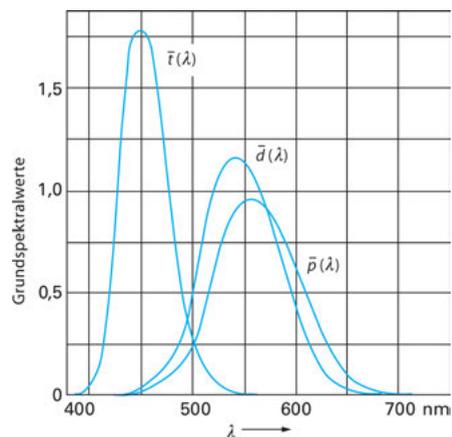
Es sind verschiedene empirische Methoden entwickelt worden, um Farbempfindungen in ein System zu bringen. Für viele Zwecke ausreichend sind *Farbtafeln*, deren festgelegte Farben man mit der zu untersuchenden vergleicht. Eine andere einfache Klassifizierung hat Helmholtz gegeben. Danach ist jede Farbe (fachmännisch: *Farbvalenz*) durch drei Bestimmungsstücke charakterisiert: durch den *Farbton* (der durch Wellenlängen des Spektrums festzulegen ist), die *Farbsättigung* (die durch Zumischung von Weiß von der brilliansten zur unbunten, d. h. grauen oder weißen Farbe zu variieren ist) und die *Helligkeit* (die durch Beimischung der Farbe Schwarz zu variieren ist).

**Farbmetrik:** Als subjektive Empfindung erscheinen *Farben* nicht objektiv messbar. Für Praxis und Technik ist dies aber erforderlich. Emissionsfarben werden durch ihre (energetische) Lichtintensität bestimmt. Bei Körperfarben sind für viele Zwecke Farbtafeln ausreichend, deren festgelegte Farben man mit der zu untersuchenden vergleicht. Von Helmholtz, Hering, Grassmann, Schrödinger u. a. ist eine anspruchsvolle theoretische Grundlage, die *Theorie der Farbmetrik* entwickelt worden, die in den meisten in die Physik einführenden Vorlesungen und Lehrbüchern unbeachtet bleibt.

Sie beruht auf dem Kompromiss, dass die bei jedem Menschen individuellen spektralen Empfindlichkeitskurven der drei Arten von Zäpfchen-Rezeptoren (Abb. 19.37) durch Mittelwertkurven ersetzt wurden, die gesetzlich (von der *Commission Internationale d'Éclairage*, CIE) festgelegt sind.

Die Bestimmungsgröße für die Eigenschaften einer Farbe ist die *Farbvalenz*.

Das grundlegende *Graßmann'sche Gesetz* lautet: Jede Farbe lässt sich aus der additiven Mischung von 3 fest-



**Abb. 19.37** Gemittelte Spektrale Empfindlichkeitskurven drei Zäpfchenarten des menschlichen Auges (Bergmann-Schaefer-Optik-de-Gruyter-Verlag).

gelegten *Primärfarben* erzeugen (wobei diese nicht selbst auseinander mischbar sein dürfen). Beispiele sind {rot-grün-blau}oder, alternativ, die Summen aus je zwei von ihnen {gelb-cyan (blaugrün)magenta(purpurrot)}. Diese Farben stimmen übrigens nicht mit denen der drei Zäpfchenarten überein. (Es können im Prinzip auch andere Kombinationen von Spektralfarben ausgewählt werden.)

Daraus folgt die *Dreifarben-Theorie*. Den drei Primärfarben kann man die Achsen eines Cartesischen Koordinatensystems, des *Farbraumes*, zuordnen, und jede Farbe lässt sich dann als *Farbvalenzvektor* darstellen, dessen Komponenten die Farbwerte der Primärfarben sind. Es gelten zur Erzeugung von Mischfarben die Gesetze der Vektoraddition.

Die Methode der *trichromatischen Mischung* wird in der Technik genutzt, um Druckfarben zu erzeugen (*Dreifarbenbuntdruck*, Farbfernsehen).

Eine alternative Theorie (das *CIELAB-System*) beruht auf dem Prinzip der *Gegenfarben (Komplementärfarben)*: In einem dreidimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem ordnet man die Farborte von {grün} auf der  $x$ -Achse von  $-100$  bis  $0$  Skalenteilen, bzw. die der Gegenfarbe {rot} von  $0$  bis  $+100$  ein. Analog werden auf der  $y$ -Achse {blau} von  $-100$  bis  $0$  und {gelb} von  $0$  bis  $+100$  abgetragen. Auf der  $z$ -Achse wird die Helligkeit von  $0$  {schwarz} bis  $+100$  Skalenteilen {weiß} eingezeichnet. So erhält man auch in diesem Farbraum für jede Farbvalenz einen eindeutigen Punkt.

### 19.5.6 Vergrößerung bei Betrachtung mit dem Auge

Subjektiv erscheint uns ein Objekt (der Gegenstand selbst oder ein durch eine optische Abbildung erzeugtes Bild davon) um so größer, je näher es dem Auge ist, denn das abbildende System des Auges entwirft ein um so größeres Bild auf der Netzhaut, je näher der Gegenstand rückt.

Zur Angabe der Vergrößerung bei Betrachtung mit dem Auge ist Gl. (19-16) ungeeignet. Abgesehen davon, dass es schwierig wäre, die Größe des Netzhautbildes zu messen, ist zu beachten, dass visuelle Eindrücke nur zum Teil durch die Optik des Auges zustande kommen. Wie schon in Kap. 19.5.1 besprochen, ist das reelle Bild auf der Netzhaut gegenüber dem zu betrachtenden Objekt umgekehrt und wegen der kurzen Brennweite des Auges stets extrem verkleinert. Ein Mensch in  $20$  m Entfernung wird  $1,5$  mm groß und auf dem Kopf stehend auf der Netzhaut abgebildet. Nach Gl. (19-16) gilt also:  $V_A \ll 1$ .

Es ist praktischer, dem subjektiven Bildeindruck Rechnung zu tragen, der aus dem winzigen, auf dem Kopf stehenden Netzhautbild entsteht. Daher definiert man die Vergrößerung bei Betrachtung mit dem Auge über den *Schwinkel*. Um einen Bezugspunkt zu haben, wird willkürlich festgelegt, die *subjektive Vergrößerung* des Auges sei  $1$ , wenn sich der Gegenstand oder ein mit dem Auge zu betrachtendes Bild im Abstand  $s_0 = 25$  cm, in sogenannter *deutlicher Sehweite*, befindet.

Bringt man also einen Gegenstand näher als  $25$  cm an das Auge heran, so erscheint er vergrößert; ist er weiter entfernt, so erscheint er verkleinert.

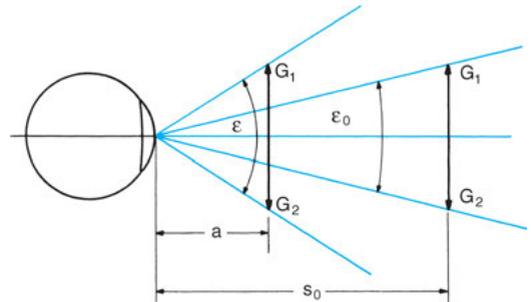
Das objektiv messbare Maß für die Vergrößerung bei Betrachtung mit dem Auge ist der *Schwinkel*  $\varepsilon$ , den die Verbindungsgeraden zweier benachbarter Gegenstandspunkte  $G_1$  und  $G_2$  mit dem Auge bilden (Abb. 19.38). Je näher das Objekt dem Auge ist, desto größer ist  $\varepsilon$ . Wenn es sich in der deutlichen Sehweite  $s_0$  befindet, dann bezeichnen wir den Schwinkel mit  $\varepsilon_0$ .

Als (subjektive) Vergrößerung definiert man

$$V_s = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} \quad (19-19)$$

Daraus ergibt sich mit den geometrischen Beziehungen der Abb. 19.38

$$V_s = \frac{s_0}{a} \quad (19-20)$$



**Abb. 19.38** Zur Definition der subjektiven Vergrößerung bei Betrachtung mit dem Auge.

Das Auge kann durch Akkomodation auf unterschiedliche Abstände  $a$  scharfstellen, wobei  $V_s$  größer oder kleiner 1 sein kann. Die Grenze der Vergrößerung bei direkter Betrachtung ist ungefähr durch den *Nahpunkt* des Auges ( $a = 10$  cm) gegeben: Bringt man einen Gegenstand noch näher an das Auge,

so kann dieses nicht mehr ausreichend akkomodieren, und der Gegenstand erscheint unscharf. Bei direkter Betrachtung kann man also ungefähr 2,5fache Vergrößerung erreichen. Im nächsten Kapitel (20.1) werden wir sehen, dass man mit Hilfe der *Lupe*  $V_s$  wesentlich stärker vergrößern kann.

## 20. Einige abbildende und spektroskopische Instrumente

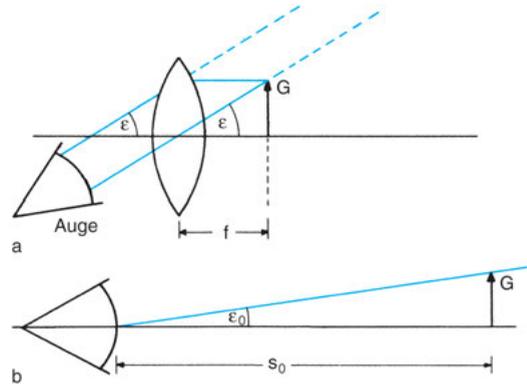
### 20.1 Lupe

Ein virtuelles Bild kann nicht auf einem Schirm sichtbar gemacht, fotografiert oder vermessen werden (Kap. 19.2); dazu ist eine weitere Abbildung erforderlich, die daraus ein reelles Bild erzeugt. Das kann speziell die Abbildung im Auge sein.

Als *Lupe* dient eine Sammellinse großer Brechkraft, wenn man mit ihr ein virtuelles, aufrechtes, vergrößertes Bild eines Gegenstandes entwirft, das dann mit dem Auge betrachtet wird. Mit dem Abbildungsdiagramm in Kap. 19.4.8 können wir uns klarmachen, dass dieses Bild entsteht, wenn die Gegenstandsweite  $a$  kleiner oder gleich der Brennweite  $f$  ist.

Das virtuelle Bild kann im Prinzip für die Betrachtung mit dem Auge irgendwo zwischen Unendlich und dem Nahpunkt des Auges liegen. Am bequemsten ist es aber für das Auge, wenn das Bild im Unendlichen ist, d. h.  $a = f$ ,  $b = -\infty$ , denn dann braucht das Auge nicht zu akkomodieren (Abb. 20.1a). Das ist auch für die Verwendung der Lupe im Lichtmikroskop (Abb. 20.4) wichtig. Nach Gl. (19-19) ist die aus der Vergrößerung des Schwinkels definierte subjektive Vergrößerung in diesem Falle (Abb. 20.1):

$$V_s = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} = \frac{s_0}{f}. \quad (20-1)$$



**Abb. 20.1** Betrachtung eines Gegenstandes mit dem Auge a) durch die Lupe, b) in deutlicher Sehweite.

Der Abstand Auge – Lupe tritt in Gl. (20-1) nicht auf. In Abb. 20.1 ist der Schwinkel  $\varepsilon$  unabhängig von diesem Abstand; je größer letzterer wird, desto kleiner wird allerdings das Bildfeld, und desto stärker beeinflussen Abbildungsfehler die Bildqualität.

Gl. (20-1) zeigt, wieso mit der Lupe größere subjektive Vergrößerungen als mit dem bloßen Auge zu erreichen sind: Man kann  $f$  erheblich kleiner wählen als den Nahpunktsabstand des Auges. Ist beispielsweise  $f = 2,5$  cm, so ist  $V_s = 10$ , da die deutliche Sehweite  $s_0 = 25$  cm beträgt. Durch Bildfehler ist der Vergrößerung mit der Lupe allerdings bei etwa  $V_s = 30$  eine Grenze gesetzt.

## 20.2 Projektions-Apparate

Zur Vergrößerung eines Gegenstandes wird bei diesen Apparaten im Gegensatz zur Lupe kein virtuelles, sondern ein reel-

les Bild erzeugt, das auf einen Bildschirm geworfen, projiziert, und dort mit dem Auge beobachtet wird.

Das Auge kann durch Akkomodation auf unterschiedliche Abstände  $a$  scharfstellen, wobei  $V_s$  größer oder kleiner 1 sein kann. Die Grenze der Vergrößerung bei direkter Betrachtung ist ungefähr durch den *Nahpunkt* des Auges ( $a = 10\text{ cm}$ ) gegeben: Bringt man einen Gegenstand noch näher an das Auge,

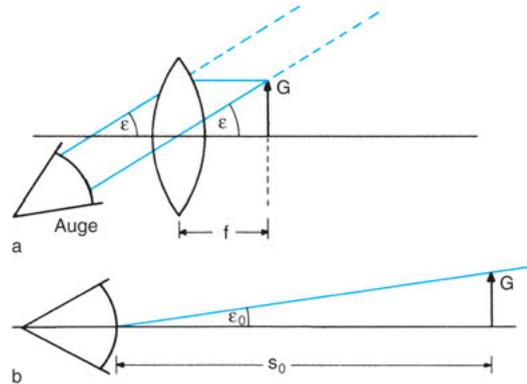
so kann dieses nicht mehr ausreichend akkomodieren, und der Gegenstand erscheint unscharf. Bei direkter Betrachtung kann man also ungefähr 2,5fache Vergrößerung erreichen. Im nächsten Kapitel (20.1) werden wir sehen, dass man mit Hilfe der *Lupe*  $V_s$  wesentlich stärker vergrößern kann.

## 20. Einige abbildende und spektroskopische Instrumente

### 20.1 Lupe

Ein virtuelles Bild kann nicht auf einem Schirm sichtbar gemacht, fotografiert oder vermessen werden (Kap. 19.2); dazu ist eine weitere Abbildung erforderlich, die daraus ein reelles Bild erzeugt. Das kann speziell die Abbildung im Auge sein.

Als *Lupe* dient eine Sammellinse großer Brechkraft, wenn man mit ihr ein virtuelles, aufrechtes, vergrößertes Bild eines Gegenstandes entwirft, das dann mit dem Auge betrachtet wird. Mit dem Abbildungsdiagramm in Kap. 19.4.8 können wir uns klarmachen, dass dieses Bild entsteht, wenn die Gegenstandsweite  $a$  kleiner oder gleich der Brennweite  $f$  ist.



**Abb. 20.1** Betrachtung eines Gegenstandes mit dem Auge a) durch die Lupe, b) in deutlicher Sehweite.

Das virtuelle Bild kann im Prinzip für die Betrachtung mit dem Auge irgendwo zwischen Unendlich und dem Nahpunkt des Auges liegen. Am bequemsten ist es aber für das Auge, wenn das Bild im Unendlichen ist, d. h.  $a = f$ ,  $b = -\infty$ , denn dann braucht das Auge nicht zu akkomodieren (Abb. 20.1a). Das ist auch für die Verwendung der Lupe im Lichtmikroskop (Abb. 20.4) wichtig. Nach Gl. (19-19) ist die aus der Vergrößerung des Schwinkels definierte subjektive Vergrößerung in diesem Falle (Abb. 20.1):

$$V_s = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_0} = \frac{s_0}{f} \tag{20-1}$$

Der Abstand Auge – Lupe tritt in Gl. (20-1) nicht auf. In Abb. 20.1 ist der Schwinkel  $\varepsilon$  unabhängig von diesem Abstand; je größer letzterer wird, desto kleiner wird allerdings das Bildfeld, und desto stärker beeinflussen Abbildungsfehler die Bildqualität.

Gl. (20-1) zeigt, wieso mit der Lupe größere subjektive Vergrößerungen als mit dem bloßen Auge zu erreichen sind: Man kann  $f$  erheblich kleiner wählen als den Nahpunktsabstand des Auges. Ist beispielsweise  $f = 2,5\text{ cm}$ , so ist  $V_s = 10$ , da die deutliche Sehweite  $s_0 = 25\text{ cm}$  beträgt. Durch Bildfehler ist der Vergrößerung mit der Lupe allerdings bei etwa  $V_s = 30$  eine Grenze gesetzt.

## 20.2 Projektions-Apparate

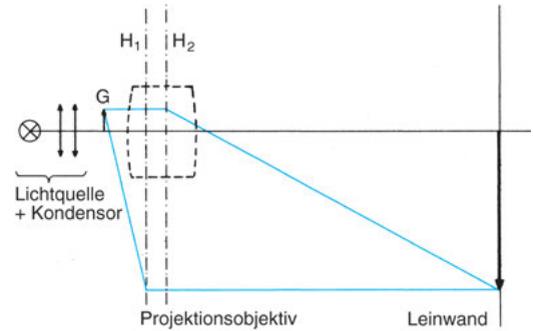
Zur Vergrößerung eines Gegenstandes wird bei diesen Apparaten im Gegensatz zur Lupe kein virtuelles, sondern ein reel-

les Bild erzeugt, das auf einen Bildschirm geworfen, projiziert, und dort mit dem Auge beobachtet wird.

Mit guten Projektionsobjektiven sind Abbildungsmaßstäbe (Kap. 19.4.9) von der Größenordnung 100 möglich, beispielsweise bei der Vergrößerung eines wenige Zentimeter großen Filmbildes auf eine meterhohe Leinwand im Kino. Ist der Gegenstand transparent (fotografisches Negativ, Dia), so kann er im Durchlicht beleuchtet werden. Dazu dient eine spezielle Beleuchtungsoptik, die den Gegenstand gleichmäßig ausleuchtet, der *Kondensor*:

Beispiele für Projektions-Apparate sind der *Dia-Projektor* (Abb. 20.2), der *Film-Projektor*, und der *fotografische Vergrößerungsapparat*. Undurchsichtige Objekte werden im *Episkop* von den Seiten beleuchtet, und das Streulicht liefert dann das Licht für das Bild auf der Leinwand. Mit dieser Objektbeleuchtung erreicht man allerdings nicht die Bildhelligkeit des Durchlichtverfahrens.

Bei Präsentationen und Vorträgen war bis vor kurzem die *Overhead-Projektion* üblich, bei der das Prinzip des Dia-Projektors (Abb. 20.2) so abgeändert wurde, dass anstelle des Dias eine DIN A4-Transparentfolie als Objekt dient, die bedruckt oder auch während der Präsentation beschrieben werden kann. Heute ist besonders der *Power-Point-Projektor* wichtig, der anstelle eines



**Abb. 20.2** Projektionsapparat (Dia-Projektor, Film-Projektor).

Dias ein durch einen Computer steuerbares Bild, das auf einem kleinen Transparentbildschirm erzeugt wird, auf eine Bildwand projiziert. Dabei werden drei Grundfarben getrennt bearbeitet. Den Namen Power-Point-Projektor hat das Gerät erhalten, weil zur Herstellung der Objekte zumeist das Standard-Computerprogramm „power point“ dient.

Die optische Abbildung im Projektor (*beamer*) erfolgt im Prinzip wie beim Dia-Projektor, allerdings ist es gelungen, die Bildqualität durch Verwendung moderner Optik und extrem lichtstarker Lichtquellen wesentlich zu steigern.

## 20.3 Lichtmikroskop

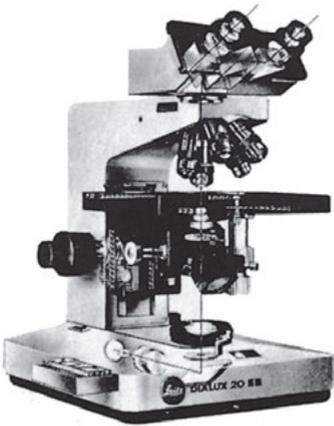
Das *Mikroskop* dient zur Betrachtung kleiner Gegenstände unter starker Vergrößerung, die direkt vom Auge kaum oder nicht mehr wahrgenommen werden können. In Kap. 19.5.1 wurde erwähnt, dass das Auge Strukturen eines Gegenstandes in deutlicher Sehweite nicht mehr auflösen kann, wenn ihr gegenseitiger Abstand kleiner als etwa 0,1 mm ist. Mit dem Lichtmikroskop kann man hingegen noch benachbarte Punkte im Abstand von  $5 \cdot 10^{-4}$  mm auflösen, d. h. getrennt erkennen. Das entspricht ungefähr den Wellenlängen sichtbaren Lichts. Durch Ausnutzung spezieller optischer Effekte und aufwändiger numerischer Bildbearbeitungsmethoden ist es in speziellen Experimenten sogar gelungen, Objektstrukturen bis zu  $\lesssim 10$  nm sichtbar zu machen.

Mikroskope sind wichtige Instrumente für die Lebenswissenschaften, weil viele biologische

Strukturen wie Zellen, Bakterien, usw. in ihrer Größe unterhalb der Auflösungsgrenze des Auges liegen. Im Laufe der Zeit sind viele Arten von Mikroskopen entwickelt worden, durch die der beobachtbare Größenbereich bis zu einzelnen Molekülen verschoben wurde.

Den Aufbau und vielfältige Anwendungsmöglichkeiten eines modernen Lichtmikroskops zeigt Abb. 20.3.

**Prinzipieller Aufbau und Abbildung** Geeignete Linsensysteme (*Objektive*) ermöglichen es, reelle Bilder großer Vergrößerung mit geringen Abbildungsfehlern zu erzeugen. Man entwirft im Mikroskop zuerst ein reelles *Zwischenbild* und von diesem dann mit einer Lupe ein – nochmals vergrößertes – virtuelles Bild, das mit dem Auge betrachtet wird. Meist fügt man der Lupe (die auch *Augenlinse* genannt wird) noch eine Korrekturlinse, die *Feld-* oder *Kollektivlinse* bei; man bezeichnet beide zusammen als *Okular*. Die



Ebene der visuellen Beobachtung	Monokular Binokular Vergleichen Zeichnen Messen	
Ebene der Auflösung	Durchlicht Auflicht UV- u. IR	Phasenkontrast Interferenzkontrast Polarisation Fluoreszenz
Ebene des Präparates	Kreuztisch Drehtisch Heiz- u. Kühltisch	Fokussierung Mikromanipulation
Ebene der Kondensoren	Hellfeld Dunkelfeld Blenden Filter	Spezialkondensoren
Ebene der Beleuchtung	Niedervolllampen Halogenlampen Höchstdrucklampen Spektrallampen	

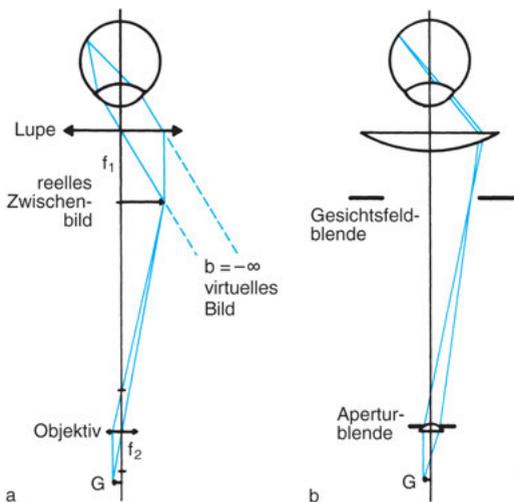
**Abb. 20.3** Variationsmöglichkeiten moderner Lichtmikroskope (Leitz-Dialux; nach Prof. Dr. J. Grehn, Laborpraxis).

Feldlinse bewirkt eine wesentliche Vergrößerung des *Gesichtsfeldes*, das ohne diese Linse sehr klein wäre, trägt aber im Prinzip nicht und in der Praxis kaum zur Abbildung bei, da sie im Prinzip *in* und in der Praxis *nahe bei* dem reellen Zwischenbild liegt. Um ermüdende Akkomodation des Auges zu vermeiden, wird das virtuelle Bild ins Unendliche ( $b = -\infty$ ) verlegt; das reelle Zwischenbild liegt also in der Brennebene der Augenlinse. Üblich sind Objektivvergrößerungen zwischen 1- und 100fach und Okularvergrößerungen zwischen 6- und 25fach. Das Bild im Mikros-

kop ist umgekehrt, denn das reelle Zwischenbild ist umgekehrt, während die nachfolgende virtuelle Abbildung durch das Okular die Orientierung unverändert lässt.

Abb. 20.4 zeigt den *Abbildenden Strahlengang* (a) und den *Bündel-Strahlengang* (b) des Lichtmikroskops (s. Kap. 19.4.8).

Es werden also in einer *Zweischritt-Abbildung* eine Objektiv-Abbildung mit reellem Zwischenbild und eine Okular-Abbildung mit virtuellem Bild des Zwischenbildes hintereinander geschaltet. Dabei multiplizieren sich Abbildungsmaßstab des Objektivs und subjektive Vergrößerung des Okulars zur Gesamtvergrößerung:

$$V_{\text{gesamt}} = V_{\text{Objektiv}} \cdot V_{\text{Okular}} \quad (20-2)$$


**Abb. 20.4** Lichtmikroskop. a) Abbildender Strahlengang, b) Bündel-Strahlengang.

Soll ein Mikroskop trotz starker Objektivvergrößerung handlich bleiben (d. h. soll nach Gl. (19-11) die Bildweite klein bleiben), so muss die Objektivbrennweite sehr kurz sein. Ein 100fach vergrößerndes Objektiv hat daher eine Brennweite von nur  $f \approx 2$  mm. Dies stellt hohe Anforderungen an die optische Qualität des Objektivs.

Objektiv und Okular haben im Mikroskop-Tubus einen festen Abstand voneinander. Wie beim Auge ist also für die Objektiv-Abbildung die Bildweite vorgegeben. Sie ist, grob gemessen, gleich der Tubuslänge (ca.

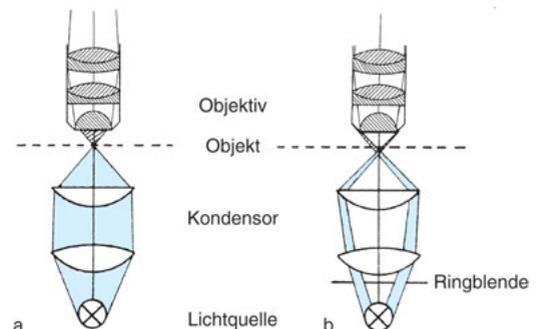
160 mm). Die Scharfeinstellung des Mikroskops erfolgt durch Veränderung der Gegenstandsweite mittels einer Grob- und einer Feineinstellungsschraube, die entweder den ganzen Tubus oder aber den Objekt-Tisch verschieben. Um trotz der festen Bildweite in weitem Bereich unterschiedliche Vergrößerungen erzielen zu können, sind Mikroskope mit Wechselobjektiven und Okularen verschiedener Brennweiten ausgerüstet. Objektiv- bzw. Okularvergrößerung sind auf ihnen eingraviert, so dass man mit Gl. (20-2) die Gesamtvergrößerung jeder Kombination selbst berechnen kann. Da man aber die Größe des virtuellen Endbildes nicht direkt bestimmen kann (virtuelle Bilder kann man ja nicht auf einem Schirm oder einer Messskala auffangen), lässt sich aus dem Endbild nicht die absolute Größe des beobachteten Gegenstandes angeben. Dazu misst man im Mikroskop vielmehr die Größe des reellen Zwischenbildes aus und bringt zu diesem Zweck an den Ort des Zwischenbildes zusätzlich eine, in eine Glasplatte gravierte Skala, das *Okular-Mikrometer*. (In vielen Okularen ist es bereits fest eingebaut.) Man sieht dann mit der Lupe Zwischenbild und Mikrometer-Skala gleichzeitig scharf und kann die das Bild überdeckenden Skalenstriche abzählen. Damit erhält man die Größe des Zwischenbildes, und die Gegenstandsgröße berechnet sich dann aus der angegebenen Objektiv-Vergrößerung allein. Die Vergrößerung durch die Lupe des Okulars dient nur dazu, das Zwischenbild und die sehr fein geteilte Skala zugleich deutlicher zu erkennen.

Um das Bildfeld zu erweitern, ordnet man wie erwähnt, nahe dem Ort des reellen Zwischenbildes die Feldlinse an. Liegt aber das Okular-Mikrometer in der Ebene des reellen Zwischenbildes, so kann dort nicht zugleich die Feldlinse liegen. Daher wird diese Linse einen, wenn auch geringen Einfluss auf die Vergrößerung haben, die sich dann nicht mehr genau aus der Objektiv-Vergrößerung ergibt, sondern etwas geringer ist. Es ist zweckmäßig, das Okularmikrometer für die verwendete Objektiv-Okular-Kombination zu *kalibrieren*, indem man als Gegenstand eine in 1/100 mm-Schritten geteilte Skala, das *Objekt-Mikrometer* betrachtet. Damit sieht man die Skalen von Okular-Mikrometer und Objekt-Mikrometer gleichzeitig, kann also die Okular-Skala kalibrieren und den durch Objektiv und Feldlinse erzielten Abbildungsmaßstab bestimmen.

**Aufzeichnende Mikroskope** haben die Möglichkeit, das vergrößerte Bild des Gegenstandes mit fotografischer oder elektronischer Kamera festzuhalten. Dazu ist aber ein reelles Endbild auf dem Film erforderlich. Es gibt zwei Möglichkeiten, dieses zu erzeugen. Entweder entfernt man das Okular und setzt an dessen Stelle ein weiteres Objektiv, das *Projektiv*, wodurch das Zwischenbild reell auf die Filmebene abgebildet wird, oder man belässt das Okular an seinem Platz und entwirft von dem virtuellen Bild mit einem weiteren Objektiv ein reelles Bild in der Filmebene.

**Beleuchtung** Mit unterschiedlicher Art der Beleuchtung kann man entweder *Durchstrahlungs-Objekte* (z. B. mit einem *Mikrotom* geschnittene Dünnschichtpräparate) oder *Oberflächen-Objekte* (z. B. ein Stück Haut) beobachten. Entweder wird das ganze Bildfeld auf einmal beleuchtet oder es wird mit einem engen Strahl gescannt und abgerastert. Das Licht wird entweder von einer externen Quelle eingestrahlt (*Fremdstrahler*) oder aber vom Objekt selbst erzeugt (*Selbststrahler*). In der Biologie-Medizin beruhen die meisten Selbststrahler auf *Fluoreszenz*.

Die Beleuchtung ist nicht nur für die Bildhelligkeit wichtig, sondern, besonders bei hohen Vergrößerungen, auch für die Bildqualität. Bei kleinen Vergrößerungen (und geringem erforderlichem Auflösungsvermögen) genügt ein am Präparattisch angebrachter schwenkbarer Plan- oder Hohlspiegel zur Beleuchtung des Präparats mit Tageslicht oder durch eine Glühlampe. Bei hohen Vergrößerungen dagegen müssen starke Lichtquellen und spezielle Beleuchtungssysteme, die *Kondensor-Optik*, benutzt werden, von denen in Abb. 20.5 zwei Bei-

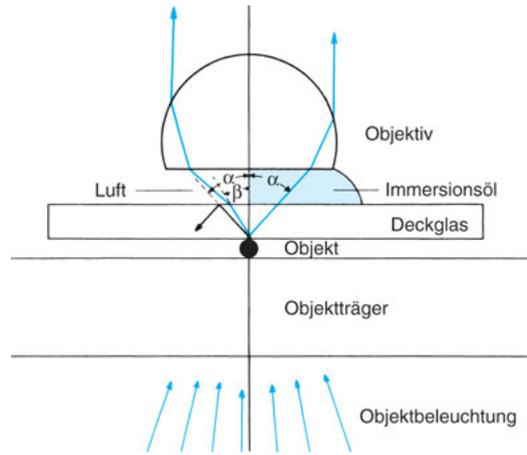


**Abb. 20.5** Verwendung des Kondensors bei der a) Hellfeld- und b) Dunkelfeldmethode.

spiele gezeigt werden. Sie bestehen aus mehreren Linsen, die das Licht unter großem Beleuchtungs- (d. h. Öffnungs-)Winkel auf das Objekt konzentrieren.

Etwas vereinfachend kann man sagen: die Bildqualität im Mikroskop ist von der Beleuchtungsoptik ebenso sehr abhängig wie von der Abbildungsoptik.

Für die Praxis des Hochauflösungsmiskopierens gilt daher: Die richtige Auswahl des Kondensors ist ebenso wichtig wie die der Abbildungsoptik aus Objektiv und Okular, d. h., der Strahlengang *vor* dem Objekt ist ebenso wichtig wie der Strahlengang *hinter* dem Objekt. Man sollte sich also nicht wundern, dass bei hohen Vergrößerungen selbst das beste Mikroskop unscharfe Bilder liefert, wenn man nicht auf richtige Objektbeleuchtung achtet.



**Abb. 20.6** Zur Definition des Auflösungsvermögens im Lichtmikroskop. Durch Totalreflexion am Deckglas wird links der Aperturwinkel von  $\alpha$  auf  $\beta$  herabgesetzt. Rechts wird dies durch Immersionsöl verhindert, dessen Brechungsindex gleich dem des Deckglases ist.

Transparente Objekte können im *Durchlicht* beobachtet werden, wenn sie genügend dünn sind (Abb. 20.5a). Bei undurchsichtigen Objekten kann man nur das von der Oberfläche gestreute Licht verwenden (*Auflicht*); auch dazu dienen spezielle Kondensoren.

Mit der *Dunkelfeld-Methode* (Abb. 20.5b) erreicht man, dass bei Durchlicht nur das am Objekt gestreute bzw. gebeugte Licht, nicht aber das direkt von der Lichtquelle kommende Licht in das Objektiv trifft. Dies geschieht durch eine Ringblende im Kondensator, im Bild erscheint dann das Objekt gegen dunklen Hintergrund, wodurch Bildkontraste deutlicher werden können.

**Auflösungsvermögen und Bildqualität** Mit wachsender Vergrößerung nimmt die Schärfentiefe (Kap. 19.4.10) einer Abbildung ab. Verwendet man jedoch extrem dünne Präparate (Dünnschnitte, Mikrotomschnitte), dann bleiben die Bilder auch bei großen Vergrößerungen scharf, wenn die Objektdicke den Schärfentiefenbereich nicht überschreitet. Für die *Güte* eines Mikroskops ist nicht einfach die Maximalvergrößerung entscheidend, sondern die Feinheit der Objektstrukturen, die man im Bild noch unterscheiden kann. Würde z. B. ein Mikroskopbild nachträglich auf eine Kinoleinwand weitervergrößert werden, so hätte man zwar die Vergrößerung erhöht, würde aber auf der Leinwand im wesentlichen nur dieselben Strukturfeinheiten erkennen, die be-

reits im Mikroskopbild zu sehen sind. Es würde sich damit also um eine nutzlose *Leervergrößerung* handeln. Weitaus wichtiger als die Maximalvergrößerung ist also die *Detailauflösung* eines Mikroskops. Sie wird begrenzt durch das Objektiv, denn das Okular kann nur diejenigen Details weitervergrößern, die bereits im reellen Zwischenbild enthalten sind. Als Maß für die Detailauflösung ist die *Auflösungsgrenze*  $\delta$  üblich, das ist der Abstand zweier eng benachbarter Gegenstandspunkte, die gerade noch getrennt wahrgenommen werden können. Je größer die Vergrößerung des Objektivs, desto kleiner sollte  $\delta$  sein.

Der *Auflösung* sind durch die Welleneigenschaften des Lichts, nämlich durch die Beugung des Lichts an den Objektstrukturen (Kap. 18.2.3) Grenzen gesetzt (*Abbe'sche Auflösungsgrenze*); es gilt

$$\delta \approx \frac{\lambda}{n \sin \alpha} \tag{20-3}$$

$\delta$  bedeutet die laterale Grenze (also in der Bildebene). Davon zu unterscheiden ist die *axiale* (vertikale) *Auflösung*  $\eta$ . Diese ist gegeben durch den *Schärfentiefen-Bereich* senkrecht zur Bildebene für

den betrachteten Objektpunkt. Sie wird durch die Divergenz des fokussierten Lichtbündels, also dessen relative Öffnung, bestimmt. Wenn das Objekt absorbiert, dann kann  $\eta$  auch durch die Eindringtiefe des Lichtes in der Probe begrenzt werden. Das Produkt  $\delta\eta$  können wir als *Auflösungsvolumen* bezeichnen.

$\lambda$  ist die mittlere Wellenlänge des zur Objektbeleuchtung verwendeten Lichts,  $n$  der Brechungsindex des Materials zwischen Objekt und Objektiv, und  $\alpha$  ist der halbe Öffnungswinkel des Objektivs (Abb. 20.6). Der Kehrwert von  $\delta$  heißt das *Auflösungsvermögen*. Die Größe  $n \sin \alpha$  ist die *Numerische Apertur* (abgekürzt: NA).

Der Zahlenwert der NA ist meist auf den Objektivfassungen angegeben. Der hohe Stand des Mikroskopbaues ermöglicht heute Abbildungen mit numerischen Aperturen größer als 1, die an die theoretische Grenze der Gl. (20-3)  $\delta \approx \frac{\lambda}{2}$  heranreichen.

Gl. (20-3) gilt auch für andere Wellenarten wie IR, Röntgenstrahlen oder Elektronenstrahlen. Die wichtigste Aussage der Gl. (20-3) ist: Je kleiner  $\lambda$ , desto kleiner ist  $\delta$ .

Die Auflösungsgrenzen betragen für konventionelle Lichtmikroskopie  $\sim 200$  nm, für spezielle, verbesserte Lichtmikroskope  $\geq 20$  nm, für Röntgenmikroskope  $\sim 20$ – $50$  nm und für Elektronenmikroskope  $\sim 1$  nm.

Wegen der Wellennatur des Lichtes ist es also prinzipiell nicht sinnvoll, mit dem klassischen Lichtmikroskop eine obere Grenze von  $V_{\text{gesamt}} \approx 2000$  zu überschreiten, bzw. Objektstrukturen sichtbar machen zu wollen, die deutlich kleiner als  $\lambda$  sind.

Mit dem *Optischen Nahfeld-Mikroskop* (*scanning near field optical microscope, SNOM*) ist es allerdings kürzlich gelungen, die Beugungsgrenze der Gl. (20-3) um mehr als den Faktor 10 zu unterbieten; dieses Gerät befindet sich aber noch im Entwicklungsstadium.

Um das Auflösungsvermögen zu vergrößern, besteht nach Gl. (20-3) die Möglichkeit, die Lichtwellenlänge

$\lambda$  herabzusetzen. Dem sind aber wegen des schmalen sichtbaren Spektralbereichs enge Grenzen gesetzt. Zudem kann man das Objekt in seinen Farben nur erkennen, wenn man weißes Licht verwendet. Trotz dieser Nachteile hat das UV-Mikroskop inzwischen Anwendungen gefunden.

Durch weitere Verkleinerung der Wellenlänge  $\lambda$  ist der bedeutendste Fortschritt der Mikroskopie gelungen. Beleuchtet man nämlich ein Objekt statt mit Licht mit schnellen Elektronen, die sich als Materiewellen ausbreiten (Kap. 18.6), dann kann man Abbildungen erzeugen wie mit Licht (s. Kap. 20.4). Da die den Elektronen zuzuschreibende Wellenlänge aber viel kleiner ist, ist das mit dem *Elektronenmikroskop* erzielbare Auflösungsvermögen um mehrere Größenordnungen besser. Bezüglich verfügbarer Wellenlängen wären Röntgenstrahlen ebenso geeignet wie Elektronenstrahlung. Da sich für sie aber nur mit großem Aufwand und nur in beschränktem Maße Abbildungslinsen bauen lassen, haben sich *Röntgenmikroskope* gegenüber Elektronenmikroskopen (Kap. 20.4) nicht durchgesetzt.

Diese nutzen den Vorteil, dass Elektronen wegen ihrer elektrischen Ladung in elektrischen oder magnetischen Feldern zur Bilderzeugung ablenkbar sind.

In jüngster Zeit ist eine Vielzahl neuartiger optischer Mikroskope entwickelt worden, die die Abbe'sche Auflösungsgrenze weit unterschreiten und teilweise sogar den Nachweis (aber nicht die Abbildung, das können nur die Elektronenmikroskope!) einzelner Atome und Moleküle ermöglichen. Sie sind insbesondere in den Biowissenschaften sehr wichtig geworden, z. B. um spezielle Biomoleküle in der lebenden Zelle nachweisen zu können.

Solche Mikroskope beruhen darauf, auf die herkömmliche breitflächige externe Beleuchtung des Objekts durch eine Glühlampe zu verzichten, und stattdessen entweder durch einen scharf gebündelten Raster-Laserstrahl Streulicht zu erzeugen, oder die zu untersuchenden Atome/Moleküle selbst zur Lichtemission zu veranlassen. Man registriert dann die Beugungsscheibchen der atomaren/molekularen Lichtquellen, ohne aber deren Feinstruktur auflösen zu können. Kennt man so die Orte der Objekte, dann kann man eine Analyse auf atomarer bzw. nanoskopischer (Anhang A.8) Größenskala vornehmen. Zur Anregung atomarer oder molekularer Lichtemission dienen z. B. die chemisch selektive, durch ultraviolettes Licht anregbare *Fluores-*

zenz oder die durch IR-Laserstrahlung induzierte *Zwei-Photonen-Anregung*, wie in den folgenden Kapiteln gezeigt wird.

**Immersionmikroskopie** Eine weitere Möglichkeit, die Auflösung im Lichtmikroskop zu beeinflussen, besteht nach Gl. (20-3) darin, den Öffnungswinkel  $\alpha$  zu ändern. Er wird vergrößert, wenn man bei gleicher Gegenstandsweite dem Objektiv einen größeren Durchmesser und damit eine größere Aperturblende gibt. (Dadurch steigt allerdings die Schwierigkeit, Abbildungsfehler zu korrigieren.)

Bei Verwendung von Mikroskop-Deckgläsern über dem Objekt, wie sie bei medizinischen Dünnschnitt-Präparaten üblich sind, kann der Öffnungswinkel der ins Objektiv eintretenden Lichtstrahlen durch Totalreflexion an der Grenzfläche Glas/Luft eingeengt werden (Abb. 20.6 linker Teil). In diesem Fall wird die Aperturblende des Objektivs unter Umständen gar nicht voll ausgeleuchtet,  $\alpha$  wird also kleiner und nach Gl. (20-3) wird das Auflösungsvermögen herabgesetzt. (Der dann wirksame Öffnungswinkel ist in Abb. 20.6 mit  $\beta$  gekennzeichnet.)

Die Totalreflexion lässt sich dadurch beseitigen, dass man auf das Deckglas einen Tropfen einer stark brechenden, durchsichtigen Flüssigkeit (*Immersion-Öl*) bringt und das Objektiv darin eintaucht (Abb. 20.6 rechter Teil). Man vergrößert so den wirksamen Winkel  $\alpha$ . Das Auflösungsvermögen wird nach Gl. (20-3) dadurch erhöht, dass jetzt der Öffnungswinkel größer ist ( $\alpha > \beta$  in Abb. 20.6) und anstelle  $n = 1$  (Brechungsindex von Luft) der Brechungsindex des Immersions-Öls (meist  $n = 1,5$ ) zu setzen ist.

Die Immersions-Methode setzt voraus, dass durch eine geeignete *Beleuchtungsoptik* (die Kondensoroptik) Licht für den ganzen Winkelbereich angeboten wird. Andernfalls würde in Gl. (20-3) an die Stelle von  $\alpha$  der kleinere Öffnungswinkel der Probenausleuchtung oder des von der Probe gestreuten Lichtes treten.

Extrem große Auflösung ist allerdings nur bei hoher Vergrößerung erforderlich, so dass man die Methode der *Immersion-Mikroskopie* darauf beschränkt.

Die für Immersion-Mikroskopie zu verwendenden Objektive sind besonders konstruiert und tragen auf der Fassung eine entsprechende Kennzeichnung.

Für eine mittlere Wellenlänge  $\lambda = 600$  nm, ein Immersions-Öl mit  $n = 1,5$  und einen Öffnungswinkel  $\alpha = 60^\circ$  erhalten wir nach Gl. (20-3) als prinzipielle Auflösungsgrenze eines Lichtmikroskopes  $\delta \approx 460$  nm. Es gilt also die Faustregel, dass die kleinsten erkennbaren Details etwas kleiner sind als die Wellenlänge des verwendeten Lichtes.

**Amplituden- und Phasenobjekte** Kontrastreiche Präparate lassen sich normalerweise leichter mikroskopieren als Objekte mit nur geringen Kontrasten. Letztere überwiegen aber bei biologischen und medizinischen Prä-

paraten. Häufig färbt man diese daher mit besonderen Farbstoffen ein. Ihre Strukturen werden dadurch erkennbar, dass sie durch Absorption und Streuung die Intensität (oder Amplitude) des durchgehenden Lichtes ändern; sie heißen deswegen *Amplitudenstrukturen*. Neben diesen können sich Strukturen im Präparat auch in Unterschieden allein des Brechungsindex auswirken, ohne dass Absorption auftritt. Wegen der dadurch bedingten unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Lichts in verschiedenen Präparatbereichen werden die Phasenbeziehungen der Lichtwellen im Lichtbündel geändert (wie dies z. B. auch bei Hologrammen (Kap. 18.1.3) der Fall ist). Durch raffinierte Anwendung physikalischer Interferenztechniken (Kap. 18.1.2) ist es gelungen, auch diese Strukturen farbloser, durchsichtiger Objekte mit dem Mikroskop sichtbar zu machen (*Phasenkontrastverfahren*).

Beim Phasenkontrastverfahren lässt man die durch das Objekt gelaufene Lichtwelle mit einer Referenzwelle interferieren. In Bereichen destruktiver Interferenz sinkt die Intensität der resultierenden Lichtwelle, während sie bei konstruktiver Interferenz ansteigt. Auf diese Weise werden Phasenschwankungen in der Objektwelle in Helligkeitsschwankungen umgewandelt und können vergrößert sichtbar gemacht werden.

**Polarisationsmikroskopie** Sind Bereiche des Objektes doppelbrechend (Kap. 18.3.4), wie dies bei speziellen Kristallen, bei mechanisch verspannten Gläsern (Spannungsdoppelbrechung, Kap. 18.3.5) oder auch bei organischen und anorganischen Substanzen der Fall sein kann, die aus einer Lösung eingetrocknet wurden, so lassen sich diese Strukturen mit polarisiertem Licht sichtbar machen. Lässt man nämlich polarisiertes Licht durch eine solche Probe fallen, so wird der Polarisationszustand des Lichts in den verschiedenen Objektbereichen in unterschiedlichem Maße verändert. Seine Polarisationsrichtung kann gedreht werden, oder es wird zu elliptisch polarisiertem Licht. Durch einen nachgeschalteten Analysator werden im *Polarisationsmikroskop* diese Änderungen in Unterschiede der Lichtintensität umgewandelt. Da die Doppelbrechung von der Frequenz des Lichtes abhängt (s. Kap. 18.3.4), entstehen im Polarisationsmikroskop häufig Bilder in prachtvoll leuchtenden Farben.

Ein normales Mikroskop ist allerdings für diese Zwecke nicht umrüstbar – etwa, indem man Polarisatoren einbaut –, denn die optischen Bauteile (Objektiv und Okular) des Mikroskops müssen so konstruiert sein, dass sie nicht selbst den Polarisationszustand des Lichtes stören.

**Fluoreszenzmikroskopie** Spezielle Gewebe- und Zellstrukturen (z. B. weiße Blutkörperchen) lassen sich besonders gut sichtbar machen, wenn sie mit fluoreszierenden Substanzen (Kap. 17.11) wie *Eosin B*, *grünes Fluoreszenzprotein* eingefärbt werden. Beleuchtet man sie nicht mit sichtbarer Strahlung, sondern mit UV-Strahlung (wozu eine spezielle UV-durchlässige Kondensor-Optik z. B. aus Quarz- oder Flussspatlinsen erforderlich ist), so senden sie sichtbares Fluoreszenz-Licht (Kap. 17.11) aus, und dieses kann mit dem Mikroskop beobachtet werden (*Fluoreszenzmikroskopie*).

Die Weiterentwicklung des *Fluoreszenzmikroskops* hat mit dem *STED-Mikroskop* von Hell einen Höhepunkt erreicht (STED: STimulated Emission Depletion). Die Idee ist einfach (nicht aber die technische Durchführung):

Die Abbesche Auflösungsgrenze von etwa 200 nm ist mit konventionellen Mikroskopen nicht zu umgehen. Wenn man aber in der Umgebung eines selbstleuchtenden, fluoreszierenden Bildpunktes, der kleiner ist als 200 nm, *Dunkelheit* erzeugt, dann kann der leuchtende Bildpunkt schrumpfen und schärfer (mit einer Auflösungsgrenze bis zu 20 nm!) abgebildet werden. Dies erreicht man, indem man in der engen Umgebung des Bildpunktes die Fluoreszenz mittels eines zusätzlichen Laserpulses durch induzierte Emission vorzeitig abbruft (Kap. 17.6). Diese Abbildung ist nicht beugungsbegrenzt. Sie wird derzeit durch Einbeziehung weiterer optischer Effekte wie der Verwendung von 3 Fluoreszenzfarben noch weiterentwickelt und hat dem Lichtmikroskop die Nanowelt der Viren, Proteine, DNS und anderer Zellstrukturen *in vivo* eröffnet.

**Konfokales Laser-Raster-Mikroskop** Dieses auf einem neuartigen Prinzip beruhende Lichtmikroskop wird in der biologischen und medizinischen Forschung eingesetzt und wird in naher Zukunft auch für die medizinische Praxis wichtig werden. Im *Konfokalen Laser-Raster-Mikroskop* (confocal laser scanning microscope, CLSM) wird die herkömmliche Abbildung durch eine *Rastermethode* ersetzt, wobei ein auf die Probe fokussierter Laserstrahl die Probe abrastert. Durch eine sehr kleine Blende im Strahlengang wird nur ein extrem kleiner Teil der Probe (ein Rasterpunkt) beleuchtet. Durch Verschieben dieser Blende über die Probe (Rastertechnik, Kap. 20.4.3) lassen sich räumlich hoch aufgelöste dreidimensionale Bilder von z. B. einzelnen Bio-Molekülen erzeugen. Durch digitale Bildverarbeitung ist es relativ einfach, Abbildungsfehler zu korrigieren. Die Bilderzeugung unterscheidet sich in gleicher Weise von der des konventionellen Lichtmikroskops wie die des im nächsten Kapitel, 20.4.2 be-

schriebenen REM sich vom TEM (Kap. 20.4.1) unterscheidet.

Das CLSM zeichnet sich auch durch eine, verglichen mit dem normalen Mikroskop, wesentlich größere Schärfentiefe, speziell bei hohen Vergrößerungen aus, es unterdrückt unerwünschte Streustrahlung aus unscharfen Probenbereichen und ermöglicht die dreidimensionale Darstellung ausgedehnter Objekte auf dem Bildschirm.

Die Kombination der Fluoreszenzmikroskopie mit der konfokalen Raster-Mikroskopie hat bahnbrechende Fortschritte in der hochauflösenden optischen Mikroskopie von Bio-Materie gebracht, und man kann auf diese Weise Bilder einzelner Atomgruppen, Moleküle, Zellwände usw. erzeugen. So hat sie die Zellbiologie in den letzten 15 Jahren revolutioniert. Sie findet aber ihre Grenzen in der begrenzten Verfügbarkeit geeigneter Anfärbe-Farbstoffe da diese oftmals durch chemische Reaktionen das Objekt drastisch verändern (Artefakt-Bildung). Speziell bei der Beobachtung lebender Zellen ist dies ein Problem. Zudem bleichen Fluoreszenz-Farbstoffe oftmals unter der Beleuchtung mit UV-Licht aus (Kap. 17.11), und damit ist nur kurzzeitiges Mikroskopieren möglich.

#### **CARS (Coherent Anti-Stokes Raman Scattering) – Mikroskopie**

Die Entwicklung der optischen Mikroskopie zeigt, wie die Anwendung moderner optischer Methoden die Abbildungsmöglichkeiten für biologische Objekte zunehmend in den Nanometer-Bereich zu verschieben gestattet. Die erst kürzlich entwickelte CARS-Mikroskopie beruht auf der kohärenten, nichtlinearen Kurzzeit-Laserspektroskopie.

Während die prinzipielle Abbe'sche Auflösungsgrenze (Kap. 20.3.3) konventioneller optischer Mikroskope bei  $\approx 200$  nm Objektgröße liegt, kann man mit der CARS-Mikroskopie atomare Bestandteile von Molekülen abbilden. Diese Grenze wird auch bei der Fluoreszenz-Mikroskopie (s. oben) erreicht. Der entscheidende Vorteil der neuentwickelten CARS-Mikroskopie ist, dass sie ohne Anfärbung mit Fluoreszenz-Farben auskommt. Dafür ist die Nachweismethode sehr indirekt und erfordert extremen physikalischen Aufwand. Es ist zu erwarten, dass diese Technik künftig wegen der Möglichkeit der Untersuchung lebender Zellen mit extremer Auflösung auch in der praktischen Medizin Eingang finden wird.

Eine detaillierte Erklärung liegt außerhalb des Rahmens dieses Buches, und wir beschränken uns auf einige wenige Informationen.

1. Es werden sehr kurze, Picosekunden bis Femtosekunden lange Laserpulse (Kap. 17.12.1; 17.12.2) verwendet, deren kohärente Überlagerung (Kap. 18.1.1) das Detektionssignal erzeugen.

2. Diese Pulse haben so hohe Puls-Intensitäten, dass nichtlineare optische Prozesse (Kap. 18.1.1) im einzelnen Bio-Molekül oder in der einzelnen Zelle angeregt werden. Zur Erzeugung eines für eine Beo-

bachtung erforderlichen Kontrasts auf molekularer Skala dienen die Molekülschwingungen (Kap. 18.4). Die CARS-Mikroskopie beruht also auf chemisch selektiver Bildgebung. Molekülschwingungen lassen sich im Prinzip auch durch lineare IR-Absorptionsspektroskopie (Kap. 18.4) nachweisen. Da aber zumeist die Schwingungsfrequenzen im fernen IR liegen, kann man diese Spektroskopie für Mikroskopie im Nanometer-Bereich nicht verwenden.

3. Moderne optische Methoden ermöglichen indirekte Nachweismethoden: Bestrahlt man ein Molekül mit monochromatischem Licht, dann wird dieses an dem Molekül gestreut. Dadurch kann eine Molekülschwingung angeregt werden, und dann fehlt den gestreuten Photonen die der Schwingung zugeordnete Quantenenergie. Die Frequenz des Streulichts ist also

erniedrigt worden, und die Quantenenergie der Molekülschwingung kann aus der veränderten Frequenz des Streulichtes gemessen werden. Diesen Prozess der inelastischen Lichtstreuung nennt man *Smekal-Raman-Streuung*. Es gibt aber auch den umgekehrten Prozess: Eine bereits vorhandene Molekülschwingung übergibt die zugehörige Quantenenergie an einfallendes Licht. Dann ist die Frequenz des Streulichts erhöht. Um diese beiden möglichen Prozesse zu unterscheiden, nennt man die Frequenzverringering einen *Stokes-Prozess* und die Frequenzerhöhung einen *Anti-Stokes-Prozess*.

4. Das Bild wird vom IR in das Sichtbare verlegt, indem man nichtlineare, kohärente Laserspektroskopie für die Anregung und Detektion der Anti-Stokes-Streuung einsetzt, wozu allerdings großer technischer Aufwand erforderlich ist.

## 20.4 Elektronenmikroskop

Mit Elektronenstrahlen lassen sich Objekte auf ähnliche Weise abbilden wie mit Licht, da man bewegten Elektronen Welleneigenschaften mit einer wohldefinierten Wellenlänge zuordnen kann (Kap. 18.6). Die Bezeichnung *Elektronen-Optik* betont diese Analogie.

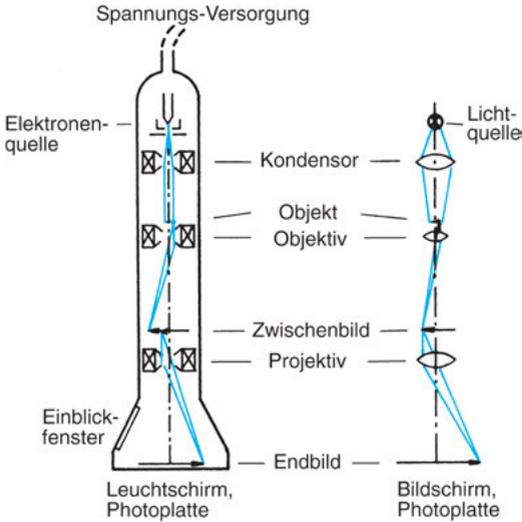
Praktische Bedeutung — auch für biologische Präparate — hat die Elektronenmikroskopie wegen der im Vergleich zur Lichtmikroskopie rund 1000fach höheren Vergrößerungs- und Auflösungsmöglichkeiten von Strukturen gewonnen.

Allerdings ist der technische Aufwand wesentlich größer. In den meisten Elektronenmikroskopen werden freie Elektronen durch Glüh- oder Feldemission im Ultrahochvakuum (Kap. 15.2.1) erzeugt und dann durch elektrische Spannungen von 10 kV bis 100 kV (in Extremfällen bis 1 MV) beschleunigt. Die Geschwindigkeiten solcher Elektronen betragen ca. 50 % der Lichtgeschwindigkeit, so dass bereits eine relativistische Massenzunahme (Kap. 2.1) von ca. 15% zu beobachten ist. Diesen Elektronen sind Wellenlängen von weniger als 1/10 eines Atomdurchmessers zuzuordnen.

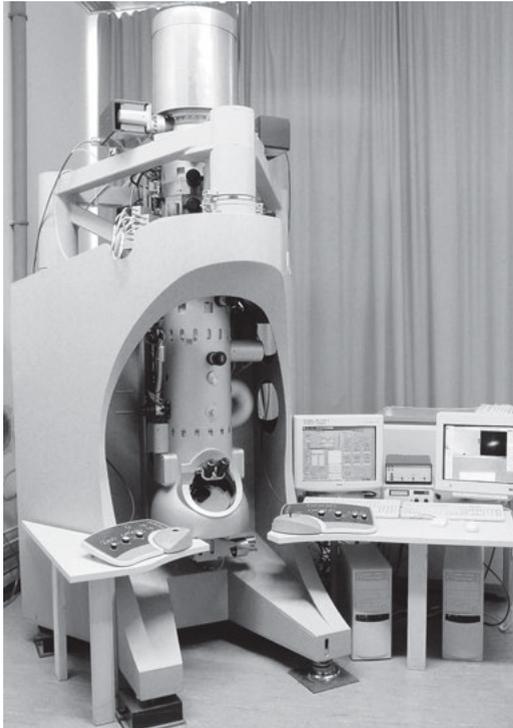
### Das Transmissions-Elektronenmikroskop

**(TEM)** Zur Abbildung mit Elektronenwellen dient nicht, wie bei optischen Systemen, der Brechungsindex, um Linsensysteme zu bauen.

Für die Konstruktion des abbildenden Systems, das, wie das Lichtmikroskop aus einzelnen Linsen aufgebaut ist, macht man sich stattdessen zunutze, dass Elektronen eine elektrische Ladung mit sich tragen, die zu ihrer Ablenkung im elektrischen Feld oder im magnetischen Feld führen kann. Entsprechend wurden TEMs mit elektrischen und, alternativ, mit magnetischen Linsensystemen entwickelt. Die Funktion der Linsen zur Beleuchtung (*Kondensor*) und Abbildung (*Objektiv*) übernehmen geeignete inhomogene, statische elektrische oder magnetische Felder. Trifft der Elektronenstrahl auf die zu beobachtenden Objektstrukturen, so wird er durch Beugung und Streuung abgelenkt und dies auf von der Probenstruktur abhängige Weise. Werden durch einen bestimmten Objektbereich Elektronen stark abgelenkt, so werden sie hinter dem Objektiv durch eine Aperturblende abgefangen und tragen nicht mehr zum Bild bei, wodurch der Bildkontrast entsteht. Die Bildinformation ist also in den Unterschieden der Elektronendichte der von verschiedenen Objektbereichen kommenden und nahe der optischen Achse verlaufenden (und damit zur Abbildung beitragenden) Strahlen enthalten. Mehrere Elektronenlinsen entwerfen mit diesen Strahlen ein vergrößertes Bild des Objektes. Auf einem Fluoreszenzschirm — wie bei der Fernsehröhre — oder mit einer CCD-Kamera wird daraus ein sichtbares Bild.



**Abb. 20.7** Prinzip des Transmissions-Elektronenmikroskops (links) im Vergleich zu dem des lichtoptischen Projektionsmikroskops (rechts). Es sind jeweils die abbildenden Strahlengänge gezeichnet.



**Abb. 20.8** Hochleistungs-Elektronenmikroskop für konventionelle Transmissionsmikroskopie mit Elektronenenergien von bis zu 100 keV (PACEM, Fa. Carl Zeiss).

Die optische Anordnung des TEM entspricht damit dem Lichtmikroskop mit einer Projektionsoptik (Kap. 20.3.1) anstelle des Okulars.

In Abb. 20.7 sind die Anordnungen verglichen, um die prinzipielle Ähnlichkeit herauszustellen. Fotografische Filme werden von Elektronenstrahlen ähnlich wie von sichtbarem Licht geschwärzt, so dass man sie zur Aufnahme des Bildes an die Stelle des Leuchtschirms bringen kann. Sie werden allerdings zunehmend verdrängt durch elektronische Kameras (s. Kap. 16.2.4).

In Abb. 20.8 sind der Tubus und das Schalt-pult eines TEM zu erkennen.

Mit Elektronenmikroskopen lassen sich heute bis zu  $5 \cdot 10^5$ fache Vergrößerungen erreichen und Strukturen erkennen, die nurmehr  $\approx 0,1 \text{ nm}$  ( $= 10^{-10} \text{ m}$ ) voneinander entfernt sind. Diese extreme Auflösung brachte die Naturwissenschaft einen enormen Schritt vorwärts, denn sie ermöglicht die direkte Beobachtung in molekularen und atomaren Dimensionen.

Objektstrukturen lassen sich aber auch beim TEM nur begrenzt sichtbar machen. Das liegt neben der beugungsbedingten Auflösungsgrenze entsprechend Gl. (20-3) auch am *Bildkontrast*, der speziell bei leichten Atomen (C, O, N, H, ...) wegen der geringen Elektronenstreuung an ihnen sehr klein ist. Wegen geringen Bildkontrastes liegt die Auflösungsgrenze in biologischen Präparaten noch deutlich über dem Atomdurchmesser und deutlich über der Beugungsgrenze der Gl. (20-3). Nur bei Atomen hoher Atommasse (Hg, Au, U) ist der Kontrast groß genug, so dass Beugungsbegrenzung die Auflösung limitiert, und es gelingt, diese Atome direkt sichtbar zu machen. Beispielsweise haben Elektronen, die mit einer Spannung von 50 kV beschleunigt wurden, eine de Broglie-Wellenlänge (Kap. 18.6) von  $\lambda = 5 \cdot 10^{-3} \text{ nm}$ , das ist etwa der  $10^5$ -te Teil der Wellenlängen sichtbaren Lichtes. Man sollte nach Gl. (20-3) daher bei Elektronenmikroskopen ein  $10^5$ fach größeres Auflösungsvermögen erwarten, aber bisher erzielt man gute elektronenoptische Abbildungen nur mit extrem schmalen Bündeln, deren numerische Apertur kaum über 1% der eines guten Lichtmikroskopes hinaus verbessert werden konnte. Daher ist das Auflösungsvermögen auf etwa das  $10^3$ fache des Lichtmikroskopes beschränkt. Wenn es in Zukunft weiter gelingen sollte, diese technische Schwierigkeit zu überwinden, so wird es möglich sein, mit dem Elektronenmikroskop auch leichtere

Atome sichtbar zu machen, und damit Strukturen organischer und biologischer Moleküle direkt zu bestimmen, wozu heute üblicherweise noch komplizierte indirekte Röntgenstrahlmethoden angewendet werden.

Nur im Vakuum kann sich ein Elektronenstrahl ungehindert ausbreiten. Daher muss der Tubus des Elektronenmikroskops, der zwischen 1 und 2 m lang ist, auf gutes Vakuum gebracht werden. Eine Folge ist, dass *lebende* Objekte praktisch nicht beobachtet werden können.

Für Elektronenstrahlen sind Objekte nur durchstrahlbar, wenn diese dünner als  $\approx 0,1 \mu\text{m}$  sind, denn i. A. werden Elektronenstrahlen stärker durch Materie geschwächt als sichtbares Licht, und durchsichtige Stoffe, wie man sie in der Lichtoptik kennt, gibt es für Elektronen überhaupt nicht.

Der Schärfentiefenbereich (Kap. 19.4.10) im Objekt ist bei großen Vergrößerungen extrem klein (ca. 10 nm). Dies bringt erheblichen Aufwand bei der Probenpräparation mit sich und hat zur Entwicklung komplizierter Methoden geführt. Biologische Präparate werden heute meist als Dünnschnitte durch *Ultra-Mikrotome* aus dicken Proben geschnitten; mit ihnen können Dicken unter  $0,05 \mu\text{m}$  hergestellt werden. Außerdem können die meist kontrastarmen biologischen Präparate aus Atomen leichter Elemente entweder durch chemische „Einfärbung“ mit stoffselektiven Kontrastmitteln oder durch Überdampfen mit einem dünnen Schwermetallfilm aus schräger Richtung kontrastiert werden (*Beschattung*). Spezielle biologische Moleküle wie Proteine lassen sich auch durch Goldkolloide markieren, die mit passenden Antikörper-Molekülen belegt sind. Goldkolloide liefern im TEM kontrastreiche Bilder und zeigen damit die Anwesenheit und Verteilung der Moleküle an. Allerdings kommt es durch solcherart Probenmanipulationen zum Abtöten lebender biologischer Präparate.

**Analytische Elektronenmikroskopie** In den letzten Jahren ist es gelungen, mit dem Elektronenmikroskop zusätzlich zur Abbildung auch eine hoch ortsaufgelöste chemische Analyse der Zusammensetzung der Probe durchzuführen. Man kann also z.B. ein „Kohlenstoffbild“ erzeugen, in dem nur Objektstrukturen

dargestellt werden, die C-Atome enthalten. Sind in Teilen der Probe z. B. auch Schwefelverbindungen enthalten, dann kann man sie im „Schwefelbild“ sichtbar machen.

In den letzten Jahren hat die Elektronenmikroskopie enorme Fortschritte gemacht. Im folgenden seien einige aufgezählt:

(1) Durch zusätzliche Korrekturlinsen zur hardwaremäßigen Verringerung von Abbildungsfehlern (hauptsächlich der Aberration), ist gelungen, die Auflösung von Einzelatomen zu erreichen.

(2) Im Bereich der Höchstauflösung, in dem die exakte Form der Elektronenwellen bei der Bildentstehung wichtig ist, ist durch ausgereifte Computer-Auswertprogramme die fast abbildungsfehler-freie Rekonstruktion der auslaufenden Wellen üblich geworden. Auflösungsgrenzen bis hinunter zu 0,5 nm können auf diese Weise erreicht werden.

(3) Durch Ätzung mit Ionenstrahlen (*focused ion beam (FIB)* mit Ba-Ionen) und durch weitere Präparationsmethoden konnten die Anwendbarkeit des TEM und die Qualität der erforderlichen Dünnschnitt-Proben wesentlich erhöht werden.

Der wohl wichtigste Fortschritt ist, dass durch Ausnutzung der *nichtelastischen* Wechselwirkung der Elektronen mit der Probe das TEM neben der Bilderzeugung auch zur *chemischen Mikroanalyse* benutzt werden kann.

Man erhält also zugleich ein hochaufgelöstes Bild und eine chemische, ortsaufgelöste atomare Analyse des Bildausschnitts der Probe.

Die Abbildung im TEM erfolgt normalerweise mittels der *elastisch* am Objekt gestreuten Elektronen. Ein Teil der Elektronen erzeugt aber in atomaren und molekularen Details der Probe für die Elemente spezifische elektronische Anregungen und verliert dadurch die zugehörige Anregungsenergie. Diese *nichtelastisch* gestreuten Elektronen können getrennt von den elastischen zur Abbildung gebracht werden, und zwar mit vergleichbarer Auflösung. Durch die genaue Analyse mittels ortsaufgelöster *Elektronenenergieverlust-Spektroskopie* ist eine chemische Analyse der atomaren Bestandteile der TEM-Proben nicht nur qualitativ sondern

quantitativ möglich, und das TEM wird vom Bildgeber zum *Analysegerät*. Die Grenzen liegen derzeit (bei besonders geeigneten Proben, zu denen aber biologische nicht gehören) bei etwa 1 nm Ortsauflösung und 0.1 eV Energieauflösung.

Alternativ kann man übrigens auch die durch den Elektronenbeschuss aus den Probenatomen emittierten charakteristischen Röntgenstrahlen (Kap. 21.3.1) auswerten.

**Bio-Elektronenmikroskop (Bio-TEM):** In den Lebenswissenschaften war das TEM bisher nur eingeschränkt verwendbar, weil man wegen des erforderlichen Vakuums lebende Zellen oder lebendes Gewebe nicht untersuchen konnte. Hier hatte daher die optische Mikroskopie ihre Domäne. Um mit dem TEM höhere Vergrößerungen zu erreichen, wurden stattdessen biologische Proben tiefgefroren (*Cryomikroskopie*) und dann (mit Diamantmessern) dünn geschnitten, durch Ba-Ionen (*focused ion beam, FIB*) dünne geätzt oder in Matrixmaterialien (z. B. *Epoxy-Harz*) eingebettet.

Neuerdings sind nun die ersten Experimente gelungen, durch die Konstruktion von winzigen, einige  $10^2$  nm dicken *Mikroküvetten* mit dünnsten, für den Elektronenstrahl teildurchlässigen Fenstern, während des TEM-Betriebs lebende Zellen in Gasatmosphäre (*gas cells*) und sogar in Flüssigkeiten (*liquid cells, liquid flow cells*) unterschiedlicher Temperaturen zu halten.

Es ist (bisher nur in Forschungslabors) gelungen, diese Küvetten zu kompletten *Mikrolaboren* auszubauen, beispielsweise für chemische Reaktionen mit Gasen, mit Flüssigkeitszu- und -abführungen oder sogar als elektrochemische Zellen, um chemische Reaktionen an lebendem biologischem Gewebe mit Auflösung bis zu 1 nm *in vivo* durchzuführen (*Bio-TEM*).

**Das Raster-Elektronenmikroskop (REM)** Die Entwicklung eines speziellen Elektronenmikroskops mit extrem großer Schärfentiefe in der Objektebene ist mit dem *Raster-Elektronenmikroskop* (REM), auch *Sekundärelektronenmikroskop* (SEM) genannt, gelungen. Es



**Abb. 20.9** Raster-Elektronenmikroskop: „Porträt“ eines Marienkäfers in 46facher Vergrößerung. (Wir danken Herrn G. Kleer für diese Aufnahme.) Man erkennt den Kopf mit den Facettenaugen und die gefalteten Vorderbeine.

ist besonders geeignet zur Abbildung von Objektoberflächen mit starken Strukturen. Die Vergrößerung überdeckt den ganzen Vergrößerungsbereich des Lichtmikroskops, geht aber mit maximaler Auflösungsgrenze von  $\sim 5$  nm weit darüber hinaus. Abb. 20.9 zeigt als Beispiel das Porträt eines Marienkäfers.

In Analogie zum Lichtmikroskop kann man das TEM als Durchlicht- und das SEM als Aufricht-Mikroskop ansehen, wobei letzteres den Vorteil hat, dass man keine Dünnschnitte benötigt, sondern massive Proben betrachten kann. Es hat aber den Nachteil, nur die Oberfläche, nicht aber innere Strukturen der Proben zu zeigen.

Das REM unterscheidet sich vom herkömmlichen Elektronenmikroskop in einem Punkt wesentlich: Das Bild wird nach dem Fernsehprinzip (Rastertechnik) aufgezeichnet. Ein eng gebündelter Elektronenstrahl trifft auf einen Objektbereich und löst dort Sekundärelektronen aus, deren Intensität je nach Eigenschaft der Oberfläche verschieden ist. Diese Elektronen werden *nicht* durch Linsen in ein Bild abgebildet, sondern direkt durch einen Detektor registriert. Der einfallende Elektronenstrahl wird nun ähnlich wie bei der Fernsehkamera (Kap. 16.1.4) rasterartig im Zick-Zack über die Probe gelenkt, und dies bewirkt die Ortsauflösung. Synchron dazu läuft der Elektronenstrahl eines Fernsehempfängers, dessen Helligkeit durch die Inten-

sität der von den jeweiligen Objektpunkten emittierten Sekundärelektronen gesteuert wird. So erhält man auf dem Fernsehschirm das vergrößerte Bild des Objektes und kann es abfotografieren.

Vergleichen wir mit dem Lichtmikroskop, so besteht das REM nur aus der Kondensoroptik, während die abbildende Optik durch den Sekundärelektronen-Detektor ersetzt ist.

Der Vorteil der extrem hohen Schärfentiefe hat dazu geführt, dass das Raster-Elektronenmikroskop auch in dem bisher dem Lichtmikroskop vorbehaltenen Bereich geringer Vergrößerungen eingesetzt wird.

Zudem kann das REM — wie auch das TEM — mit Zusatzeinrichtungen auch zur chemischen Analyse betrachteter Objektbereiche mittels der beim Aufprall der Elektronen ebenfalls emittierten Röntgenstrahlung herangezogen werden (*Röntgenanalyse*).

## 20.5 Raster-Sonden-Mikroskopie

Eine neue Art der bildmäßigen Darstellung von Oberflächen oder Molekül-Strukturen bis hinunter zu atomarer Auflösung ist die *Raster-Sonden-Mikroskopie* (scanning X microscopy, SXM), deren erste Konstruktion durch die Verleihung des Nobelpreises 1986 ausgezeichnet wurde. Seitdem ist eine Vielzahl von Varianten entwickelt worden, bei denen unterschiedliche *Sonden* eingesetzt werden. (Sie sind in der Bezeichnung SXM als X einzusetzen.)

Das gemeinsame Funktionsprinzip dieser Geräte ist, dass kein direktes Bild erzeugt wird, sondern die Probe durch eine über ihre Oberfläche bewegte, sehr feine Sonde lokal abgerastert wird, und das Sonden-signal dann auf einem Bildschirm aufgezeichnet wird.

Der entscheidende Unterschied ist die Art der Wechselwirkung zwischen Probe und Sonde: der Abstand zwischen Probenoberfläche und Sonde ist so gering, dass atomare und molekulare *elektromagnetische* Kraftfelder (*Nahfelder*) wirken.

Bisher ist es allerdings nicht gelungen, die Auflösungsgrenze des REM wesentlich unter 5 nm zu bringen; die *höchstauflösende* Mikroskopie wird also vorerst die Domäne des herkömmlichen TEM bleiben.

**Korrelative Licht- und Elektronenmikroskopie (CLEM):** Nachteil des TEM ist die geringe Eindringtiefe des Elektronenstrahls in der Probe; SEM und SPM sind auf die Untersuchung von Oberflächen beschränkt. Durch die Kombination von Elektronenmikroskop und lichtoptischem Mikroskop *in einem Gerät* mit korrelierter digitaler Bedienungssteuerung ist es gelungen, die Vorzüge beider Instrumente in einer Einheit zu integrieren (*Korrelative Licht- und Elektronenmikroskopie (CLEM)*).

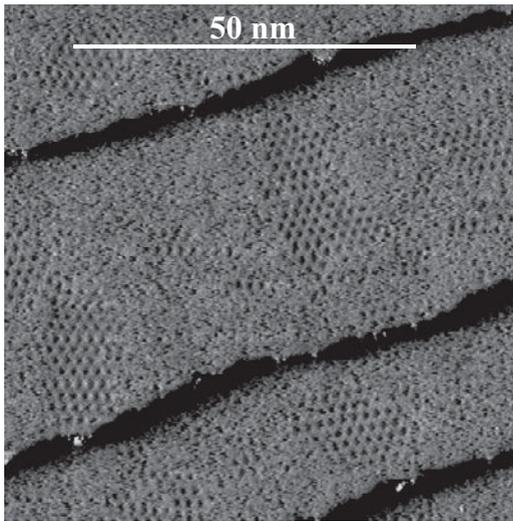
Durch einfaches Umschalten kann man an derselben Probenstelle von einer zur anderen Beobachtungsart wechseln und beide Bilder simultan auf dem Bildschirm sichtbar machen. Beispielsweise ist ein CLEM-Gerät auf dem Markt, in dem ein höchstauflösendes TEM für Strukturanalyse und chemische Elementanalyse mit einem Fluoreszenzmikroskop mit großem Bildfeld und großer Tiefenaufklärung kombiniert sind.

Die Raster-Methode wurde bereits bei dem konfokalen Raster-Mikroskop (Kap. 20.3), dem Fernsehgerät (Kap. 16.1.4) und dem REM (Kap. 20.4.2) beschrieben. Im Gegensatz zu diesen wird aber beim Raster-Sonden-Mikroskop anstelle des Elektronenstrahls eine sehr feine Festkörperspitze verwendet, die in extrem geringem Abstand über das Messobjekt bewegt wird. Die mechanische Translationsbewegung der Sondenspitze erfolgt in Raster-Schritten, die wesentlich kleiner als ein Atomdurchmesser sind. So können einzelne Atome und Moleküle aufgelöst dargestellt werden.

Zur mechanischen Vorzentrierung der Messspitze werden piezoelektrische Stallelemente (Kap. 14.7.7) verwendet.

Die verschiedenen Typen des SXM unterscheiden sich in der Art des Signals, das an der Sonde aufgenommen und, nach entsprechender Verstärkung, zur Bilderzeugung verwendet wird.

Im *Raster-Tunnelmikroskop* (RTM, STM) wird zwischen Spitze und Messobjekt ein elektrisches Feld angelegt und der von den Objekteigenschaften abhängige elektri-



**Abb. 20.10** Raster-Tunnelmikroskop-Bild von teilweise zu Eis gefrorenen Wasserschichten. Die Eiskristalle sind an einer regelmäßigen Überstruktur (keine atomare Struktur!) zu erkennen. (Wir danken Herrn Prof. T. Michely für das Bild.)

sche Strom (Tunnelstrom) gemessen. Damit kann man Abbildungen der Oberflächentopologie erzeugen, und man kann durch systematische Variation der angelegten elektrischen Spannung auch Spektroskopie von elektronischen Zuständen an der Oberfläche betreiben.

Im *Raster-Kraftmikroskop* (RKM, SFM; atomic force microscope, AFM) misst man die mechanische Reibungskraft zwischen Probenoberfläche und Sondenspitze, die von Objektdetails abhängig ist. Dieses Gerät wird auch für biologische Objekte verwendet, da auch elektrisch nichtleitende Objekte abgebildet werden können.

Beide bisher genannten Geräte können außer an Luft und im Vakuum auch in flüssigen Elektrolyten angewendet werden, so dass in-situ Untersuchungen biologischer Systeme möglich sind.

Im bereits beim Lichtmikroskop erwähnten *Scanning Near Field Optical Microscope* (SNOM; Kap. 20.3.3) wird Licht durch eine Blende geschickt, die wesentlich kleiner als die Lichtwellenlänge ist. Direkt hinter der Blende bestimmt dann deren Durchmesser die Auflösungsgrenze, die auf diese Weise deutlich unter der Beugungsbegrenzung liegt.

Andere Typen des SXM verwenden *magnetische* Sonden und *thermische* Sonden.

Weitere Anwendungen ergeben sich auch daraus, dass man die Raster-Sonden-Geräte nicht nur zur Abbildung, sondern auch zur *Manipulation* an den Proben verwenden kann. Beispielsweise hat man versucht, DNA-Moleküle auf diese Weise zu modifizieren.

Ein Ende der derzeit stürmischen Entwicklung der Raster-Sondenmikroskopie ist noch nicht abzusehen, und auch nicht, welche Einsatzmöglichkeiten sich für biologische Substanzen und die medizinische Forschung künftig ergeben werden. Abb. 20.10 gibt ein Beispiel, das das Gefrieren von Wasser an einer Oberfläche zeigt.

**Röntgen-Mikroskopie:** *Röntgen-Mikroskope* werden selten eingesetzt. Ihre Wellenlängen und Auflösungsgrenzen liegen zwischen denen von Licht- und Elektronen-Mikroskop. Quellen sind entweder *Röntgenröhren* oder neuerdings Elementarteilchen-Beschleuniger, die elektromagnetische *Synchrotronstrahlung* emittieren. Letztere liefern wesentlich bessere Strahlqualität und erlauben, die Frequenz kontinuierlich zu variieren.

Gegenüber den Elektronenstrahlen ist ein Vorteil von Röntgenstrahlung die extrem große Eindringtiefe, die die Durchstrahlung von makroskopischem Material, wie z. B. auch von Reisegepäck, Gemälden usw. ermöglicht. Sie wird auch bei dem üblichen medizinischen *Röntgendurchleuchtungsgerät* zur Sichtbarmachung von Strukturen im Körperinnern ausgenutzt. Allerdings ist bei diesem die dabei angestrebte Vergrößerung gering, und die Abbildung beschränkt sich auf einfache *Schattenwurf-Projektion*. Schwach erkennbare Strukturen, wie Hohlräume, können dabei durch Kontrastmittel sichtbar gemacht werden. Erst bei hohen Vergrößerungen in speziell konstruierten *Röntgen-Mikroskopen* werden echte Abbildung, Beugung und Interferenz wichtig. Dazu werden unterschiedliche abbildende Elemente (z. B. Spiegeloptiken, Linsen) eingesetzt. Das Hauptproblem bei refraktiven Linsen liegt darin, dass fast alle Materialien im Röntgenbereich Brechungsindizes haben, die sich nur sehr gering von der des Vakuums ( $n = 1$ ) unterscheiden, und daher nach Gl. (19.12) nur sehr lange Brennweiten erreicht werden. Detektoren können fotografische Filme, Fluoreszenzschirme, Scintillationsdetektoren oder CCD-Kameras sein. Auch beim Mikroskop kann der Kontrast durch Einfärbung verstärkt werden.

## 20.6 Fernrohr

Im Gegensatz zum Mikroskop, das zur Vergrößerung kleinster Objekte dient, wird das Fernrohr zur Betrachtung großer, weit entfernter Objekte verwendet. Den-

noch sind beide ähnlich aufgebaut. Auch im Fernrohr liegt eine Zweischnitt-Abbildung vor: Es wird durch ein Objektiv ein reelles Zwischenbild erzeugt, von dem

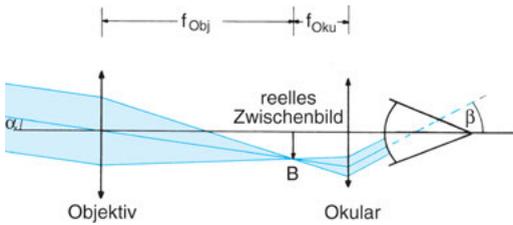


Abb. 20.11 Kepler'sches Fernrohr.

eine Lupe ein im Unendlichen liegendes virtuelles Bild entwirft, das wiederum mit dem Auge betrachtet wird.

Im *Kepler'schen Fernrohr*, Abb. 20.11, ist das Bild umgekehrt, kann aber z. B. durch Umkehrprismen oder eine weitere Linse in ein aufrechtstehendes Bild umgewandelt werden (*Prismenglas*, Abb. 19.12). Da der zu beobachtende Gegenstand, gemessen an der Brennweite des Objektivs, beim Fernrohr gewöhnlich sehr weit entfernt ist, liegt das Zwischenbild praktisch in der Brennebene des Objektivs. Damit das virtuelle Bild der Lupe im Unendlichen liegt, ist diese Ebene zugleich auch die Brennebene der Lupe.

Die subjektive Vergrößerung des Fernrohrs ist entsprechend Kap. 19.5.6 definiert durch

$$V_s = \frac{\tan(\text{Sehwinkel hinter dem Instrument})}{\tan(\text{Sehwinkel ohne Instrument})} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \quad (20-4)$$

In Abb. 20.11 folgt für den Mittelpunktstrahl durch das Objektiv  $\tan \alpha = B/f_{\text{Objektiv}}$  und entsprechend gilt  $\tan \beta = B/f_{\text{Okular}}$ , wobei  $B$  die Größe des reellen Zwischenbildes ist; mit Gl. (20-4) erhalten wir dann:

$$V_s = \frac{f_{\text{Objektiv}}}{f_{\text{Okular}}} \quad (20-5)$$

Bei astronomischen Fernrohren erreicht man hohe Vergrößerungen dadurch, dass  $f_{\text{Objektiv}}$  sehr groß (im Bereich einiger Meter) gewählt wird. Man fotografiert dann direkt das Zwischenbild, indem man in dessen Ebene den Film oder Detektor bringt. Es mag zunächst verwirrend erscheinen, dass dann der Abbildungsmaßstab  $V_A$  der Gl. (19-16) wesentlich kleiner als 1 ist, also eine verkleinerte Abbildung erfolgt; aber dies bedeutet lediglich, dass z. B. das mit dem Fernrohr fotografierte Bild des Mondes kleiner als der Mond selbst ist. Die subjektive Vergrößerung  $V_s$  nach Gl. (20-5) ist hingegen wesentlich größer als 1.

Die prinzipielle Auflösungsgrenze des Fernrohrs ist – wie bei anderen optischen Instrumenten – durch die Beugung des Lichts bedingt. So sind mit Fernrohren zwar die erdnahen Planeten noch einigermaßen strukturreich zu beobachten, die viel größeren, aber weiter entfernten Fixsterne erscheinen dagegen lediglich als strukturlose Beugungsscheibchen (Kap. 18.2.3), deren Größe nur vom Aufbau des verwendeten Fernrohrs abhängt.

Die Helligkeit solcher Fixsternbilder ist bestimmt durch den Durchmesser der Aperturblende, die durch den Objektivdurchmesser gegeben ist. Daher baut man Fernrohre mit Objektivdurchmessern bis zu 5 m, die allerdings mit einem Hohlspiegel anstelle eines, in dieser Größe nicht mehr herstellbaren Linsen-Objektivs ausgerüstet sind (Abb. 19.6). Neuerdings hat man durch getrennte Aufstellung einzelner Spiegelsegmente bis zu einem Abstand von 30 m noch wesentlich größere relative Öffnungen und damit höhere Auflösung erreicht.

## 20.6.1 Adaptive Optik

Auch mit dem am besten korrigierten Objektiv lassen sich die durch die Beugungsbegrenzung Gl. 20-3 festgelegte optimale Strukturauflösung einer Abbildung und die optimale Bildschärfe nicht erreichen (Kap. 20.3), wenn das Medium zwischen Objekt und Objektiv nicht vollständig homogen ist.

Zwei Beispiele mögen das veranschaulichen.

Beispiel 1: das *Funkeln der Sterne* am Nachthimmel wird durch kleine, sich dauernd verändernde räumliche und zeitliche Schwankungen der Gasdichte in der Atmosphäre verursacht. Da der Brechungsindex von Gasen mit der Dichte zunimmt, führt dies zu statistisch ungeordneten Schwankungen des lokalen Brechungsindex und zu Schwankungen der Lichtgeschwindigkeit (Gl. 18-6a), und damit der lokalen Momentanphase der Lichtwelle. Die Wellenfläche (Kap. 19.1, Abb. 19.17) wird durch die lokalen Phasenvariationen bis zu mehreren Wellenlängen in unregelmäßiger Weise „aufgeraut“. Dadurch wird die Fokussierbarkeit in der Bildebene durch das Objektiv verschlechtert, das Bild wird unscharf.

Beispiel 2: das *Auge*. Um den Augenhintergrund durch optische Abbildung mit dem „Augenspiegel“ sichtbar zu machen, muss

das Licht zweimal durch Hornhaut, Linse und Glaskörper laufen. Alle Drei sind zwar transparent, aber geringfügige Fehler in der Struktur des Auges führen zu lokalen Dichtefluktuationen und damit zu lokalen Brechungsindex-Änderungen. Zeitliche Schwankungen sind hier geringer als bei Beispiel 1, da das Auge aus kompakter Materie besteht. Eine Folge ist, dass man mit normaler optischer Abbildung die einzelnen Sehzellen (Stäbchen und Zäpfchen) *in vivo* nicht sichtbar machen kann. Wenn man aber diese Fluktuationen der Lichtgeschwindigkeit kennt, indem man mit einem „Phasenanalysator“ die lokalen Phasen misst, dann kann man per Computer die Welle zu jeder Zeit und an jedem Ort korrigieren und so ein korrigiertes Bild erzeugen, das das theoretische Auflösungsvermögen erreicht. Man kann aber auch experimentell die Phasenfehler kompensieren und so das korrigierte Bild direkt erzeugen. Dies geschieht neuerdings mittels der *Adaptiven Optik*.

Beim Auge kann man damit zudem häufige lokale Augenfehler diagnostizieren, die normalerweise subjektiv nicht wahrgenommen werden, weil sie durch die Bildverarbeitung im Gehirn korrigiert werden.

Die experimentelle Anordnung der adaptiven Optik, die in ein Teleskop oder ein Mikroskop integriert werden kann, besteht aus drei Teilen:

1. Die Phasenanalyse der Wellenfläche in Echtzeit. Sie erfolgt mit einem Wellenfront-Analysator.

2. Der adaptive Spiegel. Er wird zwischen Objekt und abbildendem Objektiv in den Strahlengang gebracht. Er besteht aus einer elastisch verformbaren, mit Silber o. Ä. belegten, ebenen Plastikfolie. Auf seiner Rückseite sind in regelmäßiger Anordnung zahlreiche mechanische (z. B. piezoelektrische, s. Kap. 14.7.7) Stellemente angebracht, die *lokal* den Spiegel längs der optischen Achse verschieben und damit eine Berg- und Talstruktur erzeugen können. Wenn diese „Aufrauung“ des adaptiven Spiegels der der Wellenfront des Lichtes entgegengerichtet ist, wird diese bei Reflexion am adaptiven Spiegel gerade rückgängig gemacht und es entsteht ein korrigiertes, d. h. fehlerfreies Bild.

3. Die Stellemente werden in Echtzeit über einen sehr schnellen Computer mit den Daten des Phasenanalysators angesteuert, um auf dem ursprünglich ebenen Spiegel die aus den Phasenschwankungen folgende Berg- und Talstruktur als Oberflächenrelief entgegengesetzt zu erzeugen. Bei der Reflexion der Welle am adaptiven Spiegel werden dadurch die Fluktuationen ausgeglichen. Wenn in einem kurzen Zeitraum lokal ein Teil der Welle wegen höherem Brechungsindex und daher höherer Lichtgeschwindigkeit vorausgeeilt ist, trifft er auf ein Tal des Spiegels und wird erst etwas später reflektiert, so dass die Wellenfläche geglättet wird, und damit durch das darauffolgende Objektiv eine ideale Abbildung erfolgen kann, als wäre das Ausbreitungsmedium homogen gewesen.

Mit Hilfe der adaptiven Optik ist kürzlich erstmals gelungen, die Verteilung von Stäbchen und Zäpfchen im lebenden Auge zu fotografieren. Bei terrestrischen astronomischen Teleskopen gelang es sogar, die Auflösungsgrenze um mehr als eine Größenordnung zu verbessern, so dass sie sich messen kann mit Teleskopen, die, um die atmosphärischen Schwankungsprobleme zu vermeiden, in Satelliten installiert sind.

## 20.7 Photometer

Photometer dienen der praktischen Aufnahme optischer Spektren unterschiedlicher Art (Kap. 18.4). Diese dienen zur Aufklärung der chemischen Zusammensetzung (*Spektralanalyse*) und physikalischer Eigenschaften von Proben aus den Bereichen der Technik, Chemie, Physik, Biologie, Medizin usw. Wie Abb. 20.12 zeigt, bestehen sie im Prinzip aus Lichtquelle, Spektralapparat (Monochromator), Detektor, elektronischem Verstärker und Anzeigergerät.

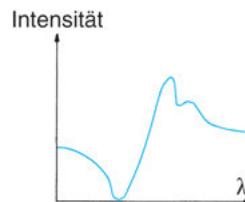
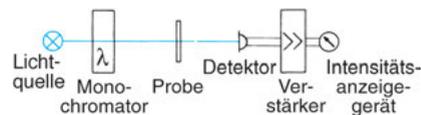


Abb. 20.12 Prinzip des Spektralphotometers; unten ein Mess-Spektrum.

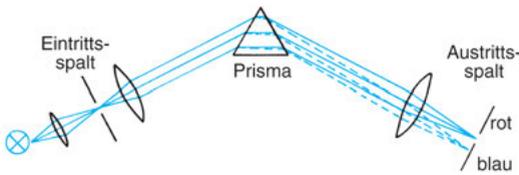


Abb. 20.13 Prismenspektralapparat.

In Monochromatoren werden heute fast ausschließlich optische Gitter (Kap. 18.2.2) verwendet, aber auch Prismen (Kap. 19.3.5), ein Interferenz-Verlauf-Filter (Kap. 18.1.2) oder ein Satz von Filtern verschiedener Durchlasswellenlängen sind dazu geeignet. Abb. 20.13 und 20.14 zeigen den jeweils prinzipiellen Aufbau konventioneller Geräte.

Da die verwendeten Lichtquellen oft komplizierte Emissionsspektren haben, und auch Transmission des Monochromators und Sensitivität des Detektors sich mit der Lichtwellenlänge ändern, muss ein Photometer *kalibriert* werden. Dies geschieht durch eine Vergleichsmessung *ohne* Probe oder mit einer bekannten Vergleichsprobe entweder mit denselben optischen Komponenten (*Einstrahlphotometer*) oder mit einem zweiten, weitgehend identischen Gerät (evtl. mit einer kalibrierten Vergleichslichtquelle) (*Zweistrahphotometer*), so dass Probe und Vergleichsprobe nicht bei jeder Messwellenlänge ausgetauscht werden müssen. Abb. 18.28 zeigt als ein Beispiel Absorptionsspektren von Hämoglobin.

In konventionellen Geräten werden die Wellenlängen des Monochromators mittels eines Motors zum Drehen des Prismas oder Gitters *seriell* (d. h. eine Wellenlänge nach der anderen) eingestellt und Probe und Detektor nacheinander mit Licht der jeweils eingestellten Wellenlänge beleuchtet. Eine moderne Alternative ist, statt dessen *alle* Wellenlängen hinter Prisma oder Gitter *zugleich* auf die Probe und dann auf unterschiedliche, voneinander isolierte Teile eines besonderen Detektors (*Photodioden-Arrays* aus 512 oder 1024 nebeneinander angeordneten Einzeldetektoren) fallen zu lassen. Diese *parallele* Messtechnik des *Vielkanal-Spektrometers* (*multi-channel-spectrometer*) verkürzt die Messdauer eines Spektrums auf (üblicherweise) wenige ms und ermöglicht, auch Proben zu analysieren, die sich (z. B. bei einer chemischen Reaktion) mit der Zeit verändern.

Den gleichen Vorteil der gleichzeitigen Messung des gesamten Spektrums hat auch das *Fourier-Spektrometer*, das zu einem Standard-Analysegerät im che-

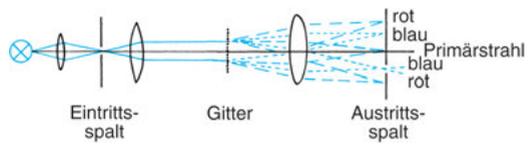


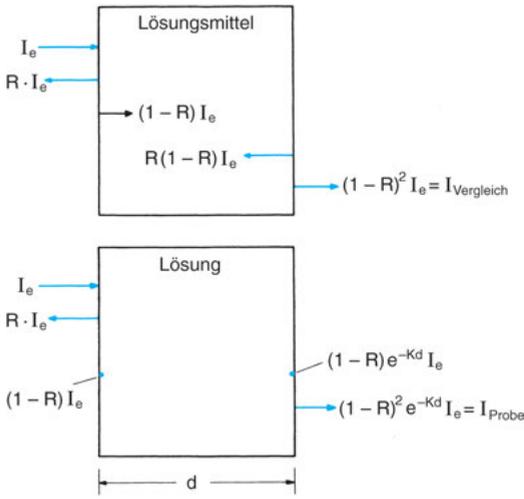
Abb. 20.14 Gitterspektralapparat.

mischen Labor geworden ist. Das Messprinzip beruht auf der Fourier-Analyse (einer komplizierten mathematischen Auswertung) des Messsignals, das durch periodische Änderung des Plattenabstandes eines Interferometers (Kap. 18.1.2) gewonnen wird, in dem sich die Probe befindet. Dieses Spektrometer wird hauptsächlich im infraroten Spektralbereich eingesetzt, wo Moleküle Absorptionsbanden haben, und die gemessenen Spektren können im angeschlossenen Computer mit einer Bibliothek von Spektren bekannter Moleküle verglichen werden, so dass automatisiert sowohl qualitative als auch quantitative chemische Analyse der Probe möglich ist.

Bei der *Emissions-Spektralanalyse* bringt man die zu untersuchende Substanz dazu, selbst Licht zu emittieren, das im Monochromator dann in seine spektralen Bestandteile zerlegt wird. Das kann durch Erhitzen und die Überführung der Probe in den Gaszustand geschehen. Die Intensität bei der am Monochromator eingestellten Wellenlänge wird anschließend von Detektor, Verstärker und Anzeigeteil registriert. Gemessen wird die Strahlungsleistung bzw. die Intensität in Abhängigkeit von der Wellenlänge. Daneben können Photometer auch in Quantenenergien  $h\omega$ , der Kreisfrequenz  $\omega$ , der Frequenz  $\nu$  oder auch der Wellenzahl kalibriert sein.

Bei der *Absorptions-Spektralanalyse* werden breitbandige Lichtquellen eingesetzt. Die Probe befindet sich in der Probenhalterung zwischen Monochromator und Empfänger, und man vergleicht bei jeder am Monochromator eingestellten Wellenlänge die ohne und mit Probe im Strahlengang registrierte Intensität aus der Lichtquelle. Daraus erhält man jedoch nicht direkt die Absorptionskonstante der Gln. (18-9, 11), denn die angezeigte Intensität ist zusätzlich um die an den Proben-(oder Küvetten-) Oberflächen reflektierte Intensität geschwächt.

Bei der Untersuchung verdünnter Lösungen kann man diesen Anteil durch das *Zwei-Küvetten-Verfahren* eliminieren (Abb. 20.15). In diesem Fall ist nämlich die an der Küvette reflektierte Intensität praktisch ebenso groß wie



**Abb. 20.15** Zwei-Küvetten-Verfahren zur Absorptionsmessung verdünnter Lösungen. ( $I_e$ : Intensität des einfallenden Strahls;  $R$ : Reflexionsvermögen der Küvettenfenster;  $K$ : Absorptionskonstante der Lösung;  $d$ : Küvettenlänge.) Von oben nach unten sind die Intensitäten der einzelnen Teilbündel angegeben. (Der Deutlichkeit halber sind die Teilstrahlen in der Höhe gegeneinander versetzt.)

bei einer mit reinem Lösungsmittel gefüllten Vergleichsküvette. Vergleicht man nun die Intensitäten hinter der Vergleichsküvette und hinter der Probenküvette, so enthalten beide Messwerte denselben Reflexionsverlust. Division beider Intensitäten ergibt mit Gl. (18-9):

$$\frac{I(\lambda)_{\text{Probe}}}{I(\lambda)_{\text{Vergleich}}} = e^{-K(\lambda) \cdot d}$$

## 20.8 Strahlungsmessgeräte

Licht an sich ist nicht direkt sichtbar und messbar, denn elektromagnetische Strahlung lässt sich nur durch ihre inelastische Wechselwirkung mit Materie nachweisen. Sie wird dabei entweder gestreut, oder absorbiert und dabei wird die elektrische und magnetische Feldenergie in andere Energieformen in materiellen Systemen, z. B. in potentielle und kinetische Energie von Elektronen in einer Photozelle umgewandelt. Als Folgeprodukt dieser Umwand-

bzw.

$$K(\lambda) \cdot d = \ln \left( \frac{I(\lambda)_{\text{Vergleich}}}{I(\lambda)_{\text{Probe}}} \right). \quad (20-6)$$

Bei kommerziellen Photometern ist die Anzeigeskala häufig so kalibriert, dass man die Absorptionsgröße  $(\lambda) \cdot d$  direkt ablesen kann. Zumeist geschieht heute die Datenverarbeitung mit grafischer Darstellung durch einen angeschlossenen Computer.

Schwierigkeiten können bei der Absorptionsanalyse von gelösten Substanzen niedriger Konzentration auftreten, weil dann zwei starke Lichtsignale miteinander verglichen werden, die sich nur geringfügig voneinander unterscheiden. Die Nachweisempfindlichkeit wird daher durch ein ungünstiges Signal-Rausch-Verhältnis (vgl. Kap. 16.1.7) eingeschränkt.

Eine 10- bis 1000fach höhere Nachweisempfindlichkeit erreicht man mit der *Fluorometrie*, die eine spezielle Art der Emissionsspektroskopie darstellt. Durch UV-Strahlung werden zu untersuchende Substanzen zur Fluoreszenz (Kap. 17.11) angeregt und strahlen dann selbst, ohne dazu erhitzt werden zu müssen. Damit wird das Signal-Rausch-Verhältnis entscheidend verbessert, da die Probe zum Selbststrahler wird. Da Fluoreszenz bei organischen Substanzen verbreitet ist, werden *Spektralfluorometer* in der biochemischen Analytik häufig verwendet.

Weitere Informationen zur Spektralanalyse sind bereits in Kap. 18.4 gebracht worden.

lung kann dann ein elektrischer Strom gemessen werden.

Versuche, Licht direkt sichtbar zu machen, enden stets in dieser Umwandlung, d. h. die Photonen werden „vernichtet“, und ihre Energie taucht, dem Energieerhaltungssatz folgend, in einem materiellen System auf.

Der Vorgang dieser Wechselwirkung zwischen Licht und Materie gehört zu den großen Rätseln der Natur.

Wegen der vielseitigen Möglichkeiten der Weiterverarbeitung elektrischer Signale bevorzugt man Strahlungsdetektoren, die elektrische Signale ausgeben, auch wenn eine mehrfache Energieumwandlung (z. B. Licht  $\Rightarrow$  Wärmeenergie  $\Rightarrow$  elektrische Energie) dazu erforderlich wird. So wird eine Strahlungsmessung durch Bestimmung elektrischer Größen wie Strom, Spannung oder Widerstandsänderung möglich.

Mit zunehmender Automatisierung der Beobachtung und Steuerung von Prozessen wird deren Charakterisierung durch *Sensoren* immer wichtiger, die Messwerte physikalischer Größen aufnehmen und direkt der Datenverarbeitung zuführen. Optische Strahlungsmessgeräte werden daher häufig als Sensoren ausgelegt.

**Strahlungs-Thermoelement** Es misst die Erwärmung eines möglichst schwarzen Strahlungsabsorbers und wird meist zur Messung langwelliger Strahlung (Infrarot) eingesetzt. Im einfachsten Fall ist dazu eine Lötstelle eines Thermoelementes (Kap. 8.5.2) an einem geschwärzten Blech angebracht. Dieses absorbiert die auffallende Strahlung, wobei seine Temperatur steigt. Die zweite Lötstelle des Thermoelementes wird auf konstanter Temperatur gehalten (z. B. 20 °C), und so kann der Temperaturanstieg wie beim gewöhnlichen Thermoelement gemessen werden.

Zur Steigerung der Empfindlichkeit ist in einer *Thermosäule* eine große Zahl von Lötstellen zusammengeschaltet. Der wesentliche Vorteil gegenüber anderen Strahlungsmessgeräten ist, dass bei geeigneter Schwärzung der Empfangsfläche das Absorptionsvermögen über einen weiten Spektralbereich gleich 1 ist (s. Kap. 17.10.1), und damit die Nachweisempfindlichkeit unabhängig von der Frequenz der Strahlung ist und nicht kalibriert werden muss.

**Strahlungsmessgeräte mit äußerem Photoeffekt** Unter *äußerem Photoeffekt* versteht man die Auslösung von Elektronen aus einer Materialoberfläche, wobei die dazu nötige Energie nicht, wie bei der Glühemission, durch Wärme (Kap. 15.2.1), sondern durch Absorption elektromagnetischer Strahlung aufgebracht wird.

In der *Photozelle* stehen sich in einem Vakuumgefäß zwei Elektroden gegenüber, die an eine Gleichspan-

nungsquelle angeschlossen sind. Fällt durch ein Fenster Licht auf die großflächige Kathode, so werden Elektronen aus der Oberfläche freigesetzt und zur Anode hin beschleunigt. Der dadurch erzeugte Anodenstrom kann gemessen werden; er ist ein Maß für die auffallende Strahlungsleistung. Er ist jedoch sehr klein und muss nachverstärkt werden. Im *Photoelektronenvervielfacher* (*Photomultiplier*) kommen zu diesem Zweck weitere Elektroden (Dynoden) hinzu. Die relativ wenigen, durch äußeren Photoeffekt aus der Kathode herausgeschlagenen Elektronen werden zur ersten Dynode hin derart stark beschleunigt, dass ihre kinetische Energie ausreicht, um aus der Oberfläche der Dynode weit mehr Elektronen abzulösen, als aus der Oberfläche der Kathode primär abgelöst wurden und auf die erste Dynode aufgetroffen sind. Die aus der ersten Dynode freigesetzten sekundären Elektronen (man spricht daher auch von einem *Sekundärelektronenvervielfacher*) werden nun zu einer weiteren Elektrode, der zweiten Dynode hin beschleunigt, um dort erneut Elektronen abzulösen. Deren Zahl ist wiederum höher als die der aufgetroffenen Elektronen. Durch Hintereinanderschalten mehrerer solcher Elektrodenstufen entsteht ein Lawineneffekt, und es gelingt, im Multiplier Stromverstärkungen bis zum  $10^{10}$ -fachen zu erreichen, so dass man einzelne Photoelektronen zählen kann.

Eine technisch vereinfachte Variante ist der *Channel-Multiplier*, der wegen seiner geringen Größe für ein- oder zweidimensionale ortsauflösende Detektorarrays (*Channel Plates*) eingesetzt wird.

Die nach dem Prinzip des äußeren Photoeffektes arbeitenden Empfänger haben den Nachteil, dass ihre Empfindlichkeit von der Frequenz der Strahlung abhängt. Multiplier sind zum Nachweis von Infrarot jenseits von  $\lambda \sim 1 \mu\text{m}$  nicht geeignet, da IR-Quantenenergien für den Photoeffekt nicht ausreichen.

**Strahlungsmessgeräte mit innerem Photoeffekt** Im Innern eines Halbleiters können durch Einstrahlung von Licht Ladungsträger freigesetzt werden (*innerer Photoeffekt*).

Dieser Vorgang ist ähnlich der thermischen Erzeugung von freien Ladungsträgern in Halbleitern (Kap. 15.2.4), allerdings besteht die zugeführte Energie aus Photonen. Wegen der freigesetzten Elektronen ändert sich der elektrische Widerstand des Halbleiters, was z. B. über eine Wheatstone'sche Brückenschaltung (Kap. 16.1.6) mit einer angelegten Spannung gemessen werden kann. Dieser Effekt wird im *Photowiderstand* zur Lichtmessung eingesetzt. Besonders empfindlich für inneren Photoeffekt sind Halbleiterbauelemente mit einer Sperrschicht zwischen n- und p-leitendem Gebiet. Fällt nämlich Licht auf den Bereich der Sperrschicht, so werden freigesetzte Ladungsträger durch die Sperrschicht laufen und, da sie nicht zurückfließen können, eine elektrische Spannung aufbauen. Dieses *Photoelement* (*Photodiode*) wird durch das absorbierte Licht zur Spannungsquelle, und es genügt, die Pole mit einem hochempfindlichen Strommessgerät zu verbinden, um den durch das Licht

verursachten Strom zu messen. Mittels digitaler Verstärker hat man die Nachweisempfindlichkeit bis auf das Einzelphoton erhöhen können.

Eine wesentliche Erweiterung dieses Messprinzips brachte die Entwicklung von *Photodioden-Arrays* (Kap. 20.7), einer ein- oder zweidimensionalen Anordnung von einzelnen sehr kleinen (miniaturisierten) Halbleiter-Dioden, die unabhängig voneinander ausgelesen werden können. Damit lassen sich Lichtfelder räumlich auflösen, sei es, wie in Kap. 20.7 geschildert, in eindimensionalen Arrays zur gleichzeitigen Registrierung ganzer Spektren hinter einem Monochromator (digitalisiert in beispielsweise 512 oder 1024 Messkanäle) oder sei es mit zweidimensionalen Anordnungen zur Registrierung von Bildern. Das Auslesen und Speichern der Anzeige-Daten erfolgt zweckmäßig mit einem Computer. Flächen-Arrays von Detektoren komplizierterer Bauart, bei denen Halbleiterdioden und elektronische Nachverstärkung kombiniert werden (*Charge-Coupled Device-(CCD-)Elemente*) zur Steigerung der Empfindlichkeit und mit kleineren Abmessungen werden in *elektronischen Digitalkameras* verwendet. Deren Nachteil der begrenzten Detail-Auflösung im Vergleich zum fotografischen Film ist durch Erhöhung der Zahl der Dioden-Elemente und damit der *Pixel-Zahl* (d. h. der Zahl der digitalen Bildelemente) in den Bildsensoren auf 5–14 Mio inzwischen beseitigt worden.

**Thermographie** Die von einem Körper emittierte Infrarot-Strahlung lässt sich dazu verwenden, die Temperaturverteilung auf der Oberfläche des Körpers zu bestimmen.

Die Gründe hierfür haben wir zum Teil bereits kennengelernt:

1. Ein Ideal-Schwarzer Körper emittiert (über alle Wellenlängen integriert) pro Flächeneinheit eine Gesamtstrahlungsleistung, die der vierten Potenz der Temperatur des Körpers proportional ist (Gl. (17-19)). Dies gilt annähernd auch für nicht völlig schwarze Körper.

2. Das spektrale Maximum der emittierten Strahlungsleistung liegt nach Gl. (17-21) bei einer Wellenlänge, die der Temperatur des Körpers umgekehrt proportional ist. Beispielsweise ist bei 308 K (d. i. 35 °C, Hauttemperatur des Menschen) die Wellenlänge  $\lambda_{\max} = 10 \mu\text{m}$ , bei  $T = 1000 \text{ K}$  ist  $\lambda_{\max} = 2,9 \mu\text{m}$ .

Ein Problem für die Strahlungsmessung ist, dass einerseits IR-Strahlung im Wellenlängenbereich zwischen 2,5 und 8  $\mu\text{m}$  von Luft absorbiert wird, andererseits normale Strahlungsdetektoren und IR-Filme nur für Wellenlängen unterhalb von ca. 1  $\mu\text{m}$  empfindlich sind. IR-Detektoren, die im Wellenlängenbereich um 10  $\mu\text{m}$  empfindlich sind, bestehen aus speziellen Halbleiter-Photodioden (z. B. Quecksilber-Cadmium-Tellurid, mit großer Empfindlichkeit bei 8–15  $\mu\text{m}$ ) und werden zumeist als Photowiderstände geschaltet (Kap. 15.2.4). Um die zusätzliche, durch die Temperatur des Sensors bewirkte *thermisch* angeregte Leitfähigkeit (*Dunkelleitfähigkeit*) in diesen Dioden zu unterdrü-

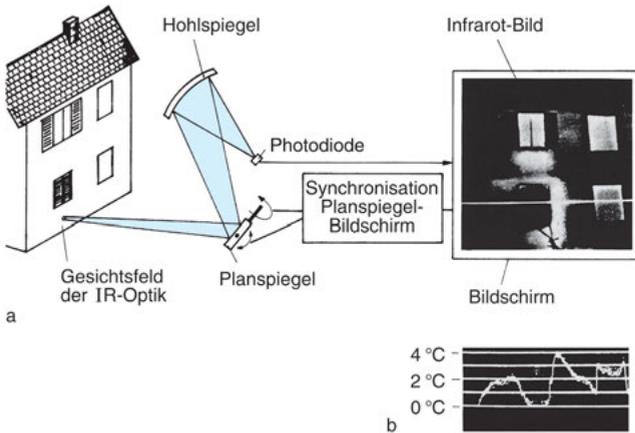
cken, werden Präzisionsinstrumente bei tiefer Temperatur, z. B. der des flüssigen Stickstoffes (77 K) betrieben.

Um mit Hilfe der IR-Strahlung ein sichtbares Bild zu erzeugen, können seriell (d. h. Punkt für Punkt nacheinander abtastende) oder parallel (d. h. mit zweidimensionalen Detektorarrays (Bildsensoren)) arbeitende Anordnungen verwendet werden. Üblich ist als serielle Methode die Rastertechnik mit Kopplung an einen Bildschirm, die wir schon mehrfach (Kap. 16.1.4, 20.3–20.5) dargestellt haben. Dabei wird die vom Gegenstand emittierte IR-Strahlung orts aufgelöst registriert. So entsteht ein *Wärmebild* (*Thermogramm*) des untersuchten Gegenstandes auf dem Schirm.

Normale Glas- und Quarzlinsen sind im IR-Bereich ungeeignet, da sie dort undurchsichtig sind. Statt dessen werden zur Fokussierung der Strahlung auf den Detektor Spiegel oder die im IR durchsichtigen Germanium-Linsen verwendet. Zur Rasterung führt man das *Gesichtsfeld* der IR-Optik durch geeignete Bewegung des Spiegels (bzw. der Linse) zickzack-förmig über die zu untersuchende Oberfläche. Der schematische Aufbau einer solchen IR-Kamera ist in Abb. 20.16 skizziert. Hier ist der Planspiegel um seine senkrechte und seine waagerechte Achse beweglich, um die Rasterung durchzuführen. Für moderne Geräte bedient man sich auch der Paralleltechnik (Kap. 20.7), da diese ohne bewegliche Teile auskommt.

Die Thermographie findet vielfältige Anwendung — so z. B. bei Nachtsichtgeräten oder auch beim Aufspüren von *Wärmelecks* in beheizten Gebäuden. Die Oberflächentemperatur eines Hauses lässt sich nämlich mit der IR-Kamera auch aus großer Entfernung (bis auf ca. 0,1 °C genau) messen. Damit kann man feststellen, wo eine Hauswand schlecht wärmegeämmt ist, oder wo sich andere *Wärmelecks* befinden (Abb. 20.16).

In der medizinischen Thermographie besteht die Aufgabe darin, aus auffälligen Veränderungen des Thermogramms auf pathologische Prozesse zu schließen. Letztere können durch Entzündungen aufgrund gesteigerten Stoffwechsels und vermehrter Gefäßbildung bei hautnaher Lokalisation das Temperaturprofil der Hautoberfläche verändern. Beispielsweise kann man Gefäßverengungen durch Rauchen nachweisen, da durch verringerten Blutfluss die lokale Temperatur herabgesetzt wird. Allerdings bereitet es z. Z. noch Schwierigkeiten, diese Thermogramme nach objektiven und reproduzierbaren Kriterien physiologisch zu interpretieren.



**Abb. 20.16** Prinzip der Infrarot-Kamera. a) Der Planspiegel wird um zwei zueinander senkrechte Achsen oszillierend gedreht, damit das Gesichtsfeld der IR-Optik zickzack-förmig über die Oberfläche der Hauswand geführt wird. Im Infrarot-Bild auf dem Bildschirm zeigen die hellen Bereiche Wärmelecks in der Hauswand an. Der Heizkörper unter dem Fenster über links strahlt einen großen Teil seiner Wärme durch die Wand nach außen ab. b) Entlang der weißen Linie im IR-Bild ist das Temperaturprofil der Hauswand graphisch dargestellt (Fa. ATOMIKA Technische Physik GmbH, München).

## 20.9 Die Kamera

Der prinzipielle Aufbau von analogen und digitalen Foto-, Film- oder Video-Kameras ist weitgehend übereinstimmend und besteht aus vier Funktionselementen: (1) dem *Sucher* zur Einstellung des gewünschten Bildausschnitts, (2) der bilderzeugenden, bezüglich der Abbildungsfehler hochkorrigierten Optik (*Foto-Objektiv*) mit Entfernungseinstellung, (3) einer *Lichtregelung* (Intensitätsblende und Verschluss für die Belichtungszeiten) und (4) der *Bildregistrierung*.

Zusätzlich oder an Stelle des optischen Sucherfernrohrs haben Digitalkameras einen Minibildschirm zur Realzeit-Betrachtung des aufzunehmenden bzw. aufgenommenen Bildes.

Zur Scharfeinstellung wird bei der Kamera (im Unterschied zum Auge) der Bildabstand verändert, indem durch ein Feingewinde das Objektiv gegen den Film oder den Sensor verschoben wird. (Die auf dem Objektivgehäuse befindlichen Entfernungangaben sind nicht die exakt optischen Gegenstandsweiten, die von der Hauptebene des Objektivs gemessen werden.)

Häufig werden *Vario-* (*Zoom-*) *Objektive* veränderbarer Brennweite oder Wechselobjektive verwendet, um bei vorgegebener Objekt-Entfernung den Abbildungsmaßstab verändern zu können. Das kann auch elektronisch geschehen, verschlechtert dann aber die Bildqualität. In billigen Kompakt-Kameras und bei in Handys eingebauten Mini-

Kameras begnügt man sich oft mit Einzellinsen aus gepresstem Plastikmaterial.

Die lichtstärksten Objektive haben *relative Öffnungen* bis zu 1:1,2. Diese Zahlenkombination gibt das Verhältnis von Aperturdurchmesser zu Brennweite an. Je größer die relative Öffnung, desto größer ist die Lichtstärke, desto geringer ist aber die Schärfentiefe (Kap. 19.4.10). Durch eine variable *Aperturblende* wird die auf den Film oder den Sensor auftreffende Intensität gesteuert. Für die Schwärzung des fotografischen Films ist aber nicht die Intensität, sondern die gesamte auftreffende Lichtenergie entscheidend, die durch Variierung der Blende zwischen beispielsweise 1:1,2 und 16 und der Belichtungszeit zwischen beispielsweise 1 und  $10^{-3}$  s wählbar ist. Durch geeignete Kombination kann man entweder schnellbewegte Objekte mit geringer Schärfentiefe oder ruhende Objekte mit hoher Schärfentiefe fotografieren. Eine manuelle, gezielte Einstellung ist allerdings in üblichen Digitalkameras nicht mehr vorgesehen.

Technische Details wie Einstellung von Blende und Zeit sind in Digitalkameras am weitesten entwickelt und automatisiert. Spezielle Farb- und Motivprogramme machen die bei Analogkameras üblichen manuellen Einstellungen obsolet.

Mechanische *Bildstabilisatoren* dienen der Verringerung von Bildunschärfen durch Ver-

wackeln während längerdauernder Aufnahmen. Sie können im Objektiv selbst oder zur Adaptierung der Position des Bildsensors eingebaut sein. Die Stabilisierung geschieht durch Gegenneigung spezieller mechanischer Elemente, die in Sekundenbruchteilen erfolgen.

Analog- und Digitalkameras unterscheiden sich wesentlich durch ihre Methoden des eigentlichen *Fotografierprozesses*. Bei den älteren *Analog-Kameras* erfolgt die Bildregistrierung auf einem photochemisch reagierenden lichtempfindlichen Film auf Silberhalogenid-Basis, in dem *Silber-Nanopartikel* erzeugt werden (*Entwicklung*). Das Primärbild wird anschließend chemisch verstärkt und stabilisiert (*Fixierung*). Es dient als *Negativ* und wird optisch auf Positiv-Photopapier übertragen (*Vergrößerung*).

Die Einführung von Digitalkameras brachte einen großen Fortschritt in der Automatisierung der Bildregistrierung aber auch aufwändigere Bildbearbeitung. Heutige *Digitalkameras* kommen ohne Photochemie aus. Sie enthalten einen elektronischen *Bildsensor (Bild-Chip)* mit abgeschlossener digitaler Datenverarbeitung. Durch *Tool-Programme* können nachträglich am Bildschirm Bildhelligkeit, Kontrast, Schärfe und Bildinhalt weiterbearbeitet werden. Durch solche Bildmanipulationen verlieren Digitalfotos allerdings ihren Dokument-Charakter.

In Analogkameras stellen der Film und das End-Papierbild die Datenspeicher dar. Die *digitale Bilderzeugung und -speicherung* erfolgt hingegen in mehreren Schritten. Der lichtempfindliche Bildsensor besteht aus einem zweidimensionalen Array von vielen kleinen Halbleiter-Photoempfängern (Photodioden oder CCDs (s. auch Kap. 20.8)). Die Zahl der *Pixel* liegt heute zwischen 5 und 20 Millionen (5–20 Megapixel). Je kleiner ihre Zahl und je dichter ihre Packung, desto schlechter sind Detailauflösung und Bildqualität. Die Array-Fläche im Vollformat beträgt maximal, wie das Analog-Negativbild, 24 mm × 36 mm. Sie kann auch wesentlich kleiner sein als ein Analogfilmbild, so dass man sie z. B. in Handys integrieren kann. Man kann so nur Zentimeter oder Millimeter große Spezialkameras bauen.

Das *Auge* ist übrigens dem Digitalsensor weit überlegen: das Auge eines Raubvogels enthält bis zu 800 Megapixel.

Um ein digitales Endbild mit einer einige Jahrzehnte langen Lebensdauer zu erreichen, sind mehrere Speicherschritte erforderlich. Zuerst werden nach der Aufnahme die Daten des Sensors ausgelesen und in einem nur wenige *MegaBites (MB)* großen *internen Speicher* mit geringer Speicherdauer geladen und nach Grundfarben und Helligkeitsstufen geordnet. Entweder können die Daten dann direkt an einen PC übergeben oder aber in einer auswechselbaren *Speicherkarte* (1–64 MB mit unterschiedlichen Datenformaten) gespeichert werden, worauf der interne Speicher wieder geleert wird. Auch die verschiedenen Sorten von Speicherkarten sind kurzlebig und haben geringe Kapazitäten, weshalb sie für eine dauerhafte Bild-Archivierung durch *Foto-tanks* (z. B. langlebige externe Festplatten mit bis zu 10<sup>2</sup> GB, optische Disks (700MB), DVDs (bis zu 10 GB) oder Blue-Rays (bis zu 50 MB) ergänzt werden müssen.

In einem 64 GB-Speicher können etwa 10<sup>3</sup> Bilder gespeichert werden. Das Endbild kann am Bildschirm mit speziellen Bildbearbeitungsprogrammen in weitem Rahmen manipuliert, d. h. qualitätsverbessert oder inhaltlich verändert werden.

Wichtig für die Zukunftssicherheit der Bild-Speicherung ist, ein auch in Zukunft auslesbares Datenformat wie etwa JPEG auszuwählen. Die Dokumentsicherheit analoger Bilder ist durch eine jahrhundertlange Lebensdauer garantiert, bei digital gespeicherten Bildern ist sie noch problematisch.

Das Endprodukt kann ein mittels Bilddrucker auf Spezialpapier erzeugtes Papierbild, eine auf CD gespeicherte Dia-Show, die Anzeige eines *Power-Point-Projektors* oder eine Video-DVD sein; z. B. sind für ein scharfes 10 cm × 15 cm großes Bild etwa 2–5 MB an Daten (2592 × 1944 Pixel) erforderlich. Mit einem Tintenstrahldrucker wird jeder Bildpunkt aus bis zu 8 Druckpunkten erzeugt. Typische Bildauflösungsgrenzen, die dem Auge angepasst sind, liegen bei 100 bis 300 *dots per inch (dpi)*.

# Atomkerne, Ionisierende Strahlung

## 21.1 Atomkerne

### 21.1.1 Elementarteilchen

Alle Materie ist, unabhängig von ihrem jeweiligen Aggregatzustand, aus elementaren Bestandteilen, den Atomen aufgebaut. Im chemischen Sprachgebrauch sind dies die *Elemente*, und ihre Eigenschaften und Beziehungen zueinander sind im *Periodensystem der Elemente* dargestellt. Die Atome selbst sind wiederum zusammengesetzt aus den *Elektronen* in der Atomhülle und den als *Nukleonen* bezeichneten *Neutronen* und *Protonen*, die den Atomkern bilden. Diese drei Teilchen wurden bis etwa zur Mitte des 20. Jahrhunderts als Elementarteilchen angesehen. Die Nukleonen bestehen aus heutiger Sicht ihrerseits wieder aus drei weiteren Teilchen aus der Gruppe der sogenannten *Quarks*. Auch das *Strahlungsquant* der elektromagnetischen Strahlung, das *Photon*, zählt zu solchen Teilchen, das sich aber von anderen dadurch unterscheidet, dass es nur bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit existieren kann. Ein weiteres Teilchen mit dieser Eigenschaft ist das *Neutrino*, das sich sonst aber wesentlich vom Photon unterscheidet. Die gesamte Vielfalt der Materie wird durch die unterschiedliche Zahl und Anordnung dieser, nach heutigem Kenntnisstand elementaren Teilchen bedingt.

Insgesamt kennt man zur Zeit eine große Zahl (mehrere hundert) von kurzlebigen Meseteilchen mit Lebensdauern im Bereich mehrerer Tage bis hin zu kürzesten Zeiten ( $10^{-22}$  s). Diese entstehen durch Wechselwirkungen von Atomkernen und Elementarteilchen, und sie wandeln sich wiederum in andere Teilchen um, d. h. sie sind Produkte von Kern- oder Elementarteilchenreaktionen. Solche Reaktionen können z. B. in der Höhenstrahlung beobachtet oder in Teilchenbeschleunigern (Kap. 21.3.2) künstlich ausgelöst werden. Die Fülle der Teil-

chen wird neben ihrer Lebensdauer durch ihre Masse, ihre Ladung und gegebenenfalls sonstige Parameter wie etwa Geschwindigkeit (beim Photon) charakterisiert. Von den oben genannten Teilchen sind *Elektron negativ* und *Proton positiv* geladen; *Neutron*, *Neutrino* und *Photon* besitzen *keine elektrische Ladung*. Eine Klassifizierung der Teilchen wird heute im sogenannten *Standardmodell* mittels sechs *Quarks* und sechs *Leptonen* (d. h. *leichten* Teilchen) vorgenommen. Diese Bausteine lassen sich in drei Generationen ordnen. Von Bedeutung sind hier nur die Teilchen der ersten Generation, in der neben Elektron und Neutrino als Leptonen die beiden „up“ (u) und „down“ (d) genannten Quarks existieren. Letztere haben eine quantisierte Ladung, nämlich  $2/3$  bzw.  $-1/3$  des Wertes des Ladungsquants (Elementarladung des Elektrons). Das Proton wird dann aus zwei u und einem d Quark gebildet, woraus die Ladung  $+1$  resultiert. Das Neutron besteht aus einem u und zwei d Quarks, wodurch sich die resultierende Ladung Null ergibt.

Eine früher eingeführte Einteilung, die sich an der Teilchenmasse orientiert und auch heute noch gebräuchlich ist, ergibt folgende Gruppierung:

1. Hadronen: a) *Baryonen*, mit Massen größer als dem 1800fachen der Elektronenmasse; hierzu gehören Proton und Neutron. b) *Mesonen*, mit Massen größer als 250 Elektronenmassen
2. Leptonen: mit Massen kleiner als 250 Elektronenmassen. Hierzu gehören das Elektron sowie das Neutrino
3. Photonen: mit Ruhemasse Null und Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit

Bei dieser Einteilung wird erkennbar, dass man ein Massen-Bezugselementarteilchen, aus

dessen Masse sich alle anderen Massen als ganzzahlige Vielfache ergeben würden, experimentell lange Zeit nicht hat nachweisen können. Daher auch die Normierung auf die Masse des Elektrons, die den schwer vorstellbar geringen Wert von  $9,11 \cdot 10^{-31}$  kg besitzt. Erst vor kurzem hat man mit dem Nachweis des *Higgs-Teilchens* in dieser Hinsicht Erfolg gehabt und konnte diese Lücke im Standard-Modell schließen. Andererseits existiert für die Ladung (sieht man von den Quarks ab, die in der Natur aber nie einzeln auftreten) ein Quant, die *Elementarladung*  $e$  (Kap. 14.2.1), aus der sich die Ladung aller anderen in der Natur vorkommenden Ladungen  $Q$  als ganzzahlige Vielfache ergeben:  $Q = ne$  wobei  $n$  eine ganze Zahl (positiv oder negativ) ist.

Zu allen Teilchen existieren *Antiteilchen*, die dieselbe Masse haben. Zu elektrisch geladenen Teilchen gehören Antiteilchen mit entgegengesetzter Ladung. Das praktisch wichtigste Antiteilchen ist das *Positron*, das man als ein elektrisch positives Elektron ansehen kann. Wenn ein Teilchen auf ein Antiteilchen trifft, tritt der Prozess der *Zerstrahlung* ein, d. h. beide Teilchen zerstrahlen zu elektromagnetischer, energiereicher Strahlung.

### 21.1.2 Aufbau der Atomkerne

Die Elementarteilchen Proton und Neutron sind die Bestandteile des Kerns, die *Nukleonen*. Beide besitzen etwa die gleiche Masse. Die Gesamtzahl der positiven Elementarladungen der Protonen charakterisiert die positive Ladung des Atomkerns. Diese Anzahl ist gleich der Zahl der Elektronen in der Hülle des entsprechenden Atoms, also der *Ordnungszahl*  $Z$  und bestimmt somit, zu welchem chemischen Element der betreffende Kern gehört. Von fast allen Elementen gibt es Kerne mit unterschiedlicher Neutronenzahl. So existieren drei Atomkernarten des Wasserstoffs: ein Kern H (Hydrogenium), der nur aus einem Proton besteht, ein Kern D (Deuterium), der zusätzlich zum Proton ein Neutron, und ein dritter T (Tritium), der zusätzlich zwei Neutronen enthält. Beim Helium existieren Kerne, die neben den 2 Protonen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Neutronen enthalten.

Die verschiedenen Atome mit Kernen von gleicher Protonen- aber unterschiedlicher Neutronenzahl bezeichnet man als *Nuklide*, die Kerne selbst als *Isotope* eines chemischen Elements.

Zur Kennzeichnung eines Nuklids wird die folgende, abkürzende Schreibweise benutzt:  ${}^A_ZX$ . Dabei bedeuten  $X$  das Symbol des chemischen Elements,  $A$  die *Zahl der Nukleonen* (oft auch *Massenzahl* genannt, siehe unten) und  $Z$  die *Ordnungszahl*. Da  $X$  und  $Z$  dieselbe Information beinhalten, wird häufig lediglich die Darstellung  ${}^AX$  verwendet: So bezeichnet z. B.  ${}^{12}C$  einen Kohlenstoffkern mit 12 Nukleonen, und da Kohlenstoff im Periodensystem die Ordnungszahl  $Z = 6$  hat, sind in diesem Kern 6 Protonen und 6 Neutronen enthalten.

Fast alle natürlich vorkommenden chemischen Elemente sind Gemische mehrerer Isotope. Das Kalium (K) z. B. besteht zu 93,1% aus  ${}^{39}K$ , zu 6,88% aus  ${}^{41}K$  und zu 0,02% aus  ${}^{40}K$ . Überall, wo Kalium natürlich vorkommt (also auch in chemischen Verbindungen), ist diese prozentuale Zusammensetzung gleich. Solche konstanten Mischungsverhältnisse gibt es, bis auf wenige Ausnahmen, bei allen natürlichen Isotopen der verschiedenen Elemente. Neben den natürlichen Isotopen gibt es eine große Zahl künstlich, beispielsweise in Teilchenbeschleunigern (Kap. 21.3.2) herstellbarer Isotope, die alle radioaktiv sind. Natürliche und künstliche Isotope kann man in einem Schema (Atomkern- oder *Nuklidkarte* genannt) darstellen, ähnlich dem Periodensystem der Elemente. Ein Ausschnitt einer solchen Karte für die leichtesten Elemente ist in Abb. 21.1 dargestellt. Aufgetragen ist die Zahl der Protonen über der Zahl der Neutronen in den Atomen.

Wie ergibt sich nun die Masse des Kerns? Wir haben bereits in der Mechanik die Masse eines Protons mit  $m_p = 1,6724 \cdot 10^{-27}$  kg angegeben und zudem gesagt, dies sei auch etwa die Masse eines Neutrons (genauer:  $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27}$  kg). Die Masse eines Atomkerns ergibt sich aber nicht genau als Summe der Massen der in ihm vorhandenen Protonen und Neutronen. Die gefundenen Werte sind immer, wenn auch nur geringfügig, kleiner als die Summe der Protonen- und Neutronen-Massen. Die Differenz  $\Delta m$  bezeichnet man als:

**Massendefekt.** Er entsteht beim Zusammenbau der Nukleonen zum Kern, hat also etwas mit der Bindung der Nukleonen im Kern zu tun. Die Erklärung liefert das Prinzip der Äquivalenz von Masse und Energie (Gl. (3-10)):

$$E = m \cdot c^2.$$

Danach ist dem Massendefekt  $\Delta m$  die Energie  $E = \Delta m c^2$  zugeordnet. Diese Äquivalenz ist allerdings bei einer Kernumwandlung (Kap. 21.2.1) dadurch eingeschränkt, dass stets die Anzahl der Nukleonen erhalten bleibt (*Nukleonenerhaltungssatz*); es kann also kein Nukleon ganz in Energie umgewandelt werden.

wird, so tritt damit ein Massendefekt von  $\Delta m = \frac{\Delta E_B}{c^2}$  ein. Ein Beispiel hierfür ist die folgende Kernreaktion, durch die ein Proton und ein Neutron zu einem Deuteron werden:



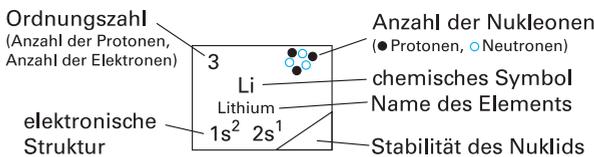
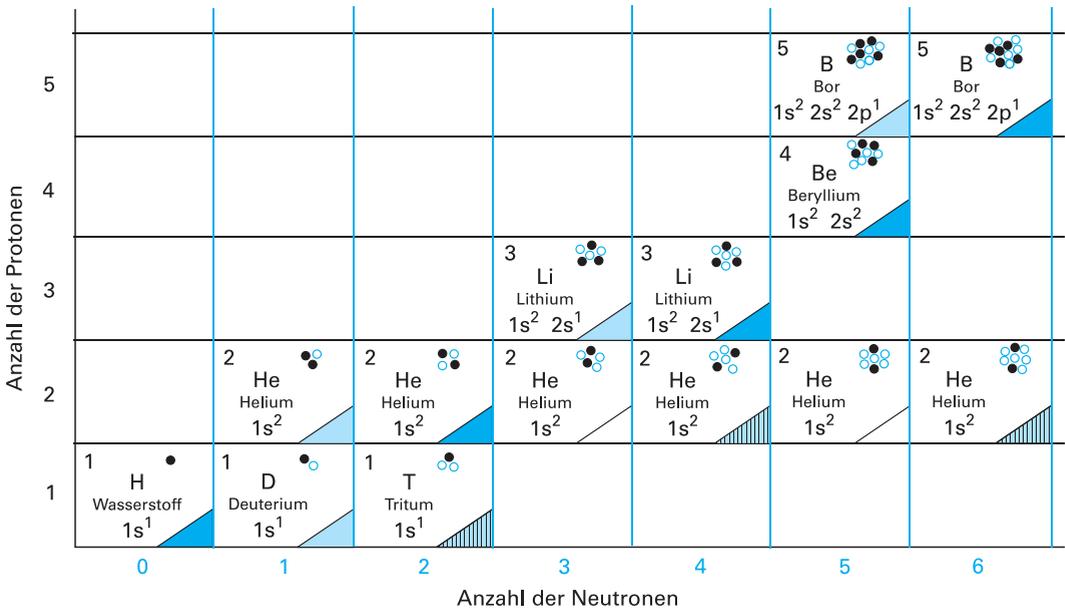
mit einem Massendefekt von

$$\Delta m = m_H + m_n - m_D = 2,4 \cdot 10^{-3} m_H. \tag{21-2}$$

Das Energieäquivalent von  $m_H$  ist 0,94 GeV. Also werden bei der Bildung des Deuteriumkerns  $0,94 \cdot 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ GeV} = 2,25 \text{ MeV}$  frei. Diese Energie wird tatsächlich als hochenergetische Gammastrahlung bei der Absorption von Neutronen in flüssigem Wasserstoff beobachtet.

Wenn also bei der Bildung eines Kerns aus den Nukleonen die Bindungsenergie  $\Delta E_B$  frei

Man sieht aus der Größe der Bindungsenergie, dass die Nukleonen im Atomkern sehr fest gebunden sind.



**Abb. 21.1** Nuklidkarte. Ausschnitt für die leichtesten Elemente. Nuklid-Stabilität: ■, stabil, Majoritätsnuklid; ■, stabil, Minoritätsnuklid; ▨, instabil; □, extrem instabil.

Diese Bindungsenergien sind die größten Wechselwirkungsenergien, die wir in der Physik überhaupt kennen (vgl. Tabelle 3.1). Sie sind um mehrere Zehnerpotenzen größer als die chemischen Bindungsenergien. Die Bindungskräfte innerhalb der Atomkerne sind aber nur über sehr kurze Entfernungen (nämlich den Durchmesser des jeweiligen Kerns) wirksam. Daher brauchen sie bei Wechselwirkungen der Atomkerne mit Elementarteilchen meist nicht berücksichtigt zu werden; hierbei überwiegen bei weitem die elektrischen Kräfte der positiven Kernladung. Erst wenn die Elementarteilchen in unmittelbare Nähe des Kerns gelangen, werden die Kernbindungskräfte wirksam.

Da der Massendefekt nur sehr klein ist und zudem Proton und Neutron die nahezu gleiche Masse besitzen, legt es der ganzzahlige Aufbau der Kerne aus den Nukleonen nahe, ein relatives Massensystem für Kerne festzulegen. Da überdies die Masse des Elektrons im Verhältnis dazu vernachlässigbar ist, gilt dieses relative *Massensystem* sowohl für Kerne als auch für Atome. Dieses System ist insofern sinnvoll, als relative Massenunterschiede extrem genau z. B. mit massenspektroskopischen Methoden zu messen sind. Als Bezugspunkt hat man die Masse des Isotops  $^{12}\text{C}$  des Elements Kohlenstoff genommen, das bereits für die Definition der Einheit Mol benutzt wurde (vgl. Kap. 1.1.2). Die als *atomare Masseneinheit*  $m_u$  oder *vereinheitlichte Atommassenkonstante*  $u$  bezeichnete Größe ergibt sich zu

$$m_u = (1/12) m(^{12}\text{C}) = 1u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

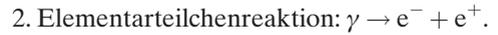
In diesem relativen Massensystem haben Protonen und Neutronen, mit der Genauigkeit von zwei Stellen nach dem Komma, die gleiche Masse. Damit ist es auch gerechtfertigt, die Nukleonenzahl als *Massenzahl*, d. h. als Zahl der relativen Masseneinheiten zu bezeichnen (s. oben).

Darauf aufbauend lassen sich, ähnlich wie bei chemischen Gleichungen, die Kernumwandlungen einfach bilanzieren, wie bereits in Gl. (21-1) vorgestellt. Wir geben zwei weitere Beispiele:



In Worten: treffen zwei Deuteriumkerne (D) aufeinander, so entstehen ein Neutron (n) und ein Heliumkern (He). Dies ist eine *Kernfusion*.

Die hochgestellte Zahl bedeutet dabei die Zahl der Nukleonen; ihre Summe bleibt konstant.



In Worten: ein  $\gamma$ -Quant (ein Photon genügend großer Energie), das auf einen Atomkern prallt, zerfällt in ein Elektron ( $e^-$ ) und ein Positron ( $e^+$ ) (*Paarbildung*). Die hochgestellten Zeichen „-“ und „+“ weisen auf das Vorzeichen der elektrischen Ladung hin. Dieses Beispiel ist eine direkte Bestätigung der Äquivalenz von Masse und Energie, Gl. (3-10), denn die Reaktion bedeutet, dass die Bewegungsenergie des Photons (das Photon hat keine Ruhemasse) in zwei Massen umgewandelt wird (vgl. Kap. 21.3.3).

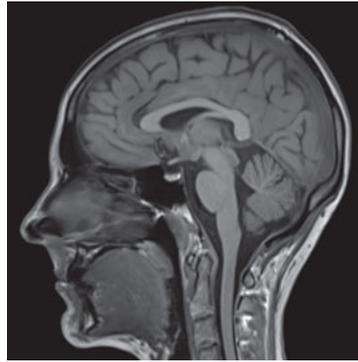
### 21.1.3 Kernmagnetische Resonanz

Wie in Kap. 14.8.2 erwähnt, besitzen Elektronen und die Nukleonen, das Proton und das Neutron, einen *Spin*, also einen Eigendrehimpuls. Bis auf wenige, aber zum Teil biologisch bedeutsame Ausnahmen (z. B. Deuterium ( $^2\text{D}$ ) oder Stickstoff ( $^{14}\text{N}$ )), hat ein Atomkern nur dann einen resultierenden Spin, den Kernspin, wenn er aus einer ungeraden Zahl von Nukleonen besteht. Atomkerne mit Spin verhalten sich (analog zu den Elektronen) wie rotierende Kreisel, in die längs der Kreiselachse eine Magnetnadel eingesetzt ist. Das *magnetische Moment*  $\bar{m}$  dieses Kreisels, das für Atomkerne wesentlich kleiner als für Elektronen ist, lässt sich wie ein magnetischer Dipol durch ein statisches Feld  $\bar{B}$  in Feldrichtung orientieren (Kap. 14.8.2). Wird die Magnetnadel durch kurzzeitige Einwirkung eines zusätzlichen Feldes  $\bar{B}'$  mit anderer Orientierung als  $\bar{B}$  um den Winkel  $\alpha$  ausgelenkt, so ist das durch Gl. (14-47) angegebene Drehmoment  $M = mB \sin \alpha$  bestrebt, sie in die ursprüngliche Feldrichtung von  $\bar{B}$  zurückzudrehen. Dies wird jedoch durch die Eigenrotation des Kreisels verhindert, genauso wie ein rotierender Spielkreisel trotz des Einflusses der Schwerkraft nicht einfach umkippt. Statt dessen beginnt der Kreisel zu taumeln, d. h. seine Drehachse rotiert (und damit auch sein magnetisches Moment). Die-

se Rotation nennt man *Präzession*. Sie erfolgt beim Kernspin (bzw. Elektronenspin) um die Richtung des Feldes  $\vec{B}$  herum, und ihre Kreisfrequenz  $\omega_0$  ist proportional zum Betrag von  $\vec{B}$ , also  $\omega_0 = \gamma B$ . Die Konstante  $\gamma$  (*gyromagnetisches Verhältnis* genannt) ist für jede Atomkernsorte eine charakteristische Größe. Die Präzessionsbewegung lässt sich von außen anregen, indem man mit einem hochfrequenten Feld  $\vec{B}'$  die oben beschriebene Auslenkung periodisch wiederholt. Stimmt nun die Kreisfrequenz  $\omega$  von  $\vec{B}'$  genau mit der Präzessionsfrequenz  $\omega_0$  einer speziellen Atomkernsorte überein, so wird die Rotation des magnetischen Moments dieser Atomkernsorte stets im richtigen Takt angestoßen, und es entsteht Resonanz. Dies nennt man *Kernmagnetische Resonanz* (*nuclear magnetic resonance*, abgekürzt *NMR*).

Die Präzession der Kernmomente lässt sich messtechnisch nachweisen, indem man die zu untersuchende Probe mit einer Spule umgibt, in der durch die präzedierenden Kernmomente nach dem Induktionsprinzip (Kap. 14.8.3) eine Wechselspannung induziert wird. Da sich die — einzeln sehr kleinen — Beiträge aller in der Probe enthaltenen Kerne einer Sorte aufaddieren, entsteht ein messbarer Effekt, der mit der Anzahl dieser Kerne in der Probe anwächst. Liegen die Atome, deren Kernresonanz man beobachtet, in unterschiedlichen chemischen Bindungszuständen vor, so wird dadurch die Resonanzfrequenz geringfügig geändert. Damit erhält man bei der Messung mehrere Resonanzen, deren Frequenzlage Schlüsse auf die Bindungszustände zu ziehen erlaubt. Aus diesem Grund wird die Kernresonanz-Technik in der Chemie z. B. zur Aufklärung von Molekülstrukturen und in der Physik z. B. zur Untersuchung von strukturabhängigen Materialeigenschaften verwendet.

Zu einem *abbildenden Verfahren* in der Medizin wird die Kernmagnetische Resonanz-Technik dadurch, dass man die Resonanzfrequenzen einer speziellen Atomkernsorte (vornehmlich des Wasserstoffkerns) mit den Orten im Körper des Patienten korreliert, an denen sie gemessen werden. Dazu wird der zu untersuchende Patient in einem statischen Magnetfeld mit einer sich räumlich längs der Körperachse ändernden, zeitlich konstanten Feldstärke  $\vec{B}$  (also in einem Feldgradienten) gelagert. Die Resonanzbedingung  $\omega_0 = \gamma B$  bei Vorgabe der Hochfrequenz  $\omega_0$  des Feldes  $\vec{B}$  ist dann nur für eine bestimmte Quer-



**Abb. 21.2** NMR-Tomogramm des menschlichen Schädels.

schnittschicht mit passendem  $\vec{B}$  erfüllt. Auch innerhalb dieser Schicht ist normalerweise ein Feldgradient einstellbar. Damit sind die gemessenen Resonanzfrequenzen eindeutig mit der dreidimensionalen Ortsabhängigkeit des statischen Feldes  $\vec{B}$  korreliert, und man erhält die räumliche Dichteverteilung der Kernsorte. Ändert man nun kontinuierlich die Kreisfrequenz  $\omega$  des Hochfrequenzfeldes, so lassen sich nacheinander alle Körperbereiche des Patienten abtasten. Mit dieser Methode, der *Kernresonanz-* oder *NMR-Tomografie* gelingt es also, aus der Ortskorrelation der gemessenen Resonanzfrequenzen eine dreidimensionale Darstellung des menschlichen Körpers zu berechnen. Hierzu sind leistungsstarke Computer erforderlich. Die Computerbilder geben aufgrund der bei der Kernresonanz verwendeten Resonanzfrequenz des Wasserstoffkerns die Dichteverteilung des Wasserstoffs im Körper des Patienten wieder.

In wenigen Jahren ist die Kernresonanz-Tomografie zu einer Routinemethode geworden, die infolge ihrer Unschädlichkeit wesentliche Vorteile gegenüber der Röntgen-Tomografie (Kap. 21.3.4) besitzt. Es werden Geräte mit statischen Feldern bis zu  $B = 2$  Tesla und Hochfrequenzfelder mit Frequenzen bis zu 82 MHz verwendet, die einen erheblichen technischen Aufwand bedingen. Abb. 21.2 zeigt ein zweidimensionales Teilbild eines Wasserstoff-Kernresonanz-Tomogramms eines menschlichen Schädels, das das beachtliche Auflösungsvermögen dieser Methode demonstriert.

## 21.2 Radioaktivität

### 21.2.1 Kernumwandlungen

Wie in Kap. 21.1 dargestellt, besteht jeder Atomkern aus einer bestimmten Anzahl von Protonen und Neutronen, die durch Bindungskräfte zusammengehalten werden. Allerdings muss noch einmal auf eine prominente Ausnahme von dieser Regel hingewiesen werden, nämlich auf das Wasserstoff-Isotop  $^1\text{H}$ , ein Kern ohne Neutron. Für alle anderen Kerne stellt sich die Frage, ob jede beobachtete Kombination von Protonen und Neutronen einen *stabilen* Atomkern ergibt oder ob unter bestimmten Bedingungen *Instabilität* im Kern eintritt und dieser sich dann umwandelt. Betrachtet man die Zusammensetzung leichter Isotope wie  $^{12}\text{C}$  oder  $^{16}\text{O}$ , von denen wir wissen, dass sie stabil sind, so kommt bei diesen auf ein Proton im Kern jeweils ein Neutron dazu; die Nukleonenzahl ist dann doppelt so groß wie die Ordnungszahl. Mit dieser Regel wäre Deuterium ( $^2\text{D}$ ) das *reguläre* Wasserstoff-Isotop. Nehmen wir uns die Nuklidkarte von Abb. 21.1 unter diesem Blickwinkel etwas genauer vor. Bei Protonenzahlen oberhalb von 2 kommt mindestens ein Neutron auf ein Proton, nur bei Wasserstoff, wie schon gesagt, aber auch bei Helium gibt es jeweils ein Isotop mit geringerer Neutronenzahl. Stabil sind nach der Karte in jedem Fall die Kerne, bei denen die Neutronenzahl gleich der Ordnungszahl ist. Zusätzliche Neutronen stabil im Kern unterzubringen ist bei leichten Elementen offenbar schwierig. So ergibt der Übergang von Deuterium zu Tritium ( $^3\text{T}$ ) ein instabiles Nuklid, ein *Radionuklid*. Kerne von Helium mit mehr als zwei Neutronen sind auch instabil. Bei Kohlenstoff ist die Zugabe eines Neutrons zu  $^{12}\text{C}$  unter Bildung von  $^{13}\text{C}$  noch nicht mit Instabilität verknüpft, ein weiteres Neutron ergibt jedoch das instabile  $^{14}\text{C}$ . Eine Besonderheit stellt das Element Beryllium (Be) dar. Es kommt zu 100 % als  $^9\text{Be}$  vor (*Reinelement*) und hat somit ein Neutron mehr im Kern, als die Regel ist. Würde man die Nuklidkarte von Abb. 21.1 zu schwereren Atomen hin fortsetzen, ließe sich feststellen, dass zunehmend mehr als ein Neutron pro Proton

im Kern benötigt wird, je schwerer der Kern wird, ohne dass Instabilität eintritt. Die anfängliche Steigung von  $45^\circ$  der durch die stabilen Kerne gelegten Kurve wird zu höheren Massenzahlen dadurch geringer. Als schwerstes stabiles Nuklid wurde bis vor kurzem Wismut  $^{209}\text{Bi}$  angesehen; bei ihm entfallen auf 83 Protonen 126 Neutronen. Inzwischen wurde auch  $^{209}\text{Bi}$  als instabil erkannt. Es wird durch  $\alpha$ -Emission in  $^{205}\text{Tl}$  umgewandelt (Abb. 21.3a), allerdings mit einer unvorstellbar großen Halbwertszeit von etwa  $10^{19}$  Jahren.

*Radionuklide* wandeln sich ohne äußere Einwirkung in stabilere Nuklide um. Dabei kann die Zahl der Protonen bzw. die der Neutronen geändert werden, so dass ein neuer Atomkern entsteht, der nun seinerseits entweder eine stabile oder wieder eine, wenn auch weniger instabile Konfiguration von Protonen und Neutronen darstellt. Ein Beispiel für ein instabiles Nuklid ist der Kern des Radium-226 ( $^{226}\text{Ra}$ ) mit 88 Protonen und 138 Neutronen (siehe Tabelle 21.1).

Die spontane Umwandlung von instabilen Atomkernen bezeichnen wir als *Radioaktivität* oder – was sprachlich nicht ganz korrekt ist – als *radioaktiven Zerfall*. (Es handelt sich dabei aber nicht um einen Zerfall in kleinere Bruchstücke, wie bei der Kernspaltung, sondern um eine Umwandlung des instabilen Nuklids in ein Nuklid von ähnlicher Zusammensetzung.) Charakteristisch für die Umwandlung ist die Emission verschiedener Kernbausteine sowie elektromagnetischer Strahlung. Letztere wird als *Gammastrahlung* ( $\gamma$ -Strahlung) bezeichnet. Je nach der Art der Emission unterscheiden wir verschiedene Umwandlungsarten:

1. Bei der  $\alpha$ -*Umwandlung* wird aus dem Kern ein  $\alpha$ -*Teilchen* emittiert, das aus zwei Protonen (p) und zwei Neutronen (n) besteht, also identisch mit dem Atomkern eines Heliumatoms ist. Demnach hat der Folgekern diese Kernbausteine weniger und ist damit ein Isotop eines chemischen Elements mit einer um zwei verringerten Ordnungszahl geworden.

Das  $\alpha$ -Teilchen wird mit hoher Geschwindigkeit ( $\approx 10^7 \text{ ms}^{-1}$ ) aus dem Kern herausge-

schleudert. Ursache dafür ist, dass die Differenz der Bindungsenergien von Ausgangs- und Folgekern bei der Kernumwandlung zumindest teilweise als Bewegungsenergie des emittierten Teilchens freigesetzt wird. Eine derartige Kernumwandlung kann in einem *Energieterm-Schema* wie in Abb. 21.3a dargestellt werden. Die Gesamtenergien von Ausgangs- und Folgekern sind durch waagerechte Linien bezüglich der eingezeichneten Energieskala  $E$  markiert. Die Energiedifferenz  $\Delta E$  gibt die bei der Umwandlung freiwerdende Energie an. Den Übergang durch  $\alpha$ -Teilchen-Emission symbolisiert der Pfeil nach links unten. Er deutet an, dass sich die Ordnungszahl des Kerns um 2 verringert hat und dass entsprechend ein anderes chemisches Element entstanden ist.

In dem gezeigten Beispiel haben die  $\alpha$ -Teilchen eine einheitliche Energie von etwa 3 MeV; dies entspricht einer Geschwindigkeit von  $1,2 \cdot 10^7 \text{ ms}^{-1}$ , wie sich durch folgende Umrechnung zeigen lässt:

$$\frac{mv^2}{2} = 3 \text{ MeV} = 4,8 \cdot 10^{-13} \text{ J},$$

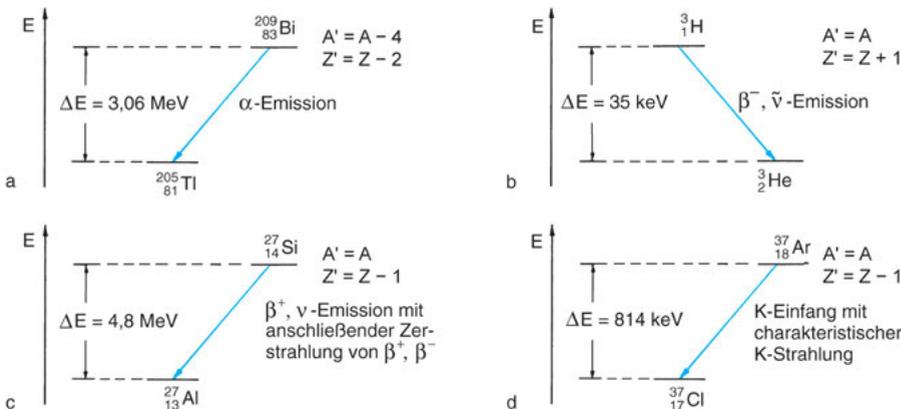
$$m_\alpha = 6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg},$$

$$v = \left( \frac{2 \cdot 4,8 \cdot 10^{-13}}{6,7 \cdot 10^{-27}} \right)^{1/2} \text{ m s}^{-1} = 1,2 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}.$$

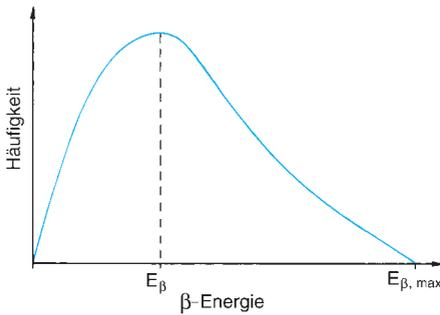
Da alle bei dieser Umwandlung freigesetzten  $\alpha$ -Teilchen die gleiche Energie haben, bezeichnet man sie auch als *monoenergetisch*. Der  $\alpha$ -Zerfall ist charakteristisch für sehr schwere, instabile Kerne, da durch ihn am meisten Masse verloren werden kann. Da aber pro Proton ein Neutron emittiert wird, werden zuviel Neutronen verloren, als dass direkt eine stabile Position in der Nuklidkarte eingenommen werden könnte; weitere Zerfälle folgen.

2. Bei der  $\beta$ -Umwandlung werden ein Elektron ( $\beta^-$ -Teilchen) und ein Antineutrino ( $\bar{\nu}$ ) emittiert. Diese Umwandlung ist charakteristisch für Kerne, die instabil sind, weil sie zu viele Neutronen enthalten (siehe die oben besprochenen  ${}^3\text{H}$  und  ${}^{14}\text{C}$ ). Die beiden emittierten Teilchen entstehen bei der Umwandlung eines Neutrons in ein Proton. Also besitzt der Folgekern ein Proton mehr, aber ein Neutron weniger als der Ausgangskern, so dass die Massenzahl gleich geblieben ist, die Ordnungszahl aber um 1 zugenommen hat und wieder ein chemisch neues Element entstanden ist.

Im Umwandlungsschema (Abb 21.3b) wird der  $\beta$ -Übergang durch einen Pfeil nach rechts unten dargestellt (Erhöhung der Ordnungszahl). Der Unterschied der Bindungsenergien der beiden Kerne,  $\Delta E$ , ist gleich der Summe der kinetischen Energien von Elektron und Anti-



**Abb. 21.3** Energieterm-Schema von Kernumwandlungen, (a) von  ${}^{209}_{83}\text{Bi}$  (Wismut) in  ${}^{205}_{81}\text{Tl}$  (Thallium) durch  $\alpha$ -Emission, (b) von  ${}^3_1\text{H}$  (Tritium) in  ${}^3_2\text{He}$  (Helium) durch  $\beta^-$ - und  $\bar{\nu}$ -Emission, (c) von  ${}^{27}_{14}\text{Si}$  (Silizium) in  ${}^{27}_{13}\text{Al}$  (Aluminium) durch  $\beta^+$ - und  $\bar{\nu}$ -Emission und (d) von  ${}^{37}_{18}\text{Ar}$  (Argon) in  ${}^{37}_{17}\text{Cl}$  (Chlor) durch K-Einfang. Die Schräge der Pfeilrichtungen symbolisiert den Verlust (schräg links) bzw. Gewinn (schräg rechts) von Protonen (Änderung der Ordnungszahl). A und A' stehen für die Nukleonenzahl vor und nach der Umwandlung, Z und Z' für die jeweilige Ordnungszahl.



**Abb. 21.4** Verteilung (Spektrum) der kinetischen Energie der  $\beta^-$ -Teilchen bei  $\beta^-$ -Umwandlung.

neutrino. Übernimmt beispielsweise das Elektron 70% dieser Energie, dann verbleiben für das Antineutrino 30%. Die Aufteilung der kinetischen Energien auf Elektron und Antineutrino ist nicht bei allen  $\beta^-$ -Umwandlungen des in Abb. 21.3b skizzierten Typs gleich, vielmehr ergibt sich bei Betrachtung von sehr vielen Umwandlungen in einer Probe mit gleichartigen Kernen für beide Teilchenarten eine charakteristische Verteilungskurve der Bewegungsenergien, wie sie z. B. in Abb. 21.4 für die Elektronen dargestellt ist. Als Abszisse ist hierbei die Energie  $E$  der  $\beta^-$ -Teilchen aufgetragen und als Ordinate die Anzahl der Teilchen, die eine Energie innerhalb eines Intervalls zwischen  $E$  und  $E + dE$  besitzen. Eine entsprechend korrespondierende Energie- bzw. Geschwindigkeitsverteilung haben die emittierten Antineutrinos, so dass die Gesamtenergie beider Teilchen dieselbe ist. Man sieht, dass in diesem  $\beta^-$ -Energiespektrum alle Energiewerte zwischen Null und derjenigen Maximalenergie vorkommen, die der vollen Energiedifferenz  $\Delta E$  der Abb. 21.3b entspricht. Teilchen mit der Energie Null oder der Maximalenergie kommen jedoch sehr selten vor. Am häufigsten treten  $\beta^-$ -Teilchen auf, deren kinetische Energie  $E_\beta$  etwa  $1/3$  der Maximalenergie beträgt.

3. Bei einer *Positronenumwandlung* (Abb. 21.3c) wird im Kern ein Proton ( $p$ ) in ein Neutron ( $n$ ), ein *Positron* ( $\beta^+$ ) und ein *Neutrino* ( $\nu$ ) umgewandelt, wobei Positron und Neutrino aus dem Kern emittiert werden. Der Folgekern besitzt demnach gegenüber dem Ausgangskern eine um 1 niedrigere Ordnungszahl. Die Massenzahl verändert sich nicht.

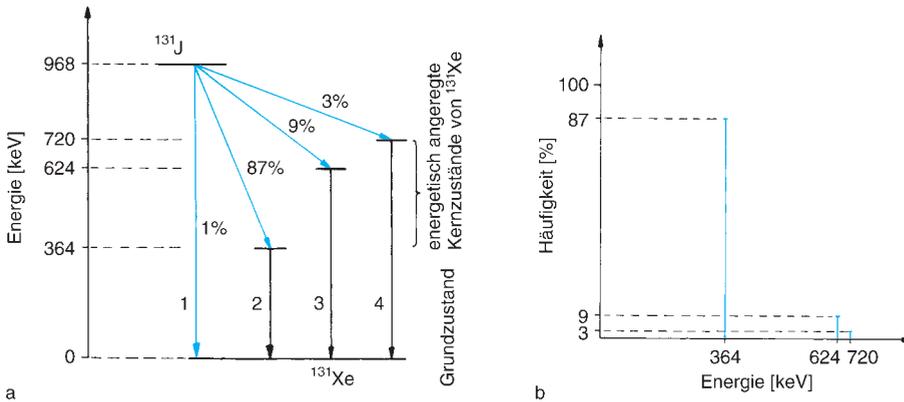
Das freiwerdende Positron ist äußerst kurzlebig, denn bei Wechselwirkung mit einem der den Kern umgebenden Hüllenelektronen, seinem Antiteilchen, zerstrahlen beide; sie wandeln sich in zwei  $\gamma$ -Quanten, also in elektromagnetische Strahlung um. Diesen Prozess nennt man *Zerstrahlung* oder *Elektron-Positron-Vernichtung*. Die beiden  $\gamma$ -Quanten fliegen in einem Winkel von  $180^\circ$  auseinander. Jedes  $\gamma$ -Quant trägt eine Energie von  $0,51$  MeV mit sich fort; das entspricht nach Gl. (3-10) der Hälfte der gesamten Ruhemasse von Positron und Elektron. Diese  $\gamma$ -Energie ist somit charakteristisch für alle Positronenstrahler.

4. Bei der Kernumwandlung, die als *K-Ein-fang* (Abb. 21.3d) bezeichnet wird, geht ein Proton ( $p$ ) in ein Neutron ( $n$ ) über durch *Ein-fang* eines Elektrons der *K*-Schale der Elektronenhülle des Atoms. Folglich wird bei dieser Kernumwandlung die Ordnungszahl um 1 vermindert, während die Massenzahl gleich bleibt.

Der leere Platz in der *K*-Schale der Elektronenhülle wird anschließend durch ein Elektron aus einer der äußeren Schalen besetzt, wobei charakteristische elektromagnetische *K-Strahlung* entsteht. Da diese Strahlung durch Elektronenübergänge in der Atomhülle entsteht (Kap. 21.3), gehört sie in den Bereich der Röntgenstrahlen.

Bei allen bisher beschriebenen Umwandlungen ändert sich die Ordnungszahl des Atomkerns, und es entstehen Kerne eines anderen chemischen Elements. Der Unterschied in den Bindungsenergien von Ausgangs- und Folgekern wird allerdings nur bei einigen Radionukliden vollständig von den emittierten Teilchen als Bewegungsenergie übernommen. Bei den meisten bleibt ein Rest dieser Energiedifferenz  $\Delta E$  für kurze Zeit im Folgekern zurück, der sich damit in einem energetisch angeregten Zustand befindet. Diese überschüssige Energie gibt der Kern nach kurzer Zeit in Form von  $\gamma$ -Quanten ab und geht dabei gleichzeitig in seinen energetischen Grundzustand, d. h. den Zustand niedrigster Gesamtenergie über.

So sieht man beispielsweise bei dem in Abb. 21.5a gezeigten Energieterm-Schema der  $\beta^-$ -Umwandlung des Radionuklids  $^{131}\text{J}$  (Jod), dass nur bei 1% aller Umwandlungen direkt



**Abb. 21.5** (a) Umwandlungsschema von  $^{131}\text{J}$ . (b)  $\gamma$ -Spektrum von  $^{131}\text{J}$ : Auftragung der spektralen Häufigkeit über der Energie.

der Grundzustand von  $^{131}\text{Xe}$  (Xenon) erreicht wird. Die dabei emittierten  $\beta^-$ -Teilchen besitzen eine Maximalenergie  $E_{\beta, \max}$  (s. Abb. 21.4) von 968 keV. Bei 87% der Umwandlungen dagegen wird zunächst ein angeregter Zustand des  $^{131}\text{Xe}$ -Kerns erreicht, der eine gegenüber dem Grundzustand um 364 keV erhöhte Energie hat. Die hierbei emittierten  $\beta^-$ -Teilchen können also nur eine Maximalenergie von  $968 - 364 = 604$  keV besitzen. Die Energie des angeregten  $^{131}\text{Xe}$ -Kerns wird beim Übergang in den Grundzustand als  $\gamma$ -Strahlung abgegeben. Im Schema der Abb. 21.5a ist dieser Übergang durch den senkrechten Pfeil 2 symbolisiert. Weitere 9% der  $\beta^-$ -Umwandlungen erfolgen über einen zweiten, 3% über einen dritten angeregten Zustand des  $^{131}\text{Xe}$ . Die emittierten  $\beta^-$ -Teilchen haben in diesen Fällen Maximalenergien von 344 und 248 keV und die entsprechenden  $\gamma$ -Quanten Energien von 624 und 720 keV. Die Umwandlung des radioaktiven Jod-131 kann also auf vier verschiedenen *Zerfallskanälen* erfolgen. Welcher Weg bei einem einzelnen Kern beschritten wird, ist zufällig. Die genannten Prozentzahlen ergeben sich als Mittelwerte aus der Umwandlung sehr vieler Kerne. Trägt man die prozentuale Verteilung der  $\gamma$ -Quanten gegen ihre Energien grafisch auf, so ergibt sich das in Abb. 21.5b gezeigte  $\gamma$ -Spektrum. Es ist im Gegensatz zum  $\beta^-$ -Spektrum der Abb. 21.4 ein Linienspektrum mit den für  $^{131}\text{J}$  charakteristischen Linien bei 364, 624 und 720 keV. Ganz ähnlich werden

auch bei den meisten anderen Kernumwandlungen zusätzlich zur  $\alpha$ -,  $\beta^-$ -,  $K$ - oder Zerstrahlung  $\gamma$ -Strahlen emittiert.

Die wenigen Radionuklide, die bei der Umwandlung direkt den Grundzustand erreichen, nennt man *reine*  $\alpha$ -,  $\beta^-$ -,  $K$ - oder *Positronenstrahler*. Reine  $\gamma$ -Strahler gibt es nicht, da der  $\gamma$ -Emission zunächst immer eine Emission von Teilchen vorausgeht. Bei einigen Radionukliden bleiben allerdings die Folgekerne über längere Zeiten (bis zu einigen Tagen oder Jahren) im angeregten Zustand. Solche Kerne nennt man *metastabil*, sie werden durch ein *m* neben der Massenzahl gekennzeichnet, z. B.  $^{57\text{m}}\text{Fe}$  (metastabiles Eisen 57). Metastabile Kerne können chemisch von den Ausgangskernen abgetrennt werden, wodurch man Präparate erhält, die ausschließlich  $\gamma$ -Strahlen emittieren.

### 21.2.2 Natürliche Radionuklide

Die Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls wurden an natürlich vorkommenden Radionukliden entdeckt. Diese sind oft Teil einer *Zerfallsreihe*, also einer Abfolge mehrerer Zerfälle, wie sie bei schweren Nukliden vorkommen. Die Massen dieser Nuklide sind größer als die des schwersten, in diesem Zusammenhang als stabil anzusehenden Elements, des Bi. Die bekannteste solcher Reihen ist die in Tab. 21.1 dargestellte *Uran-Radium-Reihe*; sie umfasst 16 Zerfälle. Charakteristisch für die *natürlichen radioaktiven Zerfallsreihen* ist, dass bei der Umwandlung der Nuklide mit Ausnahme des letzten Gliedes der Reihe stets wieder Radionuklide, d. h. instabile Kerne entstehen. Alle natürlichen Zer-

**Tab. 21.1** Uran-Radium-Zerfallsreihe. (Die Zahlen in Klammern geben die relative Häufigkeit des Übergangs an. Beim internen Übergang (– i. Ü. –) wird Kernenergie auf die Hüllenelektronen übertragen.) a = annum (Jahr), d = dies (Tag), h = hora (Stunde), m = Minute, s = Sekunde

Element	Halbwertszeit	Art des Zerfalls und Strahlenenergie (MeV)		
		$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$ a	4,18	–	0,045 (0,22)
$^{234}_{90}\text{Th}$	24,1 d	–	0,2 (0,8) 0,11 (0,2)	0,09 (0,2)
$^{234}_{91}\text{Pa}$	1,14 m 6,7 h	–	2,32 (0,99) i. Ü. (0,015) 1,2 (0,1) 0,45 (0,9)	0,8 0,85 (2)
$^{234}_{92}\text{U}$	$2,5 \cdot 10^5$ a	4,76	–	0,047 (0,26)
$^{230}_{90}\text{Th}$	$8 \cdot 10^4$ a	4,68 (0,75) 4,61 (0,25)	–	0,068 (0,25)
$^{226}_{88}\text{Ra}$	1620 a	4,78 (0,94) 4,6 (0,06)	–	0,068 (0,06)
$^{222}_{86}\text{Em}$	3,825 d	5,486	–	–
$^{218}_{84}\text{Po}$	3,05 m	5,99 (0,99)	–	–
$^{214}_{82}\text{Pb}$	26,8 m	–	0,65	0,05
$^{214}_{83}\text{Bi}$	19,7 m	5,50 (0,45) 5,44 (0,55)	3,17 (0,23) 1,65 (0,77)	mehrere Energien
$^{210}_{81}\text{T}$	1,32 m	–	1,8	–
$^{214}_{84}\text{Po}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$ s	7,68	–	–
$^{210}_{82}\text{Pb}$	22 a	–	0,018	0,047 und andere Energien
$^{210}_{83}\text{Bi}$	5,02 d	–	1,17	–
$^{210}_{84}\text{Po}$	138,3 d	5,3	–	0,8
$^{206}_{82}\text{Pb}$	stabil			

fallsreihen enden bei verschiedenen stabilen Isotopen des Blei. Unter den Radionukliden der natürlichen Zerfallsreihen befinden sich sowohl  $\alpha$ - als auch  $\beta$ -Strahler, und bei den meisten Umwandlungen werden noch zusätzlich  $\gamma$ -Strahlen emittiert. Natürliche Radionuklide am Beginn einer Zerfallsreihe besitzen sehr lange Halbwertszeiten (Gl. (21-5)), bezogen auf das Alter der Erde.

Neben der Uran-Radium-Reihe gibt es weitere natürliche Zerfallsreihen. Sie gehen aus vom Ac (Actinium), vom Np (Neptunium) und vom Th (Thorium). Außer den in diesen Reihen zusammengefassten Radionukliden kommen in der Natur noch die Ra-

dionuklide  $^3\text{H}$  (Tritium),  $^{14}\text{C}$  (Kohlenstoff),  $^{40}\text{K}$  (Kalium) und  $^{87}\text{Rb}$  (Rubidium) vor.

$^{40}\text{K}$  ist im natürlichen Isotopengemisch des Kaliums mit einer Häufigkeit von 0,02% enthalten, und da Kalium ein wesentlicher Bestandteil aller lebenden Zellen ist, ist auch das  $^{40}\text{K}$  in allen Lebewesen vorhanden. Gleiches gilt für die Radionuklide  $^3\text{H}$  und  $^{14}\text{C}$ , die durch Neutronen der *Höhenstrahlung* immer wieder nachgebildet werden. Daneben haben auch einige Radionuklide der natürlichen Zerfallsreihen, insbesondere  $^{226}\text{Ra}$  (Radium),  $^{210}\text{Pb}$  (Blei) und  $^{210}\text{Po}$  (Polonium) in Spuren Eingang in den Biozyklus gefunden und sind in vielen Lebewesen (auch im

Menschen) nachweisbar. Neben der Höhenstrahlung sind die in der gesamten Erdrinde in Spuren vorhandenen Radionuklide die Ursache für eine ständige Strahleneinwirkung auf die Lebewesen, die als *natürliche Strahlenexposition* bezeichnet wird. Sie beträgt in der Bundesrepublik im Mittel  $8 \cdot 10^{-8} \text{ Gy h}^{-1}$  (zur Einheit Gy s. Kap. 21.4).

Die *Höhenstrahlung*, auch kosmische Strahlung genannt, ist eine Teilchenstrahlung, die aus dem Weltraum auf die Erde einfällt. Die kosmischen Teilchen besitzen teilweise sehr hohe Energien und geben durch ihr Verhalten Aufschluss über hochenergetische Wechselwirkungen. Als ursprünglicher Beschleunigungsmechanismus kommen vor allem ausgedehnte, zeitlich veränderliche Magnetfelder im Weltall in Betracht.

In der *Primärstrahlung* aus dem Weltraum sind 85% Protonen, 14%  $\alpha$ -Teilchen und Atomkerne von Lithium bis Eisen enthalten. Durch Wechselwirkung mit der Erdatmosphäre setzt sich diese Primärstrahlung bereits 10 km oberhalb der Erdoberfläche vollständig in Sekundärstrahlung um. In ihr sind vorwiegend Neutronen enthalten, bei denen sich bezüglich der Energie ein Gleichgewichtsspektrum ausbildet, das von  $10^{-2} \text{ eV}$  (thermische Energie) bis  $10^4 \text{ MeV}$  reicht und ein deutliches Maximum bei 1 MeV hat. Auf dem weiteren Weg durch die Atmosphäre ändert sich dieses Gleichgewichtsspektrum praktisch nicht mehr, die Intensität jedoch wird durch weitere Wechselwirkungsprozesse abgeschwächt.

Zwischen der Erdoberfläche und einer Höhe von 16 km nimmt die Strahlenexposition durch die Höhenstrahlung um den Faktor 500 zu. Sie beträgt auf Meeresebene etwa  $2 \cdot 10^{-8} \text{ Gy h}^{-1}$ , in 4 km Höhe  $2 \cdot 10^{-7} \text{ Gy h}^{-1}$  und in 20 km Höhe  $10^5 \text{ Gy h}^{-1}$ . Bei den heute im Luftverkehr üblichen Flughöhen ist also die natürliche Strahlenexposition erheblich höher als auf der Erdoberfläche.

### 21.2.3 Zerfallsgesetz

Die einzelnen Umwandlungen in einem Radionuklid-Präparat erfolgen zeitlich und räumlich völlig unkorreliert. Es lassen sich daher lediglich statistische Aussagen über diesen Vorgang bei einer großen Anzahl vorhandener Kerne machen. Diese fasst man im „Zerfallsgesetz“ zusammen, das eher *Gesetz der radioaktiven Umwandlung* heißen sollte (s. Kap. 21.2.1). Danach ist die Zahl  $dn$  der sich im Intervall zwischen den Zeiten  $t$  und  $t + dt$  umwandelnden Kerne proportional zur Zahl der vorhandenen, instabilen Kerne  $n(t)$  und zur

Größe des Zeitintervalls  $dt$ . Mit einer Proportionalitätskonstante  $\lambda$  ergibt sich dann:

$$dn = -\lambda n dt, \quad (21-3)$$

wobei  $\lambda$  als *Zerfallskonstante* bezeichnet wird.

Das negative Vorzeichen weist darauf hin, dass mit zunehmender Zeit die Zahl  $n(t)$  der instabilen Kerne abnimmt. Durch Integration zwischen den Grenzen 0 und  $t$  folgt aus Gl. (21-3) (s. Anhang):

$$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}. \quad (21-4)$$

Dabei ist  $n_0$  die Zahl der instabilen Kerne zur Zeit  $t = 0$  und  $n(t)$  die Zahl der zur Zeit  $t$  noch nicht umgewandelten Kerne. Die Zerfallskonstante  $\lambda$  kennzeichnet die Häufigkeit der Umwandlungen und ist für die einzelnen Radionuklide charakteristisch; ihr Kehrwert  $1/\lambda$  wird als *mittlere Lebensdauer*  $\tau$  bezeichnet:  $\tau = 1/\lambda$ .

Da bei Proben aus sehr vielen Kernen in gleichen Zeiten prozentual gleichviele Kerne zerfallen, kann anschaulich auch nach der Zeit gefragt werden, nach welcher gerade die Hälfte der zum Zeitpunkt  $t = 0$  vorhandenen instabilen Kerne sich umgewandelt hat. Für diese Zeit, als *Halbwertszeit*  $T_{1/2}$  bezeichnet, gilt nach Gl. (21-4) die Beziehung  $n_0/2 = n_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}}$ . Diesen Ausdruck können wir umformen und erhalten:

$$T_{1/2} = \ln 2/\lambda. \quad (21-5)$$

Man kann also die Umwandlung eines Radionuklids entweder durch die Zerfallskonstante  $\lambda$  oder die anschaulichere Halbwertszeit  $T_{1/2}$  charakterisieren. Beispiele für Halbwertszeiten sind in Tabelle 21.1 aufgeführt. Sie können einen Bereich von Sekunden bis  $10^9$  Jahren überstreichen.

Den aus Gl. (21-3) folgenden Differentialquotienten

$$-\frac{dn}{dt} = \lambda n = A \quad (21-6)$$

bezeichnen wir als *Aktivität*  $A$  des betrachteten radioaktiven Präparates. Sie gibt an, wieviele Kerne sich in dieser Zeiteinheit umwandeln und ist daher proportional zur Anzahl  $n$  der instabilen Kerne im

Präparat. Die Einheit der Aktivität ist das Becquerel (Bq). *1 Bq entspricht einer Umwandlung pro Sekunde.*

Früher benutzte man als Einheit der Aktivität das Curie (Ci), 1 Ci entspricht  $3,7 \cdot 10^{10}$  Umwandlungen pro Sekunde. Dies ist gerade die Aktivität von 1 g  $^{226}\text{Ra}$ .

Radioaktive Präparate werden im allgemeinen durch die Angabe des Radionuklids und der Aktivität  $A$  zu einem bestimmten Zeitpunkt gekennzeichnet. Da die Aktivität gemäß Gl. (21-6) der Zahl  $n$  der noch vorhandenen radioaktiven Kerne proportional ist, ergibt sich für die Zeitabhängigkeit der Aktivität die gleiche exponentielle Gesetzmäßigkeit wie für die Zahl  $n(t)$  der Kerne

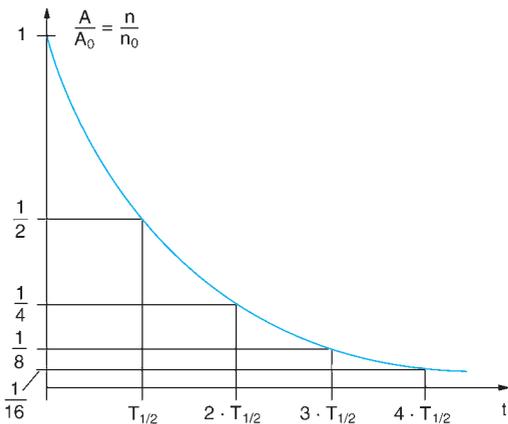
$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t},$$

und mit den Gln. (21-4) und (21-6) findet man:

$$A(t) = -\lambda \cdot n_0 \cdot e^{-\lambda t}. \tag{21-7}$$

Ist eine radioaktive Substanz in nichtaktivem Material (Luft, Wasser, Erde usw.) verteilt, so bezieht man die Aktivität auf dessen Volumen oder Masse und verwendet die Einheiten Bq/m<sup>3</sup>, Bq/l bzw. Bq/kg. Oberflächenkontamination wird durch die Aktivität pro Fläche charakterisiert, die zugehörige Einheit ist Bq/m<sup>2</sup>.

Die grafische Darstellung des Zerfallsgesetzes ist in Abb. 21.6 gezeigt. Sowohl für die Teil-



**Abb. 21.6** Grafische Darstellung des radioaktiven Zerfallsgesetzes; die Zeitachse ist in Vielfache der Halbwertszeit  $T_{1/2}$  geteilt.

chenzahl  $n$  als auch die Aktivität  $A$  erhält man den typischen Verlauf eines exponentiellen Abfalls der auf die Anfangswerte  $n_0$  und  $A_0$  normierten Werte von  $A$  und  $n$  mit der Zeit  $t$ . In jeweils einer Zeitspanne der Länge  $T_{1/2}$  sinken die Werte auf die Hälfte der zu Beginn vorhandenen Zahlen (Abb. 21.6); so sind nach vier Halbwertszeiten noch 1/16 der Ausgangswerte vorhanden. Für praktische Abschätzungen kann als Merkregel festgehalten werden, dass nach sechs Halbwertszeiten die Anfangsaktivität  $A_0$  auf etwa 1%, nach 10 Halbwertszeiten auf etwa 0,1% abgefallen ist. Man geht in der Praxis davon aus, dass ein Radionuklid nach 10 Halbwertszeiten als nicht mehr aktiv angesehen wird. Eine grafisch einfachere Darstellung in der Form einer Geraden erhält man durch halblogarithmische Auftragung von Abb. 21.6 (vgl. Anhang, Abb. A.9).

Die Exponentialfunktion z. B. von Gl. 21-4 beschreibt einen Zusammenhang, der nur für große Teilchenzahlen gilt. Bei kleinen Zahlen  $n$  werden statistische Schwankungen wirksam, die nicht in Form einer kontinuierlichen Funktion zu erfassen sind. So ist der letzte aktive Kern nach endlicher Zeit umgewandelt, während die Exponentialfunktion erst Null wird, wenn die Variable  $t$  unendlich groß wird.

### 21.2.4 Radioaktives Gleichgewicht

Bei vielen radioaktiven Umwandlungen ist der aus einem Nuklid entstehende Folgekern selbst wieder instabil (vgl. Tab. 21.1). Durch den Zerfall des Ausgangsnuklids (*Muttersubstanz*) wird dann also pro Zeiteinheit eine gewisse Anzahl Kerne des Folgeproduktes (*Tochtersubstanz*) gebildet, die sich ebenfalls wieder umwandeln, wobei Art der Umwandlung und Halbwertszeit im allgemeinen anders sind. Die Häufigkeit dieser Folgeumwandlungen ist begrenzt durch die Geschwindigkeit, mit der aus der Muttersubstanz die Tochtersubstanz gebildet wird. Sind zum Zeitpunkt  $t = 0$  nur Kerne der Muttersubstanz vorhanden, so wird zunächst die Tochtersubstanz rasch zunehmen. Damit steigt aber deren Aktivität, d. h., immer mehr Kerne der Tochtersubstanz zerfallen ihrerseits. Damit wird mit wachsender Zeit die Zuwachsrate der Tochtersubstanz immer gerin-

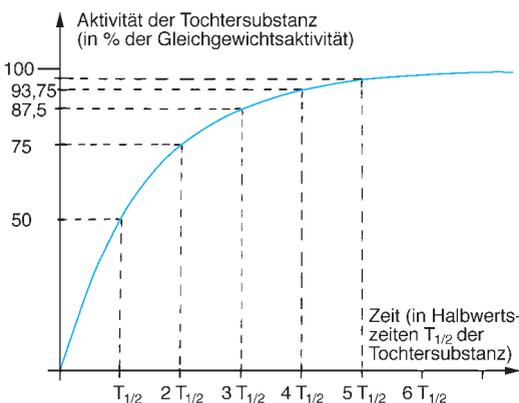
ger und geht schließlich gegen Null, wenn pro Sekunde ebenso viele Tochterkerne zerfallen, wie aus der Muttersubstanz des Präparates neu erzeugt werden. Diesen Zustand bezeichnen wir als *radioaktives Gleichgewicht*. Am einfachsten ist die Einstellung des Gleichgewichtes zu übersehen, wenn die Halbwertszeit der Muttersubstanz (M) sehr groß gegenüber derjenigen der Tochtersubstanz (T) ist. Dann kann man näherungsweise annehmen, dass die Aktivität  $dn_M/dt$  der Muttersubstanz konstant bleibt und folglich pro Zeiteinheit stets die gleiche Anzahl von Kernen der Tochtersubstanz gebildet wird. Es ergibt sich dann folgende Beziehung für die zeitliche Änderung der Zahl  $n_T$  der Kerne der Tochtersubstanz:

$$\frac{dn_T}{dt} = \frac{dn_M}{dt} - \lambda_T n_T. \quad (21-8)$$

Diese Differentialgleichung hat folgende Lösung:

$$n_T = \frac{\lambda_M}{\lambda_T} n_M (1 - e^{-\lambda_T t}). \quad (21-9)$$

In Abb. 21.7 ist die Ausbildung des radioaktiven Gleichgewichts dargestellt: zunächst steigt die Zahl der Tochterkerne rasch, aber nach einer Zeit von etwa sechs Halbwertszeiten der Tochtersubstanz ist das radioaktive Gleichgewicht weitgehend erreicht; die Aktivitäten von Mutter- und Tochtersubstanz sind dann gleich. Bei genauer Rechnung muss



**Abb. 21.7** Radioaktives Gleichgewicht. Die Zeit auf der Abszisse ist in Vielfachen der Halbwertszeit  $T_{1/2}$  angegeben.

man die Abnahme der Muttersubstanz mitberücksichtigen, wodurch die mathematische Ableitung wesentlich komplizierter wird.

In der medizinischen Anwendung sind derartige *Mutter-Tochter-Systeme* wichtig für die Gewinnung kurzlebiger Radionuklide, die man wegen ihrer kurzen Halbwertszeit unmittelbar vor der Anwendung in der Klinik aus einem Mutter-Tochter-System (das in diesem Falle auch als *Generator-System* bezeichnet wird) gewinnt. Hierbei ist die Muttersubstanz stabil und die Tochtersubstanz labil an einen Träger (z. B. Ionenaustauscher) gebunden. Wegen der labilen Bindung kann die Tochtersubstanz durch geeignete Verfahren von dem Träger und der Muttersubstanz abgelöst werden. In dem Träger beginnt dann die Einstellung des radioaktiven Gleichgewichtes aufs neue, und nach einer Zeitdauer von einigen Halbwertszeiten der Tochtersubstanz hat man erneut die Möglichkeit, radioaktive Tochtersubstanz zu gewinnen. Die Lebensdauer eines solchen Generatorsystems, d. h. die Zeit, während der Tochtersubstanz mit genügender Aktivität entnommen werden kann, ist begrenzt durch die Halbwertszeit der Muttersubstanz.

Ein Beispiel für die Anwendung kurzlebiger Radionuklide ist das metastabile Technetium  $^{99m}\text{Tc}$ , das in der Natur nicht vorkommt, aber in einer künstlich erzeugten Umwandlungreihe, die aus stabilem  $^{98}\text{Mo}$  z. B. durch Aktivierung mit Neutronen (vgl. Kap. 21.2.10) ein instabiles  $^{99}\text{Mo}$  erzeugt, das unter anderem in das  $^{99m}\text{Tc}$  zerfällt. Die Halbwertszeit des  $^{99}\text{Mo}$  beträgt etwa 66 h, die des  $^{99m}\text{Tc}$  etwa 6 h. Die geringe Halbwertszeit des letzteren Nuklids macht es für die medizinische Anwendung insbesondere in der diagnostischen Schilddrüsenszintigraphie interessant, wo es das früher eingesetzte  $^{131}\text{J}$ , das eine Halbwertszeit von rund 8 Tagen besitzt, verdrängt hat.

### 21.2.5 Wechselwirkung energiereicher geladener Teilchen mit Materie

Beim Eindringen von  $\alpha$ - oder  $\beta^-$ -Teilchen in Materie kommt es zu mechanischen Stößen oder zur elektronischen Wechselwirkung mit

den Atomen des bestrahlten Stoffes, wobei die eingedrungenen Teilchen abgebremst und eingefangen (absorbiert) werden. Die Teilchenstrahlung kann deshalb nur bis zu einer gewissen Tiefe in Materie eindringen; sie hat in Materie eine begrenzte *Reichweite*. Diese hängt einerseits von der Dichte des Absorbermaterials und andererseits von Masse, Ladung und Geschwindigkeit der Teilchen ab. Hauptsächlich geht die kinetische Energie der Teilchen durch Wechselwirkung mit den Hüllenelektronen des Absorbermaterials verloren. Die Elektronen der Atomhülle werden dabei entweder auf energetisch höhere Bahnen gehoben (*Anregung*) oder aus dem Atom herausgeschleudert (*Ionisation*). Das bei der Ionisation freiwerdende Elektron und den positiven Atomrest bezeichnet man als *Ionenpaar* oder *Ladungspaar* und die Energie, die zur Erzeugung eines Ionenpaares notwendig ist, als *Ionisationsenergie*; sie ist für die einzelnen Elemente verschieden und liegt mit wenigen Ausnahmen zwischen 4 und 14 eV.

Da die kinetischen Energien von  $\alpha$ - und  $\beta^-$ -Teilchen aus Kernumwandlungen zwischen 100 keV und 10 MeV betragen, können von einem eingestrahnten Teilchen bis zu  $10^5$  Ionenpaare gebildet werden. Der Weg von  $\alpha$ - und  $\beta^-$ -Teilchen durch Materie ist daher von Ionenpaaren gesäumt. Allerdings unterscheidet sich die Absorption von  $\alpha$ -Teilchen wesentlich von der Absorption der  $\beta^-$ -Teilchen bezüglich der im Absorber erzeugten Ionisationsdichte:

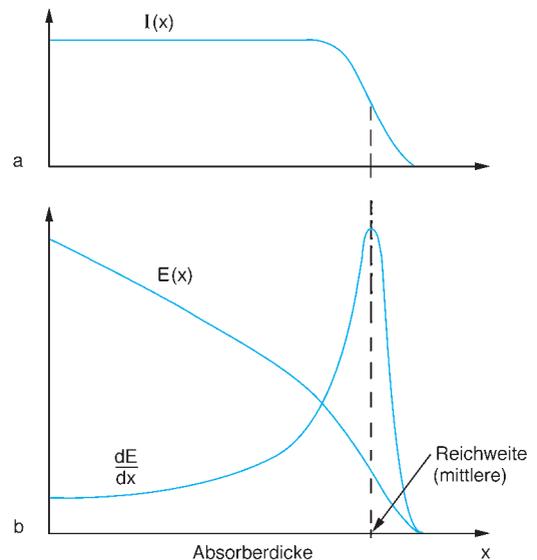
Bei  $\alpha$ -Teilchen ist wegen ihrer gegenüber Elektronen erheblich größeren Masse ( $m_\alpha = 7344m_{e1}$ ) und der Ladung ( $q_\alpha = 2|q_{e1}|$ ) die Wahrscheinlichkeit für Ionenpaarbildung wesentlich größer als bei  $\beta^-$ -Teilchen;  $\alpha$ -Teilchen erzeugen daher hohe Ionisationsdichten und besitzen nur kurze Reichweiten, während bei gleicher Energie die Reichweite der  $\beta^-$ -Teilchen wesentlich größer ist. Hinzu kommt, dass die schweren  $\alpha$ -Teilchen ihre Richtung bei Wechselwirkungen mit den Kernen praktisch nicht verändern, während bei den leichteren  $\beta^-$ -Teilchen häufige Richtungsänderungen vorkommen.

Für das Eindringen eines Strahls von *monoenergetischen  $\alpha$ -Teilchen* in Materie ergibt

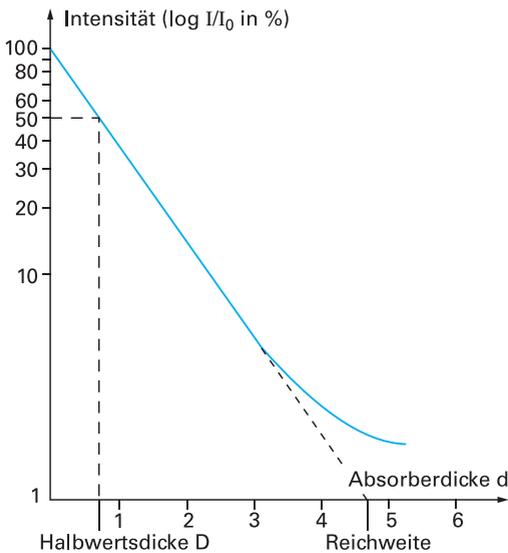
sich ein Intensitätsverlauf, wie er in Abb. 21.8a gezeigt ist. Mit zunehmender Wegstrecke im Absorber bleibt zunächst die Intensität praktisch konstant. Ab einer gewissen Dicke fällt sie dann aber schnell ab, wenn nämlich durch Wechselwirkungen die kinetische Energie der Teilchen aufgebraucht ist. Die Reichweite ist von der Dichte des Absorbermaterials und von der Geschwindigkeit der Teilchen abhängig. Trägt man den Energieverlust der Teilchen pro Wegstrecke auf, so ergibt sich ein deutliches Maximum (Bragg-Maximum genannt) bei der mittleren Reichweite  $R$ . Es wird dort sehr viel Energie an den Absorber abgegeben, so dass die verbleibende Energie sehr schnell auf geringe Werte abfällt und die Teilchen „stecken“ bleiben; die Bahn der Teilchen ist zu Ende (Abb. 21.8b).

In biologischem Gewebe haben z. B.  $\alpha$ -Teilchen mit einer kinetischen Energie von 5 MeV eine Reichweite von  $6 \cdot 10^{-5}$  m.

In Metallen ist aufgrund der weitaus größeren Dichte die Reichweite bedeutend kleiner als im Gewebe. Daher können  $\alpha$ -Teilchen



**Abb. 21.8** (a) Intensitätsverlauf (Zahl der Teilchen) eines Strahles monoenergetischer  $\alpha$ -Teilchen in Abhängigkeit von der Absorberdicke. (b) Verlust der Energie der Teilchen pro Wegstrecke  $x$  ( $dE/dx$ ) im Absorber und Verlauf der Gesamtenergie.



**Abb. 21.9** Intensitätsverlauf der  $\beta^-$ -Strahlung eines Radionuklids in Abhängigkeit von der Absorberdicke in halblogarithmischer Auftragung.

schon durch dünne Metallfolien vollständig abgeschirmt werden.

Die  $\beta^-$ -Teilchen besitzen von ihrer Entstehung her verschiedene Energien. Daher müssen auch die Reichweiten jeweils unterschiedlich sein. Für die  $\beta^-$ -Strahlung eines Radionuklids kann es daher wegen ihrer kontinuierlichen Energieverteilung keine einheitliche Reichweite geben. Trägt man wie in Abb. 21.9 die Intensität  $I$  dieser *nicht-monoenergetischen*  $\beta^-$ -Strahlung in Abhängigkeit von der Absorberdicke  $d$  halblogarithmisch auf, so ergibt sich über einen großen Bereich von  $d$  ein linearer Zusammenhang zwischen  $\log I$  und  $d$ . Das bedeutet, dass die nicht-monoenergetische  $\beta^-$ -Strahlung in diesem Bereich mit der Absorberdicke exponentiell abnimmt. Daher wird oft für  $\beta^-$ -Strahlung eines Radionuklids nicht die maximale Reichweite, sondern die Halbwertsdicke  $D$  angegeben, bei der die Intensität auf den halben Wert der Anfangsintensität  $I_0$  abgeklungen ist.

Als Merkgröße kann gesagt werden, dass in biologischem Gewebe  $\beta^-$ -Teilchen mit 1 MeV ungefähr  $10^{-2}$  m tief eindringen, also erheblich tiefer als die  $\alpha$ -Strahlen.

Qualitativ entsprechen die Wechselwirkungen geladener Teilchen, wie Protonen oder leichter und schwerer Atomkerne, mit Materie denen von  $\alpha$ - und  $\beta^-$ -Teilchen. Quantitative Unterschiede ergeben sich jedoch durch die unterschiedlichen Massen und Ladungen der Teilchen. Allgemein gilt: Je größer Masse und Ladung eines Teilchens, um so geringer ist bei gleicher kinetischer Energie seine Reichweite und desto größer die erzeugte Ionenpaardichte.

### 21.2.6 Wechselwirkung von Neutronen mit Materie

Neutronen sind keine Produkte des Zerfalls natürlicher Radionuklide. Sie entstehen unter anderem bei der Kernspaltung in Reaktoren und können als freie, energiereiche Teilchen für Kernreaktionen eingesetzt werden (s. unten). Neutronen besitzen keine elektrische Ladung, daher ist die Stärke ihrer Wechselwirkung mit Materie wesentlich geringer als bei geladenen Teilchen. Lediglich direkte Stöße mit den Atomkernen, die nach den Stoßgesetzen der klassischen Mechanik behandelt werden können, sind von Bedeutung.

Die Übertragung der kinetischen Energie eines Neutrons auf einen Atomkern ist dann am größten, wenn beide etwa gleiche Massen besitzen (vgl. Kap. 4.3). Daher sind Substanzen mit hohem Wasserstoffgehalt (z. B.  $\text{H}_2\text{O}$  oder Paraffin) für die Abbremsung von schnellen Neutronen am wirksamsten.

Durch die beim Zusammenstoß übertragene kinetische Energie werden die getroffenen Atomkerne beschleunigt und geben dann ihrerseits die gewonnene Energie durch Wechselwirkung an die umgebende Materie ab, wie sie für geladene Teilchen beschrieben wurde. So kommt es auf diesem indirekten Wege auch bei der Absorption von Neutronen zur Bildung von Ionenpaaren (Kap. 21.2.5); man bezeichnet Neutronenstrahlen daher auch als *indirekt ionisierende Strahlen*.

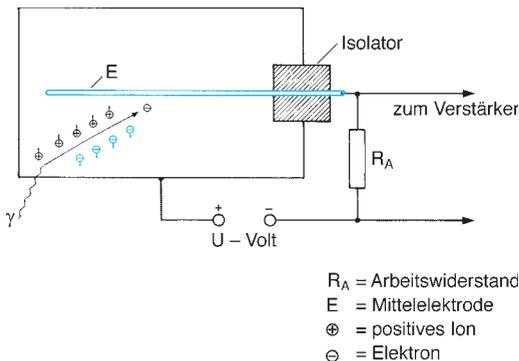
### 21.2.7 Strahlungsdetektoren

Die bei der Absorption eines  $\alpha$ - oder  $\beta^-$ -Teilchens oder auch eines  $\gamma$ -Quants im absorbier-

renden Material entstehenden Ionenpaare und angeregten Zustände von Hüllenelektronen können zum Nachweis der jeweiligen Strahlung benutzt werden. Liefern die entstehenden Ionenpaare das Messsignal, so spricht man von *Ionisationsdetektoren*. Wird dagegen die Licht- oder Röntgenemission bei der Rückkehr der Hüllenelektronen vom angeregten Zustand in den Grundzustand für die Bildung des Messsignals benutzt, so spricht man von *Szintillationsdetektoren*. Ionisationsdetektoren sind Ionisationskammer, Proportionalzählrohr, Geiger-Müller-Zählrohr, Halbleiterdetektor und, in weiterem Sinne, auch die fotografische Emulsion. Bei den drei zuerst genannten Geräten werden Gase als Detektormaterial benutzt.

1. In der *Ionisationskammer*, die schematisch in Abb. 21.10 dargestellt ist, tragen lediglich die von der Strahlung im Gas erzeugten Ionen zum Messstrom bei. Sie werden durch die von außen angelegte Kammer-spannung an den Elektroden gesammelt. Der Strom ist proportional zu der mittleren Anzahl der von der Strahlung pro Zeiteinheit erzeugten Ionenpaare. Er ist sehr gering, und daher kann man im allgemeinen mit den Ionisationskammern einzelne Teilchen nicht nachweisen, sondern nur intensive Strahlung.

2. Durch höhere Kammer-spannung werden die Ionen stärker beschleunigt. Bei genügend hoher Spannung reicht die kinetische Energie einiger Ionen aus, um beim Zusammenstoß mit Gasmolekülen diese ihrerseits zu ionisieren. Auch diese Sekundär-Ionen werden beschleunigt



**Abb. 21.10** Schemaskizze einer Ionisationskammer.

und können ebenfalls wiederum ionisieren. Dadurch wächst die Zahl der insgesamt gebildeten Ionenpaare an, und es kommt zur unselbständigen Gasentladung (vgl. Kap. 15.2.2). Bis zu einer bestimmten Elektroden-spannung, bei der die selbständige Entladung einsetzt, ist die Gesamtzahl der in der Gasentladung erzeugten Ionenpaare der durch die Strahlung erzeugten Anzahl der Primär-Ionen proportional, die wiederum der Energie der einfallenden ionisierenden Teilchen proportional ist. Eine in diesem Spannungsbereich betriebene Ionisationskammer nennen wir *Proportionalzählrohr*. Bei ihm ist die Größe des einzelnen elektrischen Impulses proportional zu der im Zählrohr absorbierten Energie des einfallenden Teilchens. Nun ist das Messsignal durch die unselbständige Gasentladung so weit verstärkt, dass man im Unterschied zur Ionisationskammer sogar einzelne Teilchen nachweisen kann.

3. Bei noch weiterer Erhöhung der Kammer-spannung entsteht in zunehmendem Maße ultraviolettes Licht, wenn die Kammer mit geeignetem Gas gefüllt ist, wobei es durch Photoeffekt (Kap. 21.3.3) zu weiteren Ionisationen im gesamten Kammervolumen kommt. Der dabei auftretende Stromstoß ist im Gegensatz zum Proportionalzählrohr unabhängig von der absorbierten Energie der Strahlung. Durch Beimengung geeigneter Stoffe zum Zählgas muss dafür gesorgt werden, dass die Ionenbildung nach jedem Stromstoß wieder unterbrochen wird, d. h. keine selbständige Gasentladung (Kap. 15.2.2) des Zählrohrs einsetzt. Ein in diesem Spannungsbereich betriebenes Zählrohr nennt man *Geiger-Müller-Zählrohr*. Bei ihm genügt die Bildung von nur wenigen Primär-Ionenpaaren, um einen Stromstoß auszulösen.

4. Die gebräuchlichsten *Halbleiter-Ionisationsdetektoren* sind Germanium- oder Siliziumkristalle mit geringem Lithiumzusatz. Sie haben gegenüber Gasdetektoren den Vorteil hoher Dichte und geringer Ionisierungsenergie. Die höhere Dichte des Detektormaterials bedingt eine größere Absorptionswahrscheinlichkeit für die Strahlung und damit eine Steigerung der Nachweiswahrscheinlichkeit. Wegen der geringeren Ionisierungsenergie können ionisierende Teilchen mehr Ionen-

paare erzeugen als im Gasdetektor, und so sind die Messsignale stärker.

5. In der *fotografischen Emulsion* aus Silberbromid (AgBr) werden kleine AgBr-Kristallkörner in Gelatine oder Polymerschichten eingebettet. Sie werden durch Ionisation aktiviert, so dass sie entwickelbar werden wie normale Fotografien. Bei Bestrahlung mit  $\alpha$ -,  $\beta$ - oder  $\gamma$ -Strahlung werden einigen Ionen in den Körnern Elektronen entrissen, die sich an  $\text{Ag}^+$ -Ionen anlagern und sie zu neutralen  $\text{Ag}^0$ -Atomen reduzieren. Es entstehen dadurch Keime, von denen beim chemischen *Entwicklungsvorgang* die Reduktion der  $\text{Ag}^+$ -Ionen im ganzen Kristallkorn zu metallischem, schwarzem Silber ausgeht. Nach der Entwicklung wird somit entlang der Bahn eines ionisierenden Teilchens eine Schwärzung sichtbar. In Medizin und Biologie werden fotografische Emulsionen hauptsächlich in der *Autoradiographie* verwendet. Hierbei wird die Emulsion auf einen Gewebeschnitt aufgebracht, und es lässt sich anhand der Schwärzung feststellen, in welchen Bereichen eines Gewebes oder auch einzelner Zellen bestimmte radioaktiv markierte Substanzen abgelagert wurden.

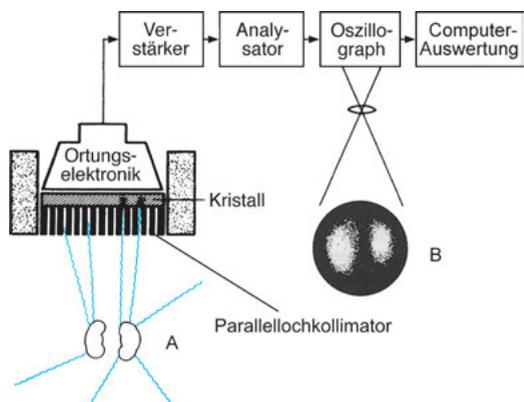
6. Bei den *Szintillationsdetektoren* unterscheidet man zwischen organischen und anorganischen Szintillatorsubstanzen. Als anorganische Substanzen werden Einkristalle mit hoher Dichte verwendet. Das bekannteste Detektormaterial ist NaI(Tl). Das Symbol (Tl) bedeutet, dass in dem Natriumiodid-Kristall geringe Spuren von Thallium eingelagert sind, die als Aktivator für die Auslösung von *Szintillationen* (Lichtblitzen) durch die einfallende Strahlung dienen. In einem derartigen Kristall werden, unabhängig vom jeweiligen Betrag der einfallenden Strahlungsenergie, etwa 9% davon in Photonen von sichtbarem oder ultraviolettem Licht umgewandelt (Ausbeute). Da der Kristall für Photonen im sichtbaren Wellenlängenbereich transparent ist, kann man jeden einzelnen Wechselwirkungsvorgang im Kristallinnern an einem schwachen Lichtblitz erkennen. Diese Lichtblitze lassen sich durch Photodetektoren, wie den Photomultiplier (Kap. 20.7) in elektrische Signale umformen. Wegen der (gegenüber Gasdetektoren) hohen Dichte des De-

tektormaterials besteht auch für  $\gamma$ -Quanten eine hohe Nachweiswahrscheinlichkeit.

Die organischen Szintillatoren sind meist Benzolderivate, die in kristalliner Form oder in Lösungen verwendet werden. Da sie auch im gelösten Zustand ihre Eigenschaft als Szintillator beibehalten, kann man die aktive Substanz, deren Strahlung gemessen werden soll, direkt im flüssigen Detektor lösen. Dadurch kann die Strahlung ohne zusätzliche, auf dem Weg zum Detektor erfolgte Absorptionsverluste gemessen werden, was besonders bei den energiearmen  $\beta^-$ -Strahlen von  $^3\text{H}$  und  $^{14}\text{C}$  von großer Bedeutung ist. Die beiden Radionuklide  $^3\text{H}$  und  $^{14}\text{C}$  sind für die biologische und medizinische Anwendung besonders wichtig, da sich durch ihren Einbau ein großer Teil organischer Verbindungen radioaktiv markieren lässt.

Die von den Ionisationsdetektoren oder Photomultipliern der Szintillationsdetektoren gelieferten elektrischen Impulse werden im allgemeinen nach elektronischer Verstärkung einem elektronischen Zählgerät zugeleitet. Trotz ihres komplizierteren Aufbaus (der Multiplier ist als Zwischenstufe erforderlich) sind die Szintillationsdetektoren wegen ihrer hohen Nachweiswahrscheinlichkeit die Standardgeräte zur Strahlungsmessung geworden.

Eine besondere Form der Szintillationsdetektoren sind die in der Medizin verwendete-



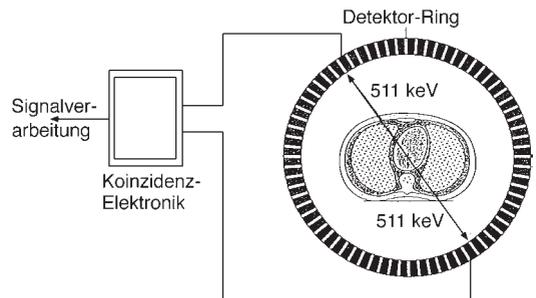
**Abb. 21.11** Schematische Darstellung der Analyse der Speicherung von Radiopharmaka mit der Gamma-Kamera. Das zu untersuchende Objekt A, etwa die Schilddrüse, liefert ein Bild B auf Grund seiner Emission von  $\gamma$ -Strahlung.

ten Gamma-Kameras (Abb. 21.11). Sie dienen der Anfertigung von *Szintigrammen* (Kap. 21.2.8), d. h. der Aufnahme der orts aufgelösten Verteilung von im Menschen befindlichen radioaktiven Substanzen. Bei den Gamma-Kameras ist der Detektor ein scheibenförmiger NaI(Tl)-Kristall (Durchmesser bis zu 55 cm, Dicke 1,2 cm), dem ein Parallellochkollimator vorgeschaltet ist, damit nur weitgehend achsenparallele Gammastrahlen in den Kristall einfallen, auf den eine größere Anzahl von Photomultipliern aufgekittet ist. Bei Absorption eines Gammaquants im Kristall erhält derjenige Multiplier die meisten Lichtquanten, der sich unmittelbar über dem Absorptionort befindet. Weiter entfernte erhalten entsprechend weniger Quanten. Ein Vergleich der verschiedenen Ausgangssignale in der Ortungselektronik ergibt den Absorptionort, der durch ein X- und ein Y-Signal bestimmt wird. Dadurch wird die Abbildung der Verteilung der Radionuklide erreicht. Mit der Summe der Ausgangssignale aller Multiplier ergibt sich ein der Gesamtzahl der von einem Gammaquant erzeugten Lichtquanten und damit ein der Energie des Gammaquants proportionaler Impuls (Z-Signal). Eine einfache Art der Datenausgabe wird realisiert, indem ein Lichtpunkt auf einer Elektronenstrahlröhre (Oszillograf) durch jedes einzelne zur Energie der nachzuweisenden Gammastrahlen passende Z-Signal ausgelöst wird. Die Orte der Lichtpunkte sind durch die X- und Y-Koordinaten der Ortungselektronik festgelegt. Durch die Aufnahme der Lichtpunkte während der Messzeit auf eine fotografische Schicht ergibt sich das Bild der Verteilung (Abb. 21.11). Für anspruchsvollere Auswertungen werden Absorptionsereignisse im NaI(Tl)-Kristall mit ihren Ortsinformationen X, Y in einen Auswerterechner gespeichert.

Bei *Emissions-Computertomografen* z. B. wird der Kopf der Gamma-Kamera um den Patienten herumgeführt, wobei eine Vielzahl von Einzelaufnahmen registriert wird. Aus ihren Intensitätsprofilen kann, ähnlich wie beim Kernresonanz- (Kap. 21.1.3) bzw. beim Röntgen-Computertomografen (Kap. 21.3.4), die räumliche Verteilung der radioaktiven

Substanz im Körper des Patienten rekonstruiert werden.

Die Emissionstomografie ist in der Nuklearmedizin von großer Bedeutung. Mit ihr werden schichtweise Radioaktivitätsverteilungen im Organismus abgebildet. Je nach dem zugrunde liegenden physikalischen Zusammenhang werden SPECT und PET unterschieden. SPECT steht für Single-Photon-Emission Computer Tomography, PET für Positron-Emissionstomografie. Bei SPECT besteht die Kamera aus einem oder mehreren Detektorköpfen, die um das Untersuchungsobjekt rotieren und die aus dem Organismus austretenden Strahlen ortsabhängig aufnehmen. Die Strahlung wird durch inkorporierte  $\gamma$ -Strahler erzeugt. Bei PET werden Positronenstrahler eingesetzt. Typische Isotope sind  $^{11}\text{C}$ ,  $^{13}\text{N}$ ,  $^{15}\text{O}$  und  $^{18}\text{F}$ . Sie besitzen einen Protonenüberschuss im Kern, so dass sich ein Proton in ein Neutron und ein Positron umwandelt. Zwei gegenüberliegende Detektoren werden im sogenannten PET-Scanner dazu verwendet, die aus der Zerstrahlung von Positron und Elektron koinzident gebildeten Photonen (Kap. 21.2.1) zu registrieren, die in einem Winkel von  $180^\circ$  richtungskorreliert sind. Diese Richtungskorrelation zusammen mit der zeitlichen Koinzidenz der beiden Photonen und ihrer diskreten Energie ermöglicht einen sehr empfindlichen und ortsspezifischen Nachweis der Emissionsereignisse. Als bildgebendes Verfahren, in Kombination mit der Computertomografie (Kap. 21.3.4) wird die PET-Technik erfolgreich zur Tumorlokalisation eingesetzt. Ein schematischer Aufbau ist in Abb. 21.12 gezeigt.



**Abb. 21.12** Schematischer Aufbau einer PET-Messanordnung.

7. Die prinzipielle Wirkungsweise der *Blasen-* und *Nebelkammer* zum Nachweis ionisierender Strahlung haben wir bereits in Kap. 11 kurz angesprochen. Hier soll noch nachgetragen werden, wie sich  $\alpha$ - und  $\beta^-$ -Strahlen auf direkte Weise in der Blasen- oder Nebelkammer voneinander unterscheiden lassen.

Legen wir ein permanentes Magnetfeld  $\vec{H}$  an die Kammer, dann erfahren geladene Teilchen (nicht aber  $\gamma$ -Quanten, nach Gl. (14-48), eine Lorentzkraft  $\vec{F}_L$  und werden senkrecht zu  $\vec{H}$  und ihrer Flugrichtung  $\vec{v}$  auf Kreisbahnen abgelenkt. Aufgrund unterschiedlicher Ladung bewegen sich dabei  $\alpha$ - und  $\beta^-$ -Teilchen in verschiedene Richtung.

Die Radien der beobachteten Kreisbahnen ergeben sich aus der Gleichheit von Lorentzkraft (Zentripetalkraft) und Zentrifugalkraft  $F_T$ . Mit den Gln. (1-21), (2-9) und (14-48) erhalten wir für  $F_L = F_T$ :

$$\mu_0 H e v = m \frac{v^2}{r} \tag{21-10}$$

oder, nach  $r$  aufgelöst:

$$r = \frac{mv}{\mu_0 H e} \tag{21-11}$$

Aus Gl. (21-11) folgt, dass der Radius der Kreisbahnen in der Kammer proportional zur Masse und Geschwindigkeit der ionisierenden Teilchen ist (und damit über deren Impuls Auskunft gibt).

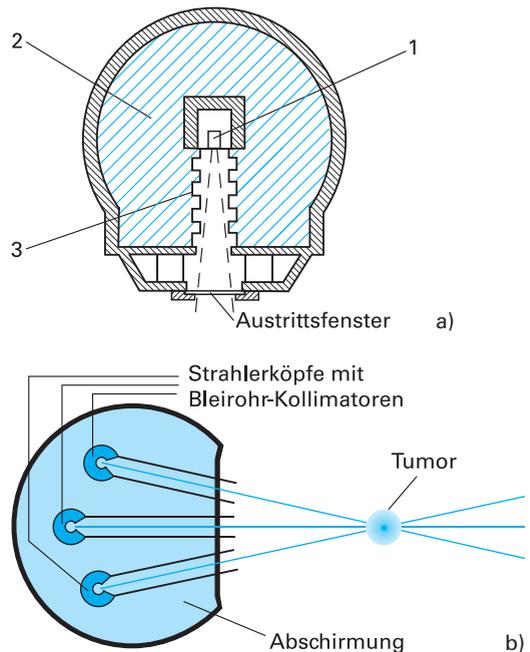
### 21.2.8 Medizinische Anwendung von Radionukliden; Bestrahlungstechniken

Über ihren Einsatz in den bildgebenden Verfahren ( $\gamma$ -Kamera, PET) hinaus spielen Radionuklide in der Medizin eine große Rolle in einer Vielzahl weiterer Anwendungen.

Bereits kurz nach der Entdeckung der natürlichen Radioaktivität (durch Becquerel (1896)) wurde um die Jahrhundertwende, in Platin kapseln eingeschlossen,  $^{226}\text{Ra}$  zur intrakavitären Strahlentherapie (Bestrahlung in Körperhöhlen), insbesondere zur Behandlung des Uteruskarzinoms, verwendet. Durch die Platin kapseln wurden die  $\alpha$ - und die  $\beta^-$ -Strahlen vollständig absorbiert, und es kamen nur die  $\gamma$ -Strahlen der Folgeprodukte der Ra-Zerfallsreihe (Tab. 21.1) zur Wirkung, wodurch eine zu hohe Strahlenbelastung (Verbrennung) des unmittelbar anliegenden Gewebes verhindert wurde.

Durch Kernreaktoren mit ihrem hohen Neutronenfluss können heute viele Radionuklide mit sehr hohen Aktivitäten künstlich erzeugt werden. Von diesen hat das  $^{192}\text{Ir}$  mit einer Energie der Gammastrahlen von 161 keV und einer geringen Reichweite das  $^{226}\text{Ra}$  bei der intrakavitären Strahlentherapie abgelöst. Die Präparate werden nicht mehr wie früher manuell in die Körperhöhlen eingebracht, sondern zur Verbesserung des Strahlenschutzes des Personals in einem Schlauchsystem elektrisch oder pneumatisch an den Bestrahlungsort transportiert.

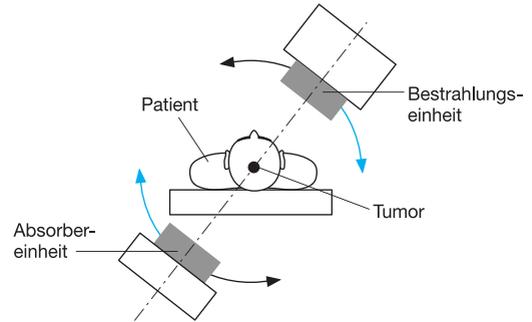
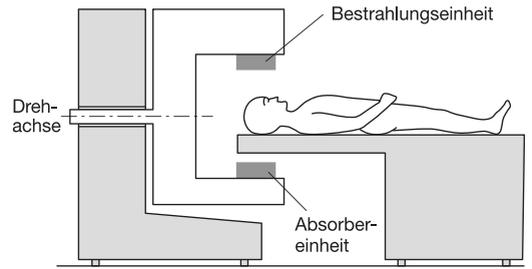
Für die äußere Strahlentherapie (Strahlenquelle außerhalb des Körpers) werden  $^{137}\text{Cs}$  und vor allem  $^{60}\text{Co}$  benutzt, deren Energie und Reichweite größer ist. Die von diesen Radionukliden ausgehenden Gammastrahlen mit Quantenenergien von 0,66 MeV bzw. 1,1 MeV und 1,3 MeV sind zur Bestrahlung von tiefer im Organismus liegenden Krankheitsherden wesentlich besser geeignet, als die mit normalen Röntgenröhren erzeugten Röntgenstrahlen.



**Abb. 21.13** a) Querschnitt durch den Strahlerkopf einer Tele-Curie-Einheit. 1) Strahlenquelle, 2) feste Bleiabschirmung, 3) bewegliche Bleiabschirmung zur Einstellung des Strahlenfeldes, 4) Austrittsfenster; b) Schema-Zeichnung einer Gammastrahlentherapie-Apparatur.

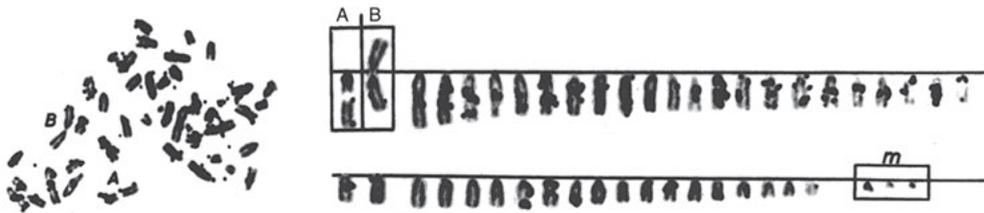
len, deren Quantenenergien maximal etwa 0,3 MeV betragen. Derartige Bestrahlungsgeräte auf Radionuklidbasis bezeichnet man als *Tele-Curie-Einheiten*; in ihrem Strahlerkopf sind Aktivitäten von ca.  $10^{14}$  Bq (ca.  $3 \cdot 10^3$  Ci) untergebracht. Abb. 21.13a zeigt einen Querschnitt durch einen solchen Strahlerkopf. Sein Bleimantel absorbiert alle Strahlung mit Ausnahme derjenigen, die auf das Austrittsfenster trifft. Durch Bleiblenden am Fenster kann die gewünschte Größe der bestrahlten Fläche (Feldgröße) eingestellt werden.

Oberstes Ziel bei der Strahlentherapie ist eine Fokussierung der Strahlenwirkung auf den Tumor unter weitgehender Schonung des gesunden Gewebes. Eine Weiterentwicklung der Tele-Curie-Einheit vor diesem Hintergrund wurde mit der Konstruktion der *Gammaknife* genannten Apparatur angestrebt. Verbunden mit diesem Namen ist die Assoziation der Gammastrahlung einerseits und ihre quasi-chirurgische Wirkung auf den Tumor, einem Herausschneiden nahe kommend. Dies wird durch Fokussierung der Gammastrahlung erreicht, wie in Abb. 21.13b schematisch dargestellt. Die radiale Anordnung einer Reihe von Strahlerköpfen und die durch Bleirohre an den Austrittsfenstern der Köpfe erzwungene Kollimation bewirkt die Fokussierung der Gammastrahlung auf den Tumor. Aufgrund der Geometrie und der Größenverhältnisse war diese Bestrahlungsanordnung hauptsächlich bei Hirntumoren indiziert. Technische und vor allem Entsorgungsprobleme der Radionuklide haben diese Methode aber in neuerer Zeit zugunsten des weiter unten beschriebenen Cyberknifes den Hintergrund gedrängt.



**Abb. 21.14** Schemaskizze der Geräteanordnung bei einer Pendelbestrahlung. Der Bleiabsorber dient zum Strahlenschutz der Umgebung.

Bei sogenannter *Pendelstrahlung* (Abb. 21.14) pendelt während der Behandlung der Strahlerkopf auf einer Kreisbahn um den Patienten, der so gelagert ist, dass der zu behandelnde Krankheitsherd im Mittelpunkt des Kreises liegt. Dadurch ist das Strahlenbündel dauernd auf den Herd ausgerichtet, während es zu verschiedenen Zeiten verschiedene Bereiche des umgebenden Gewebes und der Hautoberfläche trifft. Somit werden auch bei starker Bestrahlung die oberflächenschichten und Umgebungsbereiche weitgehend geschont. In der heutigen Strahlentherapie sind die Tele-Curie-Einheiten weitgehend durch Li-



5,5 Std. nach  $^3\text{H}$ -Thymidin-Injektion

**Abb. 21.15** Autoradiographie von Chromosomen (mit  $^3\text{H}$ -Markierung) aus Mäusezellen.

nearbeschleuniger (Kap. 21.3.2) ersetzt worden, wobei zumeist Elektronen beschleunigt werden; das Prinzip der Pendelbestrahlung bleibt unverändert bestehen.

Die gegenwärtig modernste Ausführung der Kombination von einem Linearbeschleuniger zur Strahlenerzeugung mit dem Prinzip der Pendelbestrahlung zur Therapieoptimierung stellt das *Cyberknife* genannte System dar. Ein Linearbeschleuniger für Elektronen von nur etwa 0,5 m Länge sitzt auf einem um sechs Achsen beweglichen Roboter und „pendelt“ in beliebigen Raumrichtungen sehr schnell, immer den Tumor im Fokus, wobei allerdings eine Strahlenkollimation wie etwa beim Gammaknife nicht effizient möglich ist. Durch aktuelle Methoden der Tumorkalisation (Computertomografie, siehe Kap. 21.3.4) lassen sich bei der Bestrahlung z. B. auch atungsbedingte Organbewegungen und damit verbundene Verschiebungen des Tumors ausgleichen.

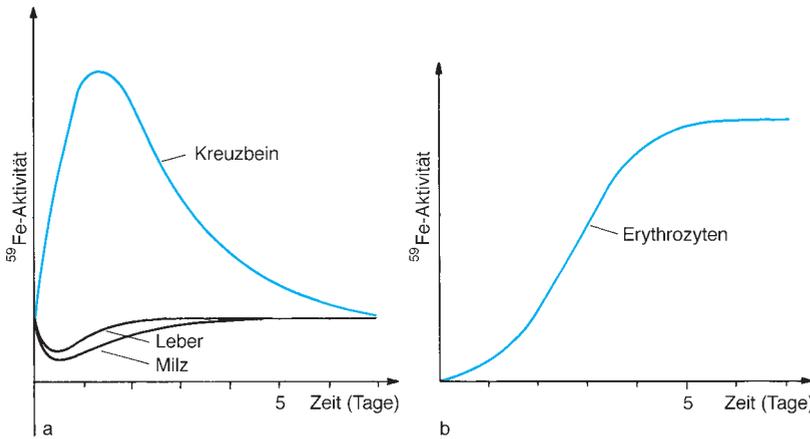
Ebenfalls mit einem Linearbeschleuniger lassen sich auch geladene Teilchen (Ionen) mit höherer Ruhemasse als der des Elektrons beschleunigen. Allerdings sind dabei die technischen Anforderungen an die Beschleuniger aufgrund der Teilchenmassen erheblich größer. Für einen Einsatz in der Strahlentherapie werden oft Protonen, aber auch schwerere Ionen wie die von Kohlenstoff oder Sauerstoff genutzt. Der Grund für die strahlentherapeutische Bedeutung beschleunigter Ionen lässt sich aus einem Vergleich der Abbildungen 21.8 und 21.9 ableiten. Schwere Ionen wie im Beispiel etwa  $\alpha$ -Teilchen verlieren ihre Energie und Intensität durch Wechselwirkung mit der Materie, die sie durchlaufen, signifikant erst am Ende ihres Weges (Reichweite), wobei die Energieabgabe in einem begrenzten Wegstück am Ende maximal wird (Bragg-Maximum). Beschleunigte Elektronen oder  $\beta$ -Teilchen hingegen verlieren, angenähert analog zu Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlen (Abb. 21.24) vom Beginn ihres Durchgangs durch Materie gleichmäßig ihre Intensität, sodass man für sie statt einer Reichweite eine Halbwertsschichtdicke definieren muss. Bei Tumoren kommt daher nur ein, je nach Abstand des Tumors

von der Körperoberfläche, mehr oder weniger großer Teil der Strahlenintensität des Anfangs zur Wirkung.

Bei schweren Ionen lässt sich die Lage des Bragg-Maximums der Energieabgabe bei gegebenem Gewebe durch die Anfangsenergie des Teilchens verschieben; daher besteht grundsätzlich die Möglichkeit, die maximale Energiedeponierung räumlich in den Tumor zu legen, bei entsprechender Beschleunigung des Teilchens. Gerade hier liegt aber die technische Herausforderung: Selbst bei relativ hohen Energien besitzen geladene Ionen wie z. B.  $\alpha$ -Teilchen nur eine sehr geringe Reichweite im Gewebe (siehe blau unterlegten Text S. 372). Für den strahlentherapeutischen Einsatz sind daher extrem hohe Energien notwendig. Die dafür erforderlichen Beschleuniger lassen sich deshalb nur an wenigen Zentren etablieren.

In der medizinischen und biologischen Forschung werden künstlich hergestellte Radionuklide (*Tracer*) auch häufig zur *Markierung* von biologisch wichtigen Substanzen verwendet. Hierzu dienen vor allem die Radionuklide  $^{14}\text{C}$  und  $^3\text{H}$ , aber auch  $^{35}\text{S}$  und  $^{32}\text{P}$ , die bei der chemischen oder biologischen Synthese in Form von chemisch einfachen Verbindungen zugesetzt werden. Durch die von den Radionukliden ausgehenden Strahlen gelingt es, die Verteilung von Substanzen in Organismen und ihre Um- und Abbauarten zu bestimmen. Als ein Beispiel für derartige Anwendungen zeigt Abb. 21.15 die mit  $^3\text{H}$  markierten Chromosomen von Mäusezellen. Die Markierung wurde erreicht durch Injektion von Thymidin, einer Ausgangssubstanz für die DNS-Synthese, in das  $^3\text{H}$  eingebaut war. Die Darstellung in Abb. 21.15 wurde durch Autoradiographie gewonnen, indem die  $\beta^-$ -Strahlen des Tritiums durch Schwärzung einer dünnen fotografischen Schicht sichtbar gemacht wurden.

Auch zur routinemäßigen medizinischen Diagnostik werden Radionuklide verwendet. Durch Injektion von markierten Substanzen in den Körper und Messung der emittierten Gammastrahlen außerhalb des Körpers können Funktionsabläufe und eventuelle krankhafte Veränderungen dargestellt werden. Als



**Abb. 21.16**  $^{59}\text{Fe}$ -Aktivität in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  nach der Injektion. Gemessen an verschiedenen Organen (a) und den Erythrozyten (b).

Beispiel hierfür zeigt Abb. 21.16 die vorübergehende Speicherung von injiziertem  $^{59}\text{Fe}$  im Knochenmark und das zeitlich verzögerte Auftauchen der  $^{59}\text{Fe}$ -Aktivität im peripheren Blut. Da sich ein großer Teil des im Organismus vorhandenen Eisens im Hämoglobin der Erythrozyten befindet, geben derartige Messungen einen Einblick in den normalen oder gestörten Ablauf der Erythropoese.

In zunehmendem Maße gelingt es, radioaktiv markierte Substanzen zu entwickeln, die sich mehr oder minder selektiv in bestimmten Organen ablagern. Durch abbildende Systeme (Szintillationszähler mit Ortungselektronik) kann in einem sog. *Szintigramm* aus der ausgesandten Gammastrahlung die Aktivitätsverteilung und damit das speichernde Organ selbst sichtbar gemacht werden. Abb. 21.17 zeigt als Beispiel ein Szintigramm einer normalen linken Niere und einer rechten Niere mit Speicherdefekt am oberen Pol. Der Speicherdefekt ist auf den Ausfall von funktionstüchtigem Nierenparenchym zurückzuführen. Solche Szintigramme können von den verschiedensten Organen und ihren Teilbereichen angefertigt werden; sie haben in den letzten Jahren mehr und mehr Bedeutung in der medizinischen Diagnostik erlangt.

Sehr große Bedeutung in der gesamten praktischen Medizin haben *radioimmunologische Verfahren* erlangt, die zur Bestimmung der Konzentration biologisch wichtiger Substanzen in Körperflüssigkeiten, insbesondere im Blutplasma, dienen. Hierbei werden die radioaktiv markierten Stoffe nicht dem Patienten verabreicht, sondern erst der entnommenen Plasmaprobe zugesetzt. Wie aus der Immunologie bekannt ist, binden die Antikörper nur diejenigen Antigene, gegen die sie gerichtet sind. Werden also im Tierorganismus Antikörper gegen die zu bestimmenden Substanzen gezüchtet, so



**Abb. 21.17** Szintigramm einer normalen linken Niere und einer rechten Niere mit Speicherdefekt am oberen Pol (Injektion von 4 mCi  $^{99\text{m}}\text{Tc}$ -DTPA).

können diese wegen der hohen Spezifität noch in sehr geringen Konzentrationen in einer komplexen Lösung, wie dem Plasma, bestimmt werden. Die radioaktive Markierung des Antikörpers oder des Antigens wird meist mit  $^{125}\text{I}$  oder  $^3\text{H}$  vorgenommen. Im einfachsten Fall hat man für die Bestimmung einer Substanz (Antigen A) den spezifischen Antikörper AK und markiertes Antigen  $\text{A}^+$  zur Verfügung. Bringt man in eine gemeinsame Lösung eine definierte Menge  $[\text{AK}]$  des Antikörpers, eine definierte Menge des markierten Antigens  $[\text{A}^+]$  und ein bestimmtes Volumen, in dem die Konzentration  $[\text{A}]$  von A zu bestimmen ist, so gelten für A und  $\text{A}^+$  die gleichen Reaktionsgleichungen, die bei Überschuss der Antigene folgende Form annehmen:



Da das Bindungsvermögen des spezifischen Antikörpers für A und  $\text{A}^+$  gleich ist, gilt für die Konzentrationen:

$$\frac{[\text{A}]}{[\text{A} \cdot \text{AK}]} = \frac{[\text{A}^+]}{[\text{A}^+ \cdot \text{AK}]}.$$

Je mehr von A in der gemeinsamen Lösung vorhanden ist, desto geringer wird auch der gebundene Anteil von  $\text{A}^+$  sein. Den genauen Zusammenhang verschafft man sich durch eine Eichreihe, bei der man in die gemeinsamen Lösungen bekannte Konzentrationen von A gibt.  $\text{A}^+$  oder  $\text{A}^+ \cdot \text{AK}$  können über ihre radioaktive Markierung gemessen werden, nachdem durch geeignete Methoden  $\text{A}^+$  und  $\text{A}^+ \cdot \text{AK}$  voneinander getrennt wurden. Drückt man  $\text{A}^+ \cdot \text{AK}$  in der gemessenen relativen Einheit der Impulsraten aus, so ergibt sich gemäß Abb. 21.18 eine Standardkurve. Aus dieser Kurve kann bei unbekanntem Proben, nach Bestimmung von  $\text{A}^+$ , die Konzentration von A abgelesen werden.

Durch radioimmunologische Verfahren können in vielen Fällen Hormonkonzentrationen bis zu Konzentrationen in der Größenordnung  $10^{-12}$  g/ml bestimmt werden. Sie sind damit normalen chemischen Verfahren in ihrer Empfindlichkeit weit überlegen und zudem relativ einfach durchzuführen.

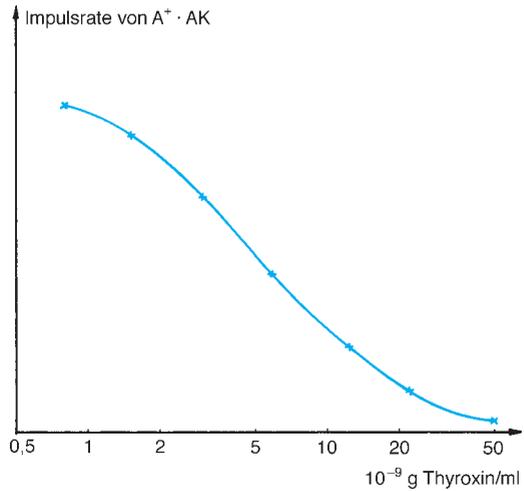


Abb. 21.18 Standardkurve zur radioimmunologischen Bestimmung des Schilddrüsenhormons Thyroxin im Plasma (x: Messpunkte).

### 21.2.9 Kernspaltung und Kernfusion

In Kap. 21.1 wurde bereits erwähnt, dass bei der Bildung von Atomkernen aus Nukleonen Massendefekte auftreten. Diese Massendefekte können mit großer Genauigkeit experimentell bestimmt werden. Aus ihnen ergibt sich die bei der Bindung freiwerdende Bindungsenergie  $E_B$  der Kerne. Auf die Gesamtzahl der Nukleonen im Kern bezogen erhält man dann die Bindungsenergie pro Nukleon für den betreffenden Kern. Abb. 21.19 zeigt

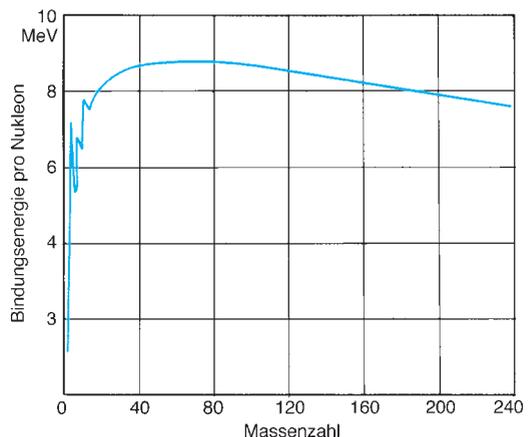


Abb. 21.19 Spezifische Bindungsenergie  $E_B/M$  in Abhängigkeit von der Massenzahl  $M$  der Kerne.

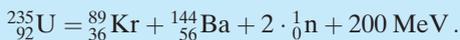
die so bestimmte *spezifische Bindungsenergie*  $E_B/M$  in Abhängigkeit von der Massenzahl  $M$  der Kerne. Hier ist, wie üblich, die Bindungsenergie positiv angenommen, also als die Energie, die bei Bildung der Kerne frei wird. Für den Kern selbst ist die Energie negativ, d. h. eine stärkere Bindung erniedrigt die Energie des Systems. Bei der Uranspaltung beträgt der relative Massendefekt etwa 0,1%.

Auffällig in Abb. 21.19 sind der steile Anstieg und die ausgeprägten Schwankungen bei leichten Kernen sowie das sehr flache Maximum bei etwa der Massenzahl 70. Aus dieser Abbildung ergeben sich zwei interessante Schlüsse:

1. Die Bindungsenergie pro Nukleon  $E_B/M$ , die zum Beispiel beim Zusammenbau eines Urankerns der Masse 235 aus seinen Nukleonen frei wird, ist kleiner als diejenige, die man erhält, wenn aus der gleichen Anzahl von Nukleonen zwei Kerne mittlerer Massenzahl gebildet werden. Wenn es also gelingt, einen  $^{235}\text{U}$ -Kern in zwei etwa gleich große Teile zu spalten, so wird dabei Energie frei. Die bei dieser *Kernspaltung* pro Nukleon freiwerdende Energie ist gleich der Differenz der spezifischen Bindungsenergien des Urans einerseits und seiner Spaltprodukte andererseits.

2. Wenn zwei Kerne des schweren Wasserstoffs (Deuterium)  $^2\text{D}$ , die zusammen zwei Protonen und zwei Neutronen enthalten, zu einem  $^4\text{He}$ -Kern verschmelzen, wird, wie wir aus dem steilen Anstieg der Kurve sehen, bei dieser *Kernfusion* ebenfalls Energie frei. Sie ist, bezogen auf die Masseneinheit etwa 10mal größer als bei der Kernspaltung.

Man kann also durch Kernprozesse Energie gewinnen, wenn man entweder sehr schwere Kerne in Bruchstücke spaltet, oder aber sehr leichte Kerne zu schwereren Kernen verschmilzt. Die Spaltung wurde erstmals am  $^{235}\text{U}$ -Kern nachgewiesen. Trifft ein Neutron auf den Kern, so gerät er in so heftige innere Schwingungen, dass er in zwei annähernd gleich große Teile zerbricht. Zum Beispiel:

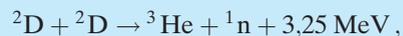


Beim Spaltungsprozess ist die Summe der Protonen in den Folgekernen gleich derjenigen im

Ausgangskern, aber die Neutronenzahl ist geringer, denn pro Spaltung werden im allgemeinen zwei oder drei Neutronen frei. Diese besitzen nach ihrer Freisetzung hohe kinetische Energien von mehreren MeV. Nach Abbremsen sind sie in der Lage, weitere Kerne zur Spaltung anzuregen; dadurch kann eine *Kettenreaktion* ausgelöst werden. Da in 1 g natürlichen Urans ca.  $2 \cdot 10^{19}$  spaltbare Atome des Isotops  $^{235}_{92}\text{U}$  enthalten sind, wird bei vollständiger Spaltung eine Energie von  $6 \cdot 10^8$  Joule/g =  $1,7 \cdot 10^2$  kWh/g freigesetzt.

Eine Nutzung der Kernspaltung ist durch den Bau von *Kernreaktoren* möglich geworden. Das Uran-Brennmaterial befindet sich innerhalb der von Metall umschlossenen Brennelemente in einem *Moderator*, wozu heute meistens Wasser verwendet wird. Im Moderator werden die freigesetzten Neutronen soweit verlangsamt, dass sie weitere Kernspaltungen mit größter Wahrscheinlichkeit auslösen können. Zur Steuerung des Spaltungsprozesses befinden sich Cadmiumstäbe zwischen den Brennelementen. Cadmium hat einen hohen Absorptionskoeffizienten für Neutronen. Durch Ein- und Ausfahren der Cadmiumstäbe zwischen den Brennelementen können mehr oder weniger Neutronen im Cadmium abgefangen werden, wodurch die Häufigkeit der Spaltungen und damit die freigesetzte Energie kontrollierbar ist. Diese Energie wird vom Moderator, also vom Wasser, als Wärme aufgenommen (Primärkreis). Über einen Wärmeaustauscher gelangt die Wärme in einen zweiten Wasserkreislauf (Sekundärkreis); dadurch bleibt das etwa durch Undichtigkeit mit radioaktivem Material in Kontakt gekommene Wasser des Primärkreises getrennt vom Sekundärkreis. Der beim Sieden des im Sekundärkreis befindlichen Wassers entstehende Dampf vermag dann Turbinen anzutreiben und elektrischen Strom zu erzeugen. Die größten heute in Betrieb befindlichen Kernkraftwerke haben eine elektrische Leistung von 1200 Megawatt (MW). Wegen der hohen Radioaktivität der Folgeprodukte (sie ist wesentlich höher als die der Ausgangsprodukte) besteht ein wesentliches Problem der Nutzung der Kernenergie in der Entsorgung der verbrauchten Brennelemente.

Die zweite Art der Energiegewinnung aus der Bindungsenergie von Atomkernen, die *Kernfusion*, ist z. B. durch die beiden folgenden Verschmelzungen möglich:



Die zur Bindung der Nukleonen notwendigen Kernkräfte haben nur eine äußerst kurze

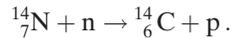
Reichweite (Tabelle 3.1). Bei größeren Abständen überwiegen die Coulombschen Abstößungskräfte der positiven Ladungen der Atomkerne. Die Fusion zweier Kerne ist daher nur möglich, wenn sie mit großer kinetischer Energie aufeinander zufliegen, so dass sich die Kerne (gegen die Coulomb-Kraft) genügend annähern können und die anziehenden Kernkräfte wirksam werden. Hierzu sind Geschwindigkeiten der Teilchen erforderlich, die – wenn die Bewegung thermisch ist – Temperaturen von etwa  $10^8$  Kelvin entsprechen. Derartige Temperaturen zerstören aber jedes Gefäßmaterial. Hier liegen die technologischen Schwierigkeiten bei den Versuchen, kontrollierte Kernfusionen in einem Reaktor ablaufen zu lassen. Man versucht – mit bislang unzureichendem Erfolg – die Ausgangskerne in einem Gas hochionisierten Materials (*Plasma*) zu isolieren und dieses Plasma durch starke Magnetfelder von den Gefäßwänden des Reaktors fernzuhalten. Die kontrollierte Kernfusion hätte gegenüber der Kernspaltung den großen Vorteil, dass Deuterium als Ausgangsmaterial für die Fusion in beliebiger Menge zur Verfügung steht, im Gegensatz zu Uran als Ausgangsmaterial für die Spaltung (Deuterium ist im natürlichen Wasser zu 0,015% in Form von  $D_2O$  enthalten).

### 21.2.10 Künstliche Kernumwandlung, Aktivierung

Die einfachste künstliche Kernumwandlung ist ein  $(n, \gamma)$ -Prozess. Bei ihm nimmt ein Atomkern ein Neutron auf. Damit wird die Massenzahl um 1 erhöht, die Protonenzahl bleibt gleich. Es entsteht also ein neues Isotop des Ausgangselements. Der Unterschied in der Bindungsenergie der Kerne vor und nach der Reaktion wird als  $\gamma$ -Quant nach außen abgegeben. Ein Beispiel für einen solchen Prozess ist die Erzeugung des künstlichen Kobaltisotops  $^{60}Co$  aus dem natürlichen  $^{59}Co$ :



Damit Neutronen einen  $(n, \gamma)$ -Prozess auslösen, müssen sie eine bestimmte Energie haben, um in den Kern einzudringen und dort festgehalten zu werden. Ist ihre Energie jedoch wesentlich größer, so schlagen sie aus dem Kern ein Proton heraus. Diese Kernreaktion wird als  $(n, p)$ -Reaktion bezeichnet. Hierbei ist der neu entstandene Kern ein Isotop des nächstniederen Elements. Ein Beispiel hierfür ist:



Dieser Prozess wird z. B. in der oberen Schicht der Erdatmosphäre durch die kosmische Höhenstrahlung ausgelöst und führt zu einer ständigen Bildung von  $^{14}C$  aus  $^{14}N$ . Damit ist  $^{14}C$  als natürliches Radionuklid dauernd vorhanden, obwohl seine Halbwertszeit „nur“ etwa 5500 Jahre beträgt. Gebunden in  $CO_2$  liefert es die Grundlage der  $^{14}C$  Altersbestimmung z. B. von Holz.

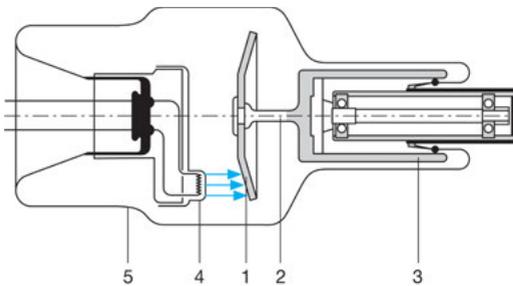
Die beiden angegebenen Reaktionen nennt man auch *neutronenaktiviert*. Sie führen zu radioaktiven Kernen. Da zu deren Erzeugung Neutronen benötigt werden, werden die Reaktionen meist im Kernreaktor (Kap. 21.2.9) durchgeführt. Denn dieser ist wegen der Spaltungsreaktion auch eine starke Neutronenquelle. Von medizinisch großer Bedeutung ist auch die Aktivierung von stabilem Molybdän  $^{98}Mo$  zu instabilem  $^{99}Mo$  durch eine  $(n, \gamma)$ -Reaktion. Das aktive Nuklid zerfällt als  $\beta$ -Strahler unter anderem durch Bildung eines metastabilen Technetium-Isotops, das zur Schilddrüsen-Szintigraphie anstelle des aktiven Iodids eingesetzt wird (vgl. Kap. 21.2.4 und 21.2.7).

Kernumwandlungen erfolgen nicht nur durch Beschuss von Atomen mit Neutronen. Jedes Teilchen oder  $\gamma$ -Quant, das genügend energiereich ist, um in den Kern einzudringen, kann eine Kernumwandlung hervorrufen. Die dazu notwendigen hohen Energien kann man für geladene Teilchen in Teilchenbeschleunigern (Kap. 21.3.2) erreichen, bei denen die Teilchen durch elektrische Spannung auf sehr hohe Geschwindigkeiten beschleunigt werden.

## 21.3 Röntgenstrahlen

### 21.3.1 Bremsstrahlung, charakteristische Strahlung

Röntgenstrahlen sind elektromagnetische Wellen mit hoher Energie. Sie werden in Hochvakuum-Elektronenröhren (*Röntgenröhren*) erzeugt, deren prinzipiellen Aufbau als Diode, bestehend aus Kathode und Anode, wir bereits in Kap. 15.2.1 kennengelernt haben (siehe Abb. 15.3). Allerdings weist die technische Ausführung einer Röntgenröhre, wie sie in Abb. 21.20 skizziert ist, deutliche Unterschiede gegenüber der normalen Diode auf. Diese sind im wesentlichen durch die erheblich höheren Spannungen bedingt, mit denen Röntgenröhren betrieben werden. Die Anode besteht aus massivem Schwermetall, bei den in der Medizin verwendeten Röhren im allgemeinen aus Wolfram. Zwischen Kathode und Anode liegt, je nach Verwendungszweck der Röntgenstrahlung, eine elektrische Spannung von 40 kV bis 300 kV. Aus dem Glühdraht der Kathode treten beim Aufheizen Elektronen aus, die infolge der Spannung in Richtung auf die Anode beschleunigt werden. Dort treffen sie mit hoher Geschwindigkeit und entsprechend großer



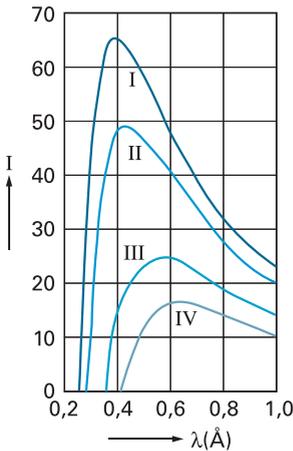
- 1 Anodenteiler aus Wolfram
- 2 Molybdänwelle
- 3 kugelgelagerter Rotor
- 4 Kathode mit Glühwendel
- 5 evakuiertes Glaskolben

**Abb. 21.20** Technische Ausführung einer Röntgenröhre (Maßstab etwa 1:4). Um eine Überhitzung der Anode am Auftreffpunkt der Elektronen (Brennfleck) zu verhindern, ist die Anode als Drehteller ausgebildet. Durch die Drehung der Anode treffen die Elektronen (blau) zu verschiedenen Zeiten auf verschiedene Punkte dieses Tellers auf.

Energie auf. Bei 100 kV Beschleunigungsspannung beträgt die Geschwindigkeit etwa 50% der Lichtgeschwindigkeit. Die Bewegungsenergie der Elektronen geht beim Aufprall auf die Anode verloren und wandelt sich vorwiegend in Wärme um. Die Anode wird am Auftreffpunkt der Elektronen, am sogenannten Brennfleck, so stark aufgeheizt, dass bei Röntgenröhren hoher Leistung besondere Kühlvorrichtungen erforderlich sind, um ein Schmelzen zu verhindern. Nur ein kleiner Anteil der von den Elektronen mitgebrachten Energie, ca. 1 %, wird in elektromagnetische Strahlung hoher Energie, in *Röntgenstrahlung*, umgewandelt. Durch zwei verschiedene Prozesse der Wechselwirkung der beschleunigten Elektronen mit dem Anodenmaterial entstehen Strahlen unterschiedlicher spektraler Verteilung, die *Röntgenbremsstrahlung* und die *charakteristische Röntgenstrahlung*.

1. *Röntgenbremsstrahlung* entsteht, indem die ankommenden Elektronen über Coulomb-Abstoßung durch die Elektronen in dem Metall der Anode abgebremst werden, wobei viele, im Detail unterschiedliche Bremsvorgänge möglich sind. Dementsprechend sind die Energien der bei der Abbremsung ausgesandten Röntgen-Quanten sehr verschieden. Insgesamt entsteht daher ein breites Spektrum von Röntgenstrahlen mit unterschiedlichsten Energien.

Abb. 21.21 zeigt die Intensität der Bremsstrahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge bei verschiedenen Anodenspannungen. Das Spektrum ist kontinuierlich. Es ist unabhängig vom Anodenmaterial. Die Gesamtintensität der Bremsstrahlung nimmt mit wachsender Anodenspannung von IV bis I zu. Zu jeder Anodenspannung gehört eine bestimmte kürzeste Wellenlänge, die *Grenzwellenlänge*  $\lambda_G$ , die mit wachsender Anodenspannung immer kleiner wird. Die Existenz der Grenzwellenlänge ist physikalisch einfach zu verstehen: Die höchstmögliche Quantenenergie  $hc/\lambda_G$  entsteht, wenn das ankommende



**Abb. 21.21** Intensität der Bremsstrahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge bei verschiedenen Anodenspannungen ( $U_I > U_{II} > U_{III} > U_{IV}$ ).

Elektron in einem einzigen Wechselwirkungsvorgang seine ganze Bewegungsenergie bei der Umwandlung in ein Photon verliert. Das bedeutet für den Zusammenhang zwischen  $\lambda_G$  und der Anodenspannung  $U$ :

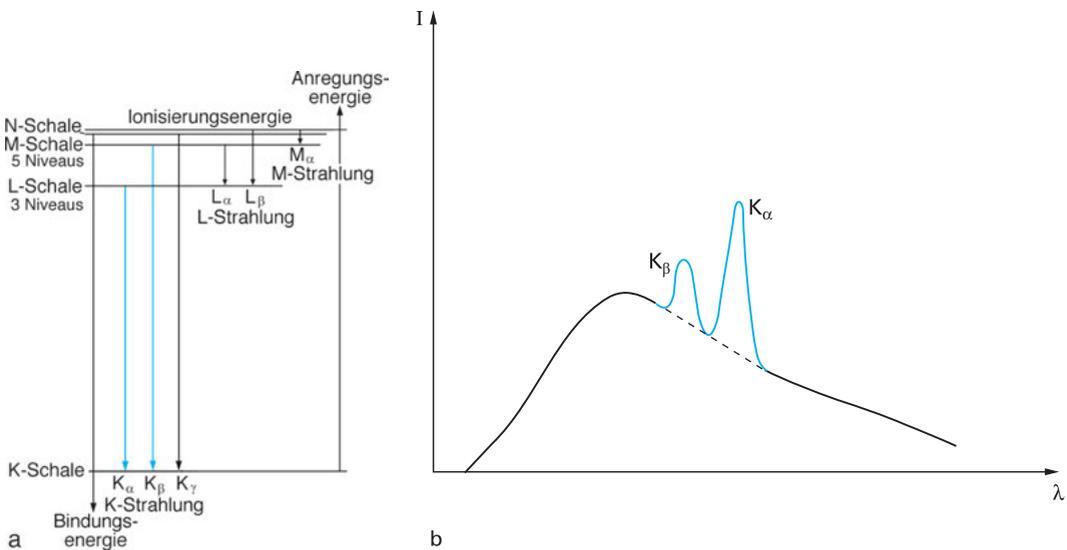
$$h\nu = \frac{hc}{\lambda_G} = E_{\text{kin}} = eU, \quad (21-12)$$

$$\lambda_G = \frac{hc}{eU}.$$

Demnach ist die Grenzwellenlänge der Anodenspannung umgekehrt proportional. Die Röntgenstrahlen, die in der Medizin zu diagnostischen und therapeutischen Zwecken verwendet werden, stammen aus dem Bremsspektrum.

2. Das *charakteristische Röntgenspektrum* besteht im Gegensatz zum Bremsspektrum aus einzelnen Spektrallinien, deren Lage charakteristisch für das Material der Anode ist. Hierbei treten die von der Kathode kommenden Elektronen in Wechselwirkung mit einzelnen Elektronen der inneren Schalen eines Atoms des Anodenmaterials und schlagen dort ein Elektron, beispielsweise der *K-Schale* (Hauptquantenzahl  $n = 1$ ), heraus.

Das Energie-Schema dazu ist in Abb. 21.22a dargestellt. Durch die Ionisation eines Elektrons aus der *K-Schale* wird dort ein Platz frei. Als Folge springt ein Elektron aus einer der äußeren Schalen auf den freien Platz, um die Lücke aufzufüllen und somit die Energie des Atoms zu verringern. Dies kann z. B. ein Elektron aus der *L-Schale* sein (Hauptquantenzahl  $n = 2$ ). Den freien Platz auf der *L-Schale* besetzt dann wiederum beispielsweise ein Elektron aus der *M-Schale*, usw. Nach den



**Abb. 21.22** (a) Energieniveauschema zur Erzeugung charakteristischer Röntgenstrahlung und (b) Brems-Spektrum (schwarz) überlagert mit charakteristischen Linien  $K_\alpha$  und  $K_\beta$ .

**Tab. 21.2** Quantenenergien und Wellenlängen der  $K_{\alpha}$ -Linie verschiedener Anodenmaterialien

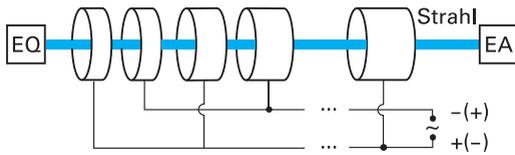
Element	Ordnungszahl $Z$	Quantenenergie in keV	Wellenlänge in nm
Al	13	1,55	83
Cu	29	8,9	15,4
Ag	47	25	5,6
W	74	69	2,1
Pb	82	88	1,65

Bohr'schen Postulaten (Kap. 17.4) folgt, dass die Elektronen beim Sprung auf eine weiter innen gelegene Schale Energie  $E$  in Form von elektromagnetischer Strahlung abgeben. Diese Strahlung besitzt die Quantenenergie  $h\nu = E_i - E_j$ . Da es sich bei den Anoden von Röntgenröhren um Schwermetalle handelt, sind die Ladungen der Kerne groß. Allgemein gilt, dass bei schweren Elementen die Energieabstände zwischen den inneren Schalen größer sind als bei leichten Atomen und daher die Strahlung *härter*, d. h. höherenergetisch ist. Nachdem jede Atomart für sie charakteristische, diskrete Energieniveaus besitzt, können nur einzelne Frequenzen (einzelne Linien) im Spektrum der charakteristischen Röntgenstrahlung enthalten sein. In Tabelle 21.2 sind die Quantenenergien und Wellenlängen solcher Linien für verschiedene Anodenmaterialien zusammengestellt. Die Häufigkeit, mit der die einzelnen Übergänge auftreten, ist unterschiedlich und damit die Intensität der Emissionen. Beim Herausschlagen eines Elektrons aus der  $K$ -Schale sind beispielsweise die Übergänge von der  $L$ - zur  $K$ -Schale sehr viel häufiger als die von der  $M$ - zur  $K$ -Schale. Alle charakteristischen Röntgenstrahlen, die durch Übergang zur gleichen Schale entstehen, werden zu *Serien* zusammengefasst; für jedes Element gibt es demnach mehrere Serien charakteristischer Röntgenstrahlen, die  $K$ -,  $L$ - und  $M$ -Serie usw. genannt werden. (Die Buchstaben  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , ... bezeichnen dabei das Endniveau beim Elektronenübergang.) Die Spektrallinien der charakteristischen Serien der Elemente verschieben sich mit wachsender Ordnungszahl zu kürzeren Wellenlängen. Da sich chemische Bindungen nur in den äußeren Schalen der Atome abspielen, ist das charakteristische Spektrum praktisch unabhängig davon, ob

die Atome chemisch gebunden sind, oder nicht, und auch unabhängig davon, in welchem Aggregatzustand sie sich befinden. Steigert man die Beschleunigungsspannung, so nimmt die Intensität der charakteristischen Strahlung in ähnlicher Weise zu wie die Intensität der Bremsstrahlung. Die spektrale Lage des charakteristischen Spektrums jedoch bleibt unverändert.

### 21.3.2 Erzeugung ultraharter Röntgenstrahlung durch Teilchenbeschleuniger

Die Eindringtiefe der Röntgenstrahlung in Materie wächst mit zunehmender Photonenenergie (s. Kap. 21.3.3). Daher ist für die Strahlentherapie innerer Organe hochenergetische (also harte) Röntgenstrahlung erforderlich. Mit Röntgenröhren erreicht man Quantenenergien von 300 keV; die bei Umwandlung von Radionukliden entstehenden  $\gamma$ -Quanten haben Energien bis maximal 1,3 MeV. Solche Strahlung reicht oft nicht aus, ein günstiges Verhältnis zwischen niedriger Dosis (s. Kap. 21.4) an der Hautoberfläche und hoher Dosis am zu bestrahlenden Krankheitsherd im Körperinnern zu erreichen. Daher werden in der Medizin zunehmend extrem hohe Quantenenergien verwendet, sogenannte *ultraharte Röntgenstrahlen*, die durch Beschleuniger-Apparaturen erzeugt werden, in denen Elektronen oder Ionen auf eine kinetische Energie von bis zu etwa 50 MeV beschleunigt werden. Diese prallen dann (wie bei der Röntgenröhre) auf einen Metallblock (das *Target*) und lösen aus ihm hochenergetische elektromagnetische Strahlung aus. Elektronenbeschleuniger haben zudem den Vorteil, dass die beschleunigten Elektronen nicht nur



**Abb. 21.23** Schematischer Aufbau eines Linearbeschleunigers.

zur Erzeugung von Röntgenbremsstrahlung (Kap. 21.3.1), sondern darüber hinaus auch direkt zur Bestrahlung von biologischem Gewebe verwendet werden können.

Eigentlicher Zweck der Entwicklung der Teilchenbeschleuniger, in denen Elektronen-, Protonen-,  $\alpha$ -Teilchen- oder Ionenstrahlen mit Energien von normalerweise  $> 1$  MeV erzeugt werden, war und ist die Erforschung der Physik der Atomkerne und Elementarteilchen. Trotz des hohen Kostenaufwands erwies es sich aber als sinnvoll, derartige Geräte auch in der medizinischen Strahlentherapie, und zwar für Strahlung im Energiebereich zwischen 1 MeV und 42 MeV, einzusetzen. Das Prinzip der Teilchenbeschleuniger besteht darin, geladene Teilchen im Vakuum durch elektrische Felder auf große Geschwindigkeiten zu beschleunigen.

Als Beispiel diskutieren wir den *Linearbeschleuniger* (Abb. 21.23). Die aus einer Quelle EQ (bei Elektronen z. B. eine glühende Wolframelektrode) kommenden geladenen Teilchen durchfliegen in dem evakuierten Beschleunigungsrohr zylindrische Metallelektroden, um dann auf die Anode EA zu prallen. Diese Elektroden sind so mit den Polen eines Hochfrequenz-Hochspannungsgenerators verbunden, dass sich stets eine positiv geladene Elektrode zwischen zwei negativ geladenen befindet. Die Teilchen werden dadurch im Zwischenraum aufeinanderfolgender Elektroden beschleunigt. Dazu ist es notwendig, dass jeweils im richtigen Augenblick, also beim Durchlaufen der Teilchen durch eine Elektrode die Hochfrequenzspannung ihr Vorzeichen ändert und so die Teilchen immer auf ein beschleunigendes Spannungsgefälle zwischen den Elektroden treffen. Die Geschwindigkeit der Teilchen nimmt daher in den Zwischenräumen zwischen den Elektroden schrittweise zu. Bei konstanter Frequenz der Hochspan-

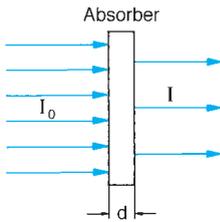
nung muss die Länge der Elektrodenzylinder mit wachsender Geschwindigkeit der Teilchen zunehmen, damit die Teilchen mit der beschleunigenden hochfrequenten Wechselspannung *im Takt* bleiben. Die für Linearbeschleuniger üblichen Frequenzen liegen in der Größenordnung 10 MHz bis 100 MHz, wie sie im Kurzwellenbereich beim Rundfunk verwendet werden. Beträgt die Hochfrequenzspannung 100 kV, so sind 100 Beschleunigungstakte zwischen ebenso vielen Elektroden notwendig, um ein einfach geladenes Teilchen auf eine Energie von 10 MeV zu bringen.

Die relativistische Massenzunahme beschleunigter Teilchen (Kap. 2.1) hängt von der Teilchengeschwindigkeit ab und kann beträchtlich sein; sie ist bei gleicher kinetischer Energie bei leichten Teilchen wie dem Elektron größer. Man hat (z. B. bei Protonen) schon Massen erzeugt, die das  $10^6$ -fache der Ruhemasse betragen. Solche Teilchen haben die Lichtgeschwindigkeit als relativistische Grenzgeschwindigkeit fast erreicht, so dass die Energiezunahme im elektrischen Feld nurmehr eine Massenzunahme bewirkt. Wegen der hohen Bewegungsenergien lösen solche Teilchen beim Aufprall auf Materie Kernreaktionen aus, wobei künstliche Radionuklide erzeugt, aber auch in großer Zahl neue, energiereiche Teilchen freigesetzt werden. Mit diesen Teilchen beschäftigt sich die Elementarteilchenphysik, um Aufschlüsse über die grundlegende Struktur der Materie zu gewinnen.

Um sehr hohe Beschleunigungsenergien bis in den Bereich von 50 GeV zu erreichen, wäre ein Linearbeschleuniger unrealisierbar lang. Daher zwingt man die bewegten, geladenen Teilchen in starken Magnetfeldern (Lorentz-Kraft, vgl. Kap. 14.8.3) auf Kreisbahnen, die sehr oft durchlaufen werden. Dazu müssen wegen der Zunahme der Geschwindigkeit die Taktfrequenz und wegen der relativistischen Massenzunahme auch das Magnetfeld während des Beschleunigungsvorganges angepasst, synchronisiert werden. Man nennt diese Beschleuniger *Synchrotron*. Bekannte Beispiele solcher Synchrotrons sind das Deutsche Elektron Synchrotron (DESY) in Hamburg oder das europäische Synchrotron CERN bei Genf.

### 21.3.3 Wechselwirkung von Röntgen- und Gammastrahlung mit Materie

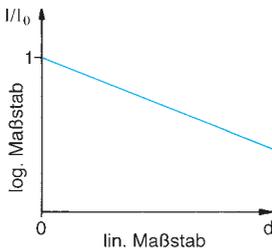
Röntgen- und Gammastrahlen sind hochenergetische elektromagnetische Wellen. Die unterschiedlichen Namen rühren von der Entstehung der beiden Strahlenarten her.



**Abb. 21.24** Zur Definition des Schwächungsgesetzes beim Durchgang von Röntgen- und Gammastrahlen durch Materie.

Röntgenstrahlen (im englischen Sprachgebrauch X-rays genannt) entstehen durch elektronische Übergänge von Hüllenelektronen. Gammastrahlung wird bei Umwandlungen im Atomkern erzeugt (Kap. 21.2.1). Die Quantenenergie beider Strahlenarten reicht von einigen keV bis zu mehreren MeV. Da sie sich bei gleicher Quantenenergie physikalisch nicht unterscheiden, läuft ihre Wechselwirkung mit Materie nach den gleichen Gesetzmäßigkeiten ab. Die Stärke dieser Wechselwirkung hängt im wesentlichen von der Quantenenergie der Strahlung und von den in der bestrahlten Probe enthaltenen chemischen Elementen (Ordnungszahl) ab, weniger vom Aggregatzustand und den chemischen Bindungen in der Probe.

Trifft ein paralleles Bündel von monochromatischen Röntgen- oder Gammastrahlen entsprechend Abb. 21.24 auf einen Absorber, so wird ein Teil der Quanten absorbiert, ein anderer Teil gestreut und der Rest passiert den Absorber. Formal lässt sich dieser Absorptions- oder Schwächungsvorgang ebenso beschreiben, wie



**Abb. 21.25** Bestimmung des Schwächungskoeffizienten  $\mu$  aus der Steigung der Geraden  $\ln(I/I_0) = -\mu d$ . (Gl. (21-13a)).

die Absorption von Licht (Kap. 18.3.2):

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu d}. \quad (21-13a)$$

Dabei bedeuten  $I_0$  die Intensität der einfallenden Strahlung,  $I$  die Intensität hinter der bestrahlten Schicht,  $\mu$  die *Absorptionskonstante* (Schwächungskoeffizient), die in der Optik mit  $K$  bezeichnet wird, und  $d$  die Schichtdicke des Absorbers.

Das Reziproke der Absorptionskonstante,  $1/\mu$ , hat die Dimension einer Länge; wenn  $d = 1/\mu$ , so ist die Intensität gerade von  $I_0$  auf  $1/e \cong 37\%$  dieses Wertes abgesunken. Man nennt daher  $1/\mu$  die *mittlere Reichweite* oder *mittlere Eindringtiefe*. Misst man die Intensität  $I$  bei Proben verschiedener Dicke  $d$  und trägt wie in Abb. 21.25 die Größe  $I/I_0$  (in logarithmischem Maßstab) gegen  $d$  (in linearem Maßstab) auf, so ergibt sich eine Gerade, deren Steigung dem Betrag nach gleich der Absorptionskonstante  $\mu$  ist. Diese ist abhängig von der Quantenenergie der Strahlung und von der Ordnungszahl und der Dichte  $\rho$  des Absorbermaterials, und zwar wird sie kleiner mit zunehmender Strahlungsenergie und mit abnehmender Ordnungszahl und Dichte. Um bei der Beschreibung der Absorption von der Dichte  $\rho$  des Absorbers unabhängig zu sein, benutzt man häufig den *Massenabsorptionskoeffizienten*  $k = \mu/\rho$ . Dann tritt in Gl. (21-13a) an die Stelle von  $d$  die *Massenbelegung* (oder *Flächendichte*)  $b = d\rho$ :

$$I = I_0 \cdot e^{-kb}. \quad (21-13b)$$

Die Größen  $\mu$  und  $k$  hängen charakteristisch von der Wellenlänge der Strahlung ab. Dadurch ist es z. B. möglich, aus dem kontinuierlichen Spektrum der Bremsstrahlung (Kap. 21.3.1) niederenergetische Anteile abzuschneiden; denn bei Bestrahlen eines dünnen Absorbers (z. B. Cu-Film) werden die langwelligen Strahlen wesentlich stärker absorbiert als die kurzwelligen. Derartige Absorber, in der Röntgentechnik als *Filter* bezeichnet, benutzt man in Verbindung mit Röntgenröhren, um den langwelligen Anteil, der nur eine unnötige

Strahlenbelastung der Haut verursachen würde, wegzufiltern.

Die mit dem Exponentialgesetz der Gl. (21-13a, b) beschriebene Schwächung der Röntgen- und Gammastrahlen erfolgt durch vier verschiedene physikalische Effekte:

1. *Elastische Streuung.* Ihre Ursache besteht darin, dass die Elektronen der Atomhülle durch einfallende Röntgenstrahlen beliebiger Frequenz zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden und dadurch wie ein Hertz'scher Dipol nicht nur als Empfangsantenne wirken, sondern zugleich auch als Senderantenne elektromagnetische Strahlung aussenden. Einfallende und gestreute Röntgenstrahlung haben deshalb die gleiche Wellenlänge. Der Vorgang ist ähnlich der Streuung von Licht an Atomen, Molekülen oder kolloidalen Teilchen. Durch die Streuung erfolgt eine Ablenkung aus der ursprünglichen Ausbreitungsrichtung und bewirkt damit eine Schwächung der Intensität des Primärstrahls.

Die Wellenlänge hochenergetischer Röntgenstrahlung ist wesentlich kleiner als der Atomabstand in einem Festkörper. Besitzt dieser ein regelmäßiges Kristallgitter (Abb. 5.7), so treten Interferenzen der an den verschiedenen Atomen gestreuten Wellen auf, die dazu führen, dass die Streustrahlung den Kristall nur in bestimmten, durch Struktur und Orientierung des Gitters festgelegte Richtungen verlässt (*Röntgenbeugung am Kristallgitter*). Die Winkel dieser Streustrahlung gegenüber dem einfallenden Primärstrahl lassen sich berechnen, wie es für die Interferenz von sichtbarem Licht hinter dem optischen Gitter in Kap. 18.3 beschrieben wurde. Die Analyse von Kristallstrukturen mit Hilfe der Röntgenbeugung ist heute zu einer Routinemethode geworden (s. Abb. 18.39b); Voraussetzung ist allerdings die regelmäßige Gitterstruktur der Probe.

Gegenüber den drei im folgenden zu besprechenden physikalischen Effekten kommt der elastischen Streuung bei der Schwächung von Röntgenstrahlen in dem in der Medizin angewandten Energiebereich (0,1 MeV bis ca. 50 MeV) die geringste Bedeutung zu.

2. Beim *Photoeffekt* (Abb. 21.26) überträgt ein Röntgen- oder Gammaquant bei der Wechselwirkung mit einem Hüllenelektron seine gesamte Energie auf das Elektron, das aus dem Atomverband abgetrennt wird und noch zusätzlich kinetische Energie erhält. Die Quantenenergie der Strahlung ist im allgemei-

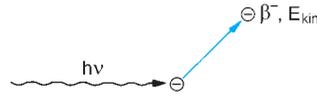


Abb. 21.26 Photoeffekt.

nen groß genug, um auch Elektronen aus inneren Schalen, also der *K*-, *L*-, *M*-Schale usw. herauszuschlagen. Der Energieerhaltungssatz fordert für diesen Absorptionsprozess

$$h\nu = A + E_{\text{kin}} \tag{21-14}$$

wobei  $h\nu$  die Energie des Quants,  $A$  die Ablösearbeit für das Elektron und  $E_{\text{kin}} = mv^2/2$  die kinetische Energie des Elektrons angeben. Das herausgeschlagene Elektron, wegen seiner hohen Energie  $\beta^-$  genannt, verliert später seine kinetische Energie durch Wechselwirkungen mit Hüllenelektronen anderer Atome (s. Kap. 21.3.1).

3. Beim *Compton-Effekt* (Abb. 21.27) überträgt das auf ein Hüllenelektron treffende Röntgen- oder Gammaquant nur einen Teil seiner Energie  $h\nu$ . Nach erfolgter Wechselwirkung verbleibt also ein Quant der Restenergie  $h\nu'$ ; die Energiedifferenz  $h(\nu - \nu')$  wird als Ablösearbeit  $A$  und als kinetische Energie des abgelösten Elektrons verbraucht:

$$h(\nu - \nu') = A + E_{\text{kin}} \tag{21-15}$$

Die Aufteilung der Energie des einfallenden Quants zwischen Elektron ( $\beta^-$ ) und verbleibendem Quant ist sehr unterschiedlich und hängt von der Flugrichtung der Wechselwirkungspartner ab. Damit bei diesem Streuvorgang neben der Gesamtenergie (Gl. (21-15)) auch der Gesamtimpuls erhalten bleibt (Impulserhaltungssatz, Kap. 4.2), muss das gestreute Photon seine Richtung gegenüber dem einfallenden Photon ändern. Somit wird es aus der Richtung des Primärstrahls abgelenkt und geht ihm verloren. Es kann an-

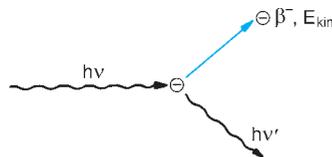


Abb. 21.27 Compton-Effekt.

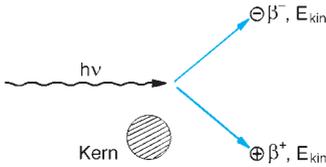


Abb. 21.28 Paarbildung.

schließlich weitere Compton-Prozesse durchlaufen, bis es schließlich in einem abschließenden Photoeffekt seine restliche Energie vollständig abgibt. Bei niedrigen Photonenenergien ist der Compton-Effekt selten, mit zunehmender Quantenenergie wird er jedoch gegenüber dem Photoeffekt immer häufiger.

4. Bei der *Paarbildung* (Abb. 21.28) verschwinden Röntgen- und Gammaquanten hoher Energie ( $h\nu > 1,02 \text{ MeV}$ ) dadurch, dass ihre Energie in die Ruhemassen eines Positrons und eines Elektrons und zusätzlich in kinetische Energie der beiden Teilchen umgewandelt wird. Es wird also aus Strahlungsenergie Materie und Antimaterie erzeugt, wie in Kap. 3.1 und 21.1 geschildert. Diese direkte Folge der Äquivalenz von Masse und Energie wird durch die Beziehung  $E = mc^2$  quantitativ erfasst. Setzen wir für  $m$  die Ruhemasse eines Elektrons ein, so finden wir  $E = 511 \text{ keV}$ . Da die Masse eines Positrons gleich der eines Elektrons ist, erhalten wir als Energieäquivalent für die Massen eines Elektrons und eines Positrons zusammen den Betrag von  $1,02 \text{ MeV}$ , also die untere Grenzenergie für die Paarbildung. Die Erzeugung eines einzelnen Materieteilchens aus elektromagnetischer Strahlung ist jedoch unmöglich. Die Paarbildung ereignet sich immer in unmittelbarer Nähe eines Atomkerns, der einen Teil des Impulses und der Energie übernimmt. Die durch Paarbildung entstandenen Positronen und Elektronen treten nach den in Kap. 21.2.5 beschriebenen Gesetzmäßigkeiten in Wechselwirkung mit umgebender Materie. So kommt es bei der Wechselwirkung der Positronen mit den Hüllenelektronen der Atome zur „Zerstrahlung“, dem in Kap. 21.2.1 unter Punkt 3 beschriebenen Prozess, der in der Nuklearmedizin in der PET-Diagnostik (Kap. 21.2.7) angewendet wird.

Der Photoeffekt überwiegt bei weichen Röntgenstrahlen (kleinen Quantenenergien)

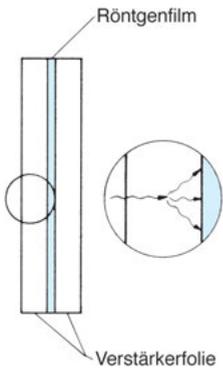
und bei Absorptionsmaterialien hoher Ordnungszahlen. Der Compton-Effekt ist der überwiegende Absorptionsmechanismus in absorbierenden Materialien niedriger Ordnungszahl, also z. B. im biologischen Gewebe. Bei hohen Quantenenergien ( $> 3 \text{ MeV}$ ) schließlich wird die Paarbildung zum dominierenden Absorptionseffekt.

### 21.3.4 Röntgenbildaufnahmen

Die Wechselwirkung von Röntgen- oder Gammastrahlen mit Materie führt, genau wie die von energiereichen geladenen Teilchen, zur Entstehung von Ionenpaaren und angeregten Elektronen in Atomenergiezuständen, und daher können die in Kap. 21.2.7 beschriebenen Detektoren auch für diese Strahlen verwendet werden.

Bei der diagnostischen Anwendung der Röntgenstrahlen in der Medizin kommt dem in Kap. 21.2.7 beschriebenen fotografischen Verfahren bei der Anfertigung von Röntgenaufnahmen besondere Bedeutung zu. Die Möglichkeit zur röntgenografischen Abbildung ergibt sich aus dem unterschiedlichen Absorptionsvermögen verschiedener Gewebe- und Körperteile bei ihrer Durchleuchtung mit Röntgenstrahlen. Da dieses besonders groß bei Knochen im Vergleich zu Weichteilgewebe ist, lassen sich Skelettanteile besonders gut darstellen. Durch das Injizieren von *Kontrastmitteln* in die Blutgefäße können auch diese sichtbar gemacht werden. Unter Kontrastmitteln versteht man hierbei Lösungen von Substanzen mit Atomen hoher Ordnungszahl, wodurch die Röntgenstrahlung stark absorbiert wird.

Außer von den Unterschieden im Absorptionsvermögen hängt die Detailerkennbarkeit auf dem Röntgenbild auch davon ab, wie gut Details in unterschiedlicher Schwärzung des Films zum Ausdruck kommen. Um eine höhere Schwärzung zu erreichen, werden sog. *Verstärkerfolien* verwendet, von denen, wie in Abb. 21.29 skizziert, der Röntgenfilm bei der Belichtung umgeben ist. In den Verstärkerfolien befinden sich fluoreszierende Substanzen, die bei der Absorption von Röntgenstrahlen



**Abb. 21.29** Verwendung von Verstärkerfolien bei Röntgenaufnahmen.

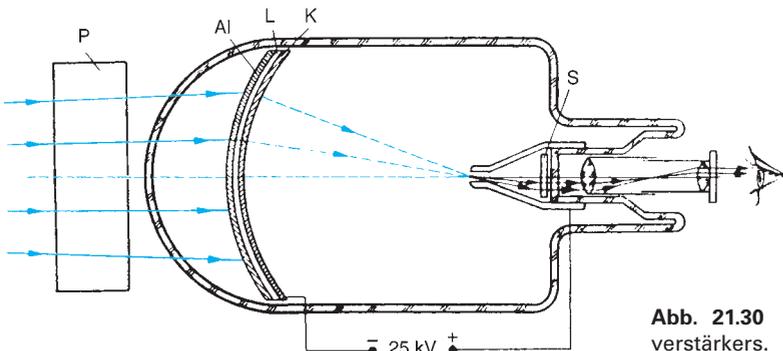
UV-Licht (s. Kap. 17.11) emittieren. Die Schwärzung des Films wird dann sowohl durch direkte Absorption von Röntgenstrahlen in der fotografischen Emulsion des Films als auch zusätzlich durch das UV-Licht der Verstärkerfolien bewirkt. Dadurch wird auch bei geringer Intensität der Röntgenstrahlen eine brauchbare Bildqualität bei geringer Strahlenbelastung des Gewebes erreicht.

Neben den fotografischen Röntgenaufnahmen ist das *Leuchtschirmbild* bei der Durchleuchtung ein übliches Verfahren der Röntgendiagnostik. Dabei wurden früher die auftreffenden Röntgenstrahlen durch die von einem fluoreszierenden Leuchtschirm ausgehende sichtbare Strahlung dargestellt und direkt mit dem Auge beobachtet. Wegen der geringen Lichtausbeute des Schirms war allerdings die Detailerkennbarkeit gering und die Beobachtung nur mit dem dunkeladaptierten Auge möglich. Wesentlich hellere

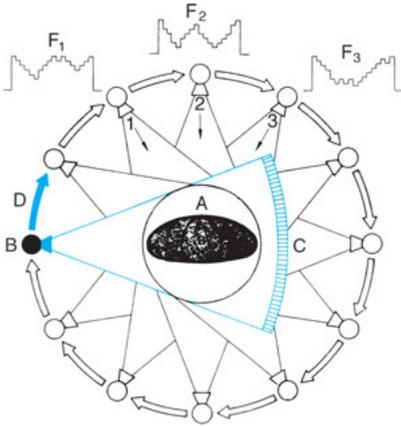
Leuchtschirmbilder erreicht man heute mit *Bildverstärkern* wie in Abb. 21.30 dargestellt. In einem evakuierten Glasgefäß befindet sich ein sphärisch gekrümmter Leuchtschirm L auf einer dünnen Aluminiumunterlage. Vom Objekt P wird ein Leuchtschirmbild in L erzeugt. Die Innenseite des Leuchtschirmes ist mit einer lichtempfindlichen Schicht K bedeckt, die ähnlich wie eine Photozelle beim Aufprall von Photonen Elektronen emittiert. Dadurch entsteht hinter K eine Elektronenverteilung, deren Dichte der Helligkeitsverteilung auf L entspricht. Durch Anlegen einer Spannung von etwa 25 kV zwischen K und S werden diese Elektronen beschleunigt und auf den Leuchtschirm S fokussiert. Das dort entstehende verkleinerte Bild ist viel heller als das ursprüngliche Durchleuchtungsbild auf L und kann mit einem schwach vergrößernden Okular mit dem Auge beobachtet werden. Die Helligkeitssteigerung durch den Röntgenbildverstärker gegenüber dem normalen Leuchtschirmbild beträgt etwa 1000:1. Dieses Anheben des Helligkeitsniveaus bewirkt eine wesentlich bessere Detailerkennbarkeit bei geringer Strahlendosis, ohne dass bei der Bildbetrachtung das Auge dunkeladaptiert zu sein braucht.

Statt der Betrachtung mit dem Auge wird heute nahezu immer eine Digitalkamera benutzt, um das Bild auf einen Monitor zu bringen. Diese Anordnung (Röntgen-Fernsehkette) ermöglicht die computergestützte Bearbeitung und Übertragung der Röntgenbilder (vgl. Kap. 23)

Große Bedeutung in der Röntgendiagnostik hat die *Computertomographie* erlangt, d. h. die

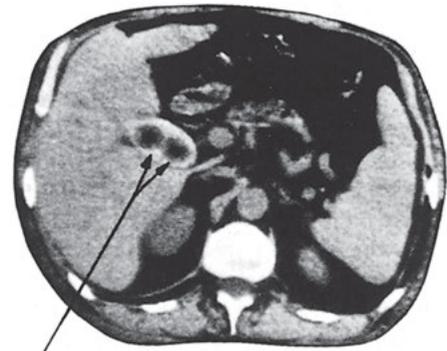


**Abb. 21.30** Prinzip des Röntgenbildverstärkers.



**Abb. 21.31** Schematische Darstellung der Anordnung von Röntgenröhre (B), Strahlungsdetektoren (C) und durchstrahltem Volumen (A). In den verschiedenen Stellungen beim Rotieren (D) der Röhre wurden je nach Absorption im Patienten unterschiedliche Intensitätsprofile (angedeutet mit  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ) von den Strahlungsdetektoren gemessen.

Konstruktion dreidimensionaler, orts aufgelöster Bilder von Körperteilen mittels Computerauswertung von Detektorsignalen. Hierbei wird jeweils ein Querschnitt des Organismus aus verschiedenen Projektionsrichtungen durchstrahlt. Dies wird durch Drehung der Röntgenröhre um den liegenden Patienten erreicht. Der Röntgenröhre gegenüber ist ein System von Strahlungsdetektoren (oft mehrere hundert) angeordnet, das sich gleichsinnig mit der Röntgenröhre dreht. Während der Drehung werden durch Impulsbetrieb der Röntgenröhre tausende von Messsignalen erzeugt, wodurch die Absorptionsprofile der verschiedenen Projektionsrichtungen vermessen werden (s. Abb. 21.31). Diese werden über einen Analog-Digi-



Gallensteine

**Abb. 21.32** Schnittbild durch das obere Abdomen. In der Gallenblase sind deutlich zwei Gallensteine zu erkennen.

tal-Wandler einem Rechner zugeführt, der daraus die unterschiedlichen Absorptionswerte für die einzelnen Elemente des Körperquerschnittes berechnet. Durch die große Anzahl von Messwerten und die hohe elektrische Stabilität der Anordnung gelingt es auch, noch geringe Absorptions- und damit Dichteunterschiede darzustellen. Man erhält damit auf dem Bildschirm des Rechners hochaufgelöste Schnittbilder wie es an einem Beispiel in Abb. 21.32 demonstriert wird. Die Rekonstruktion mehrerer, aufeinander folgender Schichten führt schließlich zu einem dreidimensionalen Bild.

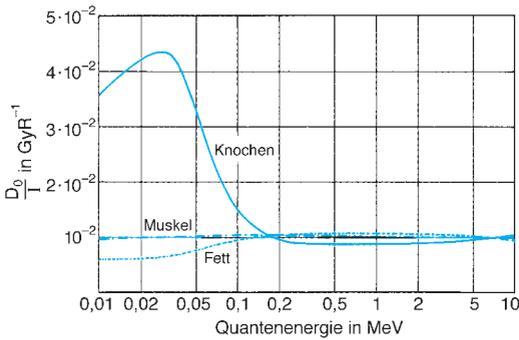
Analoge Aufnahme- und Auswerteverfahren werden auch für die Abbildung von im Körper befindlichen Gammastrahlern (Emissions-Computertomographie, siehe auch PET in Kap. 21.2.7) und für die Abbildung mittels Kernmagnetischer Resonanz (Kap. 21.1.3) bzw. Ultraschall (Kap. 7.12.1) verwendet.

## 21.4 Dosimetrie

Die biologische Wirkung von ionisierenden Strahlen ist neben biologischen Faktoren vor allem von der pro Masseneinheit des bestrahlten Gewebes absorbierten Strahlungsenergie abhängig. Zu ihrer Kennzeichnung führt man als *Energiedosis* für ionisierende Strahlen den folgenden Quotienten ein:

$$\begin{aligned} \text{Energiedosis } D &= \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{Masse des bestrahlten Gewebes}} \end{aligned} \quad (21-16)$$

Da im SI die Energie in Joule und die Masse in kg angegeben wird, erhält man  $\text{J kg}^{-1}$  als



**Abb. 21.33** Beziehung zwischen  $D_0$  und  $I$  für Fett, Muskel und Knochen in Abhängigkeit von der Quantenenergie der Strahlung. (Die Einheit  $\text{Gy R}^{-1}$  ist nach Gln. (21-16) und (21-17) identisch mit der Einheit  $\text{J C}^{-1}$ .)

Einheit der Energiedosis. Diese Einheit wird auch als *Gray* (Gy) bezeichnet. Die früher benutzte Einheit *rad* (*r*adiation *a*bsorbed *d*ose) entspricht  $10^{-2}$  Gy. Es ist zu beachten, dass die so definierte Dosis wesentlich von dem in der Pharmakologie benutzten Dosisbegriff abweicht. Dort versteht man unter Dosis die gesamte Masse des einem Organismus verabreichten Medikaments.

Der Quotient aus Dosis und Bestrahlungszeit heißt *Dosisleistung*, die folglich in  $\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$  angegeben wird. Unter *Volumendosis* verstehen wir das Produkt aus Dosis und bestrahltem Volumen, mit der Einheit  $\text{J kg}^{-1} \text{m}^3$ . Bei räumlich ungleichmäßiger Dosisverteilung ist zur Berechnung der Volumendosis das bestrahlte Gesamtvolumen in kleine Bereiche zu unterteilen und für jeden dieser Teilbereiche das Produkt aus Dosis und Volumen zu bilden. Die Integration über die einzelnen Teilbereiche ergibt dann die gesamte Volumendosis.

Die Messung der Dosisgrößen bezeichnet man als *Dosimetrie*. Schwierigkeiten bei der praktischen Dosimetrie in der Medizin ergeben sich insbesondere aus folgenden Tatsachen:

1. Es ist im Allgemeinen nicht möglich, die absorbierte Energie direkt zu messen, da diese bei den in der Medizin üblichen Strahldosen viel zu klein ist.

2. Der Messung zugänglich sind nur die von der Strahlung in dem definierten Gasvolumen einer Ionisationskammer ausgelösten Ionisa-

tionen, nicht aber die interessierende Größe der Energiedosis in Organen. Folglich müssen die Bedingungen einer Messung mit der Ionisationskammer so festgelegt werden, dass daraus die Berechnung der Dosis im gleichartig bestrahlten Gewebe möglich ist.

Aus diesen Gründen verwendet man neben der in Gl. (21-16) definierten Energiedosis noch die *Ionendosis*. Darunter wird die Strahlenmenge verstanden, die in 1 kg Luft durch Ionisation eine bestimmte elektrische Ladung (beiderlei Vorzeichens) freisetzt. Ihre Einheit ist *Röntgen* (R):

$$1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C kg}^{-1}. \quad (21-17)$$

Die Ionendosis kann in die Energiedosis umgerechnet werden. Hierzu ist es notwendig, dass bei der Messung der Ionendosis *Elektronengleichgewicht* vorliegt. Das bedeutet, dass von den in der Ionisationskammer durch Ionisation frei werdenden Elektronen genau so viele die Kammer verlassen, ohne angezeigt worden zu sein, wie durch Ionisation außerhalb der Kammer erzeugt werden und in die Kammer eindringen. Nur unter dieser Bedingung ist der gemessene Strom proportional der im Kammervolumen absorbierten Strahlungsenergie. Dann gilt folgende Beziehung zwischen der in Luft gemessenen Ionendosis  $I$  und der Energiedosis  $D_0$  im Gewebe:

$$\frac{D_0}{I} = 0,87 \cdot 10^{-2} \frac{K_0/q_0}{K_L/q_L}. \quad (21-18)$$

Hierbei sind  $K_0$  bzw.  $K_L$  die *Energietransferkoeffizienten* und  $q_0$  bzw.  $q_L$  die Dichten von Gewebe bzw. Luft. In Abb. 21.33 ist der Wert von  $\frac{K_0/q_0}{K_L/q_L}$  für verschiedene Gewebearten aufgetragen. Da der Muskel als Repräsentant des Weichteilgewebes angesehen werden kann, sieht man, dass außer für Knochen dieser Quotient für Gewebe praktisch von der Quantenenergie unabhängig ist. Die Bedingung des Elektronengleichgewichtes führt wegen der großen Reichweite der bei der Absorption im Gewebe freiwerdenden Elektronen zu sehr großen Kammervolumina der Dosimeter (*Fasskammern*), die in dieser Größe jedoch nur als Eich-

standards benutzt werden. Bei den Ionisationskammern, die in der Praxis verwendet werden, erreicht man das Elektronengleichgewicht dadurch, dass die Innenseiten der Kammern aus *luftäquivalentem* Material bestehen, das sich in bezug auf die Absorption von Röntgenstrahlen wie Luft verhält (gleiches mittleres Atomgewicht), aber eine wesentlich höhere Dichte besitzt. Darum genügen bereits dünne Schichten, um Elektronengleichgewicht zu erreichen.

Neben der Energiedosis als wichtigster Größe hängt die biologische Strahlenwirkung auch von der *Ionisationsdichte* der betreffenden Strahlung ab. Man unterscheidet zwischen *locker* und *dicht ionisierender Strahlung*.

Zu den locker ionisierenden Strahlen gehören Röntgen- und Gammastrahlung, da hier die Wahrscheinlichkeit für einen Wechselwirkungsprozess relativ gering ist und folglich Ionenpaare (vgl. Kap. 21.2.5) nur vereinzelt auftreten. Bei den dicht ionisierenden  $\alpha$ -Strahlen und den durch Neutronenemission erzeugten Rückstoßkernen dagegen ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass im Gewebe in einzelnen Zellen eine große Anzahl von Ionenpaaren gebildet wird. Mit wachsender Ionisationsdichte wächst die biologische Wirkung.

Die unterschiedliche biologische Wirkung der verschiedenen Strahlenarten drückt man durch die *relative biologische Wirksamkeit* RBW aus. Sie ist definiert als Quotient der Energiedosen, die benötigt werden, um denselben biologischen Effekt einerseits mit locker ionisierender und andererseits mit dicht ionisierender Strahlung zu erzielen:

RBW

$$= \frac{\text{Energiedosis von Röntgen- oder Gammastrahlung}}{\text{Energiedosis der dicht ionisierenden Strahlung}} \quad (21-19)$$

Die RBW ist bei verschiedenen strahlenbiologischen Effekten auch bei der Verwendung der gleichen Strahlenarten unterschiedlich. Für die praktische Anwendung, insbesondere beim Strahlenschutz, geht man von einer mittleren RBW, dem *Bewertungsfaktor*  $Q$  aus und kann damit die unterschiedliche biologische Wirksamkeit durch die *Äquivalentdosis* ausdrücken:

$$\text{Äquivalentdosis} = Q \cdot \text{Energiedosis} \quad (21-20)$$

Die Äquivalentdosis hat physikalisch die gleiche Dimension wie die Energiedosis, da  $Q$  ein dimensionsloser Bewertungsfaktor ist. Die Einheit der Äquivalentdosis wird mit *Sievert* (Sv) bezeichnet. 1 Sv entspricht einem  $\text{J kg}^{-1}$ . Die ältere Einheit der Äquivalentdosis ist das *rem* (*radiation equivalent men*), 1 rem entspricht  $10^{-2}$  Sv. Der Bewertungsfaktor  $Q$  ist 1 für Röntgen-,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen, 5 für langsame Neutronen und 20 für schnelle Neutronen und  $\alpha$ -Strahlen.

Die in Kap. 21.2.7 beschriebenen Nachweisgeräte für Korpuskularstrahlung ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) kann man im Prinzip auch als *Dosimeter* verwenden. Gegenüber der mit Luft gefüllten Ionisationskammer haben alle anderen Geräte jedoch den Nachteil, dass bei ihnen der Quotient in Gl. (21-18) für Weichteilgewebe nicht energieunabhängig ist. Daher ist beispielsweise bei der fotografischen Emulsion die Schwärzung bei gleicher Strahlendosis aber unterschiedlicher Quantenenergie verschieden, d. h. man muss bei unterschiedlichen Energien der Strahlung verschiedene Eichfaktoren benutzen.

## 21.5 Bemerkungen zum Strahlenschutz

Da durch die ionisierende Strahlung biologische Effekte sowohl an somatischen als auch an genetischen Zellen ausgelöst werden, bedeutet eine erhöhte Strahleneinwirkung sowohl ein Risiko für den Einzelnen als auch für das Erbgut. Die *Aufgabe des Strahlen-*

*schutzes* ist es, die sinnvolle Anwendung der ionisierenden Strahlung bei möglichst kleinem Risiko zu ermöglichen.

Die Kenntnisse über die biologischen Effekte stammen zum größten Teil aus solchen medizinischen Anwendungen der ionisieren-

den Strahlung, bei denen Strahlendosen in der Größenordnung von 10 Gy verwendet wurden. Damit stellt sich die Frage, inwieweit eine Extrapolation bezüglich der biologischen Effekte von solch großen Strahlendosen auf wesentlich kleinere möglich ist. Weiterhin ist bei diesen Überlegungen zu beachten, dass die natürliche Strahleneinwirkung an verschiedenen Orten sehr unterschiedlich ist. Sieht man einmal von Extremwerten ab, so kann man vereinfachend feststellen, dass in Norddeutschland die natürliche Strahleneinwirkung etwa 0,6 mGy/Jahr und in Süddeutschland etwa 1,3 mGy/Jahr beträgt. Trotz dieses Unterschiedes um mehr als den Faktor 2 haben sich bisher keine biologischen Effekte gezeigt, die darauf zurückzuführen wären. Dies gilt auch beispielsweise für Kerala in Indien, wo wegen des Monazitsandes die natürliche Strahleneinwirkung um mehr als den Faktor 10 größer ist als in der Bundesrepublik.

Die Regelungen des Strahlenschutzes in der Bundesrepublik gehen trotzdem davon aus, dass auch kleinste Strahlendosen biologisch schädigend wirksam sein können.

Durch staatliche Verordnung ist geregelt, dass Einzelpersonen maximal einer Äquivalentdosis von 1,5 mSv pro Jahr ausgesetzt sein dürfen. Davon ausgenommen sind die in Strahlenbetrieben Beschäftigten. Sie dürfen pro Jahr maximal eine zusätzliche Bestrahlung von 50 mSv erhalten. Für die Bevölkerung in der Nähe von Kernkraftwerken ist die zusätzliche Äquivalentdosis auf maximal 0,3 mSv festgesetzt. Alle angegebenen Werte beziehen sich auf Ganzkörperbestrahlungen, bei denen also der gesamte Organismus der Strahlung ausgesetzt ist.

Werden nur einzelne Organe betroffen, so gelten je nach deren Strahlensensibilität entsprechend modifizierte Werte. Durch diese Regelungen ist sichergestellt, dass sowohl das berufliche Strahlenrisiko als auch dasjenige der Allgemeinheit sehr klein ist, verglichen mit anderen zivilisatorischen Risiken.

Für die medizinische Anwendung bei Patienten sind keine Grenzwerte festgesetzt, da hier die medizinischen Notwendigkeiten, bedingt durch die vorliegende Erkrankung, das tolerable Risiko bestimmen.



# Regelung, Steuerung, Informationsübertragung

## 22. Regelung und Steuerung

Der folgende Abschnitt ist nicht etwa dem Druckteufel zum Opfer gefallen, sondern soll anschaulich machen, was unter (biologischer) Regelung verstanden wird.

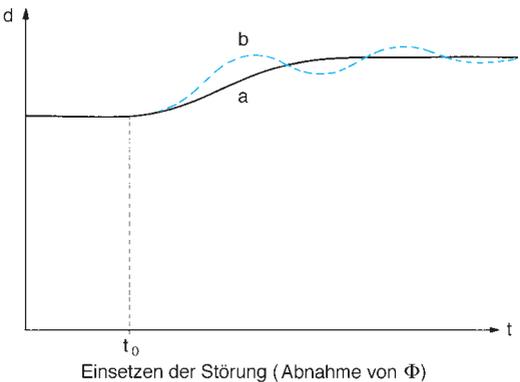
Wenn wir beim Lesen vom Normaldruck zum vorliegenden Abschnitt wechseln, werden unsere Augen plötzlich mit weniger Lichtstrom  $\Phi$  (Kap. 17.2) versorgt. Um gut sehen zu können, bedarf das Auge jedoch eines bestimmten Lichtstromes (Sollgröße)  $\Phi_0$ , der auf die Netzhaut auftrifft. Damit wir diesen wieder erreichen, stellt sich der Pupillendurchmesser  $d$  ziemlich schnell (innerhalb etwa einer Sekunde) auf einen größeren Wert ein. Hierbei nimmt  $d$  nicht monoton steigend zu (Kurve a der Abb. 22.1), sondern pendelt erst einige Male hin und her, ehe der neue Wert erreicht wird (Kurve b der Abb. 22.1).

Wir haben hier ein einfaches biologisches Beispiel für einen

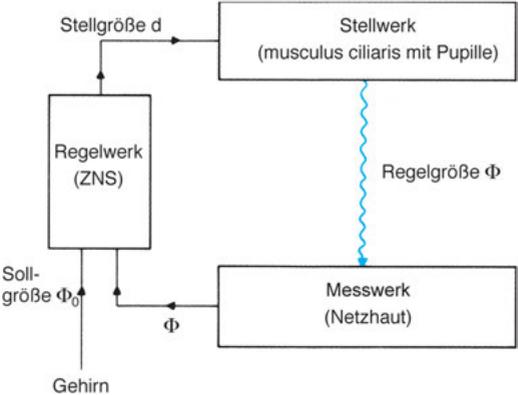
Regelkreis, bestehend aus *Messwerk*, *Regelwerk* und *Stellwerk* (Abb. 22.2).

Auf der Netzhaut (Messwerk) wird der Gesamtlichtstrom  $\Phi$  gemessen. Die Berechnung der Regelabweichung  $\Delta\Phi = \Phi_0 - \Phi$  erfolgt durch Vergleich mit der Sollgröße  $\Phi_0$  im Zentralen Nervensystem, ZNS (Regelwerk). Von dort empfängt der Ziliarmuskel (Abb. 19.33a) (Stellwerk) Steuersignale, die ihn in unserem Falle zur Vergrößerung des Pupillendurchmessers  $d$  (Stellgröße) und damit zur Zunahme der Regelgröße  $\Phi$  veranlassen.

Der Regelkreis und damit die Regelung überhaupt ist also dadurch charakterisiert, dass die Regelgröße  $\Phi$  über das Regelwerk auf die Stellgröße  $d$  und diese wieder auf die Regelgröße  $\Phi$  Einfluss nimmt. Eine derartige



**Abb. 22.1** Zeitverhalten des Pupillendurchmessers  $d$  bei sprunghafter Abnahme des Lichtstromes  $\Phi$ .



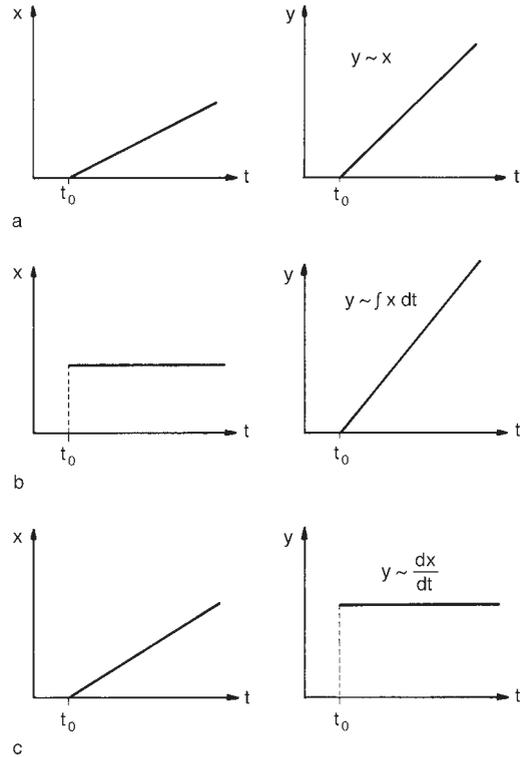
**Abb. 22.2** Schema eines Regelkreises am Beispiel der Pupillenreaktion (ZNS = Zentrales Nervensystem).

Wechselbeziehung zwischen Regelgröße und Stellgröße bezeichnen wir als *Rückkopplung*. Denken wir uns die Rückkopplung — aus welchen Gründen auch immer — unterbrochen, d. h.  $\Phi$  beeinflusst zwar  $d$ ,  $d$  aber nicht mehr  $\Phi$ , dann liegt ein *aufgeschnittener Regelkreis*, Kennzeichen der *Steuerung*, vor.

Regelung und Steuerung unterscheiden sich somit dadurch voneinander, dass der Wirkungsablauf in einem Regelsystem geschlossen, in einem Steuersystem jedoch offen ist.

Soll ein Regelkreis sinnvoll funktionieren, dann muss die durch eine Störung bewirkte Regelabweichung  $\Delta\Phi$  durch entsprechendes Gegensteuern des Stellwerkes wieder zu Null gemacht werden. Diese Art der Rückkopplung nennen wir *Gegenkopplung*. Würde die Rückkopplung infolge eines Funktionsfehlers des Regelkreises mit falschem Vorzeichen ablaufen, dann würde die Regelabweichung  $\Delta\Phi$  ständig verstärkt werden, und in unserem Beispiel würde dieser Rückkopplungsmechanismus, den wir dann als *Mitkopplung* bezeichnen, bei Abnahme des Lichtstroms  $\Phi$  zum Kleinerwerden des Pupillendurchmessers  $d$  und damit zur weiteren Abnahme von  $\Phi$  führen. Wir sehen also, dass nur ein gegengekoppelter Regelkreis Störungen *ausbügeln* und Regelabweichungen klein halten kann.

Die Art und Weise, wie Stellgröße  $y(t) = d$  und Regelabweichung  $x(t) = \Delta\Phi$  mathematisch miteinander verknüpft sind, beschreibt die sog. *Übertragungsfunktion*. Im einfachsten Fall sind  $x(t)$  und  $y(t)$  proportional zueinander (P-Verhalten, Abb. 22.3a):  $y(t) \sim x(t)$ . Antwortet das Regelwerk auf einen plötzlichen Sprung von  $x$  mit einem linearen Anstieg von  $y$  (I-Verhalten, Abb. 22.3b), was durch die Beziehung  $y \sim \int x dt$  beschrieben wird, dann wird die Rückkopplung erst mit einer gewissen Zeitverzögerung voll wirksam. Zur Kompensation solcher Verzögerungen in einer Regelstrecke eignet sich ein Regelwerk mit D-Verhalten (Abb. 22.3c); sobald  $x$  linear zunimmt, antwortet  $y$  mit einem Sprung:  $y \sim \frac{dx}{dt}$ . Regelwerke mit



**Abb. 22.3** Übertragungsfunktion in a) einem P-Regler, b) einem I-Regler und c) einem D-Regler;  $x(t)$  = Regelabweichung,  $y(t)$  = Stellgröße.

P-, I- oder D-Verhalten sind durch einfache Übertragungsfunktionen gekennzeichnet. Im biologischen Regelwerk jedoch werden zur Optimierung des Zeitverhaltens des gesamten Regelkreises normalerweise P-, I- und D-Anteile zu einer komplizierten Übertragungsfunktion zusammengemischt.

Ein relativ übersichtlicher Regelkreis im menschlichen Organismus ist die *Blutdruckregelung*. Als Messwerk dienen die Dehnungsrezeptoren in Aorta und Carotis. Im ZNS (Regelwerk) wird die Regelabweichung vom Normalblutdruck (Sollgröße) festgestellt. Von dort empfangen Herzmuskel und periphere Gefäße (Stellwerk) Steuersignale, die z. B. die Schlagfrequenz des Herzens und den Gefäßwiderstand beeinflussen. Dadurch wird die Regelgröße Blutdruck nachgeregelt. Parallel hierzu wird durch hormonelle Einflüsse (Ausschüttung von Adrenalin durch die Ne-

benniere) eine mehr oder minder starke Füllung der Blutspeicher in Leber und Milz geregelt. Zufluss von Blut aus den Speicherorganen in das allgemeine Gefäßsystem bedeutet dort eine stärkere Füllung und damit einen Druckanstieg. Diese beiden Möglichkeiten zur Blutdruckregelung im Organismus sind durch unterschiedliche Zeitkonstanten gekennzeichnet. Die Regelung mit kleiner Zeitkonstante läuft über das Nervensystem und die mit großer Zeitkonstante auf chemischem Wege über die Hormone ab. Die durch das Nervensystem bestimmte kleine Zeitkonstante ist im wesentlichen durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Aktionspotentiale gegeben, während andererseits die große Zeitkonstante im wesentlichen

durch die langsamere Durchmischung in den Flüssigkeitsräumen des Organismus bestimmt wird.

Der Regelkreis für den Blutdruck ist mit anderen homöostatischen Regelkreisen, wie beispielsweise der Wärmeregulation vermascht. Das bedeutet, dass zwei oder mehr Regelkreise nicht voneinander unabhängig sind, sondern sich gegenseitig beeinflussen. So wird auch der Regelkreis für die Atmung von demjenigen für den Blutdruck beeinflusst, was sich in der Abhängigkeit des *Atemminutenvolumens* vom Blutdruck zeigt. Es ist ganz allgemein eine der charakteristischen Eigenschaften der biologischen Regelung, dass die einzelnen Kreise sehr stark und sehr weitläufig miteinander vernetzt sind.

## 23. Computergestützte Informationsübertragung in der Medizin (Medizinische Informatik)

Die Wahrnehmung der Umgebung durch den menschlichen Körper (Temperatur, Helligkeit etc.) beruht auf einer komplexen Kette von Abläufen, die mit Signalen von Rezeptoren und Sinnesorganen beginnt und deren Übertragung an das Zentralnervensystem schließlich zur Verarbeitung und Bewertung im Gehirn führt. Diese Kette kann modelliert werden durch eine technische Analogie, eine *Informationskette*, die aus einer Nachrichtenquelle, einer Codiereinrichtung, einem Übertragungskanal sowie einer Decodiereinrichtung und einer Nachrichtensenke besteht. Vereinfacht ausgedrückt besteht die Kette aus einem Sender, einer Übertragungseinrichtung und einem Empfänger. Technisch sind Prototypen solcher Informationsketten somit Kommunikationssysteme wie Rundfunk und Fernsehen, in denen optische und/oder akustische Signale erzeugt, codiert, übertragen, decodiert und empfangen werden. Andere Beispiele sind etwa Datenverarbeitungsanlagen (Computer) oder Computer im Netz. Bei einzelnen Computern kann das Eingabegerät (z. B. die Tastatur) als Nachrichtenquel-

le und der Bildschirm als der Empfänger angesehen werden. Im Netz stellt ein Computer insgesamt den Sender dar und sind andere die Empfänger. Als Information in diesem Zusammenhang kann entweder das ursprüngliche Signal oder aber das bereits codierte angesehen werden.

Im biologischen System (Mensch) stellt die in der Peripherie sitzende Sinneszelle (als galvanisches Element mit ca. 100 mV Leerlaufspannung; Kap. 15.1) gleichzeitig die Nachrichtenquelle und die Codiereinrichtung dar. Den Übertragungskanal bilden die bis zum Zentralen Nervensystem an der Informationsübertragung beteiligten Neuronen, während das Zentrale Nervensystem selbst zugleich als Decodiereinrichtung und Nachrichtensenke (Empfänger) fungiert.

Von besonderer Bedeutung in einer Informationskette ist die Codierung. Sie ist notwendig, damit das Signal übertragen werden kann, d. h., sie ist bedingt durch den Übertragungskanal. Damit am Beispiel der Kommunikation zwischen zwei Computern A und B, die an A eingegebene Information auf dem zugehöri-

benniere) eine mehr oder minder starke Füllung der Blutspeicher in Leber und Milz geregelt. Zufluss von Blut aus den Speicherorganen in das allgemeine Gefäßsystem bedeutet dort eine stärkere Füllung und damit einen Druckanstieg. Diese beiden Möglichkeiten zur Blutdruckregelung im Organismus sind durch unterschiedliche Zeitkonstanten gekennzeichnet. Die Regelung mit kleiner Zeitkonstante läuft über das Nervensystem und die mit großer Zeitkonstante auf chemischem Wege über die Hormone ab. Die durch das Nervensystem bestimmte kleine Zeitkonstante ist im wesentlichen durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Aktionspotentiale gegeben, während andererseits die große Zeitkonstante im wesentlichen

durch die langsamere Durchmischung in den Flüssigkeitsräumen des Organismus bestimmt wird.

Der Regelkreis für den Blutdruck ist mit anderen homöostatischen Regelkreisen, wie beispielsweise der Wärmeregulation vermascht. Das bedeutet, dass zwei oder mehr Regelkreise nicht voneinander unabhängig sind, sondern sich gegenseitig beeinflussen. So wird auch der Regelkreis für die Atmung von demjenigen für den Blutdruck beeinflusst, was sich in der Abhängigkeit des *Atemminutenvolumens* vom Blutdruck zeigt. Es ist ganz allgemein eine der charakteristischen Eigenschaften der biologischen Regelung, dass die einzelnen Kreise sehr stark und sehr weitläufig miteinander vernetzt sind.

## 23. Computergestützte Informationsübertragung in der Medizin (Medizinische Informatik)

Die Wahrnehmung der Umgebung durch den menschlichen Körper (Temperatur, Helligkeit etc.) beruht auf einer komplexen Kette von Abläufen, die mit Signalen von Rezeptoren und Sinnesorganen beginnt und deren Übertragung an das Zentralnervensystem schließlich zur Verarbeitung und Bewertung im Gehirn führt. Diese Kette kann modelliert werden durch eine technische Analogie, eine *Informationskette*, die aus einer Nachrichtenquelle, einer Codiereinrichtung, einem Übertragungskanal sowie einer Decodiereinrichtung und einer Nachrichtensenke besteht. Vereinfacht ausgedrückt besteht die Kette aus einem Sender, einer Übertragungseinrichtung und einem Empfänger. Technisch sind Prototypen solcher Informationsketten somit Kommunikationssysteme wie Rundfunk und Fernsehen, in denen optische und/oder akustische Signale erzeugt, codiert, übertragen, decodiert und empfangen werden. Andere Beispiele sind etwa Datenverarbeitungsanlagen (Computer) oder Computer im Netz. Bei einzelnen Computern kann das Eingabegerät (z. B. die Tastatur) als Nachrichtenquel-

le und der Bildschirm als der Empfänger angesehen werden. Im Netz stellt ein Computer insgesamt den Sender dar und sind andere die Empfänger. Als Information in diesem Zusammenhang kann entweder das ursprüngliche Signal oder aber das bereits codierte angesehen werden.

Im biologischen System (Mensch) stellt die in der Peripherie sitzende Sinneszelle (als galvanisches Element mit ca. 100 mV Leerlaufspannung; Kap. 15.1) gleichzeitig die Nachrichtenquelle und die Codiereinrichtung dar. Den Übertragungskanal bilden die bis zum Zentralen Nervensystem an der Informationsübertragung beteiligten Neuronen, während das Zentrale Nervensystem selbst zugleich als Decodiereinrichtung und Nachrichtensenke (Empfänger) fungiert.

Von besonderer Bedeutung in einer Informationskette ist die Codierung. Sie ist notwendig, damit das Signal übertragen werden kann, d. h., sie ist bedingt durch den Übertragungskanal. Damit am Beispiel der Kommunikation zwischen zwei Computern A und B, die an A eingegebene Information auf dem zugehöri-

gen Übertragungskanal, etwa dem Internet, nach B übertragen werden kann, muss sie so codiert werden, dass der Kanal sie übermitteln kann. Daten können am besten übermittelt und auch erkannt werden, wenn sie die einfachste Form einer Alternative, d. h. eine *ja-nein-Entscheidung* beinhalten. Diese Alternative kann in technischen Systemen durch verschiedene *binäre Elemente* realisiert werden. Zum Beispiel ist eine bestimmte Stelle auf einem Magnetband magnetisiert oder entmagnetisiert, oder ein Transistor ist in Sperr- oder Durchlassrichtung gepolt. Bei der Informationsübertragung im Nervensystem wird das binäre Element dadurch realisiert, dass das Membranpotential einer Nervenzelle im *erregten Zustand* einen Potentialwert (Aktionspotential) annimmt, der sich wesentlich von dem des *nichterregten Zustands* unterscheidet. Durch die Aneinanderreihung derartiger binärer Elemente lassen sich in technischen Systemen Buchstaben, Zeichen und Ziffern nach dem Digitalprinzip (vgl. Kap. 15.3.4) darstellen. Die binären Elemente (*binary digits*) bezeichnet man als *bits*. Die Anzahl der bits, die zur Darstellung eines Zeichens in einem bestimmten Code benötigt werden, nennt man *Coderahmen*.

So sind beispielsweise mit einem Coderahmen von 5 bits  $2^5 = 32$  Kombinationen möglich. Diese 32 Kombinationen sind aber für die Übermittlung von Buchstaben-, Ziffern- und Sonderzeichen zu wenig. Auch die gebräuchlichen 6-bit- und 7-bit-Codes sind durch den jeweiligen Zeichenvorrat voll ausgefüllt. Demnach ergibt jede bei der Übertragung auftretende Bildverfälschung ein anderes Zeichen als das ursprünglich eingegebene. Diese Codes geben somit keine Möglichkeit, nur anhand der Bitanordnung einen Übertragungsfehler zu erkennen. Anders ist es bei den 8-bit-Codes, bei denen nicht alle  $2^8 = 256$  möglichen Kombinationen durch den für Nachrichtenübertragung notwendigen Zeichenvorrat ausgeschöpft werden. Hier ist es möglich, dass ein Übertragungsfehler bereits an der empfangenen fehlerhaften Bitanordnung erkannt wird. Die nicht zum Zeichenvorrat gehörenden und daher unbenutzten

Bitkombinationen eines Codes werden als *Redundanz* bezeichnet. Die Redundanz ist also die Differenz zwischen den vorhandenen und den verwendeten Bitkombinationen. Demnach sind die 8-bit-Codes redundant, Codes mit niedrigerer bit-Zahl sind nicht redundant. Zur Zeit werden zur Informationsübertragung der 7-bit-ASCII Code (erlaubt die Übertragung von Buchstaben-, Ziffern- und Sonderzeichen) bzw. der 8-bit-Code verwendet (letzterer erlaubt zusätzlich die Übertragung von Grafikzeichen).

Für die Übermittlung von „Information“ im weitesten Sinne ist die Datenmenge, die in ihrer Gesamtheit diese zu übertragende Information bildet, von großer Bedeutung. Sie resultiert direkt aus der Codierung. Als Beispiel kann ein Bild (etwa eine Röntgenaufnahme) betrachtet werden. Die Umsetzung der zweidimensionalen Orts-Kontrast-Beziehungen des Bildes auf der Röntgenaufnahme in digitale Daten hängt von der Feinheit der Abtastung (Rasterung) des Bildes ab, d. h. der Einteilung der zweidimensionalen Bildfläche in elementare Bildeinheiten, in *Pixel*. Je höher deren Zahl, um so größer die nach der Codierung zu behandelnde Datenmenge und um so besser die Darstellung der Bildinformation (Auflösung) nach Digitalisierung. Es hat sich eingebürgert, dass man für diese Menge die Maßangabe *Byte* verwendet, wobei bei der üblichen Codierung ein Byte der Zusammenfassung von 8 bit entspricht. Typische zu behandelnde Datenmengen im Bereich der Bildübertragung sind im Bereich von Megabyte (MB), also ca.  $10^6$  Byte. Für die Geschwindigkeit, mit der diese Menge übertragen wird, also die pro Zeiteinheit durch einen Kanal übertragbare Informationsmenge, verwendet man hingegen die Einheit bit/s. Diese Menge heißt *Kanalkapazität*; sie beträgt bei Breitbandübertragung über größere Entfernungen mit Kupferkabel bis  $10^9$  bit/s bzw. mit Glasfaserkabel bis  $10^{12}$  bit/s. Zum Vergleich: Die Kanalkapazität des Gehirns beträgt bei visuellem Input ca.  $10^7$  bit/s (daran beteiligt sind ca.  $10^6$  Neuronen) und bei auditivem Input ca.  $10^5$  bit/s (ca.  $3 \cdot 10^4$  Neuronen). Um bei Übertragung großer Da-

tenmengen einen möglichen Engpass in der Kanalkapazität zu kompensieren, werden Daten komprimiert, nach Möglichkeit ohne nennenswerten Informationsverlust. Bekannteste Kompressionsformate für Bilddateien sind die JPEG-, für Audiodateien die MP3-Formate.

In der Medizin hat sich in den letzten Jahrzehnten aus der raschen Entwicklung aller mit Information und Informationsübertragung verbundenen Wissenszweige, die man heute unter dem Begriff Informatik zusammenfasst, eine spezielle **Medizinische Informatik** herausgebildet. Sie befasst sich mit der computergestützten Speicherung, Übertragung und Verarbeitung von medizinisch relevanten Daten. Sie will damit die Arbeitsprozesse im Gesundheitswesen durch Bereitstellung entsprechender Informationen unterstützen. Dies gilt für die medizinische Diagnostik und Therapie ebenso wie für die Dokumentation von Patientendaten, für die Abrechnung medizinischer Leistungen, für die Präventivmedizin und für die Epidemiologie. Dazu werden Informationen systematisch strukturiert, klassifiziert und sinnvoll gespeichert. Die dadurch entstehenden wissensbasierten Systeme dienen als Datenreservoir für die Anwendung statistischer Methoden und Evaluationen. Sie bilden etwa die Grundlage für die Einrichtung von Krebsregistern. Sie ermöglichen wissenschaftlich und wirtschaftlich begründbare Aussagen für das Gesundheitswesen einer Region, eines Landes oder sogar eines ganzen Kontinents.

Spezielle Anwendungsbereiche befassen sich mit folgenden Aufgaben:

1. Medizinische Bildverarbeitung, Visualisierung und Mustererkennung. Methodische Aufgabenschwerpunkte bilden die Weiterentwicklung von Verfahren zur 3D-Bildanalyse bei der Computertomographie (CT), der Magnetresonanztomographie (MRT), der Positronemissionstomographie (PET), der Sonographie, der optischen Resonanztomographie, der nuklearmedizinischen Szintigraphie und der Signalverarbeitung in OP-Sälen und auf Intensivstationen. Entsprechende Datenmengen müssen gespeichert und im Falle der Telemedizin (s. unten) auch übertragen werden (Tab. 23.1).

2. Krankenhaus-Informationssysteme optimieren und evaluieren das Management eines Krankenhauses (Einkauf von Geräten und Medikamenten; Bereitstellung von Essen und Wäsche; Einsatz von Personal usw.). Sie unterstützen die Dokumentation medizinischer Daten von Patienten und im weiteren Sinne auch von Gesunden, ganz allgemein von medizinischem Wissen. Erbrachte Leistungen werden zentral dokumentiert und abgerechnet. Klinische Arbeitsplätze werden online mit Patientendaten und Fachinformationen versorgt.

3. Evidenzbasierte Medizin (evidence-based medicine = beweisgestützte Medizin) bezieht sich auf systematisch dokumentierte klinische Erfahrungen und wissenschaftliche Studien, die aus einem großen (überregionalen) Einzugsgebiet zusammengetragen und kontinuierlich auf den neuesten Stand gebracht werden. Diese Dokumentation ermöglicht die systematische Suche nach der relevanten Evidenz in der medizinischen Literatur für ein konkretes klinisches oder gesundheitspolitisches Problem sowie die kritische Beurteilung der Validität dieser Evidenz nach klinisch epidemiologischen Gesichtspunkten.

4. E-health. Der Kunstbegriff „electronic health“ ist nicht genau definiert, ebenso wenig wie die Bezeichnungen „online health“, „Cybermedizin“ oder ähnliches. Häufig werden mit E-health die Vernetzungsbestrebungen im Gesundheitswesen umschrieben, z. B. durch die elektronische Patientenkarte. Die elektronische Patienten- oder Gesundheitskarte (eGK) soll die Datenübermittlung zwischen Krankenhäusern, Arztpraxen, Krankenkassen, Apotheken und Patienten vereinfachen und kostengünstiger gestalten. Für rund 70 Millionen gesetzlich Krankenversicherte ist diese Chipkarte in Deutschland vorgesehen. Sie wird im administrativen Teil Daten wie Name, Adresse, Geburtsdatum, Krankenkasse usw. speichern. Vertrauliche Daten werden so abgelegt, dass sie nur nach PIN-Eingabe oder in einer Arztpraxis zugänglich sind. Der vertrauliche medizinische Teil enthält Angaben zur Notfallversorgung, einen Vermerk zum Organpendestatus und spezielle Daten für chronisch

Kranke. Da der Speicherplatz begrenzt ist, werden Daten über eingenommene Medikamente, Arztbriefe und die gesamte Krankenakte bei Fachdiensten der Telematik-Infrastruktur abgelegt und sind über gesicherte Knoten zugänglich. Es muss Sicherheit gewährleistet werden, dass unerlaubter Datenzugriff und Datenmissbrauch durch Dritte verhindert wird.

5. Telemedizin. Triebkraft zur Telemedizin ist die räumliche Trennung von Arzt und Patient. Bei Expeditionen in eine entlegene Region (Arktis/Antarktis), bei der Raumfahrt, bei militärischen Einsätzen, in dünn besiedelten Gegenden ist der Bedarf für telemedizinische Anwendungen evident. Aber auch in medizinisch gut versorgten Gebieten wird die Telemedizin immer mehr zu einem Qualitätsstandard, der unerlässlich ist, etwa bei der Patientenüberwachung, bei der Einholung einer Zweitmeinung oder zur Verbesserung von Aus-, Fort- und Weiterbildung.

Bei der *telemetrischen Patientenüberwachung* werden Patienten mit Geräten (z. B. subkutan implantiertem Herzschrittmacher oder Defibrillator, plus extrakorporal verfügbarer Sendeeinrichtung) zur Messung und Übertragung von Vitaldaten (z. B. Blutdruck, Herzfrequenz, Herzflimmern) ausgestattet. Die direkt am Patienten gemessenen Signale werden zunächst analog verstärkt und durch den Sender, den der Patient bei sich trägt, über Funk zum Empfänger übermittelt. Zum Zwecke der automatischen EKG-Analyse und -Überwachung wird es dann in einem

Analog-Digital-Converter digitalisiert und nach Weiterverarbeitung auf einem Bildschirm zur Sicht-Anzeige gebracht, auf einem Schreiber registriert oder in einem Datenspeicher konserviert und eventuell zusätzlich zur Steuerung des im Herzschrittmacher integrierten Defibrillators verwendet. Letzterer spricht an, sobald die Analyse außergewöhnliche EKG-Strukturen ergibt. Diese Art der Patientenüberwachung ist auf viele andere Bereiche übertragbar, z. B. auf die Kontrolle der Atmung, des Sauerstoffgehalts im Blut, des Blutdrucks, des Pulses, der Temperatur usw., ermöglicht aber auch Rückmeldungen des Arztes zu den Patienten (Medikamenteneinnahme, Information über den aktuellen Stand der gelieferten Messwerte).

Viele medizinische Fächer greifen inzwischen auf die technischen Möglichkeiten zurück, die sich aus der elektronischen Übertragung von Bildmaterial vom Ort der Untersuchung zum Ort der Diagnosestellung ergeben (Telechirurgie, Teledermatologie, Telekardiologie, Tele-neurologie, Teleradiologie usw.). Dadurch entfällt der immer noch verbreitete Versand von Bildern, z. B. durch Kurierdienste. Die elektronische Bereitstellung tomographischer Bilder (z. B. CT, MRT) gehört mehr und mehr zum festen Service einer radiologischen Praxis. Hierbei sind aber auch technische, organisatorische und rechtliche Herausforderungen zu bewältigen: Datenkompression und -übertragung, Gerätebeschaffung und Betriebskosten, Datenschutz.

6. Medizinische Robotik. Die Robotik widmet sich der Entwicklung von Maschinen, die mehr oder weniger autark, durch ein vorbestimmtes Programm festgelegt, Aufgaben zu übernehmen imstande sind. Dieses Fachgebiet umfasst Teilgebiete der Informatik (insbesondere der Künstlichen Intelligenz), der Elektrotechnik und des Maschinenbaus. Die Anwendungsbereiche sind vielfältig. Es gibt Spielzeugroboter, Serviceroboter, Industrieroboter, Roboter für den polizeilichen und militärischen Einsatz, Medizinroboter usw. Die Verwendung von Robotern in der Medizin ist ein relativ junges Forschungs-, Entwicklungs- und Anwendungsgebiet. Sie kommen vor-

Tab. 23.1

medizinische Verfahren	typische Bildauflösung	komprimierte übertragene Datenmenge in MB (Anzahl der Bilder) pro Untersuchung	
Röntgen Thorax	2048 × 2400 × 16	ca. 3	(1–2)
CT	512 × 512 × 16	10–20	(50–100)
MRT	256 × 256 × 8	1–2	(50–100)
Sonographie	512 × 512 × 8	1–5	(10–50)

Bei sonographischen (Ultraschall-) Untersuchungen können auch größere Datenmengen anfallen, da u. U. Farbbilder und/oder Videosequenzen übertragen werden.

nehmlich zum Einsatz, um Ärzte bei Operationen zu unterstützen, da sie in der Lage sind, vordefinierte Funktionen ermüdungsfrei und mit hoher Präzision zu übernehmen. Die Mensch-Maschine Interaktion stellt hohe Anforderungen an das Robotersystem und ebenso an den beteiligten Arzt, der hier gleichzeitig technische Aufgaben übernimmt. Beispiele für die computergestützte Planung, Navigation und Durchführung neurochirurgischer Operationen sind Eingriffe an der Wirbelsäule etwa beim Freifräsen des Spinalkanals (zur Dekom-

pression des Rückenmarks an bestimmten Stellen) oder beim Setzen von Pedikelschrauben (zur Stabilisierung von Brust- und Lendenwirbel bei Fraktur-, Tumor- oder anders bedingter Deformitäten). Derartige Eingriffe beinhalten ein hohes Operationsrisiko aufgrund der engen Lagebeziehung zwischen Knochen, Nerven und Gefäßen. Daher ist es ein Gewinn, wenn die erforderliche chirurgische Arbeit mit vordefinierter Genauigkeit und zusätzlich ermüdungsfrei durchgeführt werden kann.



# Aufgaben und Lösungen

---

## 24.1 Aufgaben

(Der erste Teil der Aufgabennummer weist auf das Kapitel hin, dem die Aufgabe inhaltlich zugehört.)

### 1.1 Relativitätstheorie

Ein 100 m langes Raumschiff sei mit einer Geschwindigkeit von  $v = 4 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$  im All unterwegs.

- Um wieviel gehen die Borduhren für einen Beobachter auf der Erde gegenüber Erduhren nach 8 Jahren nach?
- Um wieviel scheint diesem Beobachter das Raumschiff kürzer?

### 1.2 Raumwinkel

Mit einer (als punktförmig angenommenen) radioaktiven Substanz werde aus 1 m Abstand ein kugelförmiger Tumor mit Durchmesser 10 cm bestrahlt.

- Welchen Raumwinkel  $\Omega$  bildet der Strahlenkegel, der den Tumor bestrahlt?
- Wie ändert sich  $\Omega$ , wenn der Abstand von 1 m auf 5 m vergrößert wird?
- Wie groß ist  $\Omega$ , wenn sich die radioaktive Substanz im Zentrum des Tumors befindet und diesen von innen heraus bestrahlt?

### 1.3 Beschleunigung, Bremsung

- Mit welcher geradlinig gleichförmigen Beschleunigung fährt ein Auto an, das in 5 s auf  $100 \text{ km h}^{-1}$  beschleunigt?
- Wie groß ist die Zentripetalbeschleunigung, wenn das Auto mit  $100 \text{ km h}^{-1}$  in eine Kurve mit Krümmungsradius 20 m fährt?
- Wie groß ist die gleichförmige negative Beschleunigung, wenn jemand aus 1 m Höhe auf den Boden springt und beim Abfedern in 0,5 s abgebremst wird?

### 2.1 Kraft

Jemand wird von einem 50 g schweren Stein, der eine Geschwindigkeit von  $4 \text{ m s}^{-1}$  besitzt, am Kopf getroffen. Nehmen wir an, der Stein wird dabei auf einem Weg von 2 mm gleichmäßig abgebremst.

- Wie groß ist die Kraft, die auf den Schädel eingewirkt hat?
- Wie groß wäre die Kraft gewesen, wenn der Stein das weichere Hinterteil getroffen hätte, wo er auf einem Weg von 2 cm gleichmäßig abgebremst worden wäre?

### 2.2 Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Die Beschleunigung einer Rakete nehme aufgrund der Tatsache, dass sie dauernd Treibstoff verbraucht und deshalb leichter wird, linear mit der Zeit zu:  $a = \alpha_0 t$  mit  $\alpha_0 = 0,5 \text{ m s}^{-3}$ .

Wie groß sind erreichte Endgeschwindigkeit und zurückgelegter Weg nach 10 min?

### 2.3 Druck

- Wie groß ist der Druck, den eine 50 kg schwere, auf einem Pfennigabsatz von  $0,5 \text{ cm}^2$  Fläche balancierende Dame auf ihren Parkettboden ausübt?
- Wie groß ist zum Vergleich der Druck, den ein 1 t schwerer Elefant auf *einem* Bein (Fußsohlenfläche ca.  $700 \text{ cm}^2$ ) balancierend auf den Boden ausübt?

### 2.4 Reibung

Ein 1 t schweres Auto rast mit einer Geschwindigkeit von  $100 \text{ km h}^{-1}$  in eine Kurve mit einem Krümmungsradius von 100 m. Kommt das Auto bei gutem Wetter heil durch die Kurve? Wie ist es bei Regenwetter? (Haftreibungszahl von Gummi auf trockenem Asphalt ca. 1 und auf nassem Asphalt ca. 0,7.)

### 3.1 Abmagerungskur

- Wie lange müssen Sie „fasten“, d. h. dürfen Sie „nur“ 8400 kJ (= 2000 kcal) pro Tag essen, anstatt Ihrer normalen Kost von 10500 kJ (= 2500 kcal) pro Tag, um 5,3 kg Körperfett abzubauen? (1 g Fett besitzt einen Energiegehalt von ca. 39 kJ. Als normal sei hier die Kost bezeichnet, bei der Sie Ihr Körpergewicht konstant halten.)
- Sie können Ihre Kur natürlich anstatt auf geringerer Energieaufnahme auch auf höherer Energieabgabe aufbauen. Wie oft müssten Sie eine Masse von 50 kg einen halben Meter hoch wuchten?

### 3.2 Energie, Leistung

Wie groß ist jeweils der Energieaufwand, wenn wir einerseits mit einem Auto und andererseits zu Fuß auf ebener Straße 20 km zurücklegen? Der Benzinverbrauch des Autos auf 100 km sei 10 l; der Energieinhalt von Benzin beträgt 32560 kJ pro Liter. Der Fußgänger leistet beim Gehen mit  $5 \text{ km h}^{-1}$  ca. 70 W.

### 3.3 Masse-Energie-Äquivalenz

Wie groß ist die bei der Zerstrahlung von Positron und Elektron freiwerdende Energie? (Einheiten J bzw. eV). Die Masse von Positron und Elektron ist gleich; siehe Kapitel A.6.

### 4.1 Impulserhaltung

Die linke Herzkammer stößt pro Schlag ca. 60 g Blut mit einer Geschwindigkeit von ca.  $0,5 \text{ m s}^{-1}$  nach oben in die Aorta aus (Systeme). Die Dauer dieses Vorgangs beträgt ca. 0,1 s. Unmittelbar danach passiert die Druckwelle den Aortenbogen und drückt das Blut in der Körperschlagader nach unten. Wenn Sie sich auf eine sehr empfindliche, schnell anzeigende Waage stellen, können Sie diesen Vorgang verfolgen. Wie ändert sich die Anzeige der Waage, wenn die 60 g Blut aus der linken Herzkammer ausgestoßen werden bzw. wenn das Blut den Aortenbogen passiert hat?

### 4.2 Drehimpulserhaltung

Eine Eiskunstläuferin beginnt ihre Pirouette mit ausgebreiteten Armen; dabei besitzt sie

bei einer Drehzahl von  $1 \text{ s}^{-1}$  einen Drehimpuls von 31,4 Nm s.

- Wie groß ist ihr Trägheitsmoment?
- Auf welche Drehzahl kommt sie, wenn sie durch Anlegen der Arme ihr Trägheitsmoment auf  $2,5 \text{ kg m}^2$  reduziert?

### 5.1 Elastische Verformung

Die Oberschenkelknochen tragen die Masse  $m = 80 \text{ kg}$  eines aufrecht stehenden Menschen. Wir nehmen an, ein Oberschenkelknochen sei im entlasteten Zustand 50 cm lang, rund und im Mittel 2 cm stark und besitze einen Elastizitätsmodul  $E = 1,80 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ . Um wieviel kürzer ist der Knochen, wenn die gesamte Körpermasse

- auf einem Bein lastet,
- wenn die Versuchsperson auf zwei Beinen stehend eine Last von 240 kg trägt?

### 5.2 Bruchfestigkeit

Mit dem Wert für die Druckfestigkeit aus Tab. 5.2 ist die maximale Kraft zu berechnen, mit der ein Oberarmknochen belastet werden kann, ohne dass es zum Bruch kommt. Der äußere Durchmesser des Knochens soll 28 mm betragen, der innere Durchmesser 17 mm.

### 5.3 Hagen-Poiseuille'sches Gesetz

Durch ein 0,5 m langes Rohr mit 8 mm Durchmesser sollen Flüssigkeiten unterschiedlicher Viskosität laminar fließen ( $\eta_{\text{Glycerin}} = 0,83 \text{ Pa s}$ ,  $\eta_{\text{Blut}} = 0,0045 \text{ Pa s}$ ,  $\eta_{\text{H}_2\text{O}} = 0,001 \text{ Pa s}$ ).

- Wie groß ist jeweils die Volumenstromstärke, falls die Druckdifferenz zwischen den Rohrenden 100 Torr beträgt?
- Wie stark verringert sich die Stromstärke, wenn der Rohrdurchmesser nur halb so groß ist?

### 5.4 Sedimentation

- Wie groß ist das Verhältnis der Sedimentationsgeschwindigkeiten von kugelförmigen Partikeln (z. B. biologischen Makromolekülen) bei Sedimentation im Schwerfeld der Erde bzw. in der Ultrazentrifuge? (Die Zentrifugalbeschleunigung sei  $10^6 \text{ m s}^{-2}$ .)

- b) Welchen Vorteil hat die Sedimentation mit der Ultrazentrifuge gegenüber der im Schwerefeld?

### 5.5 Turbulente Strömung

Kommt es in der Aorta (ca. 2 cm Durchmesser) zu turbulenter Strömung, wenn die Maximalgeschwindigkeit des Blutes bei der Systole ca.  $0,5 \text{ m s}^{-1}$  beträgt? (Dichte  $\rho_{\text{Blut}} = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ .)

### 6.1 Pendel

- a) Das Pendel einer Standuhr soll eine Schwingungsdauer von 1 s haben. Wie lang muss es sein, wenn es sich um ein *mathematisches Pendel* (Kap. 6.2) handelt? (Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ .)
- b) Mit dem Pendel lässt sich  $g$  sehr genau messen. Das mathematische Pendel von a) hat am Äquator eine um 2,6‰ längere Schwingungsdauer als am Pol. Um welchen Betrag unterscheidet sich also die Erdbeschleunigung am Äquator von der am Pol? (Die Erdbeschleunigung beträgt am Pol  $g = 9,83 \text{ m s}^{-1}$ .) Es sind übrigens zwei Effekte, die diesen Unterschied hervorrufen: Die Abplattung der Erde an den Polen und die Zentrifugalkraft infolge der Erdrotation, die am Äquator am größten ist.

### 6.2 Eigenschwingung eines elastischen Festkörpers

Taktgeber in Quarzuhren sind stabförmig geschnittene Quarzkristalle, die durch eine hochfrequente Wechselspannung aus einem Schwingkreis zu mechanischer Eigenschwingung angeregt werden und selbst wieder die Frequenz des Schwingkreises steuern. Dies ist ein Beispiel für einen Regelkreis; durch ihn wird die extreme Ganggenauigkeit dieser Art von Uhren möglich. Wie lang muss ein solcher Schwingquarz sein, damit er in der 2. longitudinalen Oberschwingung mit der Frequenz  $\nu = 1 \text{ MHz}$  schwingt? (Elastizitätsmodul und Dichte von Quarz:  $E = 7,5 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ ,  $\rho = 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ). *Hinweis:* Aus Gl. (7-13c) lässt sich damit die Schallgeschwindigkeit berechnen.

### 6.3 Gedämpfte Schwingungen

Ein gedämpftes Federpendel werde zu einer freien Schwingung angestoßen und schwinde langsam aus. Bei jeder vollen Schwingung, die 2 s dauere, gehen dabei durch Luft- und Lagerreibung 20% der Schwingungsenergie verloren.

- a) Wie groß ist die im Pegelmaß zweier aufeinanderfolgender Maximalauslenkungen ausgedrückte Dämpfung?
- b) Wie groß ist das logarithmische Dekrement?
- c) Wie groß ist der Dämpfungsfaktor  $\delta$  der Gl. (6-12)?

### 6.4 Erzwungene Schwingungen

Die Amplitude einer erzwungenen Schwingung ist durch Gl. (6-14a) gegeben. Es ist eine einfache Rechenaufgabe, die Frequenz ihres Maximums, die *Resonanzfrequenz* zu berechnen. (Bedenken Sie, dass  $A_0$  am größten ist, wenn der Ausdruck unter der Wurzel im Nenner am kleinsten ist, so genügt es, dieses Minimum zu suchen.)

Wie groß ist der daraus folgende Maximalwert von  $A_0$ ?

### 6.5 Mittelwerte periodisch sich ändernder Größen

Bei periodisch sich verändernden Größen ist es oftmals interessant zu wissen, wie groß ihre Mittelwerte sind. Mittelwerte von Funktionen werden allgemein nach Gl. (14-100) berechnet.

- a) *Ein Beispiel:* Die Bewegung des Herzens erfolgt periodisch, und es wird periodisch Blut ausgestoßen. Wichtig ist zu wissen, welche Menge von Blut über längere Zeitdauer gefördert wird. Dazu benötigen wir den (zeitlichen) Mittelwert des Blutstroms. Das ist derjenige Strom, der mit zeitlich konstanter Stärke fließen müsste, damit nach längerer Zeit die gleiche Blutmenge gefördert worden ist, wie durch die pulsierende Pumpe des Herzens.

Wie groß ist der Mittelwert des Blutstroms, wenn etwa 70 ml pro Herzschlag (*Schlagvolumen*) gepumpt werden, und die Pulsfrequenz  $100 \text{ min}^{-1}$  beträgt? Geben Sie ihn in Einheiten  $\text{l min}^{-1}$  und  $\text{ml s}^{-1}$  an.

*Hinweis:* Hier ist die Berechnung einfacher, wenn in Gl. (14-100) das Integral durch eine Summe ersetzt wird.

- b) Für den Mittelwert des Funktionswertes  $y$  einer harmonischen Funktion (Sinus, Cosinus) gilt allgemein  $\langle y \rangle = 0$ . (Beim Beispiel des Pendels ist das anschaulich klar: Sein Ausschlag erfolgt nach beiden Seiten in gleicher Weise, so dass der Mittelwert der Auslenkung Null ist, das Pendel sich also über längere Zeit nicht wegbewegt.) Beweisen Sie das allgemein für die Funktionen  $y = A \sin x$  und für  $y = A \cos x$ .

*Hinweis:* Da sich eine periodische Funktion nach jeder Periode wiederholt, genügt es, das Integral in Gl. (14-100) über eine Periode der Funktion zu erstrecken. (Im Anhang A 5 sind einige Integrale zusammengestellt.)

**7.1 Wellenlänge und Phase**

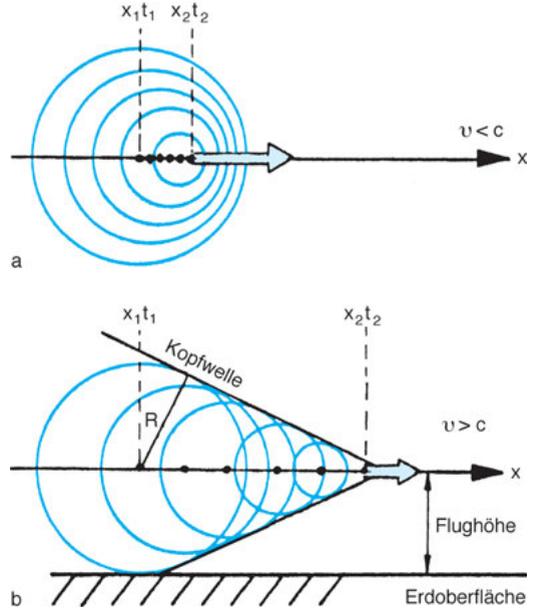
- a) Auf Mittelwelle sendet Radio Saarbrücken mit der Frequenz 1421 kHz, auf UKW mit 87,9 MHz. Wie groß sind die zugehörigen Wellenlängen?
- b) Zwei Pendel gleicher Frequenz  $\nu = 3$  Hz schwingen mit einer Phasendifferenz von  $\varphi_0 = \pi/3$ . Um welche Zeit  $\Delta t$  sind die Schwingungsbewegungen der beiden gegeneinander verschoben?

**7.2 Schallausbreitung**

Ein unter Wasser schwimmender Delphin stößt einen Ultraschall-Schrei aus und empfängt nach 7,5 ms ein von einem Hindernis reflektiertes Signal. Wie weit ist dieses Hindernis entfernt? (Die Bewegung des Delphins sei sehr klein, so dass seine Position während der Laufzeit des Signals als fest angenommen werden kann.)

**7.3 Überschall-Flugzeug**

In Abb. 24.1a ist gezeigt, wie von einer bewegten Quelle ausgehende Schallwellen aussehen. Dabei ist vorausgesetzt, dass  $v < c$ . Flugzeuge können aber schneller als der Schall sein. (Dem Verhältnis aus Fluggeschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit gibt man den Namen *Mach*. Beispielsweise



**Abb. 24.1** a) Die Geschwindigkeit  $v$  der Schallquelle ist kleiner als die Schallgeschwindigkeit  $c$ . Die Quelle sendet Kugelwellen aus; sie bewegt sich während der Zeit von  $t_1$  bis  $t_2$  vom Ort  $x_1$  zum Ort  $x_2$ . Für den Zeitpunkt  $t_2$  sind einige, während dieser Bewegung an verschiedenen Orten emittierte Kugelwellen gezeichnet. b) Die Schallwelle bewegt sich mit Überschallgeschwindigkeit ( $v > c$ ). Die Kugelwellen bleiben hinter der Quelle zurück; ihre Einhüllende, die Kopfwelle, bildet den Mach-Kegel.

spricht man von Mach 2, wenn  $v = 2c$ .) Dann fliegt die Quelle ihren eigenen Wellen davon, und es entsteht eine kegelförmige Wellenfront (*Mach-Kegel* oder *Kopfwelle*), die die in Abb. 24.1b skizzierte Form hat.

- a) Berechnen Sie, wie sich der Winkel  $\alpha$  des Kegels mit der Geschwindigkeit  $v$  verändert.
- b) Längs des Kegelmantels addieren sich die Schallamplituden zu sehr großen Werten auf (*Kopfwelle*); wenn der Kegelmantel die Erdoberfläche erreicht, hört man den *Überschall-Knall*, der Fensterscheiben zerspringen lassen kann. Wie weit ist ein mit Mach 2 in 1000 m Höhe fliegendes Flugzeug schon von einem Punkt  $z$  auf der Erde entfernt, den es überflogen hat, wenn diesen der Überschall-Knall trifft?

## 7.4 Empfindlichkeitsbereich des Ohres

Das Ohr kann in einem extremen Lautstärkebereich arbeiten, der von  $L_{N1} = 0$  Phon bis  $L_{N2} = 130$  Phon (sofortige Schädigung) reicht. Wir wollen dies für die Frequenz 1 kHz genauer untersuchen:

- Wie groß ist die Schallintensität in beiden Extremfällen?
- Wie groß ist die Auslenkungsamplitude der Luftteilchenbewegung in beiden Fällen? Vergleichen Sie diese mit dem Durchmesser eines Sauerstoffmoleküls von 0,24 nm.
- Wie groß ist die Schallwechseldruckamplitude in beiden Fällen? Vergleichen Sie mit dem Atmosphärendruck.

## 7.5 Akkorde

Die Waldstein-Sonate endet mit dem unten dargestellten Akkord

- Welche Namen haben die Töne?
- Welche Intervalle (zwischen den benachbarten Tönen) sind in dem Akkord enthalten?
- Welche Tonintervalle bilden die oberen 3 Töne zum tiefsten Ton?
- Der Kammerton  $a'$  hat die Frequenz 440 Hz. Der tiefste Ton des Akkordes liegt eine Sext tiefer. Berechnen Sie dessen Frequenz, und geben Sie dann mit Hilfe des Ergebnisses von c) die Frequenzen der anderen 3 Töne an!



## 7.6 Frequenz einer gespannten Saite

Haben Sie schon einmal eine Geige oder Gitarre gestimmt? Dann wissen Sie, dass man die Tonhöhe der Saiten variieren kann, indem man durch mehr oder weniger weites Aufwickeln auf den Wirbeln die elastische Zugspannung der Saiten verändert.

- Was geschieht dabei?
- Eine Geigensaite aus Stahl ist rund 33 cm lang. Welche Wellenlänge entspricht der

Grundschiwingung (die Enden der Saite sind fest eingespannt)? (s. Gl. (7-36a).)

- Die Schallgeschwindigkeit längs der Saite hängt von der Spann-Kraft  $F$  nach der Beziehung  $c = (F/m)^{1/2}$  ab, wobei  $l$  und  $m$  Länge und Masse der Saite bedeuten. (Die Dichte des Saitenmaterials ist  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ , der Durchmesser sei  $d = 0,3 \text{ mm}$ .) Wie groß muss dann die elastische Spannung sein, damit die Frequenz des Kammertons  $a$  (440 Hz) entsteht, die Saite also als  $a$ -Saite gestimmt ist?

## 8.1 Wärmekapazität eines Kalorimeters

Um die Wärmekapazität eines Kalorimeters zu messen, füllt man in dieses zunächst eine Menge kalten Wassers, gießt dann heißes Wasser hinzu und beobachtet den Temperatureausgleich.

Welche Größen müssen gemessen werden, um die Wärmekapazität des Kalorimeters bestimmen zu können?

## 8.2 Erwärmung eines Körpers

Ein PKW wird durch Vollbremsung aus der Geschwindigkeit  $v = 100 \text{ km h}^{-1}$  zum Stehen gebracht. Wie groß ist der Temperaturanstieg der Bremsscheiben, wenn während der Bremsung keine Wärme an die Umgebung abgegeben wird?

(Masse des PKW  $m_1 = 10^3 \text{ kg}$ ; Masse der Bremsscheiben  $m_2 = 15 \text{ kg}$ ; Spezifische Wärmekapazität des Materials der Bremsscheiben  $461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .)

## 8.3 Widerstandsthermometer

Ein Platin-Widerstandsthermometer hat bei  $0^\circ \text{C}$  einen Widerstand von  $10 \Omega$  und bei  $100^\circ \text{C}$  einen Widerstand von  $13,95 \Omega$ . Welche Temperatur  $t$  entspricht einem Widerstand von  $10,79 \Omega$ , wenn sich der Widerstand linear mit der Temperatur ändert?

## 9.1 Ausdehnung von Gasen

Die Luft in einem 8 m langen, 6 m breiten und 3 m hohen Raum wird von  $10^\circ \text{C}$  auf  $20^\circ \text{C}$  erwärmt. Der Luftdruck soll unverändert bleiben. Welches Gasvolumen entweicht

aus dem Raum? (Die Luft befinde sich im idealen Gaszustand.)

### 9.2 Adiabatische Kompression

Beim Dieselmotor wird die Zündtemperatur durch Kompression des Treibstoff-Gemisches erreicht. Der Ausgangsdruck sei  $p_1 = 1$  bar, der Enddruck  $p_2 = 40$  bar. Die angesaugte Luft habe eine Temperatur  $T_1 = 290$  K. Wie hoch ist die Endtemperatur, wenn adiabatische Kompression angenommen wird? ( $\kappa_{\text{Luft}} = 1,4$ .)

### 9.3 Sauerstoffverbrauch des Menschen

Das Atemvolumen eines Menschen betrage  $61 \text{ min}^{-1}$  bei einer Temperatur von  $310$  K. Der Partialdruck des Sauerstoffs in der Inspirationsluft ist  $197$  mbar und in der Expirationsluft  $152$  mbar. Wieviele Mole Sauerstoff werden pro Stunde verbraucht?

### 10.1 Innere Energie eines Gases

Wie groß ist die innere Energie eines einatomigen idealen Gases bei der Temperatur von  $300$  K?

### 10.2 Translationsenergie von Gasen

Wie groß ist die kinetische Translationsenergie

- aller Moleküle eines Mols  $E_M$ ,
- eines Moleküls  $E_m$  bei einem idealen Gas mit der Temperatur  $t = 0$  °C?

### 10.3 Arbeit, Wärmemenge, innere Energie eines Gases

In einem horizontal liegenden Zylinder mit reibungslos beweglichem Kolben befinde sich ein Mol eines zweiatomigen idealen Gases mit der Temperatur  $T = 273$  K. Das Gas wird auf  $T = 350$  K erwärmt. Dabei bleibt der Gasdruck konstant, d. h. gleich dem Außendruck.

- Wie groß ist die Volumenzunahme  $\Delta V$ ?
- Wie groß ist die vom Gas verrichtete Arbeit  $\Delta W$ ?
- Wie groß ist die Zunahme der inneren Energie  $\Delta U$ ?
- Wie groß ist die dem Gas zugeführte Wärmemenge  $\Delta Q$ ?

### 12.1 Energieumwandlung

Ein Automotor habe einen stündlichen Benzinverbrauch von  $12$  l bei einer mechanischen Leistungsabgabe von  $P = 40$  kW. Wie groß ist der Wirkungsgrad des Motors? ( $\rho_{\text{Benzin}} = 780 \text{ kg m}^{-3}$ ; Verbrennungswärme  $H_{\text{Benzin}} = 4,5 \cdot 10^7 \text{ J pro kg verbrannten Benzins.}$ )

### 12.2 Carnot'scher Kreisprozess

In einem Kreisprozess werden von einer Substanz  $5000$  J Wärme aufgenommen und  $3500$  J Wärme wieder abgegeben.

- Wie groß ist die während des Kreisprozesses abgegebene Arbeit?
- Wie groß ist die Leistung  $P$ , wenn der Kreisprozess  $10$ mal pro Sekunde durchlaufen wird?

### 12.3 Wärmepumpe

Ein Wohnhaus wird mit einer Wärmepumpe beheizt, wobei Wärme aus der Umgebungsluft ( $t_2 = 4$  °C) entnommen und an die Heizkörper ( $t_1 = 54$  °C) abgegeben wird. (Heizleistung bei  $t_1 = 35$  MJ pro Stunde.)

- Wie groß wäre der Wirkungsgrad  $\eta_w$  (Quotient aus abgegebener Wärme und aufgewandter Arbeit) der Anlage, wenn sie nach dem idealen Carnot'schen Kreisprozess funktionieren würde?
- Der in der Praxis erreichte Wirkungsgrad ist kleiner als  $\eta_w$ . Er wird als Leistungszahl  $\varepsilon$  bezeichnet, und es sei  $\varepsilon = 0,5\eta_w$ . Wie groß ist die Pumpleistung (in kW) der Wärmepumpe?

### 13.1 Energieabgabe des menschlichen Körpers

Die Luft, die ein Mensch einatmet, habe eine Temperatur von  $20$  °C und eine relative Feuchtigkeit von  $60\%$ . Die Luft verlässt die Lunge mit Körpertemperatur und einer relativen Feuchte von  $100\%$ .

(Eingeatmetes Luftvolumen pro Zeit  $61 \text{ min}^{-1}$ ; Luftdruck  $10^5$  Pa; Sättigungsdampfdruck des Wassers bei  $20$  °C  $23$  mbar, bei  $37$  °C  $63$  mbar.)

- Wie groß ist die Wärmeabgabe pro Stunde durch Erwärmung der Atemluft? (Un-

ter der Annahme, dass in der eingeatmeten Luft nur zweiatomige Gase vorhanden sind, ist  $C_{\text{mol,p}} = 7/2 R$ .)

- Wieviele Mole Wasserdampf werden pro Stunde in der Lunge gebildet?
- Wie groß ist die Wärmeabgabe pro Stunde durch den zusätzlich gebildeten Wasserdampf? (Verdunstungswärme des Wassers bei  $37^\circ\text{C}$ :  $4,30 \cdot 10^4 \text{ J mol}^{-1}$ .)

### 13.2 Hämolyse bei osmotischer Druckdifferenz

Eine 0,155 molare Kochsalzlösung ist mit den Erythrozyten isotonisch. In einer 0,069 molaren Kochsalzlösung kommt es zur Hämolyse der Erythrozyten. Man berechne den osmotischen Druck der Erythrozyten unter der Annahme, dass das NaCl vollständig dissoziiert, und die gesamte Druckdifferenz bei der Hämolyse wirksam wird. Man nehme eine Temperatur von  $T = 298 \text{ K}$  an.

### 13.3 Osmotischer Druck

Wie groß ist bei  $t = 15^\circ\text{C}$  der osmotische Druck einer Zuckerlösung, die pro Liter Wasser 10 g Zucker enthält? (Molare Masse des Zuckers:  $260 \text{ g mol}^{-1}$ .)

### 14.1 Vergleich von Coulomb- und Gravitationskraft

- Wie groß sind Coulomb- und Gravitationskraft zwischen zwei Protonen im Kern (Abstand ca. 1 fm) bzw. zwischen einem Proton im Kern und einem Elektron auf der 1. Bohr'schen Bahn des H-Atoms (Abstand  $a_0 = 0,0529 \text{ nm}$ )?
- Wie groß sind zum Vergleich die Gravitationskräfte zwischen Erde und Mond bzw. zwischen Erde und Sonne? (Abstände: s. Tab. 1.6; Massen: s. Tab. 2.1.)
- Wie groß ist im Bohr'schen Atommodell die stationäre Bahngeschwindigkeit des Elektrons auf der 1. Bohr'schen Bahn des H-Atoms? (Die Stationaritätsbedingung ist durch die Gleichheit der Zentrifugalkraft des Elektrons, Gl. (2-7), und der Coulombkraft zwischen Elektron und Proton, Gl. (14-1), gegeben.)

### 14.2 Elektrischer Widerstand

Ein Metalldraht aus Kupfer und ein Kohlefaden von je 1 m Länge mit einem Durchmesser von 1 mm sollen als Widerstands-Thermometer verwendet werden. An den Draht bzw. den Faden wird eine Gleichspannung von 10 mV angelegt (s. Tab. 14.2).

- Welche Ströme fließen jeweils bei  $20^\circ\text{C}$ ?
- Wie groß ist die Änderung der Stromstärke, wenn statt dessen bei  $30^\circ\text{C}$  gemessen wird?

### 14.3 Kompensatorische Spannungsmessung

Sie sollen durch kompensatorische Spannungsmessung (Abb. 24.2) die Leerlaufspannung einer Batterie  $U_x$  bestimmen. Für die Potentiometerschaltung stehen Ihnen eine zweite Batterie mit  $U_0 = 6 \text{ V}$  und  $R_i = 2 \Omega$  und ein Schiebewiderstand aus einem  $l_0 = 2 \text{ m}$  langen Cu-Draht mit Durchmesser 0,4 mm zur Verfügung. Angenommen, der Strom  $I_1$  würde 0, wenn Sie den Abgriffspunkt  $b$  auf Stellung  $l_1 = 20 \text{ cm}$  hätten,

- wie groß wären dann der Gesamtwiderstand des Cu-Drahtes, der Strom  $I_0$ , die Klemmenspannung  $U_K$  der Potentiometer-Batterie und die Batteriespannung  $U_x$ ?
- Schauen Sie sich die Resultate einmal genauer an: Können Sie etwas zur Verbesserung der Versuchsdurchführung vorschlagen?

### 14.4 Magnetfeld, Lorentz-Kraft

Eine Spule mit 100 Windungen pro 10 cm Länge wird von einem Strom der Stärke 5 A durchflossen.

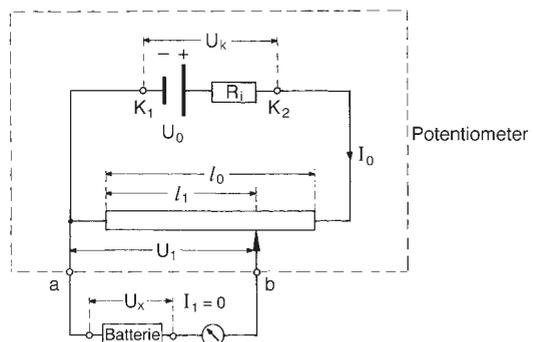


Abb. 24.2 Kompensatorische Spannungsmessung.

- a) Wie groß sind magnetische Feldstärke (in Oersted) und magnetische Induktion (in Tesla) im Zentrum der Spule?
- b) Wie groß ist die maximale Lorentz-Kraft, die ein Elektron in diesem Magnetfeld senkrecht zu seiner Flugrichtung erfährt, welches zuvor durch die Potentialdifferenz  $10^4$  V beschleunigt wurde?
- c) Wie groß ist der Krümmungsradius der Kreisbahn, auf die das Elektron dann abgelenkt wird?

### 14.5 Wechselstrom

Durch eine Dynamomaschine wird eine 50 Hz-Wechselspannung von 230 V erzeugt.

- a) Formulieren Sie die Zeitabhängigkeit dieser Spannung,  $U(t)$ .
- b) Wie groß ist die verbrauchte Wirkleistung, wenn die Wechselspannung an einen Wechselstromwiderstand gelegt wird, der aus Ohm'schem Widerstand  $100 \Omega$ , Kapazität  $10^{-3}$  F und Induktivität  $10^{-2}$  H besteht, die in Serie geschaltet sind?
- c) Wie groß ist die Wirkleistung, wenn Ohm'scher und induktiver Widerstand in Serie liegen und der Kondensator dazu parallel geschaltet ist?
- d) Wie groß ist die Eigenfrequenz eines aus oben angegebenen Ohm'schem, induktivem und kapazitivem Widerstand bestehenden Serienschwingkreises?
- e) Wie würde sich die Eigenfrequenz des Serienschwingkreises ändern, wenn man den Kondensator mit Wasser ( $\epsilon_{\text{rel}} = 81$ ) füllt und in die Spule einen Weicheisenkern ( $\mu_{\text{rel}} = 10^4$ ) schieben würde?

### 15.1 Elektrolyt

Beim Anlassen eines Autos liefert die Autobatterie kurzfristig (für ca. 2 s) einen Strom von ca. 80 A.

- a) Wieviele Sulfationen bzw. Wasserstoffionen bilden sich dabei in der Batterie?
- b) Wie groß ist die Gesamtmasse der gebildeten Wasserstoffionen?

### 15.2 Elektroschock

Es gibt eine Faustregel dafür, wie groß die Stromstärke  $I$  eines 50 Hz-Wechselstromes

ist, ab der bei einer Schockdauer  $\Delta t$  Herzflimmern einsetzen kann. Sie lautet:  $I = 0,116/(\Delta t)^{1/2}$ . Wenn ein Opfer bei trockenen Händen einen Körperwiderstand von  $10^4 \Omega$  bzw. bei feuchten Händen von  $800 \Omega$  hat,

- a) wie groß sind jeweils die Ströme, die durch seinen Körper fließen, wenn eine 50 Hz-Wechselspannung von 230 V zwischen den Händen liegt, und
- b) wie lange darf der Strom höchstens fließen, ohne dass Herzflimmern einsetzt?

### 15.3 Driftgeschwindigkeit und Beweglichkeit von Elektronen in Metallen

In einem elektrischen Leiter mit  $1 \text{ mm}^2$  Querschnitt fließe ein Strom der Stärke 6 A.

- a) Wie groß ist die Driftgeschwindigkeit der Elektronen? (Die Elektronendichte in Metallen beträgt ca.  $10^{23} \text{ cm}^{-3}$ .)
- b) Wie groß wäre die Driftgeschwindigkeit, wenn die Stromstärke von 6 A konstant gehalten wird, aber der Leiterquerschnitt nun  $1 \text{ cm}^2$  beträgt?
- c) Wie groß ist die Beweglichkeit der Elektronen, wenn es sich bei dem Leiter um Kupfer handelt? (Materialkonstante von Cu: s. Tab. 15.1.)

### 16.1 Messung biologischer Spannungen

Wie groß müsste bei dem durch Gl. (16-4) beschriebenen Beispiel der Innenwiderstand eines Voltmeters sein, damit der vom Messgerät registrierte Spannungswert höchstens um 1% von der Leerlaufspannung der Nervenzelle (ca. 100 mV) abweicht? (Die Nervenzelle besitzt als galvanische Spannungsquelle einen Innenwiderstand von ca.  $10 \text{ M}\Omega$ .)

### 16.2 Messbereichserweiterung von Ampere- und Voltmeter

- a) Ein Amperemeter mit  $0,5 \Omega$  Innenwiderstand ist für den Messbereich bis 1 A Vollausschlag ausgelegt. Was müssen Sie tun, um auch Ströme bis 10 A messen zu können?
- b) Ein Voltmeter mit  $5 \text{ k}\Omega$  Innenwiderstand ist für den Messbereich bis 1 V Vollausschlag ausgelegt. Was müssen Sie tun, um auch Spannungen bis 10 V messen zu können?

schlag ausgelegt. Was müssen Sie tun, um auch Spannungen bis 100 V messen zu können?

### 16.3 Überlegungen zur Aufnahme eines EKG

- Weshalb ist es sinnvoller, ein EKG mit zwei Elektroden als nur mit einer Elektrode aufzunehmen?
- Was könnten die Gründe dafür sein, wenn bei einer Messung anstelle der erwarteten Potentialdifferenzen von ca. 1 mV plötzlich Rauschsignale von 10 mV und mehr auftreten, und wie lassen sich diese Störeffekte vermeiden?

### 16.4 EEG-Aufnahme

EEG-Signale sind etwa 10mal kleiner (die Spannungen betragen nämlich nur ca. 0,1 mV) als EKG-Signale. Deshalb fallen die in Aufgabe 16.3b besprochenen möglichen Störeffekte noch stärker ins Gewicht.

- Angenommen, dem EEG-Signal sei ein Rauschsignal von 10 mV überlagert. Wie groß ist dann das mit dem Oszillograph mit Eingangswiderstand  $1\text{ M}\Omega$  mitgemessene Rauschsignal, wenn das EEG-Signal mit 2 Elektroden a und b aufgenommen wird, an denen der Hautwiderstand  $R_a = 1\text{ k}\Omega$  und  $R_b = 10\text{ k}\Omega$  beträgt?
- Wie lässt sich das mitgemessene Rauschsignal um den Faktor 10 verringern?

### 16.5 Wheatstone'sche Brückenschaltung

- Wieviele bekannte Ohm'sche Widerstände benötigen Sie, um mit der Wheatstone'schen Brückenschaltung (Abb. 16.13) einen unbekanntem Widerstand zu messen?
- Wenn der Schiebewiderstand der Brücke die Länge  $l = 1\text{ m}$  besitzt, bei erfolgtem Nullabgleich der verschiebbare Abgriff die Marke 0,5 m (0,75 m) anzeigt, und der Referenzwiderstand  $R = 10\ \Omega$  besitzt, wie groß ist dann der unbekanntem Widerstand  $R_x$ ?
- Die Widerstände sollen die Werte  $R_x = 10\ \Omega$  und  $R = 20\ \Omega$  haben. Der Schiebewiderstand sei ein 2 m langer Cu-Draht.

Bei welcher Marke des verschiebbaren Abgriffs wird Nullabgleich erreicht?

### 16.6 Spannungsversorgung von Röntengeräten

- Zur Spannungsversorgung der Röntgenröhre in einem Röntgengerät werden als Heiz-Spannung für die Glühkathode 5 V und als Beschleunigungs-Spannung  $10^5\text{ V}$  benötigt. Wie müssen sich die Windungszahlen von Primär- und Sekundärspule der beiden zum Betrieb des Röntgengeräts notwendigen Transformatoren verhalten, falls primärseitig 230 V Netzspannung zur Verfügung steht?
- Wie groß ist die Laufzeit von Elektronen, die auf einer Strecke von 0,1 m durch eine Spannung von  $10^5\text{ V}$  beschleunigt werden? Wie groß ist das Verhältnis dieser Laufzeit  $t$  zur Schwingungsdauer  $T$  einer 50 Hz-Wechselspannung? (Relativistische Effekte seien bei dieser Abschätzung vernachlässigt.)

### 17.1 Lichtquellen

Natriumdampflampen senden hauptsächlich sichtbare Strahlung in einem engen Spektralbereich um  $\lambda = 589\text{ nm}$  aus; ihr Wirkungsgrad als Lichtquelle ist sehr hoch, d. h. die zur Aufrechterhaltung der Gasentladung benötigte elektrische Energie wird weitgehend in Lichtenergie umgewandelt. Dabei ist der Wirkungsgrad definiert als (Lichtenergie pro Zeit)/(elektrische Energie pro Zeit). Sie werden als technische Lampen zur Beleuchtung von Lagerplätzen, Bahnhöfen etc. eingesetzt.

- Wieviele Photonen sendet eine solche Lampe pro Sekunde aus, wenn 20 W elektrische Leistung zugeführt wird und der Wirkungsgrad 50% beträgt? (s. Gl. (17-3).)
- Welche Farbe entspricht der angegebenen Wellenlänge? Wie sieht ein Gemälde in diesem Licht aus?

### 17.2 Farben

Aus dem Malunterricht wissen Sie, dass man Grün erhält, wenn man gelbe und blaue Wasserfarbe zusammenmischt.

Nun stellen wir ein gelbes und ein blaues Farbglasfilter hintereinander auf und lassen weißes Licht einfallen. Wieso erhalten wir kein grünes Licht?

### 17.3 Thermische Strahlung des menschlichen Körpers

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz (Gl. (17-19)) ergibt die thermische Gesamtstrahlung des *Schwarzen Körpers*. Für eine größenordnungsmäßige Abschätzung kann man damit auch die thermische Strahlung des Menschen bestimmen, wenn man berücksichtigt, dass das Absorptionsvermögen, und nach dem Kirchhoff-Strahlungsgesetz daher auch das Emissionsvermögen der Haut kleiner ist als beim Schwarzen Körper. Deshalb setzen wir für die Konstante  $\sigma$  in Gl. (17-19) den halben Wert des Schwarzen Körpers ein. Die Körperoberfläche sei  $2 \text{ m}^2$ .

- Welche Gesamtstrahlungsleistung wird vom Körper bei einer Körperoberflächentemperatur von  $35^\circ\text{C}$  abgegeben? Welche Energiemenge wird insgesamt während eines Tages emittiert?
- Um wieviel Prozent erhöht sich die Gesamtstrahlungsleistung, wenn bei einem Fieberanfall die Hauttemperatur auf  $39^\circ\text{C}$  steigt?
- Die in a) und b) sich ergebenden Energieverluste sind beträchtlich. Wieso müssen sie nicht voll bei der Bestimmung des Grundumsatzes berücksichtigt werden?

### 17.4 Chemische Wirkung des Lichts

Bei Absorptionsvorgängen verhält sich Licht wie ein Strom von Lichtquanten, die mit einzelnen Atomen oder Molekülen wechselwirken. So kann z. B. ein HJ-Molekül durch Absorption eines Photons geeigneter Wellenlänge dissoziiert werden.

Welche Wellenlänge muss das Licht haben, um *Photo-Dissoziation* zu bewirken, wenn die Dissoziationsenergie (zur Übung in alten Einheiten)  $E_D = 70 \text{ kcal mol}^{-1}$  beträgt?

### 17.5 Arbeitsplatzbeleuchtung

*Blendung* an einem Arbeitsplatz wird vermieden, wenn die *Leuchtdichte* der den Platz

beleuchtenden Lampe, d. h. der von der Flächeneinheit der Lampe in die Raumwinkel-einheit ausgestrahlte Lichtstrom, den Wert  $2000 \text{ cd m}^{-2}$  nicht überschreitet. Daher umgibt man die eigentliche Lichtquelle (Glühlampe o. Ä.) beispielsweise mit einer Mattglaskugel oder einem Lampenschirm.

Wie groß muss eine solche Mattglaskugel sein, um bei einer Glühlampe von  $100 \text{ W}$ , die einen Lichtstrom von ca.  $1500 \text{ lm}$  ausstrahlen soll, Blendung zu vermeiden? (Wir wollen der einfacheren Abschätzung halber annehmen, dass die Lampe in alle Richtungen gleichmäßig ausstrahlt.)

### 18.1 Interferenzfarben

Zwischen Glas gerahmte Dias zeigen oft farbige Ringe (*Newton'sche Ringe*) oder Streifen. Diese entstehen, wenn sich eine dünne Luftschicht zwischen Film und Glas befindet und die dort an den Grenzflächen hin- und herreflektierten Lichtwellen mit dem durchgehenden Licht interferieren.

- Wie dick muss die Luftschicht zwischen Innenseite des Deckglases und Filmoberfläche im Vergleich mit der Wellenlänge  $\lambda$  mindestens sein, damit in Durchsicht ein farbiger Streifen auftritt? (Greifen Sie dazu ein Lichtbündel heraus, das an der Oberfläche des Films reflektiert wird, zurückläuft, dann an der Innenseite des Deckglases nochmals reflektiert wird und nun mit dem nichtreflektierten Anteil des Lichtes interferiert.)
- Wieso sind die Interferenzstreifen farbig und nicht einfach hell und dunkel?
- Durch Einlegen eines  $0,1 \text{ mm}$  dicken Papprähmchens zwischen Film und Deckglas verschwinden die farbigen Streifen. Wieso?

### 18.2 Brechung

- Wieso kann man ohne Taucherbrille unter Wasser nicht scharf sehen? (Siehe dazu auch Kap. 19.5 und Gl. (19-14).)
- Welche Wirkung hat die Taucherbrille?

### 18.3 Absorption

Ein Laserstrahl der Lichtleistung 1 W fällt durch eine 1 cm dicke Küvette mit einer Flüssigkeit, deren Absorptionskonstante für die Wellenlänge des Laserlichtes den Wert  $K = 2 \text{ cm}^{-1}$  hat. Wie groß ist die Wärmeenergie, die dadurch in der Küvette pro Sekunde erzeugt wird? (Die Reflexionsverluste an den Küvettenwänden seien vernachlässigt.)

### 18.4 Streuung und Absorption von Licht

- Können Sie sich denken, wieso die Gefahr eines Sonnenbrandes am späten Nachmittag geringer ist als mittags und im Winter geringer ist als im Sommer? (Versuchen Sie, dies qualitativ aus Kap. 18.4.2 zu erklären!)
- Wieso kann man nicht Lichtstrahlen anstelle von Röntgenstrahlen zur Durchleuchtung des menschlichen Körpers verwenden? (s. auch Kap. 21.3.)

### 18.5 Polarimeter

Zur Harnzuckerbestimmung nutzt man die optische Aktivität der Zuckermoleküle aus. Die spezifische Drehung (Gl. (18-17)) von Rohrzucker ist für Licht der Natriumdampf-Lampe ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ )  $\alpha_0 = 66,5^\circ \text{ m}^{-1} (\text{g/l})^{-1}$ , wobei die Länge der Küvette in Meter, die Konzentration in Gramm Zucker pro Liter Lösung eingesetzt wird. Wie hoch ist die Konzentration einer Zucker-Lösung, welche im Polarimeter bei 10 cm Küvettenlänge eine Drehung von  $20^\circ$  bewirkt?

### 18.6 Materiewellen und elektromagnetische Wellen

- Welche Materiewellenlänge hat ein Elektronenstrahl, der in einer Röntgenröhre durch eine Beschleunigungsspannung von 10 kV beschleunigt wurde? (Gln. (14-3a) und (18-18)). Für eine mäßig genaue Abschätzung können wir relativistische Änderungen der Elektronenmasse (Kap. 2.1) außer acht lassen.
- Diese Elektronen treffen in der Röntgenröhre auf die Anode. Dabei wird ihre Be-

wegungsenergie zu einem mehr oder weniger großen Anteil in Röntgenstrahlung, d. h. in elektromagnetische Wellen umgesetzt. Welches ist die kürzeste Wellenlänge (*Grenzwellenlänge*) der dabei entstehenden Röntgenbremsstrahlung (Gl. (21-12))?

### 19.1 Doppler-Effekt beim Licht

Die Gln. (7-19 bis 7-24) des Dopplereffektes gelten nicht für elektromagnetische Wellen, da ja aus der Relativitätstheorie (Kap. 1.2.1) folgt, dass auch das von einer *bewegten* Quelle ausgesandte Licht sich mit der unveränderten Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausbreitet. Die Unterscheidung zwischen den Fällen ruhender Beobachter/bewegte Quelle und bewegter Beobachter/ruhende Quelle verliert dabei ihren Sinn, und nur die *Relativbewegung* ist wichtig. Daher muss Gl. (1-13) in die Formeln für den Doppler-Effekt eingebaut werden. Bei einer sich mit der Geschwindigkeit  $v$  vom Beobachter wegbewegenden Quelle gilt dann:

$$v = v_0 \frac{1 - v/c}{(1 - (v/c)^2)^{1/2}}.$$

Aus der beobachteten Verschiebung von Spektrallinien ferner Galaxien (*Rotverschiebung*) kann man auf eine Expansion des Weltalls schließen, wenn man die Ursache der Verschiebung im Doppler-Effekt sieht. Nach der Theorie von *Hubble* ist dabei die Expansionsgeschwindigkeit um so größer, je größer die Entfernung  $s$  vom Beobachter ist:  $v = Hs$ .  $H$  ist die *Hubble-Konstante* mit dem Zahlenwert  $H = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ .

- Wie schnell bewegt sich eine Galaxie von der Erde weg, wenn eine Spektrallinie des von ihr emittierten Wasserstoffspektrums bei  $\lambda = 510 \text{ nm}$  statt bei  $\lambda_0 = 486,1 \text{ nm}$  (wie in irdischen Experimenten) beobachtet wird?
- Wie weit ist diese Galaxie von der Erde entfernt? Wieviele Lichtjahre?

### 19.2 Reflexion

- Wieso erscheinen die Spiegelbilder von Wolken, Bäumen usw. in einem ruhigen See dunkler als die Gegenstände selbst?

- b) Schutzanzüge für Arbeiter in Gießereien und für Feuerwehrleute sind meist mit einer dünnen Metallschicht überzogen. Warum?
- c) Bei durchsichtigen Stoffen wird durchfallendes Licht nur durch Reflexion geschwächt. (Genauer trifft das nur bei glatten Oberflächen zu; andernfalls wird das Licht auch gestreut.) Wieviel Prozent der auf ein Glasfenster fallenden Lichtleistung wird an den beiden Grenzflächen insgesamt reflektiert? Der Brechungsindex des Glases sei  $n = 1,51$ . (Zur einfacheren Abschätzung wollen wir annehmen, das Licht falle nur senkrecht auf die Scheibe. Dann gilt Gl. (19-4a) für das Reflexionsvermögen.)
- a) Wie groß ist die Brechkraft einer konkav-konvexen Linse (Brechungsindex  $n = 1,6$ ) mit  $r_1 = 20$  cm,  $r_2 = 50$  cm? (s. Abb. 19.21). Welche Fehlsichtigkeit lässt sich damit korrigieren? (Zum Vorzeichen von  $r$  s. Kap. 19.4.5.)
- b) Wie groß ist die Brechkraft einer konvex-konkaven Linse mit  $r_1 = -20$  cm und  $r_2 = -50$  cm? (s. Abb. 19.22). Welche Fehlsichtigkeit lässt sich damit korrigieren?
- c) Eine der beiden Oberflächen eines Brillenglases ( $n = 1,6$ ) sei asphärisch gekrümmt, und zwar so, dass sie in zwei zueinander senkrechten Ebenen die unterschiedlichen Krümmungsradien  $r_1 = 30$  cm und  $r_2 = 25$  cm hat. Die andere Oberfläche sei sphärisch gekrümmt mit  $r_2 = 1$  m. Wie groß ist die astigmatische Differenz dieses Brillenglases?

### 19.3 Brechung

Im Prinzip kann man im Wasser stehende Forellen mit der Hand fangen. Versuchen Sie das schräg vom Ufer aus, so greifen Sie bestimmt daneben. Wieso? Sagen Sie nicht, es läge nur daran, dass die Forelle schneller ist. Wie können Sie es besser machen?

### 19.4 Linsengesetze

- a) Wirkt eine Glaskugel (Brechungsindex 1,5) in Luft wie eine Sammell- oder wie eine Zerstreuungslinse?
- b) Wirkt eine Luftblase in Wasser wie eine Sammell- oder wie eine Zerstreuungslinse?
- c) Unter welchen Umständen wirkt die Glaskugel als Zerstreuungslinse?

Am einfachsten können Sie Ihre Meinung mit Hilfe von Gl. (19-12) begründen, die allerdings nur qualitativ richtige Aussagen liefert, weil in allen Fällen keine dünne Linse vorliegt.

### 19.5 Brillen

Es ist üblich, die Brechkraft von Brillengläsern aus ihren Krümmungsradien zu bestimmen. (Dazu muss freilich der Brechungsindex des Glases bekannt sein.) Zur Verminderung der Abbildungsfehler sind Brillengläser meist nicht einfach bikonvex oder bikonkav, sondern konkav-konvex oder konvex-konkav gekrümmt.

### 19.6 Auge

Ist das Bild einer 25 m von einem Beobachter entfernten, 170 cm großen Person, das auf der Netzhaut des Auges entsteht, a) aufrecht oder umgekehrt, b) reell oder virtuell, c) vergrößert oder verkleinert? Begründen Sie Ihre Meinung. Wie groß ist das Bild?

(Für eine exakte Rechnung müssen die Kardinalelemente (Kap. 19.4.7) des Auges berücksichtigt werden. Für eine näherungsweise Abschätzung genügt es aber, das Abbildungssystem durch eine einzelne dünne Linse zu ersetzen, deren Brennweite etwa 23 mm beträgt, und dann Gl. (19-11) anzuwenden.)

### 19.7 Auflösungsvermögen des Auges

Benachbarte Sehzellen in der Netzhautgrube haben einen Abstand von etwa  $5 \mu\text{m}$ . Das ist dem Abbildungssystem des Auges optimal angepasst. Dazu folgende Frage: Wie groß ist der Durchmesser  $2R$  des Beugungsscheibchens (d. h. des durch das erste Beugungsminimum (vgl. Kap. 18.2.3, Tab. 18.1) erzeugten dunklen Ringes) auf der Netzhaut bei Abbildung einer weit entfernten punktförmigen Lichtquelle mit dem Auge?

Der Pupillendurchmesser sei  $2r = 3$  mm, die Brennweite des Auges  $f = 23$  mm, der

Brechungsindex des Glaskörpers  $n = 1,34$  und die Wellenlänge des Lichtes 500 nm.

### 20.1 Auflösungsgrenze des Lichtmikroskops

- Wie hängt die Auflösungsgrenze  $\delta$  eines Lichtmikroskops von der Vergrößerung  $V$  (d. h. dem verwendeten Objektiv) ab? Berechnen Sie  $\delta$  für ein hochvergrößerndes Objektiv ( $V_1 = 100$ fach, numerische Apertur  $NA = 0,5$ ) und für ein schwach vergrößerndes Objektiv ( $V_2 = 25$ fach,  $NA = 0,1$ ). Als typische Lichtwellenlänge verwenden wir  $\lambda = 600$  nm.
- Sie fotografieren die bei Verwendung der beiden Objektive entstehenden Bilder und lassen das mit dem schwach vergrößernden Objektiv entstehende Bild fotografisch 4fach nachvergrößern. Damit erhalten Sie in beiden Fällen die Gesamtvergrößerung  $V_1$ . Haben die beiden Bilder nun gleiches  $\delta$ ?
- Sie verwenden nun zusammen mit dem schwach vergrößernden Objektiv ein 4mal stärkeres Okular als mit dem stark vergrößernden Objektiv. Auch damit ist die Gesamtvergrößerung in beiden Fällen gleich. Haben nun beide Kombinationen von Objektiv und Okular gleiches  $\delta$ ? Ist es daher besser, ein schwaches Objektiv mit einem starken Okular zu kombinieren, oder umgekehrt, ein starkes Objektiv zusammen mit einem schwachen Okular zu verwenden?

### 20.2 Zweistrahphotometer

- Leiten Sie die Gl. (20-6) selbst her, um sich mit der Funktionsweise des Zweistrahphotometers vertraut zu machen.
- Bei gelbem Licht ( $\lambda = 600$  nm) soll ein absorbierender Stoff in wässriger Lösung die spezifische Absorptionskonstante (s. Gl. (18-10))  $K_{sp} = 5 \text{ m}^{-1} (\text{kg m}^{-3})^{-1} = 5 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^2$  haben, wobei die Konzentration in kg gelöstem Stoff pro  $\text{m}^3$  Lösung gemessen ist. Wie groß ist die Konzentration  $C$  einer unbekanntenen Lösung dieses Stoffes, wenn bei einer Küvettenlänge von

10 mm ein Unterschied von 20% zwischen den Intensitäten  $I_{\text{Probe}}$  und  $I_{\text{Vergleich}}$  gemessen wird?

### 20.3 Wechseloptiken

- Sie fotografieren einen 50 cm großen Hund, der Sie aus einer Entfernung  $a = 5$  m anbellt, mit einer Kleinbildkamera, und zwar einmal mit einem Weitwinkelobjektiv (Brennweite  $f_1 = 28$  mm), einmal mit einem Normalobjektiv ( $f_2 = 50$  mm) und einmal mit einem Teleobjektiv ( $f_3 = 135$  mm). Wie groß kommt der Hund jeweils auf den Film?
- Wie weit müssten Sie sich dem Hund nähern, um ihn mit Weitwinkel ebenso groß auf den Film zu bekommen, wie mit dem Teleobjektiv aus 5 m Entfernung?

### 21.1 Umwandlung von Masse in Strahlungsenergie

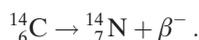
Die Entfernung Sonne–Erde beträgt  $1,5 \cdot 10^{11}$  m. Bei senkrechtem Strahlungseinfall erhält die Erde (oberhalb der Atmosphäre) die Strahlungsintensität  $I = 1,36 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2}$  (Solarkonstante). Wieviel Materie muss pro Sekunde auf der Sonne umgewandelt werden, um die abgegebene Strahlungsenergie zu decken?

### 21.2 Kernbindungskräfte

In einem Atomkern, der aus mehreren Nucleonen besteht, haben zwei Protonen den Abstand  $r = 10^{-15}$  m. Wie groß ist die Coulomb-Kraft  $F_C$ , mit der sich die Protonen gegenseitig abstoßen? Was folgt für die Kernbindungskräfte aus der Tatsache, dass der Kern trotzdem stabil ist?

### 21.3 Altersbestimmung durch Messung des Gehaltes an radioaktivem Kohlenstoff

$^{14}\text{C}$  zerfällt nach folgender Kernreaktionsformel:



Das Holz lebender Bäume enthält soviel  $^{14}\text{C}$ , dass sich im Mittel 15,3 Zerfallsakte je Minute

und je Gramm Kohlenstoff ereignen. Wie alt ist Holz, bei dem sich nur noch 12,5 Zerfallsakte je Minute und je Gramm Kohlenstoff ereignen? (Halbwertszeit von  $^{14}\text{C}$ :  $T_{1/2} = 5568$  Jahre.)

#### 21.4 Bestimmung des Kaliumgehaltes

Wegen seines Gehaltes an radioaktivem  $^{40}\text{K}$  emittiert ein Gramm natürliches Kalium pro Sekunde im Mittel 3,01 Gammaquanten von 1,5 MeV. Wie groß ist der Kaliumgehalt eines Menschen, wenn bei der Messung 84 Gammaquanten von 1,5 MeV registriert werden und der Detektor 21 % der vom ganzen Körper emittierten Gammaquanten erfasst?

#### 21.5 Anzahl der Kernumwandlungen bei einem radioaktiven Präparat

Das radioaktive Isotop  $^{33}\text{P}$  zerfällt mit einer Halbwertszeit von 25 d unter Aussendung eines Elektrons.

Wieviele Elektronen werden von  $m = 1 \mu\text{g}$  des Phosphorisotops am ersten Tag emittiert?

#### 21.6 Radioaktives Gleichgewicht

In einem in der Medizin häufig verwendeten Radionuklidgenerator (Mutter-Tochter-System) entsteht aus dem langlebigen  $^{113}\text{Sn}$  das  $^{113\text{m}}\text{In}$  mit einer Halbwertszeit von 1,66 h. In dem Generator befinde sich eine Aktivität von 1,85 GBq an  $^{113}\text{Sn}$ . Bei  $t = 0$  werde das  $^{113\text{m}}\text{In}$  vollständig eluiert. Welche Aktivität kann nach 3 h erneut eluiert werden?

#### 21.7 Radioaktive Markierung, Blutvolumenbestimmung

Bei einem Patienten wird eine geringe Menge seiner eigenen Erythrozyten mit  $^{51}\text{Cr}$  markiert und reinjiziert. Die in den Körperkreislauf reinjizierte Aktivität  $A$  wird zuvor mit  $60000 \text{ Imp min}^{-1}$  gemessen. Nach Gleichver-

teilung der markierten Erythrozyten wird eine Blutprobe von  $1 \text{ cm}^3$  entnommen, die eine Aktivität  $a$  von  $12 \text{ Imp min}^{-1}$  hat. Wie groß ist das Blutvolumen  $V$  des Patienten?

#### 21.8 Energiegewinnung durch Fusion

- Wie groß ist die Energie  $E$ , die frei wird, wenn zwei Deuteronen sich zu einem Heliumkern vereinigen?
- Welche Energie  $E$  könnte man je kg Helium gewinnen?
- Wieviel Tonnen Kohle müsste man verbrennen, um die gleiche Energie zu erhalten?

(Mittlere Bindungsenergie pro Nukleon beim Deuteron  $E_{\text{D}} = 1,09 \text{ MeV}$ ; mittlere Bindungsenergie pro Nukleon beim Helium  $E_{\text{He}} = 7,06 \text{ MeV}$ ; relative Atommasse  $m_{\text{He}} = 4,0026$ ; Heizwert  $H$  der Kohle  $2,85 \cdot 10^7 \text{ J kg}^{-1}$ ).

#### 21.9 Strahlendosis

In der Leber ( $m = 1,5 \text{ kg}$ ) eines Patienten werde zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Menge  $^{32}\text{P}$  mit der Aktivität 1 MBq aufgenommen.  $^{32}\text{P}$  hat eine Halbwertszeit von 14,3 Tagen und emittiert  $\beta$ -Strahlen einer mittleren Energie  $\bar{E}_{\beta}$  von 0,58 MeV. Wie groß ist die Energiedosis  $D$ , wenn das  $^{32}\text{P}$  vollständig in der Leber verbleibt und die  $\beta$ -Strahlen vollständig absorbiert werden?

#### 21.10 Beschleunigung von Teilchen

In einem Linearbeschleuniger werden Elektronen in hintereinandergeschalteten Stufen beschleunigt. Gesamtbeschleunigungsspannung ist  $U = 20 \text{ MV}$ . Um welchen Faktor ist die Masse der beschleunigten Elektronen größer als ihre Ruhemasse?

## 24.2 Lösungen

- 1.1 a) Mit Gl. (1-2a) berechnen wir die relativistische Zeitdehnung

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}}{\sqrt{1 - \frac{(4 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1})^2}{(3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2}}} = 252288002,2 \text{ s}.$$

Die Borduhren gehen also gegenüber Erduhren um 2,2 s nach.

- b) Mit der Gleichung für die relativistische Längenkontraktion berechnen wir

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 100 \text{ m} \cdot 0,999999991 = 99,9999991 \text{ m}.$$

Damit scheint einem Erdbewohner das Raumschiff um 0,9  $\mu\text{m}$  kürzer.

- 1.2 a)  $\Omega = \frac{A}{r^2}$  (Gl. 1-6)

$$= \frac{(0,05 \text{ m})^2 \pi}{1 \text{ m}^2} \text{ sterad} = \underline{\underline{25 \cdot 10^{-4} \pi \text{ sterad}}}.$$

b)  $\Omega = \frac{(0,05 \text{ m})^2 \pi}{5^2 \text{ m}^2} \text{ sterad} = \underline{\underline{10^{-4} \pi \text{ sterad}}}.$

c)  $\Omega = \underline{\underline{4 \pi \text{ sterad}}}.$

- 1.3 a) Für die geradlinig gleichförmig beschleunigte Bewegung gilt als Spezialfall die Gl. (1-14):

$$a = \frac{v}{t} = \frac{100 \text{ m s}^{-1}}{3,6 \cdot 5 \text{ s}} = \underline{\underline{5,56 \text{ m s}^{-2}}}.$$

- b) Bei der gleichförmigen Kreisbewegung gilt Gl. (1-25):

$$a = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{100}{3,6}\right)^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \frac{1}{20 \text{ m}} = \underline{\underline{38,58 \text{ m s}^{-2}}}.$$

- c) Der geradlinig gleichförmige Abbremsvorgang wird wie die geradlinig gleichförmig beschleunigte Bewegung durch  $a = v/t$  beschrieben:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{(2sg)^{1/2}}{t} = \frac{(2 \cdot 1 \text{ m} \cdot 9,8 \text{ m s}^{-2})^{1/2}}{3,6 \cdot 5 \text{ s}} = \underline{\underline{8,85 \text{ m s}^{-2}}}.$$

- 2.1 a) Für die geradlinig gleichförmige Abbremsung gelten entsprechende Gesetze wie für die geradlinig gleichförmig beschleunigte Bewegung. Der Bremsweg lässt sich aus Weg-Zeit-Gesetz  $s = \frac{a}{2} t^2$ , Gl. (1-29), bzw. Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz  $v = at$ , Gl. (1-28d), berechnen. Aus diesen beiden Gesetzen folgt durch Eliminieren der Zeit eine Beziehung zwischen negativer Beschleunigung, Bremsweg und Geschwindigkeit:  $a = v^2/(2s)$ . Diese negative Beschleunigung eingesetzt in Gl. (2-2) liefert schließlich die Kraft, mit der der Stein den Körper trifft:

$$F = m \frac{v^2}{2s} = 0,05 \text{ kg} \cdot \frac{(4 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = \underline{\underline{200 \text{ N}}}.$$

b)  $0,05 \text{ kg} \cdot \frac{(4 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = \underline{\underline{20 \text{ N}}}.$

- 2.2** Beim Start der Rakete sind  $v_{\text{Anfang}}$  und  $t_{\text{Anfang}}$  Null. Die erreichten Endwerte  $v_{\text{Ende}}$  und  $t_{\text{Ende}}$  bezeichnen wir mit  $v$  bzw.  $t$ . Damit folgt aus Gl. (1-28c):

$$v = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t \left( \frac{1}{2} \text{ m s}^{-3} \right) t dt = \frac{1}{2} \text{ m s}^{-3} \int_0^t t dt = \left[ \left( \frac{1}{4} \text{ m s}^{-3} \right) t^2 \right]_0^{600\text{s}}$$

$$= \frac{1}{4} (600^2 - 0^2) \text{ m s}^{-1} = \underline{\underline{9 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}}}.$$

Entsprechend erhalten wir für den zurückgelegten Weg:

$$s = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t \left( \frac{1}{4} \text{ m s}^{-3} \right) t^2 dt = \frac{1}{4} \text{ m s}^{-3} \int_0^t t^2 dt = \frac{1}{12} (600^3 - 0^3) \text{ m} = \underline{\underline{1,8 \cdot 10^7 \text{ m}}}.$$

- 2.3** Der statische Druck ist durch Gl. (2-8) definiert:

$$\text{a) } p = \frac{F}{A} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m s}^{-2}}{0,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = \underline{\underline{9,8 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 98 \text{ bar}}}.$$

$$\text{b) } p = \frac{1000 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m s}^{-2}}{700 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = \underline{\underline{1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,4 \text{ bar}}}.$$

- 2.4** Aus Gln. (1-25) und (2-7) folgt für die Zentrifugalkraft, die auf das Auto einwirkt:

$$F_T = \frac{v^2}{r} m = \left( \frac{100 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} \right)^2 \cdot \frac{1000 \text{ kg}}{100 \text{ m}} = 7716 \text{ N}.$$

Die Haftreibung ergibt sich aus Gl. (2-22):

$$R_0 = \mu_0 N = 1 \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m s}^{-2} = \underline{\underline{9800 \text{ N (trocken)}}}.$$

$$R_0 = 0,7 \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m s}^{-2} = \underline{\underline{6860 \text{ N (nass)}}}.$$

Da nur bei trockener Straße die Haftreibung größer ist als die Zentrifugalkraft, schleudert das Auto bei nasser Straße.

- 3.1** a) Ersparnis pro Tag =  $\frac{(10500 - 8400) \text{ kJ d}^{-1}}{39 \text{ kJ g}^{-1}} = \underline{\underline{53 \text{ g d}^{-1}}}$ .

$$\text{Fastenzeit} = \frac{5,3 \text{ kg}}{53 \text{ g d}^{-1}} = \underline{\underline{100 \text{ d}}}.$$

$$\text{b) Hubarbeit (Gl. (3-5))} = mgh = 50 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m s}^{-2} \cdot 0,5 \text{ m} = \underline{\underline{245 \text{ J}}}.$$

$$\text{Energieinhalt von 5,3 kg Fett} = 5,3 \text{ kg} \cdot 39 \text{ kJ g}^{-1} = \underline{\underline{2,067 \cdot 10^8 \text{ J}}}.$$

$$\text{Anzahl der Hübe} = \frac{2,067 \cdot 10^8 \text{ J}}{245 \text{ J}} = \underline{\underline{843673}}.$$

- 3.2** Auto:  $E = 2 \text{ Liter} \cdot 32560 \text{ kJ Liter}^{-1} = \underline{\underline{65120 \text{ kJ}}}$ .

$$\text{Fußgänger: } E = 4 \cdot 3600 \text{ s} \cdot 70 \text{ J s}^{-1} = \underline{\underline{1008 \text{ kJ}}}.$$

Das Auto verbraucht also die 65fache Energiemenge!

- 3.3** Wegen der Masse-Energie-Äquivalenz, Gl. (3-10), gilt für die Zerstrahlung von Positron und Elektron, also der Gesamtmasse  $2m_0$ :

$$E = 2m_0 c^2 = 2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1})^2 = \underline{\underline{1,637 \cdot 10^{-13} \text{ J}}}.$$

Nach Kap. 14.3.1 gilt:

$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , also ist:

$$E = \frac{1,637 \cdot 10^{-13}}{1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = \underline{\underline{1,02 \cdot 10^6 \text{ eV}}}.$$

- 4.1** Der Impuls des ausgestoßenen Blutes beträgt nach Gl. (2-20)  $p = mv = 0,06 \text{ kg} \cdot 0,5 \text{ m s}^{-1} = 0,03 \text{ Ns}$ . Wegen Impulserhaltung ist der gleichgroße entgegengerichtete Impuls des Körpers  $p = 0,03 \text{ Ns}$ , und die vermeintliche Zunahme bzw. Abnahme der Gewichtskraft ist nach Gl. (2-18):

$$F_s = \frac{p}{t} = \frac{0,03 \text{ Ns}}{0,1 \text{ s}} = 0,3 \text{ N}, \text{ das entspricht einer schweren Masse von}$$

$$m = \frac{F_s}{g} = \frac{0,3 \text{ N}}{9,8 \text{ m s}^{-2}} \approx \underline{\underline{0,03 \text{ kg}}}.$$

Also schwankt die Anzeige der Waage mit  $\pm 0,03 \text{ kg}$  um die Körpermasse.

- 4.2** a) Aus Gl. (2-21) folgt:

$$L = J_1 \omega_1; \quad J_1 = \frac{31,4 \text{ N m s}}{2\pi \cdot 1 \text{ s}^{-1}} = \underline{\underline{5 \text{ kg m}^2}}.$$

b) Der Drehimpulserhaltungssatz besagt, dass

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2; \quad v_2 = \frac{\omega_1 J_1}{2\pi J_2} = \underline{\underline{2 \text{ s}^{-1}}}.$$

- 5.1** Das Hooke'sche Gesetz, Gl. (5-3), gibt an, um wieviel sich der Knochen elastisch verformt:

$$\text{a) } \Delta l = \frac{l}{E} \frac{F}{A} = \frac{0,5 \text{ m}}{1,8 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}} \frac{80 \cdot 9,8 \text{ N}}{3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = \underline{\underline{0,07 \text{ mm}}}.$$

$$\text{b) } \Delta l = \frac{0,5 \text{ m}}{1,8 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}} \frac{160 \cdot 9,8 \text{ N}}{3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = \underline{\underline{0,14 \text{ mm}}}.$$

- 5.2** Die mittlere Druckfestigkeit für Knochen beträgt nach Tab. 5.2  $p_m = 170 \text{ N mm}^{-2}$ . Mit  $R_{\text{außen}} = 14 \text{ mm}$  und  $R_{\text{innen}} = 8,5 \text{ mm}$  beträgt der aktive Flächenquerschnitt des Oberarmknochens

$$A = (14^2 - 8,5^2) \cdot \pi \text{ mm}^2 = 123,75 \text{ mm}^2.$$

Damit kann diese Fläche mit einer Kraft  $F = p_m \cdot A = 170 \text{ N mm}^{-2} \cdot 123,75 \text{ mm}^2 \simeq 21 \text{ kN}$  belastet werden, bis es zum Bruch kommt.

- 5.3** Das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz, Gl. (5-27), beschreibt den Stromstärke-Druckdifferenz-Zusammenhang bei der laminaren Strömung von Flüssigkeit durch ein zylindrisches Rohr:

$$i = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p; \quad \Delta p = 100 \text{ Torr} = 13332,24 \text{ Pa}.$$

a) Die Volumenstromstärken der verschiedenen Flüssigkeiten sind

$$i = \frac{\pi(4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^4 \cdot 13332,24 \text{ Pa}}{8 \cdot 0,83 \text{ Pa s} \cdot 0,5 \text{ m}} = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = \underline{\underline{3,2 \cdot 10^{-3} \text{ l s}^{-1} (\text{Glycerin})}}.$$

$$i = \underline{\underline{0,60 \text{ l s}^{-1} (\text{Blut})}}.$$

$$i = \underline{\underline{2,68 \text{ l s}^{-1} (\text{H}_2\text{O})}}.$$

b) Die Volumenstromstärken sind 16mal kleiner bei halb so großem Rohrdurchmesser.

5.4 a) Aus Gl. (5-29) folgt für die Sedimentation

$$\text{im Schwerfeld} \quad \frac{4\pi r^3}{3} \rho_{\text{kugel}} g - \frac{4\pi r^3}{3} \rho_{\text{Fe}} g - 6\pi\eta v_s r = 0, \quad \text{bzw.}$$

$$\text{in der Zentrifuge} \quad \frac{4\pi r^3}{3} \rho_{\text{kugel}} a - \frac{4\pi r^3}{3} \rho_{\text{Fe}} a - 6\pi\eta v_s r = 0.$$

Das Verhältnis der Sedimentationsgeschwindigkeiten ergibt sich hieraus zu

$$\frac{v_s (\text{Schwerfeld})}{v_s (\text{Zentrifuge})} = \frac{g}{a} = \frac{9,8 \text{ m s}^{-2}}{10^6 \text{ m s}^{-2}} \approx \underline{\underline{10^{-5}}}.$$

b) Die Sedimentation mit der Ultrazentrifuge hat bezüglich Masse oder Volumen der untersuchten Partikel eine  $10^5$ mal bessere Auflösung als die Sedimentation im Schwerfeld. Zudem: Sehr kleine Teilchen (Makromoleküle wie Hämoglobin) sedimentieren wegen der Brown'schen Molekularbewegung im Schwerfeld überhaupt nicht und lassen sich aus einer Lösung daher nur durch Ultrazentrifugieren entfernen.

5.5 Die kritische Geschwindigkeit, bei deren Überschreiten in einem Rohr laminare in turbulente Strömung umschlagen kann, ist durch Gl. (5-38) gegeben:

$$v_k = \frac{1000\eta}{\rho r} = \frac{1000 \cdot 0,0045 \text{ Pa s}}{1000 \text{ kg m}^{-3} \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 0,45 \text{ m s}^{-1}.$$

Es würde für kurze Zeit zu turbulenter Strömung kommen, wenn die Aorta ein starres Rohr wäre. Aufgrund ihrer erheblichen Elastizität kann sie sich jedoch während der Systole dehnen (*Windkesselfunktion* der Aorta). Dies reduziert zwar die kritische Geschwindigkeit  $v_k$ , bei der Turbulenz einsetzt (da  $v_k \sim \frac{1}{r}$ ), aber gleichzeitig nimmt wegen der Kontinuitätsgleichung (5-20) die Geschwindigkeit des Blutes quadratisch mit der Zunahme von  $r$  ab ( $v \sim \frac{1}{r^2}$ ), so dass insgesamt  $v < v_k$  gilt, und es demnach nicht zur Turbulenz kommt.

6.1 a)  $l = \underline{\underline{24,8 \text{ cm}}}$ .

$$\text{b) } \frac{T_{\text{Äq}} - T_{\text{Pol}}}{T_{\text{Pol}}} = 0,0026 = \frac{\sqrt{1/g_{\text{Äq}}} - \sqrt{1/g_{\text{Pol}}}}{\sqrt{1/g_{\text{Pol}}}} = \sqrt{g_{\text{Pol}}/g_{\text{Äq}}} - 1,$$

so dass  $\sqrt{g_{\text{Pol}}/g_{\text{Äq}}} - 1 = 0,0026$ . Daraus folgt  $g_{\text{Pol}} - g_{\text{Äq}} = \underline{\underline{5,1 \text{ cm s}^{-2}}}$ , wenn wir für  $g_{\text{Pol}} \cong 9,83 \text{ m s}^{-2}$  setzen.

6.2 Berechnung der longitudinalen Schallgeschwindigkeit mit Gl. (7-13c):

$$c = (E/\rho)^{1/2} = (7,5 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2} / 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3})^{1/2} = \underline{\underline{5320 \text{ m s}^{-1}}}.$$

Die zugehörige Wellenlänge (Gl. (7-6)):  $\lambda = c/\nu = 5320 \text{ m s}^{-1} / 1 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} = \underline{\underline{5,32 \text{ mm}}}$ .

Nach Gl. (7-36a) gilt für die erforderliche Länge:  $L = n\lambda/2 = 3 \cdot 5,32 \text{ mm} / 2 = \underline{\underline{7,98 \text{ mm}}}$ . ( $n$  ist 3, da die Grundschwingung mitzuzählen ist.)

6.3 Das Verhältnis der Energien bei zwei aufeinanderfolgenden Schwingungen ist:

$$E_{n+1}/E_n = 80\% / 100\% = 0,8.$$

Nach Gl. (6-9) ist die Schwingungsenergie  $E$  proportional zum Quadrat der Auslenkungsamplitude  $A_0$ . Daher ist  $A_{0,n+1}/A_{0,n} = \sqrt{E_{n+1}/E_n} = \sqrt{0,8} = \underline{\underline{0,89}}$ .

a) Mit Gl. (6-8) folgt für das Pegelmaß:

$$z = 20 \cdot \log(A_{0,n}/A_{0,n+1}) = 20 \cdot \log(1/0,89) = \underline{1,0 \text{ dB}}.$$

b) Mit Gl. (6-12) ergibt sich für das logarithmische Dekrement:

$$A = \ln(A_{0,n}/A_{0,n+1}) = \underline{0,12}.$$

c) Da  $T = 2 \text{ s}$  beträgt, folgt aus der Lösung b):  $\delta = 0,12/2 \text{ s} = \underline{0,06 \text{ s}^{-1}}$ .

**6.4** Das Minimum der Funktion  $f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2$  findet man, wenn man die Ableitung  $df/d\omega$  gleich Null setzt.

Die Ableitung ergibt:  $df/d\omega = 2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 8\delta^2\omega$ . Setzt man sie gleich null, so erhält man:  $\omega = (\omega_0^2 - 2\delta^2)^{1/2}$ . Bei dieser Frequenz wird also die Amplitude am größten, es ist die *Resonanzfrequenz*.

Setzen wir sie in Gl. (6-14a) ein, so erhalten wir für die Amplitude im Resonanzfall:  $A_0 = (F_0/m)/4\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)$ . Sie sehen, dass (wegen des Faktors  $\delta^2$  im Nenner) die Amplitude immer größer wird, wenn die Dämpfung kleiner gemacht wird (*Resonanzkatastrophe*).

**6.5** a) Wir berechnen den Mittelwert  $\langle y \rangle$  über die Zeitdauer  $T = 1 \text{ min}$  mit Gl. (14-100):

$$\langle y \rangle = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{100} y_i = 1 \text{ min}^{-1} \cdot 100 \cdot 0,071 = \underline{71 \text{ min}^{-1}} = 7 \cdot 1000 \text{ ml}/60 \text{ s} = \underline{117 \text{ ml s}^{-1}}.$$

$$\text{b) } \langle y \rangle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \sin(x) dx = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = \frac{A}{2\pi} [-\cos(x)]_0^{2\pi} = \frac{A}{2\pi} (-1 + 1) = 0.$$

$$\langle y \rangle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A \cos(x) dx = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x) dx = \frac{A}{2\pi} [\sin(x)]_0^{2\pi} = \frac{A}{2\pi} (+0 - 0) = 0.$$

Übrigens erhalten wir dasselbe Resultat auch bei anderen Argumenten der trigonometrischen Funktionen, wie dem Argument  $(\omega t + \varphi_0)$  bei der Schwingung oder  $(\omega t - kx + \varphi_0)$  bei der Welle. Quadrieren wir aber die trigonometrische Funktion (wie dies z. B. in Gl. (14-101) geschieht), so ist der Mittelwert immer größer als Null.

**7.1** a) Nach Gl. (7-6) ist  $\lambda = c/v$ . Daher:  $\lambda = \underline{211 \text{ m}}$  (Mittelwelle) und  $\lambda = \underline{3,4 \text{ m}}$  (UKW).

b) Nach Gl. (6-7) entspricht die Phasenverschiebung  $\varphi_0$  einer Zeitverschiebung von  $\Delta t = \varphi_0/\omega$ . Daher  $\Delta t = (\pi/3)/(2\pi \cdot 3) \text{ s} = \underline{0,056 \text{ s}}$ .

**7.2** Schallgeschwindigkeit im Wasser:  $c = 1485 \text{ m s}^{-1}$ . Die Entfernung  $s$  wird von der Welle zweimal durchlaufen, so dass  $s = \frac{1}{2} ct = \frac{1}{2} \cdot 1485 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = \underline{5,6 \text{ m}}$ .

**7.3** a) In derselben Zeit  $t$ , in welcher das Flugzeug die Strecke  $x = x_2 - x_1$  zurückgelegt hat, hat die bei  $x_1$  emittierte Kugelwelle sich auf einen Radius  $R$  ausgebreitet. Daher ist, wie auch die Abb. 24.1b zeigt,  $\sin \alpha = (ct)/(vt) = \underline{c/v}$ .

b) Aus Abb. 24.1b sehen Sie, dass die Entfernung  $L$  gegeben ist durch  $\sin \alpha = h/L$ , so dass  $L = h/\sin \alpha = R/(x_2 - x_1) = 1000/0,5 = 2000 \text{ m} = \underline{2 \text{ km}}$ .

**7.4** a) Für die Frequenz  $1 \text{ kHz}$  lassen sich die Intensitäten  $I_1$  und  $I_2$  direkt mit Gl. (7-18) berechnen. Für  $L_{N1} = 0 \text{ Phon}$  folgt  $\log(I_1/I_0) = 0$ , d. h.  $I_1 = I_0 = \underline{10^{-12} \text{ W m}^{-2}}$ . Für  $L_{N2} = 130 \text{ Phon}$  folgt  $\log(I_2/I_0) = 13$ , d. h.  $I_2 = 10^{13} \cdot I_0 = \underline{10 \text{ W m}^{-2}}$ .

- b) Aus Gl. (7-15a) folgt  $A_0 = (2I/Z)^{1/2}/\omega$ , wobei die akustische Impedanz  $Z = \rho c$  in Luft den Wert  $Z = 1,29 \text{ kg m}^{-3} \cdot 343 \text{ m s}^{-1} = 443 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  hat. Für  $L_{N1} = 0$  Phon erhalten wir daher  $A_{0,1} = \underline{1 \cdot 10^{-11} \text{ m}}$ . (Das sind  $\sim 4\%$  des Durchmessers eines  $\text{O}_2$ -Moleküls!). Für  $L_{N2} = 130$  Phon ergibt sich entsprechend  $A_{0,2} = \underline{3 \cdot 10^{-5} \text{ m}}$ . (Das ist etwa das  $10^5$ fache des  $\text{O}_2$ -Durchmessers!)
- c) Gl. (7-15b) liefert  $p = \sqrt{2IZ}$ . Für  $L_{N1} = 0$  Phon ist daher  $p_{0,1} = \underline{3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}}$ , und für  $L_{N2} = 130$  Phon ist  $p_{0,2} = \underline{94 \text{ Pa}}$ . (Zum Vergleich: Der Normal-Luftdruck beträgt rund 100000 Pa (Kap. 9.1)).

- 7.5 a) C – e – g – c. b) C – e: große Terz; e – g: kleine Terz; g – c: Quart. c) C – e: große Terz; C – g: Quint; C – c: Oktave. d) C liegt um eine Sext tiefer als der Kammerton. Nach Tab. 7.4 entspricht das einem Frequenzverhältnis 5:3, so dass

$$\nu(a)/\nu(C) = 5/3 \quad \text{und} \quad \nu(C) = 440 \text{ Hz} \cdot 3/5 = \underline{264 \text{ Hz}}.$$

Wieder nach Tab. 7.4 erhält man für die übrigen Töne:

$$\nu(e)/\nu(C) = 5/4 \quad \text{bzw.} \quad \nu(e) = \nu(C) \cdot 5/4 = 264 \text{ Hz} \cdot 5/4 = \underline{330 \text{ Hz}}.$$

$$\nu(g)/\nu(C) = 3/2 \quad \text{bzw.} \quad \nu(g) = \nu(C) \cdot 3/2 = 264 \text{ Hz} \cdot 3/2 = \underline{396 \text{ Hz}}.$$

$$\nu(c)/\nu(C) = 2/1 \quad \text{bzw.} \quad \nu(c) = \nu(C) \cdot 2 = \underline{528 \text{ Hz}}.$$

- 7.6 a) Durch Zunahme der Spannkraft nimmt die Schallgeschwindigkeit längs der Saite zu; und mit der Schallgeschwindigkeit  $c = \lambda\nu$  nimmt, da die Wellenlänge  $\lambda$  gleich bleibt, auch die Frequenz  $\nu$  zu.

b) Nach Gl. (7-36a) erhält man für die Grundschiwingung  $\lambda = 2L = \underline{66 \text{ cm}}$ .

c) Wenn die Saite auf  $\nu = 440 \text{ Hz}$  gestimmt ist, ergibt sich eine Schallgeschwindigkeit längs der Saite von  $c = \lambda\nu = 0,66 \text{ m} \cdot 440 \text{ s}^{-1} = \underline{290 \text{ m s}^{-1}}$ .

Für die Masse der Saite erhalten wir  $m = \rho V = \rho l \pi d^2 / 4 = \underline{0,19 \text{ g}}$ . Jetzt ist in der angegebenen Beziehung nur mehr die Spann-Kraft  $F$  unbekannt. Lösen wir danach auf, so erhalten wir

$$F = c^2 m / l = (290 \text{ m s}^{-1})^2 \cdot 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ kg} / 0,33 \text{ m} = 48 \text{ kg m s}^{-2} = \underline{48 \text{ N}}.$$

- 8.1 Wenn das kalte Wasser und das Kalorimeter vor dem Zugießen des heißen Wassers sich auf gleicher Temperatur befunden habe, besteht nach dem Mischen gemäß Gl. (8-3) folgender Zusammenhang:

$$C_{\text{H}_2\text{O}} m_k (T_3 - T_1) + C_{\text{Kalor.}} (T_3 - T_1) = C_{\text{H}_2\text{O}} m_h (T_2 - T_3).$$

Setzt man die spezifische Wärmekapazität  $C_{\text{H}_2\text{O}}$  des Wassers als bekannt voraus, so müssen gemessen werden:

$T_1$ : Temperatur des kalten Wassers und Ausgangstemperatur des Kalorimeters

$T_2$ : Temperatur des heißen Wassers

$T_3$ : Mischungstemperatur

$m_k$ : Masse des kalten Wassers

$m_h$ : Masse des heißen Wassers

Dann bleibt die Wärmekapazität  $C_{\text{Kalor.}}$  als einzige Unbekannte und kann berechnet werden.

- 8.2  $v = 100 \text{ km h}^{-1} = 27,78 \text{ m s}^{-1}$ .

Nach Gl. (3-8b) ist die kinetische Energie des PKW:  $\frac{m_1 v^2}{2}$ .

Die Temperaturerhöhung der Bremsscheiben ergibt sich nach Gl. (8-2) aus der zugeführten Energie, dividiert durch die Wärmekapazität der Bremsscheiben:

$$\Delta T = \frac{m_1 v^2}{2 m_2 C} = \frac{10^3 \text{ kg} (27,78 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 15 \text{ kg} \cdot 461 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}} = \underline{55,80 \text{ K}}.$$

**8.3** Da sich der Widerstand linear mit der Temperatur ändert, gilt

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{3,95 \Omega}{100^\circ\text{C}} = 0,0395 \Omega (\text{°C})^{-1},$$

$$\Delta t = \frac{1}{0,0395} \Delta R = 25,32 \Delta R.$$

Für  $\Delta R = 0,79 \Omega$  folgt  $\Delta t = 20^\circ\text{C}$  und  $t = 0^\circ\text{C} + 20^\circ\text{C} = \underline{\underline{20^\circ\text{C}}}$ .

**9.1**  $V_1 = 8 \text{ m} \cdot 6 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} = 144 \text{ m}^3$ ,  $T_1 = 283 \text{ K}$ ,  $T_2 = 293 \text{ K}$ .

Aus der Zustandsgleichung für ideale Gase (9-3) folgt:

$$V_2 = \frac{V_1 T_2}{T_1} = \frac{144 \text{ m}^3 \cdot 293 \text{ K}}{283 \text{ K}} = 149,1 \text{ m}^3.$$

Daher  $V_2 - V_1 = \Delta V = \underline{\underline{5,1 \text{ m}^3}}$ .

**9.2** Aus Gl. (9-9) folgt:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)} = 290 \text{ K} \left( \frac{40 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \right)^{0,286} = \underline{\underline{832 \text{ K}}}.$$

**9.3** Nach Gl. (9-1) ist die Anzahl der Mole  $\text{O}_2$  in der Inspirationsluft:

$$pV = n_i RT,$$

$$n_i = \frac{pV}{RT} = \frac{1,97 \cdot 10^4 \text{ Pa} \cdot 0,36 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}}{8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 310 \text{ K}} = 2,75 \text{ mol h}^{-1}.$$

Anzahl der Mole  $\text{O}_2$  in der Expirationsluft:

$$n_e = \frac{1,52 \cdot 10^4 \text{ Pa} \cdot 0,36 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}}{8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 310 \text{ K}} = 2,12 \text{ mol h}^{-1}.$$

$$\Delta n = n_i - n_e = \underline{\underline{0,63 \text{ mol h}^{-1}}}.$$

**10.1** Beim einatomigen idealen Gas besteht die innere Energie nur in der kinetischen Translationsenergie der Gasteilchen. Die mittlere kinetische Translationsenergie  $\bar{E}_K$  ist nach Gl. (10-7):

$$\bar{E}_K = \frac{3}{2} kT.$$

Damit ergibt sich als innere Energie eines Mols:

$$E = \frac{3}{2} RT = \frac{3 \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{2} = \underline{\underline{3741 \text{ J mol}^{-1}}}.$$

**10.2** Nach Gl. (10-5) ist:

$$\text{a) } E_M = \frac{3}{2} RT = \frac{3}{2} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 273,15 \text{ K} = \underline{\underline{3406 \text{ J mol}^{-1}}}.$$

Ebenfalls nach Gl. (10-5) ist:

$$\text{b) } E_m = \frac{E_M}{N_A} = \frac{3406 \text{ J mol}^{-1}}{6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = \underline{\underline{5,66 \cdot 10^{-21} \text{ J}}}.$$

**10.3** Nach Gl. (9-3) ist:

$$\text{a) } \Delta V = V_1 \frac{\Delta T}{T_1} = 22,4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 \cdot \frac{77 \text{ K}}{273 \text{ K}} = \underline{\underline{6,32 \cdot 10^3 \text{ cm}^3}}.$$

b) Durch Kombination der Gl. (9-3) und (10-8) erhält man:

$$-\Delta W = R \Delta T = 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 77 \text{ K} = \underline{6,40 \cdot 10^2 \text{ J mol}^{-1}}.$$

c) Da ein zweiatomiges Gas über 5 Freiheitsgrade verfügt, ergibt sich nach dem Gleichverteilungssatz (Kapitel 10.2):

$$\Delta U = \frac{5}{2} R \Delta T = \frac{5}{2} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 77 \text{ K} = \underline{1,60 \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1}}.$$

d) Nach dem 1. Hauptsatz der Wärmelehre (Kap. 12.2) ist:

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta W = (1,60 + 0,64) \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1} = \underline{2,24 \cdot 10^3 \text{ J mol}^{-1}}.$$

**12.1** Durch die Verbrennung entstehende Wärmeenergie pro Stunde:

$$\frac{Q}{t} = \frac{H_{\text{Benzin}} Q_{\text{Benzin}} V}{t} = 45 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1} \cdot 780 \text{ kg m}^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ h}^{-1} = 42,12 \cdot 10^7 \text{ J h}^{-1}.$$

Abgegebene mechanische Energie pro Stunde:

$$\frac{E}{t} = 40 \text{ kJ s}^{-1} = 40 \text{ kJ} \cdot 3600 \text{ h}^{-1} = 14,4 \cdot 10^7 \text{ J h}^{-1}.$$

Nach Gl. (12-10) ist der Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{14,4 \cdot 10^7 \text{ J h}^{-1}}{42,12 \cdot 10^7 \text{ J h}^{-1}} = \underline{0,342 \cong 34,2\%}.$$

**12.2** a) Da nach Durchlaufen des Kreisprozesses (s. Kap. 12.3) die innere Energie wieder den Ausgangswert erreicht, also  $dU = 0$  ist, gilt für die abgegebene Arbeit:

$$A_a = -A = Q = \underline{1500 \text{ J}}.$$

$$\text{b) } P = \frac{A_a}{t} = \frac{1500 \text{ J}}{0,1 \text{ s}} = \underline{15 \text{ kW}}.$$

**12.3** Bei der Wärmepumpe handelt es sich um einen Kreisprozess, bei dem die Umlaufrichtung umgekehrt ist wie bei dem in Abb. 12.1 skizzierten (Kompression bei der Temperatur  $T_1$ , Expansion bei der Temperatur  $T_2$ ). Im Gegensatz zu einem Kreisprozess, bei dem mechanische Energie aus Wärmeenergie gewonnen wird, ist bei der Wärmepumpe der Wirkungsgrad  $\eta_W$  (Verhältnis von abgegebener Wärme zu aufgewandter Arbeit), der sich aus völlig analogen Überlegungen wie der in Gl. (12-10) abgeleitete Wirkungsgrad  $\eta$  (Verhältnis von abgegebener Arbeit zu aufgenommener Wärme) ergibt, von Interesse. Hieraus ergibt sich  $\eta_W = 1/\eta$ .

$$T_1 = 327,15 \text{ K}, \quad T_2 = 277,15 \text{ K}.$$

$$\text{a) } \eta_W = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{327,15 \text{ K}}{50 \text{ K}} = \underline{6,54}.$$

$$\text{b) } \varepsilon = 0,5 \eta_W = 0,5 \cdot 6,54 = 3,27.$$

Da von der Anlage bei der Temperatur  $T_1$  die Wärmemenge  $Q_a$  abgegeben wird, gilt:

$$Q_a = -Q = \varepsilon A.$$

Damit ergibt sich für die Pumpleistung:

$$P = \frac{A}{t} = \frac{Q_a}{\varepsilon t} = \frac{3,5 \cdot 10^7 \text{ J}}{3,27 \cdot 3600 \text{ s}} = \underline{2,97 \text{ kW}}.$$

- 13.1 a) Anzahl der eingeatmeten Mole (Gase und Wasserdampf) pro Stunde nach Gl. (9-1):

$$\frac{n}{t} = \frac{pV/t}{RT} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 0,36 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}}{8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 14,78 \text{ mol h}^{-1}.$$

Wärmeabgabe durch Erwärmung der Atemluft:

$$\begin{aligned} \frac{Q_A}{t} &= C_{\text{mol,p}} \frac{n}{t} \Delta T = \frac{7}{2} R \frac{n}{t} \Delta T = \frac{7}{2} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 14,78 \text{ mol h}^{-1} \cdot 17 \text{ K} \\ &= \underline{\underline{7312 \text{ J h}^{-1}}}. \end{aligned}$$

- b) Die Anzahl der eingeatmeten Mole Wasserdampf sei  $n_W$  und der eingeatmeten Mole übriger Gase  $n_G$ .

Da die relative Feuchte der eingeatmeten Luft 60% beträgt, ist der Partialdruck des Wasserdampfs:

$$p_W = 23 \text{ mbar} \cdot 0,6 = 1380 \text{ Pa},$$

$$\frac{n_W}{t} = \frac{p_W V/t}{RT} = \frac{1380 \text{ Pa} \cdot 0,36 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1}}{8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 293 \text{ K}} = 0,204 \text{ mol h}^{-1},$$

$$\frac{n_G}{t} = \frac{n - n_W}{t} = 14,78 \text{ mol h}^{-1} - 0,204 \text{ mol h}^{-1} = 14,576 \text{ mol h}^{-1}.$$

Die Anzahl der ausgeatmeten Mole Wasserdampf sei  $n_A$ . Der Partialdruck des Wasserdampfs verhält sich zum Gesamtdruck wie die Anzahl der Mole des Wasserdampfs zur Gesamtzahl der Mole:

$$\frac{p_{W,A}}{p_{\text{ges}}} = \frac{n_A}{n_A + n_G},$$

$$\frac{n_A}{t} = \frac{p_{W,A} n_G/t}{p_{\text{ges}} - p_{W,A}} = \frac{6300 \text{ Pa} \cdot 14,576 \text{ mol h}^{-1}}{10^5 \text{ Pa} - 6300 \text{ Pa}} = 0,98 \text{ mol h}^{-1}.$$

Anzahl der Mole Wasserdampf, die in der Lunge zusätzlich gebildet werden:

$$\frac{n_B}{t} = \frac{n_A - n_W}{t} = 0,98 \text{ mol h}^{-1} - 0,204 \text{ mol h}^{-1} = \underline{\underline{0,776 \text{ mol h}^{-1}}}.$$

- c) Verdampfungswärme für den in der Lunge zusätzlich gebildeten Wasserdampf:

$$\frac{Q_W}{t} = \frac{C_{\text{mol,p}} n_B}{t} = 4,30 \cdot 10^4 \text{ J mol}^{-1} \cdot 0,776 \text{ mol h}^{-1} = \underline{\underline{3,34 \cdot 10^4 \text{ J h}^{-1}}}.$$

- 13.2 Osmotischer Druck der Erythrozyten gem. Gl. (13-6):

$$p_E = \frac{nRT}{V} = \frac{2 \cdot 0,155 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 289 \text{ K}}{10^{-3} \text{ m}^3} = 7,68 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Osmotischer Druck einer 0,069 molaren NaCl-Lösung:

$$p_{0,069} = \frac{2 \cdot 0,069 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 298 \text{ K}}{10^{-3} \text{ m}^3} = 3,42 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Druckdifferenz, die bei der Hämolyse auftritt:

$$\Delta p = 7,68 \cdot 10^5 \text{ Pa} - 3,42 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \underline{\underline{4,26 \cdot 10^5 \text{ Pa}}}.$$

- 13.3 Anzahl der Mole Zucker =  $\frac{\text{Masse des gelösten Zuckers}}{\text{molekulare Masse des Zuckers}}$

$$n = \frac{10 \text{ g}}{260 \text{ g mol}^{-1}} = 0,0385 \text{ mol}$$

$$p_{\text{osm}} = \frac{nRT}{V} = \frac{0,0385 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \cdot 288,15 \text{ K}}{0,001 \text{ m}^3} = \underline{\underline{9,18 \cdot 10^4 \text{ Pa}}}.$$

- 14.1** Die Kraft zwischen elektrischen Ladungen (Coulomb-Kraft) wird durch Gl. (14-1), und die Kraft zwischen Massen (Gravitations-Kraft) wird durch Gl. (2-4) beschrieben:

$$F_C = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad F_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

a) Proton – Proton:

$$F_C = \frac{8,987 \cdot 10^9 \text{ V m C}^{-1} \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(10^{-15} \text{ m})^2} = \underline{\underline{2,3 \cdot 10^2 \text{ N}}}.$$

$$F_G = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot (1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}{(10^{-15} \text{ m})^2} = \underline{\underline{-1,8 \cdot 10^{-34} \text{ N}}}.$$

Proton – Elektron:

$$F_C = -\frac{8,987 \cdot 10^9 \text{ V m C}^{-1} \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} = \underline{\underline{-8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}}}.$$

$$F_G = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{(5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} = \underline{\underline{-3,6 \cdot 10^{-47} \text{ N}}}.$$

b) Erde – Mond:

$$F_G = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 7 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(10^9 \text{ m})^2} = \underline{\underline{-2,8 \cdot 10^{19} \text{ N}}}.$$

Erde – Sonne:

$$F_G = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(10^{12} \text{ m})^2} = \underline{\underline{-8 \cdot 10^{20} \text{ N}}}.$$

c) Zentrifugalkraft = Coulomb-Kraft:

$$m \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$\frac{9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg } v^2}{5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$v = \underline{\underline{2,18 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}}}.$$

- 14.2** a) Elektrische Widerstände werden mit den Werten aus Tab. 14.2 nach Gl. (14-7) berechnet. Demnach folgt über die Stromstärken aus Gl. (14-6):

$$I = \frac{U}{\frac{l}{Q_{20} A}}$$

$$I_{\text{Cu}} = \frac{10^{-2} \text{ V} \cdot \pi (5 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2}{1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m} \cdot 1 \text{ m}} = \underline{\underline{462 \text{ mA}}}.$$

$$I_{\text{Kohle}} = \underline{\underline{7,854 \text{ mA}}}.$$

b)  $I_{\text{Cu}} = \frac{10^{-2} \text{ V} \cdot \pi (5 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2}{1,7 \cdot 10^{-8} \cdot (1 + 0,004 \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \cdot 10 \text{ }^\circ\text{C}) \Omega \text{ m} \cdot 1 \text{ m}} = 444 \text{ mA}, \quad \Delta I_{\text{Cu}} = \underline{\underline{-18 \text{ mA}}}.$

$$I_{\text{Kohle}} = 7,860 \text{ mA}, \quad \Delta I_{\text{Kohle}} = \underline{\underline{+0,006 \text{ mA}}}.$$

- 14.3 a) Der Gesamtwiderstand des Cu-Drahtes ergibt sich mit Hilfe der Gl. (14-6) und den Werten aus Tab. 14.2 zu:

$$R = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m} \cdot \frac{2 \text{ m}}{(2 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2 \pi} = \underline{\underline{0,27 \Omega}}.$$

$$\text{Die Stromstärke: } I_0 = \frac{U_0}{R_i + R} = \frac{6 \text{ V}}{2 \Omega + 0,27 \Omega} = \underline{\underline{2,64 \text{ A}}}.$$

Die Klemmenspannung ist die Differenz aus  $U_0$  und dem Spannungsabfall am Innenwiderstand  $R_i$  der Quelle:

$$U_k = U_0 - I_0 R_i = 6 \text{ V} - 2,64 \text{ A} \cdot 2 \Omega = \underline{\underline{0,72 \text{ V}}}.$$

Schließlich folgt für die unbekannte Batteriespannung

$$U_x = U_k \frac{l_1}{l} = 0,72 \text{ V} \cdot \frac{0,2 \text{ m}}{2 \text{ m}} = \underline{\underline{0,072 \text{ V}}}.$$

- b) Offensichtlich fließt bei der beschriebenen Versuchsanordnung zuviel Strom durch den Messdraht und erhitzt ihn deshalb zu sehr. Deshalb ist es sinnvoller, einen hochohmigen Draht anstelle des Cu-Drahtes, z. B. aus Manganin mit einem spezifischen Widerstand  $\varrho_{20} = 4 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m}$ , zu verwenden.

- 14.4 a) Für die magnetische Feldstärke bzw. für die magnetische Induktion im Innern einer stromdurchflossenen Spule gelten die Gln. (14-44) bzw. (14-45):

$$H = I \frac{n}{l} = 5 \text{ A} \cdot \frac{10^2}{0,1 \text{ m}} = 5 \cdot 10^3 \text{ A m}^{-1} = \underline{\underline{62,8 \text{ Oersted}}}.$$

$$B = \mu_0 H = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ A m}^{-1} = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ Vs m}^{-2} \\ = \underline{\underline{6,28 \cdot 10^{-3} \text{ Tesla}}}.$$

- b) Die Lorentz-Kraft berechnen wir mit Gl. (14-48). Die Fluggeschwindigkeit des durch die Potentialdifferenz beschleunigten Elektrons folgt aus der vollständigen Umwandlung der elektrischen Energie  $eU$  in kinetische Energie des Elektrons  $\frac{m}{2} v^2$ . Also erhalten wir aus  $eU = \frac{m}{2} v^2$  die Fluggeschwindigkeit  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$  und schließlich für den Betrag der Lorentz-Kraft:

$$F_L = eB \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ Vs m}^{-2} \cdot \left( \frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^4 \text{ V}}{9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \right)^{1/2} \\ = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-14} \text{ N}}}.$$

- c) Für die Bewegung des abgelenkten Elektrons auf einer Kreisbahn gilt die Gleichgewichtsbedingung Lorentz-Kraft = Zentrifugalkraft, wobei wir die Zentrifugalkraft (Trägheitskraft)  $F_T$  der Gl. (2-7) entnehmen:  $F_L = F_T = m \frac{v^2}{r}$ .

Aus dieser Bedingung berechnen wir den Krümmungsradius:

$$r = \frac{mv^2}{F_L} = \frac{2eU}{F_L} = \frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^4 \text{ J}}{6 \cdot 10^{-14} \text{ N}} = \underline{\underline{5,34 \text{ cm}}}.$$

- 14.5 a)  $U(t) = U_0 \sin \omega t = U_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$ . Einsetzen der Zahlenwerte für  $U_0$  (Gl. (14-107)), und für  $T$  ergibt dann:

$$U(t) = (2)^{1/2} \cdot 230 \text{ V} \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{0,02 \text{ s}} t \right) = \underline{\underline{325 \text{ V} \cdot \sin(314,16 \text{ s}^{-1} t)}}.$$

- b) Die Wirkleistung ist durch Gl. (14-104) definiert, und der zur Berechnung von  $I_0$  notwendige Wechselstromwiderstand für Serienschaltung von  $R$ ,  $C$  und  $L$  folgt aus Gl. (14-89):

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi,$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{325 \text{ V}}{\sqrt{10^4 \Omega^2 + \left(314,16 \text{ s}^{-1} \cdot 10^{-2} \text{ H} - \frac{1}{314,16 \text{ s}^{-1} \cdot 10^{-3} \text{ F}}\right)^2}}$$

$$= \frac{325 \text{ V}}{(10^4 \Omega^2 + 1,7 \cdot 10^{-3} \Omega^2)^{1/2}} = 3,2 \text{ A}.$$

Mit dem Zahlenwert  $R = 100 \Omega$  und  $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -0,04 \Omega$  errechnen wir aus Gl. (14-90) für den Phasenwinkel  $\varphi \cong 0^\circ$ . Damit ist die verbrauchte Wirkleistung:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \cdot 325 \text{ V} \cdot 3,2 \text{ A} \cdot \cos 0^\circ = \underline{\underline{520 \text{ W}}}.$$

- c) Für die in Abb. 14.42 skizzierte Parallelschaltung von Widerständen gilt nach Gl. (14-91):

$$I_0 = \frac{U_0 \omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{325 \text{ V} \cdot 0,314 \Omega^{-1} \cdot 10^2 \Omega}{10^2 \Omega} = 102 \text{ A}.$$

Aus Gl. (14-92) folgt für den Phasenwinkel  $\varphi = -88^\circ$ . Damit gilt für die verbrauchte Wirkleistung:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \cdot 325 \text{ V} \cdot 102 \text{ A} \cdot \cos 88^\circ = \underline{\underline{578,5 \text{ W}}}.$$

- d) Die Eigenfrequenz  $\nu_r = \frac{\omega}{2\pi}$  berechnen wir nach Gl. (14-93) zu:

$$\nu_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{10^{-2} \text{ H} \cdot 10^{-3} \text{ F}} \right)^{1/2} = \underline{\underline{50,3 \text{ Hz}}}.$$

- e) Füllt man destilliertes Wasser in den Kondensator und schiebt man einen Weich-eisenkern in die Spule, dann werden Kapazität bzw. Induktivität geändert:  $C' = \epsilon_{\text{rel}} C$  bzw.  $L' = \mu_{\text{rel}} L$ . Also erhalten wir für die Eigenfrequenz  $\nu_r$ :

$$\nu_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\mu_{\text{rel}} L \epsilon_{\text{rel}} C}} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{10^{-4} \cdot 10^{-2} \text{ H} \cdot 81 \cdot 10^{-3} \text{ F}} \right)^{1/2} = \underline{\underline{5,59 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}}}.$$

- 15.1** a) Nach Gl. (14-5a) beträgt die Ladungsmenge, die beim Anlassen fließt:  $Q = It = 80 \text{ A} \cdot 2 \text{ s} = 160 \text{ C}$ . Da die Sulfationen zweiwertig, die Wasserstoffionen dagegen einwertig sind, bilden sich nach dem 1. Faraday'schen Gesetz (Kap. 15.2.3.2):

$$N = \frac{Q}{Ze} = \frac{160 \text{ C}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = \underline{\underline{5 \cdot 10^{20} \text{ Sulfationen}}} \text{ bzw. } \underline{\underline{10^{21} \text{ H-Ionen}}}.$$

- b)  $m = 10^{21} m_p = 10^{21} \cdot 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = \underline{\underline{1,672 \text{ mg}}}$ .

- 15.2 a) Vernachlässigen wir kapazitive und induktive Eigenschaften des menschlichen Körpers, dann gilt auch im Wechselstromkreis:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{230 \text{ V}}{10^4 \Omega} = \underline{0,023 \text{ A}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{230 \text{ V}}{800 \Omega} = \underline{0,287 \text{ A}}.$$

- b) Die Faustregel aufgelöst nach  $\Delta t$  liefert:

$$\Delta t = \frac{0,116^2}{I^2} \text{ s} = \underline{25,4 \text{ s}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{0,16 \text{ s}}.$$

- 15.3 a) Aus den Gleichungen für die Stromdichte, Gl. (14-5b) und (14-9b), für die spezifische Leitfähigkeit, Gl. (15-6), und für die Beweglichkeit von Leitungselektronen, Gl. (15-7), folgt eine Beziehung, mit der wir die Driftgeschwindigkeit berechnen können:

$$v_D = \frac{I}{An^-e^-} = \frac{6 \text{ A}}{10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = \underline{3,75 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-1}}.$$

$$\text{b) } v_D = \frac{6 \text{ A}}{10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = \underline{3,75 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}}.$$

- c) Aus Gl. (15-6) und dem Wert für die spezifische Leitfähigkeit von Kupfer aus Tab. 15.1 folgt:

$$b^- = \frac{\sigma}{n^-e^-} = \frac{10^8 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}}{10^{29} \text{ m}^{-3} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = \underline{6,24 \cdot 10^{-3} \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ m}^2}.$$

- 16.1 Einsetzen entsprechender Zahlenwerte und Größen in Gl. (16-5) liefert:

$$0,99 U_0 = \frac{1}{1 + \frac{10^7 \Omega}{R_i}} U_0, \quad \underline{R_i = 10^9 \Omega}.$$

- 16.2 a) Größere Ströme kann man messen, wenn man einen kleineren Widerstand ( $R_0 = \frac{0,5 \Omega}{9} = 0,055 \Omega$ ) zum Amperemeter parallel schaltet, so dass 9/10 des zu messenden Stromes um das Messgerät herumfließen (s. Kap. 16.1.3).

- b) Zur Messung größerer Spannungen schaltet man einen großen Widerstand ( $R_0 = 5 \text{ k}\Omega \cdot 99 = 495 \text{ k}\Omega$ ) in Serie vor das Voltmeter, so dass 99/100 der Spannung an  $R_0$  und nur der übrige Teil am Messgerät abfällt (s. Kap. 16.1.3).

- 16.3 a) Bei Aufnahme eines EKG mit *einer* Elektrode werden neben den eigentlichen interessierenden Potentialschwankungen von ca. 1 mV auch Rauscheffekte von ca. 10 mV mitgemessen. Der Grund hierfür ist folgender: Da der menschliche Körper wie ein Kondensator wirkt, können Wechselstrom-führende Kabel in der Nähe des Patienten zu einem Stromfluss durch dessen Körper von ca. 1  $\mu\text{A}$  Anlaß geben. Ist der Körper des Patienten „geerdet“ und besitzt er einen Widerstand von ca.  $10^4 \Omega$ , dann sind den interessierenden Potentialschwankungen des Herzens zusätzliche Potentialschwankungen der Größe  $10^4 \Omega \cdot 10^{-6} \text{ A} = 10 \text{ mV}$  überlagert. — Dies lässt sich vermeiden, indem das EKG als Potentialdifferenz mit *zwei* Elektroden aufgenommen wird, denn wenn das beschriebene Rauschen an den Elektroden A und B identisch ist, oder wenn die Hautübergangswiderstände bei beiden Elektroden klein (ca. 1 k $\Omega$ ) sind, verschwindet es beim Messen der Potentialdifferenz  $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$ .

- b) Grund 1: Eine der beiden Elektroden A oder B hat sich gelöst. — Lage der Elektroden kontrollieren. Nachsehen, ob sie richtig auf der Haut sitzen.

Grund 2: An den Elektroden A und B finden je nach Elektrodenmaterial und Hautfeuchtigkeit chemische Reaktionen statt, die durch Gasbildung den Übergangswiderstand zwischen Haut und Elektroden drastisch vergrößern und zudem zu einer Polarisierungsspannung zwischen Haut und Elektroden führen können. — Verwendung spezieller Elektroden (z. B. aus einer Kombination von Silber und Silberchlorid) und einer elektrisch leitenden Paste zwischen Haut und Elektrode verhindern diesen Effekt.

Grund 3: Es kann vorkommen, dass die Hautübergangswiderstände bei Elektrode A und B drastisch verschieden sind. — Dies lässt sich vermeiden durch leichtes Anrauhern der Haut und Verwenden einer elektrisch leitenden Paste zwischen Haut und Elektroden.

Grund 4: Die Kabel, die von Elektrode A bzw. B zum Elektrokardiograph führen, können eine Leiterschleife bilden, durch welche ein zeitlich variables Magnetfeld hindurchgreift. Wenn beispielsweise durch laufende Elektromotoren in der Nähe des Patienten schwache, zeitlich sich verändernde Magnetfelder im Raum vorhanden sind, werden nach dem Induktionsprinzip Wechselspannungen in der Schleife induziert. — Dies lässt sich dadurch vermeiden, dass die beiden Kabel nahe beieinander liegen oder als Zopf zusammengeflochten sind.

- 16.4** a) Nur wenn die Hautwiderstände exakt gleich wären, würde das Rauschsignal aus der gemessenen Potentialdifferenz  $\varphi_a - \varphi_b$  eliminiert sein. Bei drastisch verschiedenen Hautwiderständen macht sich das Rauschsignal jedoch selbst bei der Messung mit zwei Elektroden bemerkbar (s. Aufg. 16.3).

Zwischen einer Elektrode (Rauschpotential 10 mV) und der Masse (Erde) des Oszillographen (Nullpotential) liegen Haut- und Eingangswiderstand in Serie. Also teilt sich die Potentialdifferenz von 10 mV wie bei einer Potentiometerschaltung (s. Abb. 24.2) auf in einen Spannungsabfall am Hautwiderstand und einen Spannungsabfall am Eingangswiderstand des Oszillographen; letzterer ist identisch mit der Messspannung des Oszillographen und liefert von der Elektrode a die Messspannung  $\Delta\varphi_a$  und von der Elektrode b die Messspannung  $\Delta\varphi_b$ . Damit erhalten wir für  $\Delta\varphi_a$ ,  $\Delta\varphi_b$  und deren Differenz:

$$\Delta\varphi_a = 10 \text{ mV} \frac{10^6 \Omega}{(10^6 + 10^3) \Omega} = 9,99 \text{ mV}; \quad \Delta\varphi_b = 10 \text{ mV} \frac{10^6 \Omega}{(10^6 + 10^4) \Omega} = 9,90 \text{ mV},$$

$$\Delta\varphi_a - \Delta\varphi_b = \underline{\underline{0,09 \text{ mV}}}; \text{ das ist so groß wie das eigentliche EEG-Signal.}$$

- b) Erhöhen des Eingangswiderstands des Oszillographen auf 10 M $\Omega$  oder Reduktion des Hautwiderstands an beiden Elektroden von 10 k $\Omega$  auf 1 k $\Omega$  (durch Anrauhern der Haut und Verwenden von Kontaktpaste) verringert das mitgemessene Rauschsignal drastisch.

- 16.5** a) Drei bekannte Widerstände.

- b) Nach Gl. (16-10) gilt für den unbekanntten Widerstand:

$$R_x = R \frac{l}{l_0 - l} = 10 \Omega \cdot \frac{0,5 \text{ m}}{1 \text{ m} - 0,5 \text{ m}} = \underline{\underline{10 \Omega}} \quad \text{bzw.} \quad 10 \Omega \cdot \frac{0,75 \text{ m}}{1 \text{ m} - 0,75 \text{ m}} = \underline{\underline{30 \Omega}}.$$

- c)  $(2 \text{ m} - l) \cdot 10 \Omega = l \cdot 20 \Omega$ ,  $\underline{\underline{l = \frac{2}{3} \text{ m}}}$ .

16.6 a) Aus Gl. (16-14) folgt für das Verhältnis der Windungszahlen der Transformatorspulen im Falle des Kathodentransformators  $\frac{n_2}{n_1} = \frac{5}{230}$  bzw. des Anodentransformators  $\frac{n_2}{n_1} = \frac{10^5}{230}$ .

b) Die Energieaufnahme eines Elektrons hängt von der Potentialdifferenz  $U$  ab, durch die es beschleunigt wurde. Die Energieaufnahme beträgt  $E = eU$ . Diese elektrische Energie wird voll in kinetische Energie des Elektrons umgewandelt,  $eU = mas$ ;  $m$  ist die Masse des Elektrons,  $a$  die Beschleunigung, die das Elektron erfährt, und  $s$  ist die Beschleunigungsstrecke. Diese können wir durch Gl. (1-29) auch mit  $s = \frac{a}{2} t^2$  angeben. Also folgt für die Flugzeit  $t$  aus diesen beiden Gleichungen:

$$t = \sqrt{\frac{2s^2m}{Ue}} = \left( \frac{2 \cdot 0,01 \text{ m}^2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{10^5 \text{ V} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \right)^{1/2} \approx 10^{-9} \text{ s}.$$

Das Verhältnis von Laufzeit zu Schwingungsdauer ist dann  $\frac{t}{T} = \underline{\underline{5 \cdot 10^{-8}}}$ .

17.1 a) Lichtleistung  $P = 20 \text{ W} \cdot 0,5 = 10 \text{ W}$ .

Frequenz des Lichtes:  $\nu = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} / 589 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 5,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ .

Photonenenergie:  $E_P = h\nu = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ W s}^2 \cdot 5,1 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} = 3,4 \cdot 10^{-19} \text{ J} (\cong 2,1 \text{ eV})$ .

Die Gesamtzahl  $N_G$  der Photonen pro Sekunde folgt aus:

$$N_G = P/E_P = 10 \text{ W} / 3,4 \cdot 10^{-19} \text{ W s} = \underline{\underline{2,9 \cdot 10^{19} \text{ Photonen s}^{-1}}}.$$

b) Natriumdampflampen emittieren gelbes Licht. Alle Farben, die nicht gelb sind oder Gelb beigemischt haben, d. h. gelb nicht zurückreflektieren oder streuen, erscheinen in dem Gemälde schwarz.

17.2 Der Unterschied der beiden Farbmischungen ergibt sich folgendermaßen:

Mit den Wasserfarben mischen wir gelbe und blaue Farbpigmente zusammen, und in der entstehenden Mischfarbe sind beide enthalten (*additive Farbmischung*). — Das Gelbfilter lässt gelbes Licht durch, absorbiert aber die übrigen Farben, also auch Blau. Das Blaufilter würde Blau durchlassen (wenn es nicht bereits durch das Gelbfilter absorbiert wäre) und absorbiert das übrigegebliebene gelbe Licht. Die Filterkombination lässt also überhaupt kein Licht durch (*subtraktive Farbmischung*).

17.3 a) Mit  $\sigma_{\text{Haut}} = 0,5\sigma$  und  $35^\circ\text{C} \cong 308,15 \text{ K}$  folgt aus Gl. (17-19):  $E_{\text{sg}} = 256 \text{ W m}^{-2}$ . Bei  $A = 2 \text{ m}^2$  Körperoberfläche ist die Gesamtstrahlungsleistung  $E_{\text{sg}}A = 511 \text{ W}$ . Der Tag besteht aus  $t = 60 \cdot 60 \cdot 24 \text{ s}$ ; damit ist die tägliche Energieabgabe:  $E_{\text{sg}}At = \underline{\underline{4,4 \cdot 10^7 \text{ J} (\cong 12,2 \text{ kWh})}}$ .

b)  $39^\circ\text{C} \cong 312,15 \text{ K}$ . Daher steigt  $E_{\text{sg}}A$  auf  $538 \text{ W}$ , d. h. um  $5\%$ .

c) Wir haben nur die von der Körperoberfläche emittierte Energie berechnet. Der Mensch nimmt aber laufend durch Absorption thermische Strahlungsenergie auf, die von seiner Umgebung abgestrahlt wird. Da deren Temperatur nur geringfügig niedriger als die Hauttemperatur ist, wird ein großer Teil des Energieverlustes durch Abstrahlung infolge der Absorption von Umgebungsstrahlung wieder wettgemacht.

17.4 Zuerst wollen wir  $E_D$  in SI-Einheiten umrechnen:

$E_D = 70 \text{ kcal mol}^{-1} \cdot 4,19 \cdot 10^3 \text{ J kcal}^{-1} = 2,93 \cdot 10^5 \text{ J mol}^{-1}$ . Diese Energie ist auf ein Mol bezogen. Auf ein Molekül bezogen erhalten wir daraus:  $E' = E_D/N_A = 2,93 \cdot 10^5 \text{ J mol}^{-1} / 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = \underline{\underline{4,9 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}$ . Diese Energie muss ein Photon mit-

bringen, um Dissoziation eines Moleküls zu bewirken. Aus der Lichtquantenenergie  $h\nu = hc/\lambda = 4,9 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  berechnet sich die Wellenlänge zu  $\lambda = (6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}) \times (3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}) / (4,9 \cdot 10^{-19} \text{ J}) = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m} = \underline{4 \cdot 10^2 \text{ nm}}$ .

- 17.5** Die Leuchtdichte ist  $L = \Phi/(\Omega A)$ , wobei  $A$  die Fläche des leuchtenden Körpers (hier also der lichtstreuenden Mattglaskugel) ist. Als Raumwinkel  $\Omega$  nehmen wir  $4\pi$  (also den ganzen Raum); die leuchtende Fläche ist die ganze Kugeloberfläche  $4\pi r^2$ . Daher soll gelten:

$$2000 \text{ cd m}^{-2} \geq 1500 \text{ lm} / ((4\pi r)^2 \text{ m}^2 \text{ rad}) \quad \text{bzw.} \quad r \geq \frac{1}{4\pi} \cdot \left( \frac{1500}{2000} \right)^{1/2} = \underline{7 \text{ cm}}.$$

- 18.1** a) Auslöschung (ein dunkler Streifen) tritt auf, wenn der optische Gangunterschied zwischen beiden Lichtbündeln  $\lambda/2$  beträgt. Der zweimal reflektierte Strahl legt, verglichen mit dem direkt durchlaufenden Licht, zusätzlich zweimal die Strecke  $d$  der Luftschicht, also  $2d$  zurück. Daher ist  $d = \underline{\lambda/4}$ . Entsprechend tritt ein heller Interferenzstreifen auf, wenn die Schichtdicke  $d = \underline{\lambda/2}$  beträgt.
- b) Nach dem Ergebnis von a) ist die Dicke  $d$  für verschiedene Wellenlängen unterschiedlich. Die Luftschicht ist nun nicht überall gleich dick, so dass Streifen für verschiedene Farben nebeneinander liegen, und daher erscheint das Streifensystem farbig.
- c) Wenn die Dicke der Luftschicht größer ist als die Kohärenzlänge des Lichtes (Länge des gesamten Wellenzuges), so tritt keine Interferenz auf.
- 18.2** a) Wie in Kap. 19.5.1 ausgeführt, trägt die gekrümmte Grenzfläche Luft/Hornhaut wesentlich zur Abbildung im Auge bei. Nach Gl. (19-7) ist ihre Brechkraft bestimmt durch den Brechungsindex-Unterschied  $n_2 - n_1$ . Dieser wird wesentlich geändert, wenn an die Stelle von  $n_1 = 1$  (Luft) der Wert  $n_1 = 1,33$  (Wasser) tritt, so dass die Abbildung im Auge unscharf wird.
- b) Die Taucherbrille bewirkt, dass die Hornhaut nicht an Wasser, sondern an Luft grenzt, so dass die Brechkraft des Auges beim Tauchen nicht verändert wird. Allerdings werden die aus dem Wasser durch das ebene Brillenfenster einfallenden Lichtstrahlen gebrochen (und zwar vom Lot weg), so dass alle Gegenstände im Wasser unter größerem Winkel und damit näher bzw. vergrößert erscheinen.
- 18.3** Nach Gl. (18-8) ist die durchgelassene Lichtleistung  $P = 1 \text{ W} \cdot \exp(-2 \text{ cm}^{-1} \cdot 1 \text{ cm}) = 0,135 \text{ W}$ . In der Lösung werden also  $(1 - 0,135) \text{ W} = \underline{0,865 \text{ W}}$  absorbiert, d. h. pro Sekunde werden  $0,865 \text{ J}$  in Wärmeenergie umgewandelt.
- 18.4** a) Nachmittags steht die Sonne schräg am Himmel, und das Sonnenlicht muss eine größere Strecke durch die Atmosphäre hindurch zurücklegen als mittags. In der Atmosphäre wird besonders das kurzwellige (höherenergetische) Licht gestreut, das Sonnenbrand verursachen kann (typische Wellenlänge für Sonnenbrand:  $310 \text{ nm}$ ). Das Sonnenlicht enthält also nachmittags weniger UV als mittags und bräunt daher weniger. Entsprechendes gilt für das Sonnenlicht im Winter.
- b) Die in der Medizin verwendete Röntgenstrahlung ist so hochenergetisch, dass die Quantenenergie weit über den Anregungsenergien der im Körper enthaltenen (meist leichten) Atome liegt, und daher Absorption weitgehend entfällt. Als Extinktionsprozesse bleiben komplizierte Streuprozesse, deren Wahrscheinlichkeit aber gering ist (Kap. 21.3.3). Daher können Röntgenstrahlen den menschlichen Körper mit nur

geringer Schwächung durchdringen. Sichtbares Licht dagegen wird bereits in dünnen Schichten der Haut zum größten Teil absorbiert und kann daher nicht zur Durchleuchtung verwendet werden (s. Abb. 18.22).

**18.5** Nach Gl. (18-17) ist  $\alpha = \alpha_0 C d = 66,5^\circ \text{ m}^{-1} (\text{g/l})^{-1} \cdot C \cdot 0,1 \text{ m} = 20^\circ$ . Daraus folgt  $C = \underline{\underline{3,01}}$  Gramm Zucker pro Liter Lösung.

**18.6** a) Die potentielle Energie des einzelnen Elektrons (Ladung  $e$ ) im elektrischen Feld der Spannung  $U$  ist  $E_{\text{pot}} = eU$ ; sie wird, da sich die Elektronen frei bewegen können, in kinetische Energie umgewandelt, d. h.  $eU = mv^2/2$ . Daraus ergibt sich mit den Werten der Tabelle im Anhang A.6 die Geschwindigkeit:

$$v = (2eU/m)^{1/2} = (2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^4 \text{ V} / 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})^{1/2} = \underline{\underline{6 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}}}.$$

(Dies sind schon 20% der Lichtgeschwindigkeit; für genaue Rechnungen müsste man daher die relativistische Massenänderung berücksichtigen, die hier 2% beträgt.)

Nach Gl. (18-18) ist die Materiewellenlänge

$$\lambda_M = h/(mv) = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s} / (9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}) = 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ m} = \underline{\underline{0,012 \text{ nm}}}.$$

b) Nach Gl. (21-12) ist die Grenzwellenlänge der Röntgen-Bremsstrahlung gegeben durch  $\lambda_G = hc/(eU)$ , und daher ist

$$\lambda_G = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} / (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^4 \text{ V}) = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m} = \underline{\underline{0,12 \text{ nm}}}.$$

**19.1** a) Wegen  $\lambda v = c$  (Gl. (7-6)) ist  $v/v_0 = \lambda_0/\lambda$ . Daher gilt:

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = \frac{(1-v/c)^2}{1-(v/c)^2} = \frac{(1-v/c)^2}{(1-v/c)(1+v/c)} = \frac{1-v/c}{1+v/c}.$$

$$\text{Auflösung nach der Geschwindigkeit } v \text{ ergibt: } v = c \frac{1 - (\lambda_0/\lambda)^2}{1 + (\lambda_0/\lambda)^2} = \underline{\underline{1,4 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}}}.$$

Diese Geschwindigkeit entspricht 5% der Vakuumlichtgeschwindigkeit!

b)  $s = v/H = 9 \cdot 10^{21} \text{ km}$ .

1 *Lichtjahr* ist die Strecke, die das Licht (im Vakuum) in einem Jahr zurücklegt: 1 Lichtjahr =  $9,45 \cdot 10^{12} \text{ km}$ . Daher:  $s = \underline{\underline{9,5 \cdot 10^8 \text{ Lichtjahre}}}$ .

**19.2** a) Das Reflexionsvermögen von Wasser ist gering. (Es nimmt übrigens zu, wenn die Lichtstrahlen schräger auf die Oberfläche treffen. Spiegelbilder sind daher besonders deutlich, wenn man direkt am Ufer steht.)

b) Metalle wie Gold, Silber oder Aluminium reflektieren im Bereich der Wärmestrahlung (d. h. im Infraroten) fast hundertprozentig. Dünne Metallschichten schützen daher sehr wirkungsvoll gegen Wärmestrahlung.

c) Nach Gl. (19-4a) ist  $R = (n-1)^2/(n+1)^2 = 0,041$ . An der ersten Grenzfläche (Luft/Gas) wird die Strahlungsleistung  $P_1 = RP_0 = 0,041P_0$ , d. h. 4,1% von  $P_0$  reflektiert. Auf die zweite Grenzfläche (Gas/Luft) trifft daher  $0,959P_0$  auf, wovon wieder 4,1% reflektiert werden:  $P_2 = 0,959 \cdot 0,041 \cdot P_0 = 0,039P_0$ . Insgesamt werden also  $4,1 + 3,9\% = \underline{\underline{8,0\%}}$  reflektiert, und  $\underline{\underline{92,9\%}}$  der Strahlung treten durch das Fenster hindurch.

**19.3** Die von der Forelle ausgehenden Lichtstrahlen werden beim Durchgang durch die Wasseroberfläche vom Einfallslot weggebrochen (Abb. 19.8b). Weil das Gehirn bei der Verarbeitung der optischen Information voraussetzt, dass Lichtstrahlen geradlinig verlaufen, erscheint die Forelle näher der Oberfläche als dies tatsächlich der Fall ist. Der

Effekt wird um so stärker, je schräger Sie ins Wasser schauen. Daher beugen Sie sich am besten so weit vor, dass die Forelle sich senkrecht unter Ihnen befindet.

- 19.4** a) Die Glaskugel stellt einen Spezialfall einer Bikonvexlinse (Abb. 19.21) dar, nach Gl. (19-12) wirkt sie sammelnd ( $f > 0$ ).
- b) Der Unterschied zu a) besteht darin, dass nun  $n_1 = 1,33$  und  $n_2 = 1$  ist, so dass sich aus Gl. (19-12) ein negatives  $f$  ergibt. Die Luftblase wirkt also wie eine Zerstreuungslinse!
- c) Kombinieren wir die Ergebnisse von a) und b), so sehen wir: Die Glaskugel muss in einen Stoff mit höherem Brechungsindex eingebettet werden, z. B. in Benzol ( $n_1 = 1,54$ ).
- 19.5** a) Nach Gl. (19-12) ist die Brechkraft  $1/f = (1,6 - 1) \cdot [1/(0,2 \text{ m}) - 1/(0,5 \text{ m})] = \underline{\underline{+1,8 \text{ Dptr.}}}$   
Es handelt sich um eine Sammellinse, die zur Korrektur der Übersichtigkeit dient.
- b)  $1/f = (1,6 - 1) \cdot [-1/(0,2 \text{ m}) + 1/(0,5 \text{ m})] = \underline{\underline{-1,8 \text{ Dptr.}}}$   
Mit dieser Zerstreuungslinse lässt sich Kurzsichtigkeit korrigieren.
- c) Für die beiden Ebenen ergeben sich aus Gl. (19-13) die Brechkraften  $1,40 \text{ Dptr.}$  bzw.  $1,80 \text{ Dptr.}$   
Die astigmatische Differenz (Gl. (19-18)) beträgt daher  $\delta = \underline{\underline{0,40 \text{ Dptr.}}}$ .
- 19.6** Im Rahmen unseres groben Modells lässt sich die Antwort auf dreierlei Art finden: Man kann den Strahlengang zeichnen (s. Abb. 19.25), man kann die Abbildungsgleichung anwenden (Gl. (19-11) und Gl. (19-16)), und man kann das Abbildungsdiagramm auswerten (Abb. 19.27). Daraus geht hervor, dass das Bild umgekehrt, reell und extrem verkleinert ist. Die Bildweite ergibt sich aus Gl. (19-11) zu  $b = 23 \text{ mm}$ , der Abbildungsmaßstab aus Gl. (19-16) zu  $V_A = 9 \cdot 10^{-4}$  und damit die Bildgröße zu  $B = V_A \cdot G = \underline{\underline{1,5 \text{ mm.}}}$
- 19.7** Die beugende Öffnung des Auges ist die Pupillenöffnung. Nehmen wir vereinfachend an, die Abbildung erfolge an einer einzelnen dünnen Linse in der Pupillenebene, so liefert Tab. 18.1 für den ersten Ring:  $\sin \gamma_1 = 1,22\lambda/2r$ . Für  $\lambda$  ist hier die Wellenlänge im Glaskörper,  $\lambda = \lambda_{\text{vak}}/n$ , einzusetzen. Der Ring mit Radius  $R$  entsteht im Abstand  $f$ , und daher ist  $\gamma_1 = R/f$ . Da  $\gamma_1$  sehr klein ist, können wir näherungsweise schreiben:  $\gamma_1 \approx \sin \gamma_1 \approx \tan \gamma_1$ , und dann erhalten wir:  $R = 1,22f\lambda_{\text{vak}}/(n2r) = 3,5 \mu\text{m}$ . Ungefähr ist also die Breite des aus dem Gegenstandspunkt entstehenden Bildflecks  $\underline{\underline{7 \mu\text{m.}}}$  Wegen dieser Beugungsunschärfe wäre eine dichtere Packung von Sehzellen, als sie im Auge vorliegt, nutzlos, denn dann würden mehrere benachbarte Zellen Informationen über dieselben Bilddetails liefern.
- 20.1** a) Nach Gl. (20-3) hängt  $\delta$  nicht direkt von  $V$  ab, in der Praxis aber doch, da Objektive kleiner Vergrößerung mit geringer numerischer Apertur  $NA$  gebaut werden. Aus Gl. (20-3) ergibt sich für das Objektiv mit  $V = 100$ :  
 $\delta = \lambda/(n \sin a) = \lambda/NA = 600 \text{ nm}/0,5 = \underline{\underline{1,2 \mu\text{m.}}}$   
Für das schwach vergrößernde Objektiv folgt entsprechend  $\delta = \underline{\underline{6 \mu\text{m.}}}$
- b) Durch nachträgliche fotografische Vergrößerung wird die Auflösungsgrenze *nicht* verändert; letztere bezieht sich auf das Objekt, nicht auf das Bild. Die nachträgliche Vergrößerung ist eine *Leervergrößerung* (Kap. 20.3.3). Es ist also besser, das stärkere Mikroskopobjektiv zu verwenden.
- c) Das Okular kann nur diejenigen Strukturen nachvergrößern, die im Zwischenbild enthalten sind. Diese werden durch die  $NA$  des Objektivs bestimmt. Wie in b) lässt sich auch hier die Qualität des Bildes nicht nachträglich verbessern. Daher ist es angebracht, Objektive mit hoher  $NA$  zu verwenden.

- 20.2** a) Die Lösung ist in den Bezeichnungen der Abb. 20.15 enthalten.  
b) Mit den Gln. (20-6) und (18-10) erhalten wir

$$I_{\text{Probe}}/I_{\text{Vergleich}} = 0,8 = \exp(-K_{\text{sp}}Cd) = \exp(-5 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^2 \cdot C \cdot 0,01 \text{ m}).$$

$$\text{Aufgelöst nach } C \text{ ergibt sich } C = -\ln(0,8)/(5 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^2 \cdot 0,01 \text{ m}) = 4,5 \text{ kg m}^{-3} = \underline{\underline{4,5 \text{ g l}^{-1}}}.$$

- 20.3** Wegen der extremen Unterschiede zwischen Gegenstands- und Bildweiten ist hier die grafische Lösung mit dem Abbildungsdiagramm (Abb. 19.27) schlecht durchzuführen.

a) Aus der Abbildungsgleichung (Gl. (19-11)) folgen als Bildweiten für die drei Objektive:  $b_1 = 28 \text{ mm}$ ,  $b_2 = 51 \text{ mm}$  und  $b_3 = 139 \text{ mm}$ . Mit Gl. (19-15) ergeben sich die Bildgrößen zu:  $B_1 = \underline{2,8 \text{ mm}}$ ,  $B_2 = \underline{5,1 \text{ mm}}$ ,  $B_3 = \underline{13,9 \text{ mm}}$ .

b) Ersetzen wir  $b$  in Gl. (19-15) mit Hilfe der Abbildungsgleichung, so erhalten wir  $G/B = a \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right) = a/f - 1$ . Mit  $G/B = G/B_3 = 36$  und  $f = 28 \text{ mm}$  folgt daraus  $a = \underline{\underline{1,04 \text{ m}}}$ .

- 21.1** Um die gesamte Strahlungsleistung der Sonne  $P_S$  in alle Richtungen zu erhalten, muss  $I_0$  mit der Kugelfläche in der Entfernung Sonne – Erde multipliziert werden:

$$P_S = 4\pi r^2 \cdot I_0 = 4\pi \cdot 1,5^2 \cdot 10^{22} \text{ m}^2 \cdot 1,36 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2} = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}.$$

$$\text{Pro Sekunde umgewandelte Masse: } \frac{m}{t} = \frac{P_S}{c^2} = \frac{3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}}{9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = \underline{\underline{4,3 \cdot 10^9 \text{ kg s}^{-1}}}.$$

- 21.2** Nach der Gleichung (14-1) beträgt die Coulomb-Kraft:

$$F_C = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(1,6)^2 \cdot (10^{-19})^2 \text{ C}^2}{4\pi \cdot 8,855 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1} \cdot (10^{-15})^2 \text{ m}^2} = \underline{\underline{230 \text{ N}}}.$$

Wenn der Atomkern stabil ist, müssen die Kernbindungskräfte pro Nukleon größer als 230 N sein.

- 21.3** Durch Kombination der Gln. (21-5) und (21-7) ergibt sich für die Aktivität:

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} \quad \text{bzw.} \quad \ln A(t) = \ln A_0 - \frac{\ln 2}{T_{1/2}} t. \quad \text{Aufgelöst nach } t \text{ folgt:}$$

$$t = \frac{\ln A_0 - \ln A(t)}{\ln 2} T_{1/2} = \frac{\ln 15,3 - \ln 12,5}{\ln 2} \cdot 5568 \text{ Jahre} = \underline{\underline{1624 \text{ Jahre}}}.$$

- 21.4** Gesamtzahl der emittierten Gammaquanten:

$$I = \frac{I_m}{\eta} = \frac{84 \text{ s}^{-1} \cdot 100}{21} = 400 \text{ s}^{-1}.$$

3,01 Gammaquanten pro Sekunde entsprechen 1 g Kalium, 400 Gammaquanten pro Sekunde entsprechen daher 132,9 g Kalium.

- 21.5** Die Zahl der zum Zeitpunkt  $t$  vorhandenen Phosphoratome  $n$  ergibt sich nach den Gln. (21-4) und (21-5) zu:

$$n = \frac{mN_A}{M} e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}$$

( $N_A$  = Avogadro-Konstante:  $M$  = molekulare Masse)

Zahl der Kernumwandlungen  $\Delta n$  während des ersten Tages:

$$\begin{aligned}\Delta n &= n(t=0) - n(t=1 \text{ d}) = \frac{mN_A}{M} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} 1 \text{ d}}\right) \\ &= \frac{10^{-6} \text{ g} \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{33 \text{ g mol}^{-1}} \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{25 \text{ d}} 1 \text{ d}}\right) = \underline{\underline{5 \cdot 10^{14}}}.\end{aligned}$$

- 21.6** Wenn zum Zeitpunkt  $t = 0$  das Tochternuklid vollständig eluiert wird, ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Zahl der Kerne der Tochtersubstanz  $n_T$  und der Zahl der Kerne der Muttersubstanz  $n_M$  aus Gl. (21-9):

$$n_T = \frac{\lambda_m}{\lambda_T} n_M (1 - e^{-\lambda_T t}).$$

Damit ergibt sich für die Aktivitäten:

$$A_T = A_M \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_T} t}\right) = 1,86 \text{ GBq} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{1,666} 3 \text{ h}}\right) = \underline{\underline{1,32 \text{ GBq}}}.$$

- 21.7** Das Volumen ergibt sich aus dem Verhältnis von reinjizierter Aktivität zu der Aktivitäten in einem  $\text{cm}^3$ .

$$V = \frac{A}{a \text{ cm}^{-3}} = \frac{60\,000 \text{ (Imp min}^{-1}\text{)}}{12 \text{ (Imp min}^{-1}\text{)} \text{ cm}^{-3}} = 5000 \text{ cm}^3 = \underline{\underline{5 \text{ Liter}}}.$$

- 21.8** a) Die Differenz der Bindungsenergien  $\Delta E$  (s. Kapitel 12.2.9) zwischen einem Heliumkern und zwei Deuteronenkernen ergibt sich aus den mittleren Bindungsenergien pro Nukleon  $E_{\text{He}}$  bzw.  $E_{\text{D}}$ :

$$\begin{aligned}\Delta E &= 4(E_{\text{He}} - E_{\text{D}}) = 4 \cdot (7,06 \text{ MeV} - 1,09 \text{ MeV}) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J MeV}^{-1} \\ &= \underline{\underline{38,3 \cdot 10^{-13} \text{ J}}}.\end{aligned}$$

$$\text{b) } E = \frac{\Delta E N_A}{m_{\text{He}}} = \frac{38,3 \cdot 10^{-13} \text{ J} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{4,0026 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}} = \underline{\underline{5,76 \cdot 10^{14} \text{ J kg}^{-1}}}.$$

$$\text{c) } m_{\text{Kohle}} = \frac{E}{H} = \frac{5,75 \cdot 10^{14} \text{ J}}{2,85 \cdot 10^7 \text{ J kg}^{-1} \cdot 10^3 \text{ kg t}^{-1}} = \underline{\underline{20175 \text{ t}}}.$$

- 21.9** Die Gesamtzahl der  $\beta$ -Zerfälle in der Leber ist gleich der Zahl der in der Leber gespeicherten  $^{32}\text{P}$ -Atome, deren Ausgangsaktivität bekannt ist. Zwischen dieser Aktivität und der Zahl  $n_0$  der in der Leber gespeicherten  $^{32}\text{P}$ -Atome besteht nach Gl. (21-6) folgender Zusammenhang:  $n_0 = \frac{A_0}{\lambda}$ . Die Zerfallskonstante  $\lambda$  folgt aus Gl. (21-5):  $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ .

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{14,3 \text{ d} \cdot 86\,400 \text{ s d}^{-1}} = 5,61 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1},$$

$$n_0 = \frac{10^6 \text{ Bq}}{5,6 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}} = 1,78 \cdot 10^{12} \text{ Atome}.$$

Die gesamte von den  $\beta$ -Teilchen an die Leber abgegebene Energie ist:

$$E_{\text{ges}} = n_0 \bar{E}_{\beta} = 1,78 \cdot 10^{12} \cdot 0,58 \text{ MeV} = 1,03 \cdot 10^{12} \text{ MeV} = 0,165 \text{ J}.$$

Nach Gl. (21-16) ergibt sich die Energiedosis zu:

$$D = \frac{E_{\text{ges}}}{m} = \frac{0,165 \text{ J}}{1,5 \text{ kg}} = \underline{\underline{0,11 \text{ Gy}}}.$$

**21.10** Zwischen Energie und Masse gilt allgemein nach Gl. (3-10) die Beziehung:  $E = mc^2$ .

Die kinetische Energie ist die Differenz zwischen der Energie der Elektronen nach ihrer Beschleunigung und ihrer Ruheenergie:

$$E_{\text{kin}} = c^2(m - m_0) \quad \text{bzw.} \quad eU = c^2(m - m_0).$$

Hieraus folgt:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{eU}{m_0 c^2} + 1 = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2 \cdot 10^7 \text{ V}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} + 1 = \underline{\underline{40}}.$$



## A.1 Mathematische Beschreibung physikalischer Zusammenhänge

Setzen wir in eine mathematische Funktion  $y = f(x)$ , wie beispielsweise Gl. (18-9), einen Zahlenwert  $x_0$  für die Variable  $x$  ein, so erhalten wir einen festen Zahlenwert  $y_0$  für die abhängige Variable  $y$ . In einem Koordinatensystem mit beiden Variablen als Achsen erhalten wir einen Punkt  $(x_0, y_0)$ . Physikalische Größen unterscheiden sich von mathematischen Größen dadurch, dass sie stets nur mit begrenzter Genauigkeit bestimmbar sind. Messen wir die beiden Werte  $x_0$  und  $y_0$ , so ist jeder Messpunkt von einem Streuintervall der Messgröße umgeben, innerhalb dessen der wahre Wert liegt, der sich von dem gemessenen Wert wegen der begrenzten Messgenauigkeit unterscheiden kann. Dieses Ungenauigkeits-, Streu- oder Fehlerintervall hat seine Ursache sowohl in Veränderungen innerhalb des Messobjektes während der Messung, als auch in der begrenzten Genauigkeit der Messapparatur. Methoden zur Abschätzung dieses Fehlerintervalls werden in Kap. A.2 angegeben.

Zur experimentellen Ermittlung eines physikalischen Zusammenhanges zwischen zwei Variablen stellen wir in vorgegebenen Schritten (innerhalb der Einstellgenauigkeit) feste Werte der einen Variablen  $x$  ein und messen die Reaktion des Messobjektes, die abhängige Variable  $y$ , deren Wert wir in den Grenzen der Messgenauigkeit erhalten. Diese Messergebnisse können wir in Form einer *Wertetabelle* (Abb. A.1a) angeben, die Messwerte *und* Fehlerintervalle enthält. Wir können die Ergebnisse aber auch *grafisch* in einem Koordinatensystem der Variablen  $x$  und  $y$  darstellen (Abb. A.1b). In dieser Abbildung sind die Fehlerintervalle beider Größen in zwei verschiedenen, üblichen Darstellungen einge-

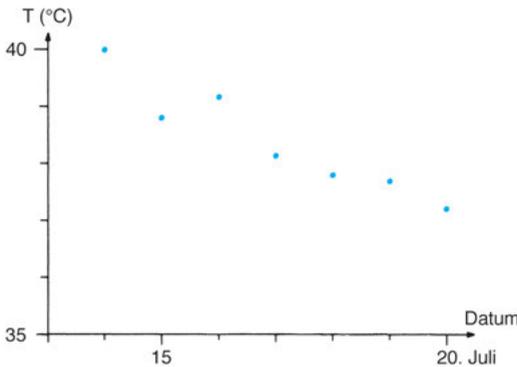
zeichnet: Bei den ersten beiden Messpunkten sind beide Fehlerintervalle als Balken gekennzeichnet, bei den übrigen als die resultierenden Fehler-Flächen.

Soweit es sich bei  $x$  und  $y$  um kontinuierliche Variablen handelt, können wir diese Punkte durch eine glatte Kurve, die *Interpolationskurve* verbinden. Je mehr Messpunkte man ermittelt, um so genauer sind Feinheiten des Zusammenhangs zwischen beiden Variablen zu erkennen, um so geringer wird der *Interpolationsfehler*. Die Bedeutung der Interpolationskurve liegt darin, dass wir annehmen, wir würden bei weiteren Messungen Messpunkte erhalten, die innerhalb der Fehlergrenzen auf dieser Interpolationskurve liegen. Die Interpolationskurve kann man wiederum durch eine *mathematische Funktion* analytisch beschreiben. Bei der Ermittlung dieser Funktion lässt man üblicherweise die Fehlerintervalle außer acht. Nicht immer ist aber eine Interpolation sinnvoll. Ein Gegenbeispiel: Bei einem Patienten wird jeden Morgen die Körpertemperatur gemessen, und diese wird grafisch gegen das Datum aufgetragen (Abb. A.1c). Dann ist es sinnlos, zwischen diesen Punkten zu interpolieren, da die morgendliche Körpertemperatur nicht unbedingt auf die Temperatur zu anderen Tageszeiten schließen lässt. Verbindet man die Punkte dennoch durch Striche, dann haben diese nicht die Bedeutung einer Interpolationskurve, sondern sollen lediglich einen Trend im Befinden des Patienten hervorheben.

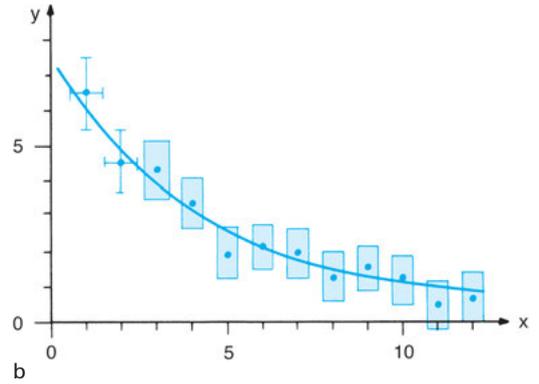
Ein weiterer Unterschied zwischen mathematischen und physikalischen Größen ist der, dass erstere i. A. reine Zahlen, letztere aber meist dimensionsbehaftet sind (Länge, Kraft usw.). Dennoch wendet man auf physikali-

x	y
1,0 ± 0,47	6,5 ± 1,0
2,0 ± 0,45	4,5 ± 0,8
3,0 ± 0,35	4,3 ± 0,8
4,0 ± 0,30	3,4 ± 0,7
5,0 ± 0,27	1,9 ± 0,7
6,0 ± 0,30	2,2 ± 0,6
7,0 ± 0,30	2,0 ± 0,7
8,0 ± 0,30	1,8 ± 0,7
9,0 ± 0,30	2,1 ± 0,6
10,0 ± 0,30	1,8 ± 0,7
11,0 ± 0,30	0,5 ± 0,7
12,0 ± 0,30	0,7 ± 0,7

a



c



b

**Abb. A.1** Beschreibung physikalischer Zusammenhänge (a) durch eine Wertetabelle, (b, c) grafisch.

sche Größen mathematische Operationen wie Multiplikation, Addition oder die Berechnung einer Sinus-Funktion an. Man erhält z. B. im Weg-Zeit-Diagramm (Abb. 1.5) für  $\tan \alpha = s/t$  eine Größe der Dimension Geschwindigkeit, oder man multipliziert in Gl. (2-2) eine Masse mit einer Beschleunigung, um eine Kraft zu erhalten. Eigentlich führt man dabei drei Rechenoperationen aus. Ein Beispiel soll das veranschaulichen. Die Hubarbeit zur Anhebung eines Körpers der Masse 3 kg im irdischen Schwerfeld um 5 Meter soll berechnet werden. Die physikalische Bestimmungsgleichung (Gl. (3-5)) lautet allgemein  $mgh = E_{\text{pot}}$ . Die Lösungsoperation besteht dann aus drei Schritten: (1) die Berechnung der (mathematischen) Zahlenwertgleichung  $3 \cdot 9,8 \cdot 5 = 147$ , (2) die Berechnung der (physikalischen) Dimensionsgleichung  $\{\text{Masse}\} \times \{\text{Erdbeschleunigung}\} \times \{\text{Höhe}\} = \{\text{Energie}\}$  und (3) die Berechnung der Einheitengleichung

$$1 [\text{Kilogramm}] \times 1 [\text{Meter/Sekunde}^2] \times 1 [\text{Meter}] = 1 [\text{Joule}] \text{ oder, abgekürzt, } 1 [\text{kg}] \times 1 [\text{m}(\text{s}^2)] \times 1 [\text{m}] = 1 [\text{J}].$$

Als Faustregel gilt: bei einer Operation mit dimensionsbehafteten Größen in Physik und Technik ist die Bestimmung der *Einheit* ebenso wichtig wie die Bestimmung des *Zahlenwertes*. Während man auf diese Weise Produkte und Quotienten mit Größen beliebiger Dimension bilden kann, lassen sich Summen und Differenzen nur aus Größen gleicher Dimension und Einheit bilden. Noch schärfer sind die Einschränkungen für mathematische Funktionen, wie Sinus, Tangens, *e*-Funktion, Logarithmus usw. Ihre Argumente müssen stets reine Zahlen sein. So wird bei der Schwingung in Gl. (6-3) die Zeit *t* mit einer Konstanten der Dimension  $\text{Zeit}^{-1}$  multipliziert (der Kreisfrequenz  $\omega$ ), damit das Argument des Sinus dimensionslos wird.

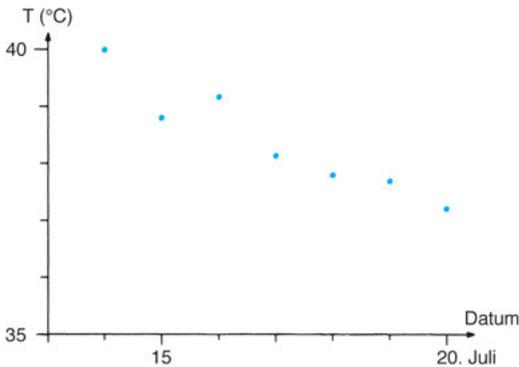
## A.2 Fehlerabschätzung

Physikalische Messgrößen unterscheiden sich, wie wir im vorangegangenen Kapitel gesehen haben, von mathematischen Größen dadurch,

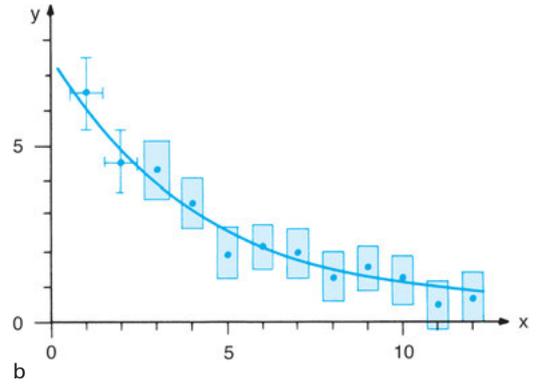
dass sie stets nur mit begrenzter Genauigkeit messbar sind. Anstelle eines exakten Wertes – eines Punktes in einem Koordinatensys-

x	y
1,0 ± 0,47	6,5 ± 1,0
2,0 ± 0,45	4,5 ± 0,8
3,0 ± 0,35	4,3 ± 0,8
4,0 ± 0,30	3,4 ± 0,7
5,0 ± 0,27	1,9 ± 0,7
6,0 ± 0,30	2,2 ± 0,6
7,0 ± 0,30	2,0 ± 0,7
8,0 ± 0,30	1,8 ± 0,7
9,0 ± 0,30	2,1 ± 0,6
10,0 ± 0,30	1,8 ± 0,7
11,0 ± 0,30	0,5 ± 0,7
12,0 ± 0,30	0,7 ± 0,7

a



c



b

**Abb. A.1** Beschreibung physikalischer Zusammenhänge (a) durch eine Wertetabelle, (b, c) grafisch.

sche Größen mathematische Operationen wie Multiplikation, Addition oder die Berechnung einer Sinus-Funktion an. Man erhält z. B. im Weg-Zeit-Diagramm (Abb. 1.5) für  $\tan \alpha = s/t$  eine Größe der Dimension Geschwindigkeit, oder man multipliziert in Gl. (2-2) eine Masse mit einer Beschleunigung, um eine Kraft zu erhalten. Eigentlich führt man dabei drei Rechenoperationen aus. Ein Beispiel soll das veranschaulichen. Die Hubarbeit zur Anhebung eines Körpers der Masse 3 kg im irdischen Schwerfeld um 5 Meter soll berechnet werden. Die physikalische Bestimmungsgleichung (Gl. (3-5)) lautet allgemein  $mgh = E_{\text{pot}}$ . Die Lösungsoperation besteht dann aus drei Schritten: (1) die Berechnung der (mathematischen) Zahlenwertgleichung  $3 \cdot 9,8 \cdot 5 = 147$ , (2) die Berechnung der (physikalischen) Dimensionsgleichung  $\{\text{Masse}\} \times \{\text{Erdbeschleunigung}\} \times \{\text{Höhe}\} = \{\text{Energie}\}$  und (3) die Berechnung der Einheitengleichung

$$1 [\text{Kilogramm}] \times 1 [\text{Meter/Sekunde}^2] \times 1 [\text{Meter}] = 1 [\text{Joule}] \text{ oder, abgekürzt, } 1 [\text{kg}] \times 1 [\text{m}(\text{s}^2)] \times 1 [\text{m}] = 1 [\text{J}].$$

Als Faustregel gilt: bei einer Operation mit dimensionsbehafteten Größen in Physik und Technik ist die Bestimmung der *Einheit* ebenso wichtig wie die Bestimmung des *Zahlenwertes*. Während man auf diese Weise Produkte und Quotienten mit Größen beliebiger Dimension bilden kann, lassen sich Summen und Differenzen nur aus Größen gleicher Dimension und Einheit bilden. Noch schärfer sind die Einschränkungen für mathematische Funktionen, wie Sinus, Tangens, *e*-Funktion, Logarithmus usw. Ihre Argumente müssen stets reine Zahlen sein. So wird bei der Schwingung in Gl. (6-3) die Zeit *t* mit einer Konstanten der Dimension  $\text{Zeit}^{-1}$  multipliziert (der Kreisfrequenz  $\omega$ ), damit das Argument des Sinus dimensionslos wird.

## A.2 Fehlerabschätzung

Physikalische Messgrößen unterscheiden sich, wie wir im vorangegangenen Kapitel gesehen haben, von mathematischen Größen dadurch,

dass sie stets nur mit begrenzter Genauigkeit messbar sind. Anstelle eines exakten Wertes – eines Punktes in einem Koordinatensys-

tem — lässt sich nur ein Intervall der Messgröße angeben, innerhalb dessen der gesuchte Wert liegt. Dieses Ungenauigkeits-, Streu- oder Fehlerintervall kann seine Ursachen in dem Messobjekt oder der Messapparatur haben.

Bei Routinemessungen mit kommerziellen Messgeräten, die nur mäßige Genauigkeit erfordern, wie z. B. mit dem Fieberthermometer, gibt man sich meist mit dem Messwert zufrieden, ohne nachzuprüfen, ob und in welchem Ausmaß das Ergebnis falsch sein könnte. Dazu trägt ein gewisses Zutrauen in die Funktionstüchtigkeit und die Lebensdauer des Messgerätes bei und andererseits ein — bei Routineuntersuchungen — oft kaum vertretbarer Aufwand zur dauernd wiederholten Ermittlung und Prüfung der Genauigkeit.

Dennoch gilt normalerweise:

Die Angabe des Endergebnisses einer Messaufgabe ist erst vollständig, wenn neben Zahlenwert und Maßeinheit der Messgeräte auch das Fehlerintervall angegeben wird.

Eine Abschätzung des Fehlers ist ebenso wichtig wie die Messung selbst. Insbesondere ist die Fehlerdiskussion bei Untersuchungen mit Messapparaten unbekannter Güte oder bei Experimenten mit hohen Genauigkeitsanforderungen unerlässlich. Bezeichnen wir das Feh-



**Abb. A.2** Grafische Angabe des Messwertes  $x_0$  und seines Fehlerintervalls  $\pm \Delta x$ .

lerintervall einer Messgröße  $x_0$  mit  $\Delta x$ , so lautet die vollständige Angabe des Ergebnisses:

$$(x_0 \pm \Delta x) \text{ Einheiten.} \quad (\text{A-1})$$

(Wir wollen im folgenden in  $\Delta x$  stets eine *positive* Größe sehen.) In Abb. A.2 ist das Fehlerintervall der Größe  $x_0$  grafisch dargestellt. Ein Beispiel: Wir wiegen einen Körper mit einer Waage, die auf 0,1 g genau zu messen gestattet, und finden  $m = 50,0$  g, so ist die vollständige Angabe:

$$m = (50,0 \pm 0,1) \text{ g.}$$

Neben der in Gl. (A-1) angegebenen Schreibweise ist es auch üblich, das Fehlerintervall in Prozenten des Messwertes als prozentualen Fehler anzugeben,  $\Delta x_{\text{proz.}} = (\Delta x/x_0) \cdot 100\%$ , in unserem Beispiel also:  $50,0 \text{ g} \pm 0,2\%$ . Den Fehler  $\Delta x$  nennen wir *absoluten Fehler*; er trägt die Einheit des Messwertes. Die Fehlerangabe  $\Delta x_{\text{proz.}}$  wird als *prozentualer Fehler* bezeichnet und ist, wie alle Prozentangaben, dimensionslos. Der *relative Fehler* schließlich wird mit  $\Delta x_{\text{rel}} = \Delta x/x_0$  angegeben.

## 2.1 Größenordnungsmäßige Angabe von Messfehlern

Bei geringen Anforderungen an die Genauigkeit von Messungen genügt es oft zu wissen, in welcher Dezimalstelle des Messwertes der Fehler liegt, ohne dessen genaue Größe zu kennen. Für diesen Fall ist man übereingekommen, Messergebnisse in Dezimalzahlen mit so vielen Stellen anzugeben, dass die vorletzte Ziffer noch als zuverlässig anzusehen ist und in der letzten Ziffer der Fehler liegt. Ein Beispiel: Die Länge  $l$  sei auf 4 % genau gemessen. Dann gibt man sie mit 2 bzw. 3 Ziffern an, also z. B.  $l = 10,0$  cm oder  $l = 85$  cm. Eine an letzter Stelle stehende Null muss dabei stets mit angegeben werden;

würde man sie fortlassen, so würde dies einen um eine Zehnerpotenz zu großen Fehler vortäuschen.

Bei großen Zahlen ist diese Schreibweise nur möglich, wenn man die Zehnerpotenzen abspaltet. Ein Beispiel: Man hat die Lichtgeschwindigkeit auf 1 % genau gemessen. In diesem Fall würde die Angabe  $c = 300\,000$  km/s einen völlig falschen Eindruck von der Genauigkeit dieses Wertes geben, da man den Fehler in der letzten Ziffer vermuten würde; stattdessen muss man schreiben  $c = 3,00 \cdot 10^5$  km/s. Nun ist tatsächlich nur die letzte angegebene Ziffer mit dem Fehler behaftet.

Mit dieser Übereinkunft kann man nun Messergebnisse ohne zusätzliche Angabe des Fehlerintervalls anschreiben. Diese Übereinkunft ist ebenso zu berücksichtigen, wenn man aus mehreren verschiedenen Messwerten durch numerische Rechnung ein mittelbares Resultat erhält. Eine so zustande gekommene zu große Stellenzahl ist gemäß dem Gesamtfehler (s. unten) abzubrechen. Ein Beispiel: Man will die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Autos bestimmen. Dazu misst man eine Strecke  $s = 100$  m auf 3 % genau und

stoppt die Fahrzeit  $t = 3,00$  s auf 2 % genau. Es ist falsch, dann die resultierende Geschwindigkeit mit  $v = s/t = 100/3 = 33,333\ 333\ 333$  m/s anzugeben, nur weil sich diese Stellenzahl beispielsweise aus der Rechnung mit einem Taschencomputer ergeben hat. Vielmehr muss man den Fehler in  $v$  aus den Fehlern in  $s$  und  $t$  bestimmen. Er beträgt (s. unten) 5 %, so dass bereits die Einerstelle vor dem Komma ungenau ist. Die richtige Angabe der Geschwindigkeit unter Berücksichtigung der Größenordnung des Fehlers ist also  $v = 33$  m/s.

## 2.2 Ursachen von Fehlern

### 2.2.1 Fehler durch die Messapparatur

a) *Systematische Fehler* Hierzu gehören die fehlerhafte Eichung oder z. B. der verbogene Zeiger eines Messgerätes. Typisch ist, dass diese Fehler in *eine* Richtung gehen: So misst man mit einem durch Wärmeeinwirkung geschrumpften Plastiklineal stets zu große Längswerte. Systematische Fehler erkennt man durch geeignete Kontrollmessungen an bekannten Messobjekten, d. h. durch Eichung und kann dann die Messergebnisse korrigieren.

b) *Zufällige Fehler* Hierzu gehören subjektive Fehler, wie die unzulängliche Geschicklichkeit, ein Potentiometer einzustellen, das begrenzte Unterscheidungsvermögen des Auges bei Ablesungen, die Schwankungen einer Spannungsquelle, usw.

Obwohl systematische Fehler ebenso wichtig sind wie die zufälligen, spielen letztere bei der üblichen Fehlerabschätzung eine größere Rolle. Zufällige Fehler können nämlich ein Messergebnis mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu höheren wie zu niedrigeren Werten hin verfälschen, womit die Möglichkeit entfällt, das Messergebnis durch Nacheichen bezüglich des Fehlers zu korrigieren.

Bei technischen Seriengeräten ist in den Bedienungsanleitungen meist eine obere Fehler-

grenze der Messanzeige garantiert, unter der — allerdings nur bei einwandfreier Funktion und fehlerfreier Bedienung des Gerätes — der Fehler der Messwerte bleibt. Bei sinnvoll konstruierten Mess- und Anzeigegegeräten wird dieser Fehler bereits bei der Teilung der Messskala berücksichtigt, so dass die Differenz zweier benachbarter Teilstriche gerade noch über der Fehlergrenze liegt. Daher ist es meist sinnlos, durch nachträgliche weitere Unterteilung der Skala oder durch Ablesung mittels einer Lupe den Messwert wesentlich genauer machen zu wollen. (Ausnahmen gibt es bei Messgeräten mit Schreiberanschluß; hier wird oft auf ein genaues direkt anzeigendes Anzeigegegerät verzichtet.)

### 2.2.2 Fehler durch das Messobjekt

Schwankungen des Messwertes können auftreten, wenn sich das Messobjekt während der Messdauer verändert. Besonders groß können sie bei Messungen an Lebewesen werden, z. B. dann, wenn man eine Messung über längere Zeit hinweg wiederholt. Führt man andererseits Reihenuntersuchungen an mehreren Lebewesen durch, so werden individuelle Unterschiede der Messobjekte zur Streuung der Messwerte führen.

## 2.3 Methoden der Fehlerabschätzung

Wir unterscheiden bezüglich des Endergebnisses einer Messaufgabe drei Fälle der Fehlerabschätzung:

1. Das Endergebnis ist der *Mittelwert* aus einer Reihe direkter Messungen; dann suchen wir den Fehler dieses Mittelwertes.

2. Das Endergebnis folgt aus einer mathematisch formulierten Gesetzmäßigkeit, in die direkte, mit Fehlern behaftete Messgrößen eingesetzt werden. Beispiel: Die kinetische Energie  $E_{\text{kin}} = mv^2/2$  eines Fahrzeuges können wir berechnen, indem wir dessen Masse auf einer Waage und die Geschwindigkeit mit dem Tachometer bestimmen. Dann ist zu untersuchen, wie sich die Ungenauigkeiten in den direkten Messgrößen  $m$  und  $v$  auf das Resultat  $E_{\text{kin}}$  auswirken (*Fehlerfortpflanzung*).

3. Das Ergebnis liefert eine funktionale Abhängigkeit zwischen mehreren veränderbaren Messgrößen. Beispiel: Man misst die Federkraft in einer Spiralfeder in Abhängigkeit von der Auslenkung (Hooke'sches Gesetz) und erhält eine funktionale Abhängigkeit beider Größen. Dann interessiert nicht so sehr der Messfehler von Kraft und Auslenkung, sondern die *Genauigkeit des funktionalen Zusammenhanges*.

Diese drei Methoden der Fehlerabschätzung werden im folgenden beschrieben.

### 2.3.1 Messfehler der Einzelgröße

Will man sich vergewissern, ob ein Messergebnis brauchbar ist, so wiederholt man die Messung. Meist findet man bei jeder Wiederholung geringfügig voneinander abweichende Messwerte. Man kann dann die Messgenauigkeit dadurch erhöhen, dass derselbe Messvorgang unter *unveränderten* Versuchsbedingungen mehrfach wiederholt und die so entstehende Messreihe zur Bildung eines Mittelwertes herangezogen wird. Dadurch verringert sich der Anteil des zufälligen Fehlers am Gesamtfehler, und seine Größe lässt sich zugleich aus der Messreihe bestimmen.

#### Der Mittelwert

Der arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  wird gebildet, indem man die einzelnen Messwerte  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$  aufsummiert und durch ihre Anzahl  $n$  dividiert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + x_3 \dots + x_n). \quad (\text{A-2})$$

Es ist nur sinnvoll, einen Mittelwert zu bilden, wenn alle Messungen unter — so weit wie möglich — gleichen Bedingungen erfolgt sind. Bevor man eine Reihenmessung durchführt, muss man sich also vergewissern, dass alle variablen Größen, die den Messwert beeinflussen, so weit wie möglich konstant gehalten werden.

Derselbe Mittelwert kann durch viele Kombinationen verschiedener Messwerte erhalten werden, z. B.  $\bar{x} = 11$  aus den 3 Einzelwerten 10,98, 11,01, 11,01 oder 8, 11, 14.

Die Mittelwertsbestimmung führt deshalb zu einer genaueren Aussage über eine physikalische Messung als der Einzelwert, weil sich die Schwankungen der Messgröße, soweit es sich um zufällige Fehler handelt, teilweise kompensieren. Systematische Fehler werden hingegen durch die Mittelwertbildung nicht verringert, da sie jeden Messwert zur selben Richtung hin verfälschen. Der Mittelwert  $\bar{x}$  ist vom *wahren Wert*  $x_W$  zu unterscheiden; er stimmt erst mit  $x_W$  überein, wenn die Zahl der Messungen  $n$  gegen Unendlich geht.  $x_W$  bedeutet den Wert ohne zufällige Fehler; enthalten allerdings die Einzelmesswerte einen systematischen Fehler, so kann auch mit vielen Messungen der wahre Wert nicht bestimmt werden.

**Die Verteilung der Messwerte** Die Messgröße  $x$  sei  $n$ -mal gemessen worden. Wir können diese Werte um  $\bar{x}$  herum nun nach ihrem Abstand vom Mittelwert  $\bar{x}$  klassifizieren. Dazu bilden wir Intervalle wie z. B.

$$\begin{aligned} &(\bar{x} - 0,50) \text{ bis } (\bar{x} - 0,45) \\ &(\bar{x} - 0,45) \text{ bis } (\bar{x} - 0,40) \\ &\quad \vdots \\ &(\bar{x} - 0,05) \text{ bis } \bar{x} \end{aligned}$$

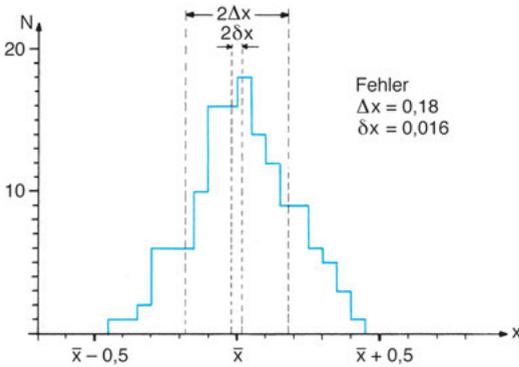


Abb. A.3 Histogramm.

$\bar{x}$  bis  $(\bar{x} + 0,05)$   
 $\vdots$   
 $(\bar{x} + 0,45)$  bis  $(\bar{x} + 0,50)$ .

Nun sortieren wir die Messwerte nach ihrer Zugehörigkeit zu diesen Intervallen, wobei wir noch entscheiden müssen, was mit den Werten geschieht, die genau auf eine Intervallgrenze (z. B.  $x = \bar{x} + 0,30$ ) fallen. Wir wollen entscheiden, dass sie stets zu dem auf der  $x$ -Achse rechts gelegenen Intervall gehören. Tragen wir dann die Häufigkeiten  $N$  der in die einzelnen Intervalle fallenden Messwerte über den Intervallen grafisch auf, so erhalten wir beispielsweise eine Figur wie in Abb. A.3; wir nennen sie ein *Histogramm*. Häufig ist diese Darstellung in guter Näherung symmetrisch zu  $\bar{x}$ ; wir sprechen dann von einer symmetrischen Verteilung der Messwerte um den Mittelwert. Sie kann auch unsymmetrisch sein. Führen wir immer mehr Messungen durch, lassen wir also  $n$  gegen Unendlich gehen ( $n \rightarrow \infty$ ), und wäh-

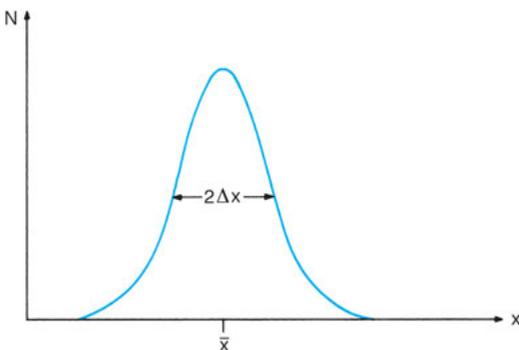


Abb. A.4 Gauß'sche Verteilungskurve.

len wir zugleich immer engere Intervalle, so erhalten wir — falls nur zufällige Fehler vorliegen — schließlich eine glatte Kurve (Abb. A.4), die *Gauß'sche Verteilungskurve* oder *Normalverteilung* der Messwerte.

**Die Standardabweichung** Die Breite der Verteilung in Abb. A.3 oder Abb. A.4 gibt ein Maß für die Messgenauigkeit. Je breiter sie ist, desto ungenauer war die Messung. Man kann aber auch rechnerisch den Fehler ermitteln. Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten. Häufig wird der *mittlere Fehler der Einzelmessung* (*Standardabweichung*, *Gauß-Fehler der Einzelmessung*) angegeben. Man findet ihn, indem man zunächst für jeden Messwert  $x_i$  die Abweichung vom Mittelwert  $\bar{x}$ , d. h. die Differenz  $x_i - \bar{x}$  bildet, und die Quadrate dieser Abweichungen aufsummiert:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2.$$

Die *Standardabweichung* wird dann nach folgender Vorschrift gebildet:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n - 1)}}. \tag{A-3}$$

Sie beschreibt die Fehlerbreite  $\pm \Delta x$ , innerhalb welcher ein weiterer Messwert  $x_m$  mit überwiegender Wahrscheinlichkeit liegen würde. Der Nenner,  $n - 1$ , bedeutet dabei die Zahl der Kontrollmessungen des ersten Messwertes. Gl. (A-3) besagt, dass bei einer einzigen Messung ( $n = 1$ ) die Fehlerbreite beliebig groß ist. Das Quadrat der Standardabweichung bezeichnet man als *Varianz*.

Bei einer Gauß-Verteilung der Messwerte, die oft im Experiment gefunden wird, kann man diese Wahrscheinlichkeit genau angeben: Innerhalb des Fehler-Intervalls  $\pm \Delta x$  liegen 68 %, im doppelten Fehler-Intervall  $\pm 2 \Delta x$  liegen 95 % aller Messwerte.

**Der durchschnittliche Fehler** Manchmal wird ein anderes Maß für den Fehler der Einzelmessung verwendet, nämlich der durchschnitt-

liche Absolutwert der Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert:

$$\Delta x_d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} . \quad (\text{A-4})$$

**Der mittlere Fehler des Mittelwertes** Meistens interessiert nicht so sehr die Streuung der Einzelwerte um den Mittelwert, sondern die Zuverlässigkeit des aus der Messreihe als Bestwert gefundenen Mittelwertes, d. h. dessen Fehler bezüglich des wahren Wertes  $x_w$ . Denn auch der Mittelwert selbst ist mit einem zufälligen Fehler behaftet und weicht vom wahren Wert der Messgröße ab. Es ist einleuchtend, dass z. B. der aus drei stark streuenden Einzelmessungen 3,0; 2,7; 3,4 gebildete Mittelwert nicht sehr zuverlässig sein wird und sich vom wahren Wert unterscheiden kann.

Je größer allerdings die Zahl der Einzelmessungen wird, desto besser wird der Mittelwert. Dies kommt in der Formel für den *mittleren Fehler des Mittelwertes* (Gauß-Fehler des Mittelwertes)  $\delta x$  zum Ausdruck, der sich von der *Standardabweichung*  $\Delta x$  (Gl. (A-3)) dadurch unterscheidet, dass zusätzlich durch die Wurzel der Zahl der Messungen dividiert wird:

$$\delta x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)n}} \quad \text{oder} \quad \delta x = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}} . \quad (\text{A-5})$$

Mit großer Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Wert  $x_w$  der Messgröße im Intervall  $\bar{x} \pm \delta x$  (s. Abb. A.3).

Die Frage liegt nahe: Wie groß soll bei einer Messreihe die Zahl  $n$  gewählt werden, d. h., wann macht sich der Aufwand weiterer Messungen durch erhebliche Verringerung der Fehler bezahlt? Aus Gl. (A-5) sehen wir, dass man zu drei Messungen weitere drei hinzufügen muss, um die Streuung des Mittelwertes um rund 40 % zu verringern; liegen dagegen bereits 20 Messungen vor, so muss man weitere 28 Messungen durchführen, um eine entsprechende prozentuale Verringerung des

Fehlers zu erreichen. Bei  $n < 20$  lohnt sich also eine Vermehrung der Einzelmessungen, bei  $n > 20$  wird es nurmehr in Ausnahmefällen sinnvoll sein, weitere Messungen hinzuzufügen.

Anmerkung: Häufig werden anstelle  $\Delta x$  und  $\delta x$  andere Bezeichnungen, wie  $s$ ,  $\sigma$ ,  $S_d$ ,  $m$  usw. gewählt. Da diese keinen Hinweis auf die jeweilige Bezeichnung der Variablen (z. B.  $x$ ,  $y$ ,  $\omega$ ,  $\eta$  usw.) geben, bevorzugen wir die in den Gln. (A-3) bis (A-5) eingeführte Schreibweise.

### 2.3.2 Fehlerfortpflanzung

Oft wird eine Größe gesucht, die nicht direkt zu messen ist, sondern sich erst mittelbar über einen formelmäßigen Zusammenhang (eine Funktion) aus anderen Messgrößen ergibt. In diesem Fall ist es wichtig zu wissen, wie sich die Fehler der einzelnen Messgrößen, die beispielsweise durch Mehrfachmessung nach Gl. (A-5) bestimmt wurden, auf das Resultat auswirken.

Ein Beispiel: Es soll die Differenz  $d$  zweier Längen  $l_1$  und  $l_2$  bestimmt werden. Dazu misst man  $l_1 = 30,0 \pm 0,3$  cm und  $l_2 = 31,2 \pm 0,3$  cm. Die Einzelmessungen sind also auf ca. 1 % genau. Aus den Mittelwerten ergibt sich  $d = 1,2$  cm. Die einzelnen Werte können jedoch zwischen  $d = 0,6$  cm (wenn bei einer Einzelmessung die Messwerte z. B. 30,3 cm und 30,9 cm betragen) und  $d = 1,8$  cm liegen (wenn z. B. die Einzelmessungen 29,7 cm und 31,5 cm ergeben). Da die tatsächliche Ungenauigkeit nicht bekannt ist, muss der ungünstigste Fall als Gesamtfehler zugelassen werden:  $d = 1,2 \pm 0,6$  cm; d. h. die Ungenauigkeit des Resultates beträgt 50%, obgleich die Einzelmessungen auf 1 % genau durchgeführt wurden!

Zur allgemeinen Formulierung dieser *Fehlerfortpflanzung* ist etwas Mathematik nötig; für viele Fälle genügen aber zwei Regeln.

#### (1) Die Summen- und Differenzenregel:

Besteht die Funktion nur aus Summen oder Differenzen verschiedener Messgrößen, so ergibt sich der *absolute* Gesamtfehler der Funktion aus der Summe der einzelnen *Absolutfehler*. Steht vor einer Messgröße eine Konstante, so wird der Absolutfehler mit dieser Konstanten multipliziert.

Beispiel:  $z = 3,5x - 0,7y$ ; dann ist  $\Delta z = 3,5 \delta x + 0,7 \delta y$ .

(2) Die Produkt- und Quotientenregel:

Besteht die Funktion, durch welche die gesuchte Größe mit den Messwerten verknüpft ist, nur aus Produkten oder Quotienten direkter Messgrößen, so erhalten wir den *relativen* Gesamtfehler als Summe der *relativen* Fehler der Einzelgrößen. Tritt eine Messgröße mit einem Exponenten  $\neq 1$  auf (z. B.  $-1/2$  oder  $2$ ), so wird deren relativer Fehler mit dem Betrag dieses Exponenten multipliziert.

Beispiel:  $z = x^2/y = x(x/y)$ ; dann ist  $\Delta z/z = \delta x/x + (\delta x/x + \delta y/y) = 2 \delta x/x + \delta y/y$ .

Diese beiden Regeln sind Spezialfälle der allgemeinen Vorschrift für die Ermittlung der Fehlerfortpflanzung. Sei  $z = f(x_1, x_2, x_3 \dots)$  das mittelbare Ergebnis, das durch einen funktionalen Zusammenhang mit den direkten Messgrößen  $x_i$  zusammenhängt. Die Fragestellung lautet: Innerhalb welcher Grenzen streut der Wert  $z$  der Funktion  $f$ , wenn  $x_1$  innerhalb seines Fehlerintervalls  $\delta x_1$ ,  $x_2$  innerhalb  $\delta x_2$ ,  $x_3$  innerhalb  $\delta x_3$  usw. schwanken kann. Die durch die einzelne Variable  $x_i$  bedingte Änderung der Funktion  $f$  lässt sich mit dem Differenzenquotienten angeben:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)}{(x_i + \Delta x_i) - x_i} \tag{A-6}$$

Zur Abschätzung des Fehlers  $\Delta f$  können wir den Differenzenquotienten durch den Differentialquotienten  $\partial f/\partial x_i$  ersetzen. Dies hat den Vorteil, dass wir zur weiteren Berechnung die Differentialrechnung anwenden können.

Eine obere Grenze für den Gesamtfehler in  $f$  infolge der Fehler aller Variablen erhalten wir, wenn wir die Absolutbeträge der Einzelfehler addieren:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n \right| \tag{A-7}$$

$\partial f/\partial x_i$  sind die partiellen Ableitungen der Funktion  $f(x_1 \dots x_n)$ . Wir nennen  $\Delta f$  den *Größtfehler*. Statt dessen kann man auch hier, wie in Gl. (A-3) die Wurzel aus der Summe der Quadrate ziehen und erhält die *Gauß'sche Fehlerfortpflanzungs-Formel*:

$$\Delta f_{\text{Gauß}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i \right)^2} \tag{A-8}$$

Für eine Funktion  $f$ , die ausschließlich aus Summen oder Differenzen der Variablen besteht, liefert Gl. (A-7) die oben angegebene Summen- und Differen-

zenregel. Entsprechend finden wir mit Gl. (A-7) auch die Produkt- und Quotientenregel.

### 2.3.3 Fehler einer Funktion

Gl. (A-7) erlaubt, für einen mit vorgegebenen Zahlenwerten der Variablen  $x_i$  berechneten Funktionswert  $f$  den Fehler zu bestimmen. Dazu muss die Funktion bereits bekannt sein. Viele Experimente dienen jedoch dazu, die Funktion selbst erst zu finden. Dazu müssen nicht feste Werte von Variablen nachgemessen werden, es interessiert auch nicht der Fehler des einzelnen Funktionswertes, sondern es stellt sich die Frage nach der aus den Messfehlern resultierenden Ungenauigkeit des gesuchten funktionalen Zusammenhangs selbst.

Ein funktionaler Zusammenhang wird ermittelt, indem man eine oder mehrere Variable schrittweise ändert und die Reaktion der anderen Messgrößen beobachtet. Wir wollen dies am Beispiel einer Geraden  $f = a + bx$  erläutern. Wir stellen hierzu für die Variable  $x$  die Werte  $x_i$  ein und messen die zugehörigen Funktionswerte  $f_i = f(x_i)$ . Dann sind die  $x_i$  mit dem durch die Einstellgenauigkeit bedingten Fehler und die  $f_i$  mit einem Messfehler behaftet. Wir wollen annehmen, dass die Messwerte  $(x_i, f_i)$  in einer grafischen Darstellung ungefähr, also innerhalb eines Fehlerintervalles, auf einer Geraden  $f = a + bx$  liegen (Abb. A.5). Gesucht werden nun die Bestwerte  $a$  und  $b$  der zwischen den Punkten verlaufenden

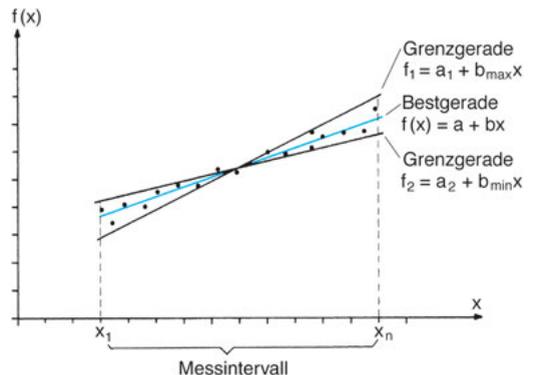


Abb. A.5 Grafisches Näherungsverfahren zum Auffinden der Ausgleichsgeraden.

Ausgleichs- oder Interpolationsgeraden sowie deren Fehlerintervalle. Eine exakte, allerdings aufwendige Methode ist, die Ausgleichsgerade so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen aller Messpunkte von der Geraden ein Minimum wird (*Methode der kleinsten Fehlerquadrate*). Diese Rechnung, die zugleich auch die Fehler von  $a$  und  $b$  liefert, erfordert meist die Hilfe eines Computers. Es gibt jedoch eine grafische Methode, die mit geringem Aufwand immerhin die Größenordnung der Fehler liefert. Dazu zeichnet man nach Augenmaß zwei Geraden (die *Streu-* oder *Grenzgeraden*) wie in Abb. A.5, die sich gerade noch mit den streuenden Messpunkten vereinbaren lassen, d. h. die Messpunkte zwischen sich einschließen. Wesentlich ist, dass sich die Grenzgeraden etwa in der Mitte des Messintervalls schneiden. Als *Bestgerade* zeichnen wir dann – wieder nach Augenmaß – diejenige Gerade, die in der Mitte zwischen den Grenzgeraden verläuft. Steigung und Ordinatenabschnitt dieser Bestgeraden liefern dann die Konstanten  $a$  und  $b$  der gesuchten Funktion. Aus den entsprechenden Werten der Grenzgeraden können wir auf die Genauigkeit von  $a$  und  $b$  schließen, denn je weniger sich die Grenzgeraden unterscheiden, desto zuverlässiger ist die Bestgerade. Als Streumaß für die Konstanten  $a$  und  $b$  der Bestgeraden führen wir ein,

1. für die Steigung  $b$

$$\Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2},$$

wobei  $b_{\max}$  und  $b_{\min}$  die Steigungen der Grenzgeraden sind, und

2. für den Ordinatenabschnitt  $a$

$$\Delta a = \frac{a_1 - a_2}{2},$$

wobei  $a_1$  und  $a_2$  die Ordinatenabschnitte der Grenzgeraden bedeuten.

Dieses grafische Verfahren liefert nur die Größenordnung der Fehler; sein besonderer Wert liegt aber darin, dass man es auf andere Arten von Funktionen anwenden kann, indem man durch geeignete Variablentransformation diese Funktionen in eine lineare Funktion umformt.

Beispiele:

1. Durch die Transformation  $y \rightarrow Y$ ;  $x^2 \rightarrow X$  kann man die Parabel  $y = ax^2$  in die Gerade  $Y = aX$  umformen. Die Steigung ist dann gleich der Konstanten  $a$  der Parabel, und der Fehler der Steigung ist gleich dem Fehler der Konstanten.

2. Durch die Transformation  $x \rightarrow X$ ;  $\ln y \rightarrow Y$  kann man die Exponentialfunktion  $y = A e^{Bx}$  in die Gerade  $Y = \ln A + BX = a + bX$  umformen. Die Konstanten  $A$  und  $B$  der Exponentialfunktion ergeben sich aus Steigung und Ordinatenabschnitt der Geraden, gemäß  $A = e^a$  und  $B = b$ . Die Fehler der Geraden,  $\Delta a$  und  $\Delta b$ , liefern die Fehler der Konstanten der Exponentialfunktion, denn es gilt  $\Delta B = \Delta b$  und  $\Delta A = e^a \Delta a$ .

## 2.4 Signifikanz-Tests

Gerade bei der Reihenuntersuchung biologischer Objekte sind Schwankungen zwischen den einzelnen Individuen unvermeidlich; sie liefern Streuungen in den Messdaten, die meist um Größenordnungen größer sind als statistische Fehler der verwendeten Messapparaturen. Sollen beispielsweise die Massen  $m$  von Rattenlebern bei einer, in irgendeiner Weise behandelten Versuchsgruppe mit den

Werten einer unbehandelten Vergleichsgruppe verglichen werden, so darf aus einer Differenz zwischen beiden Mittelwerten  $\bar{m}_1$  und  $\bar{m}_2$  auf keinen Fall direkt auf einen echten Unterschied zwischen beiden Versuchsgruppen geschlossen werden, bevor nicht überprüft wurde, dass diese Differenz außerhalb der Streubereiche der beiden Mittelwerte liegt. Ist also die Summe der Streubereiche  $\delta m_1$  und

$\delta m_2$  beider Mittelwerte etwa gleich oder gar größer als die Differenz  $|\bar{m}_1 - \bar{m}_2|$ , so liegt kein echter (signifikanter) Unterschied vor.

Es sind zur einfachen Überprüfung der *Signifikanz* einer physikalischen Aussage Testverfahren ausgearbeitet worden, von denen wir hier als Beispiel den *t-Test* skizzieren wollen. Es sei für die Mittelwerte  $\bar{m}_1$  und  $\bar{m}_2$  eine bestimmte Anzahl von Einzelmessungen herangezogen worden, nämlich  $n_1$  bzw.  $n_2$ . Dann verwendet man die Testformel

$$\tau = \left| \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}{s_d} \right| \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \tag{A-9}$$

wobei  $s_d$  eine Abkürzung ist für

$$s_d = \left( \frac{(n_1 - 1) \Delta m_1^2 + (n_2 - 1) \Delta m_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \right)^{1/2};$$

$\Delta m_1$  und  $\Delta m_2$  sind die Standardabweichungen der beiden Messreihen. Je nach Größe des Zahlenwertes von  $\tau$  ist der Unterschied zwischen  $\bar{m}_1$  und  $\bar{m}_2$  echt oder aus den Messungen nicht feststellbar. Dazu vergleicht man das ermittelte  $\tau$  mit speziellen, numerisch bekannten Grenzwerten  $t$ . Diese  $t$ -Werte hängen zum einen von der Zahl der Messungen ( $n_1 + n_2$ ) und zum anderen von der statistischen Sicherheit, die bei ihrer Berechnung vorausgesetzt

wurde, ab. Üblich sind statistische Sicherheiten von 95 %, 99 % und 99,9 %. (Beispiel: Ist die Aussage, zwei Mittelwerte seien unterschiedlich, zu 95 % statistisch gesichert, dann heißt das, dass die Aussage zu 95 % wahrscheinlich ist.) Man bewertet diese Sicherheiten folgendermaßen: Gilt etwa  $\tau < t$  (95 %), so ist ein echter Unterschied aus den Messungen *nicht feststellbar*. Gilt dagegen  $t$  (95 %)  $\leq \tau \leq t$  (99 %), so unterscheidet sich  $\bar{m}_1$  *wahrscheinlich* von  $\bar{m}_2$ . Ist dagegen  $t$  (99 %)  $\leq \tau$ , so unterscheidet sich  $\bar{m}_1$  *signifikant* vom  $\bar{m}_2$ . Einige Beispiele für  $t$ -Werte sind in Tab. A.1 angegeben. (Literatur z. B.: R. Kaiser, G. Gottschalk: Elementare Tests zur Beurteilung von Messdaten. BI-Hochschultaschenbücher, Band 774.)

**Tab. A.1**  $t$ -Werte für die statistischen Sicherheiten 95% und 99% in Abhängigkeit von der Zahl der Messungen  $n_1$  und  $n_2$

$(n_1 + n_2 - 2)$	$t$ (95%)	$t$ (99%)
5	2,57	4,03
7	3,37	3,50
10	2,23	3,17
15	2,13	2,95
20	2,08	2,85
30	2,042	2,750
50	2,009	2,678
100	1,984	2,626

### A.3 Rechnen mit Vektoren

**Addition und Subtraktion von Vektoren** Vektoren sind in der Physik meistens dimensionsbehaftet. Sie können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie dieselbe Einheit haben. Zudem muss bei Addition und Subtraktion neben ihren Beträgen auch ihre Richtung berücksichtigt werden. Dies lässt sich leicht zeichnerisch veranschaulichen. Da Vektoren normalerweise beliebig parallel verschoben werden dürfen, fügen wir die Vektoren – z. B. die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  – wie in Abb. A.6 gezeigt, zusammen und erhalten den resultierenden Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ . Entsprechend wird

die Differenz zweier Vektoren gebildet:  $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$ . Dabei ist die Richtung des mit einem negativen Vorzeichen versehenen Vektors  $-\vec{v}_2$  gegenüber  $\vec{v}_2$  umgekehrt, d. h. Anfangs- und Endpunkt werden vertauscht. Ebenso lässt sich dieses Verfahren auf die Addition bzw. Subtraktion von mehr als zwei Vektoren anwenden.

**Multiplikation von Vektoren** Im Unterschied zur Addition müssen Vektoren für eine Multiplikation nicht dieselbe Dimension besitzen. Wir unterscheiden drei Arten der Multiplikation von Vektoren: Die Multiplikation eines

$\delta m_2$  beider Mittelwerte etwa gleich oder gar größer als die Differenz  $|\bar{m}_1 - \bar{m}_2|$ , so liegt kein echter (signifikanter) Unterschied vor.

Es sind zur einfachen Überprüfung der *Signifikanz* einer physikalischen Aussage Testverfahren ausgearbeitet worden, von denen wir hier als Beispiel den *t-Test* skizzieren wollen. Es sei für die Mittelwerte  $\bar{m}_1$  und  $\bar{m}_2$  eine bestimmte Anzahl von Einzelmessungen herangezogen worden, nämlich  $n_1$  bzw.  $n_2$ . Dann verwendet man die Testformel

$$\tau = \left| \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}{s_d} \right| \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}, \tag{A-9}$$

wobei  $s_d$  eine Abkürzung ist für

$$s_d = \left( \frac{(n_1 - 1) \Delta m_1^2 + (n_2 - 1) \Delta m_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \right)^{1/2};$$

$\Delta m_1$  und  $\Delta m_2$  sind die Standardabweichungen der beiden Messreihen. Je nach Größe des Zahlenwertes von  $\tau$  ist der Unterschied zwischen  $\bar{m}_1$  und  $\bar{m}_2$  echt oder aus den Messungen nicht feststellbar. Dazu vergleicht man das ermittelte  $\tau$  mit speziellen, numerisch bekannten Grenzwerten  $t$ . Diese  $t$ -Werte hängen zum einen von der Zahl der Messungen ( $n_1 + n_2$ ) und zum anderen von der statistischen Sicherheit, die bei ihrer Berechnung vorausgesetzt

wurde, ab. Üblich sind statistische Sicherheiten von 95 %, 99 % und 99,9 %. (Beispiel: Ist die Aussage, zwei Mittelwerte seien unterschiedlich, zu 95 % statistisch gesichert, dann heißt das, dass die Aussage zu 95 % wahrscheinlich ist.) Man bewertet diese Sicherheiten folgendermaßen: Gilt etwa  $\tau < t$  (95 %), so ist ein echter Unterschied aus den Messungen *nicht feststellbar*. Gilt dagegen  $t$  (95 %)  $\leq \tau \leq t$  (99 %), so unterscheidet sich  $\bar{m}_1$  *wahrscheinlich* von  $\bar{m}_2$ . Ist dagegen  $t$  (99 %)  $\leq \tau$ , so unterscheidet sich  $\bar{m}_1$  *signifikant* vom  $\bar{m}_2$ . Einige Beispiele für  $t$ -Werte sind in Tab. A.1 angegeben. (Literatur z. B.: R. Kaiser, G. Gottschalk: Elementare Tests zur Beurteilung von Messdaten. BI-Hochschultaschenbücher, Band 774.)

**Tab. A.1**  $t$ -Werte für die statistischen Sicherheiten 95% und 99% in Abhängigkeit von der Zahl der Messungen  $n_1$  und  $n_2$

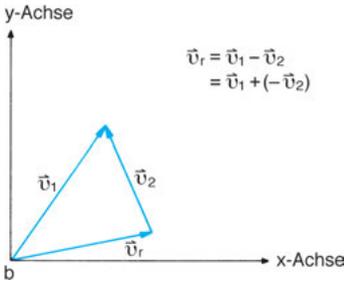
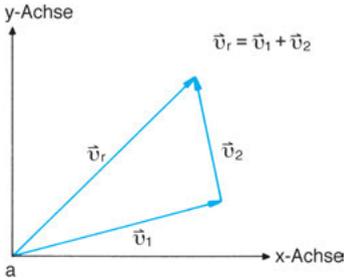
$(n_1 + n_2 - 2)$	$t$ (95%)	$t$ (99%)
5	2,57	4,03
7	3,37	3,50
10	2,23	3,17
15	2,13	2,95
20	2,08	2,85
30	2,042	2,750
50	2,009	2,678
100	1,984	2,626

### A.3 Rechnen mit Vektoren

**Addition und Subtraktion von Vektoren** Vektoren sind in der Physik meistens dimensionsbehaftet. Sie können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie dieselbe Einheit haben. Zudem muss bei Addition und Subtraktion neben ihren Beträgen auch ihre Richtung berücksichtigt werden. Dies lässt sich leicht zeichnerisch veranschaulichen. Da Vektoren normalerweise beliebig parallel verschoben werden dürfen, fügen wir die Vektoren – z. B. die Geschwindigkeiten  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  – wie in Abb. A.6 gezeigt, zusammen und erhalten den resultierenden Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ . Entsprechend wird

die Differenz zweier Vektoren gebildet:  $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$ . Dabei ist die Richtung des mit einem negativen Vorzeichen versehenen Vektors  $-\vec{v}_2$  gegenüber  $\vec{v}_2$  umgekehrt, d. h. Anfangs- und Endpunkt werden vertauscht. Ebenso lässt sich dieses Verfahren auf die Addition bzw. Subtraktion von mehr als zwei Vektoren anwenden.

**Multiplikation von Vektoren** Im Unterschied zur Addition müssen Vektoren für eine Multiplikation nicht dieselbe Dimension besitzen. Wir unterscheiden drei Arten der Multiplikation von Vektoren: Die Multiplikation eines



**Abb. A.6** Addition (a) und Subtraktion (b) von Vektoren.

Vektors mit einem Skalar, das *skalare Produkt* zweier Vektoren und das *vektorielle Produkt* zweier Vektoren.

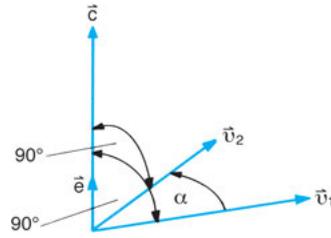
1. Ein Vektor, z. B. die Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , werde mit einem Skalar, z. B. der Zeit  $t$ , multipliziert. Das Produkt  $\vec{v}t$  ergibt einen Vektor (nämlich den Weg  $\vec{s}$ ), der die Richtung von  $\vec{v}$  und den Betrag  $|\vec{v}|t$  besitzt.

2. Das skalare Produkt zweier Vektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  liefert eine skalare Größe  $b$  und ist charakterisiert durch das Produkt der beiden Beträge  $|\vec{v}_1|$  und  $|\vec{v}_2|$  und des Cosinus des Winkels  $\alpha$ , den die beiden Vektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  einschließen:

$$b = \vec{v}_1 \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cos \alpha. \tag{A-10}$$

Ein Beispiel für diese Art der Vektormultiplikation lernten wir bei der Behandlung der potentiellen Energie kennen, die in Gl. (3-4) als skalares Produkt der beiden Vektoren *Gewichtskraft*  $\vec{F}$  und *Weg*  $\vec{s}$  definiert wurde.

3. Das vektorielle Produkt zweier Vektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  dagegen liefert die vektorielle Größe  $\vec{c}$  und ist gekennzeichnet durch das Produkt der beiden Beträge  $|\vec{v}_1|$  und  $|\vec{v}_2|$ , den Sinus des eingeschlossenen Winkels  $\alpha$  (wobei wir hier  $\alpha$  stets als positiv annehmen wollen) und einem



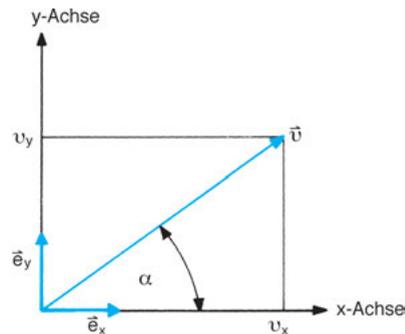
**Abb. A.7** Zum Vektorprodukt von Vektoren.

Einheitsvektor  $\vec{e}$ :

$$\vec{c} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \sin \alpha \vec{e}. \tag{A-11}$$

Für den Einheitsvektor  $\vec{e}$  ist vereinbart, dass er senkrecht auf  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  steht. Die Richtung von  $\vec{e}$  wird schließlich eindeutig durch folgende Regel festgelegt: Schauen wir in Abb. A.7 von unten senkrecht auf die von  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  gebildete Ebene und drehen wir dann  $\vec{v}_1$  über den eingeschlossenen Winkel  $\alpha$  im Uhrzeigersinn in Richtung von  $\vec{v}_2$ , so blicken wir in Richtung von  $\vec{e}$  (Abb. A.7).

**Komponentendarstellung von Vektoren** Zur Komponentendarstellung eines Vektors in einem vorgegebenen Koordinatensystem projizieren wir den Vektor nacheinander auf die verschiedenen Koordinatenachsen. Beim einfachsten Beispiel des in einem zweidimensionalen, rechtwinkligen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem dargestellten Vektors  $\vec{v}$  (Abb. A.8) erhalten wir dann aus Betrag  $|\vec{v}|$  und Richtungswinkel  $\alpha$  als Achsenabschnitte die skalaren Werte  $v_x = |\vec{v}| \cos \alpha$  bzw.  $v_y = |\vec{v}| \sin \alpha$ .  $v_x$  und  $v_y$  nennen wir die *skalaren Komponenten* des Vektors  $\vec{v}$ . Bezeichnen  $\vec{e}_x$  bzw.  $\vec{e}_y$  die Ein-



**Abb. A.8** Komponentendarstellung von Vektoren.

heitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen, so erhalten wir für den Vektor  $\vec{v}$  die *vektoriellen Komponenten*  $\vec{v}_x = |\vec{v}| \cos \alpha \vec{e}_x$  bzw.  $\vec{v}_y = |\vec{v}| \sin \alpha \vec{e}_y$ . Die Addition von  $\vec{v}_x$  und  $\vec{v}_y$  ergibt wieder  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_x + \vec{v}_y = |\vec{v}| \cos \alpha \vec{e}_x + |\vec{v}| \sin \alpha \vec{e}_y \\ &= |\vec{v}| (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y).\end{aligned}$$

Soll der Vektor  $\vec{v}$  durch seine Komponenten angegeben werden, so wird häufig die formale Schreibweise  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  benutzt.

Wir kennen also zwei gleichwertige Darstellungen eines Vektors in einem Koordinatensystem:

1. durch Angabe von Betrag und Richtungswinkel, und
2. durch Angabe der Komponenten.

Aus den Komponenten lassen sich leicht Richtung und Betrag des Vektors errechnen, denn der Tangens des Richtungswinkels,  $\tan \alpha$ , im rechtwinkligen Dreieck ergibt sich nach Abb. A.8 zu

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{|\vec{r}| \sin \alpha}{|\vec{r}| \cos \alpha}.$$

## A.4 Das Exponentialgesetz

Das Exponentialgesetz tritt zur Beschreibung verschiedenster physikalischer Vorgänge auf, wobei die mathematischen Größen unterschiedliche Bedeutung haben. In Gl. (21-4) beschreibt es die zeitliche Abnahme radioaktiver Stoffe, in Gl. (6-11) die Dämpfung einer Schwingung, in Gl. (14-72) die Zeitabhängigkeit des Stromes beim Anlegen einer Spannung an einen Kondensator. Ebenso taucht es auf bei der Beschreibung der Zunahme der Erdbevölkerung, beim organischen Wachstum wie etwa der Zunahme der Zahl von Bakterien einer Kultur, bei der Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe oder der Sonneneinstrahlung mit zunehmender Luftverschmutzung usw. Auf den ersten Blick scheinen diese Prozesse nichts gemein zu haben; die gleichartige formale Beschreibung lässt aber auf eine Verwandtschaft schließen. Diese lässt sich in

Den Betrag finden wir mit dem *Satz von Pythagoras*:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Zwei Vektoren in Komponentenschreibweise lassen sich addieren bzw. subtrahieren, indem man ihre Komponenten addiert bzw. subtrahiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2). \quad (\text{A-13})$$

Bei der Multiplikation von  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  mit einem Skalar  $K$  werden die Komponenten mit  $K$  multipliziert:

$$K\vec{a} = K(a_1, a_2) = (Ka_1, Ka_2). \quad (\text{A-14})$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren ist gleich der Summe der Produkte der zusammengehörenden Komponenten:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \quad (\text{A-15})$$

folgender Aussage zusammenfassen: Das Exponentialgesetz beschreibt eine bestimmte Klasse von Wachstums- und Zerfallsprozessen, die durch eine besondere Eigenschaft ausgezeichnet sind: Eine beliebige Messgröße  $y$  hänge so von einer Variablen  $x$  ab, dass ihre *relative* Änderung  $\Delta y/y$  unabhängig ist vom Zahlenwert von  $x$ , aber proportional zum Intervall  $\Delta x$ , in welchem man die Änderung von  $y$  misst. Dies gelte auch für beliebig kleine Werte von  $\Delta x$  ( $\Delta x \rightarrow dx$ ) und  $\Delta y$  ( $\Delta y \rightarrow dy$ ). In der Formelsprache der Differentialrechnung heißt das:

$$\frac{dy}{y} = \pm A dx. \quad (\text{A-16})$$

Dabei bedeutet  $dy$  die *absolute* Änderung von  $y$ , und  $A$  ist die Proportionalitätskonstante. Das positive Vorzeichen steht, wenn die Grö-

heitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen, so erhalten wir für den Vektor  $\vec{v}$  die *vektoriellen Komponenten*  $\vec{v}_x = |\vec{v}| \cos \alpha \vec{e}_x$  bzw.  $\vec{v}_y = |\vec{v}| \sin \alpha \vec{e}_y$ . Die Addition von  $\vec{v}_x$  und  $\vec{v}_y$  ergibt wieder  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}_x + \vec{v}_y = |\vec{v}| \cos \alpha \vec{e}_x + |\vec{v}| \sin \alpha \vec{e}_y \\ &= |\vec{v}| (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y).\end{aligned}$$

Soll der Vektor  $\vec{v}$  durch seine Komponenten angegeben werden, so wird häufig die formale Schreibweise  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  benutzt.

Wir kennen also zwei gleichwertige Darstellungen eines Vektors in einem Koordinatensystem:

1. durch Angabe von Betrag und Richtungswinkel, und
2. durch Angabe der Komponenten.

Aus den Komponenten lassen sich leicht Richtung und Betrag des Vektors errechnen, denn der Tangens des Richtungswinkels,  $\tan \alpha$ , im rechtwinkligen Dreieck ergibt sich nach Abb. A.8 zu

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{|\vec{r}| \sin \alpha}{|\vec{r}| \cos \alpha}.$$

## A.4 Das Exponentialgesetz

Das Exponentialgesetz tritt zur Beschreibung verschiedenster physikalischer Vorgänge auf, wobei die mathematischen Größen unterschiedliche Bedeutung haben. In Gl. (21-4) beschreibt es die zeitliche Abnahme radioaktiver Stoffe, in Gl. (6-11) die Dämpfung einer Schwingung, in Gl. (14-72) die Zeitabhängigkeit des Stromes beim Anlegen einer Spannung an einen Kondensator. Ebenso taucht es auf bei der Beschreibung der Zunahme der Erdbevölkerung, beim organischen Wachstum wie etwa der Zunahme der Zahl von Bakterien einer Kultur, bei der Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe oder der Sonneneinstrahlung mit zunehmender Luftverschmutzung usw. Auf den ersten Blick scheinen diese Prozesse nichts gemein zu haben; die gleichartige formale Beschreibung lässt aber auf eine Verwandtschaft schließen. Diese lässt sich in

Den Betrag finden wir mit dem *Satz von Pythagoras*:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Zwei Vektoren in Komponentenschreibweise lassen sich addieren bzw. subtrahieren, indem man ihre Komponenten addiert bzw. subtrahiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2). \quad (\text{A-13})$$

Bei der Multiplikation von  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  mit einem Skalar  $K$  werden die Komponenten mit  $K$  multipliziert:

$$K\vec{a} = K(a_1, a_2) = (Ka_1, Ka_2). \quad (\text{A-14})$$

Das skalare Produkt zweier Vektoren ist gleich der Summe der Produkte der zusammengehörenden Komponenten:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \quad (\text{A-15})$$

folgender Aussage zusammenfassen: Das Exponentialgesetz beschreibt eine bestimmte Klasse von Wachstums- und Zerfallsprozessen, die durch eine besondere Eigenschaft ausgezeichnet sind: Eine beliebige Messgröße  $y$  hänge so von einer Variablen  $x$  ab, dass ihre *relative* Änderung  $\Delta y/y$  unabhängig ist vom Zahlenwert von  $x$ , aber proportional zum Intervall  $\Delta x$ , in welchem man die Änderung von  $y$  misst. Dies gelte auch für beliebig kleine Werte von  $\Delta x$  ( $\Delta x \rightarrow dx$ ) und  $\Delta y$  ( $\Delta y \rightarrow dy$ ). In der Formelsprache der Differentialrechnung heißt das:

$$\frac{dy}{y} = \pm A dx. \quad (\text{A-16})$$

Dabei bedeutet  $dy$  die *absolute* Änderung von  $y$ , und  $A$  ist die Proportionalitätskonstante. Das positive Vorzeichen steht, wenn die Grö-

ße  $y$  zunimmt, das negative, wenn sie abnimmt.

Ein Beispiel: Sei etwa  $y$  ein bestimmter Bakterienbestand einer Kultur und  $x$  die Zeit. Dann bedeutet Gl. (A-16) bei positivem Vorzeichen, dass die relative Zunahme des Bakterienbestandes konstant ist. In jeder Stunde ( $= dx$ ) vermehrt sich der Bakterienbestand beispielsweise um  $dy/y = 0,01$ , d. h. um 1 %.

Will man nun wissen, welchen Wert  $y$  bei einer bestimmten Größe von  $x$  erreicht hat (etwa die Anzahl der Bakterien nach 10 Tagen), so muss man über alle Intervalle  $dx$  summieren. Diese Intervalle sollen beliebig klein sein können, und deshalb geht man von der Summe zum Integral über. Wir müssen also Gl. (A-16) integrieren, und zwar auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Wir erhalten:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \ln y - \ln y_0 = \ln \left( \frac{y}{y_0} \right) \\ = \int_0^x \pm A dx = \pm Ax, \quad (\text{A-17})$$

wobei wir angenommen haben, dass wir mit der Integration bei  $x = 0$  beginnen, und dort  $y$  den Wert  $y_0$  besitzt. Die Gleichung  $\ln(y/y_0) = \pm Ax$  haben wir nun aufzulösen nach  $y$ . Dies bereitet keine Schwierigkeiten, wenn man bedenkt, dass die Umkehrfunktion des natürlichen Logarithmus gerade die Exponentialfunktion ist (Abb. A.9). Damit gelangen wir unmittelbar zu dem Exponentialgesetz

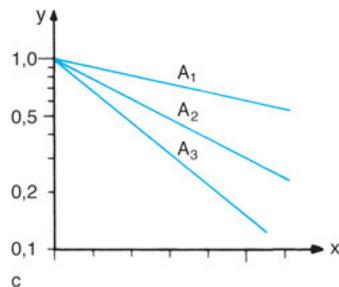
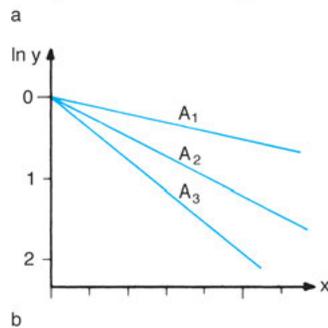
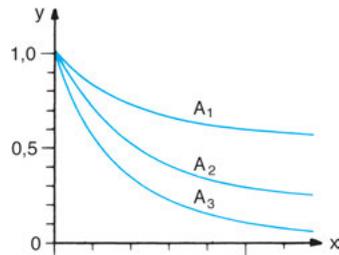
$$y = y_0 e^{\pm Ax}, \quad e = 2,718 \dots \quad (\text{A-18})$$

Besonders in der angelsächsischen Literatur ist eine andere Schreibweise üblich:

$$y = y_0 \exp(\pm Ax). \quad (\text{A-19})$$

Wesentlich ist also, dass die *relative* Änderung der Größe  $y$  konstant ist. Blicke dagegen die *absolute* Änderung konstant, so dass

$$dy = \pm C,$$



**Abb. A.9** Grafische Darstellungen von Gl. (A-17) bzw. (A-18) mit  $y_0 = 1$ : (a)  $y = e^{-Ax}$ , (b)  $\ln y = -Ax$ , (c)  $y = e^{-Ax}$  in halblogarithmischer Auftragung, wobei jeweils  $A_1 < A_2 < A_3$ .

wobei  $C$  eine Konstante ist, dann würde dies zum linearen Gesetz

$$y = \pm Cx$$

führen.

Zwei Beispiele sollen den Ansatz (A-16) weiter verdeutlichen:

1. Sei  $y$  die Zahl von Bakterien einer Kultur und  $x$  die Zeit. Wenn nun die Bakterien sich derart vermehren, dass ihre Zahl pro Tag ( $= dx$ ) auf das Doppelte ( $dy/y = +1$  bzw.  $dy/y = +100\%$ ) zunimmt, so wächst die Bakterienzahl exponentiell mit der Zeit.

2. Kühlt man die Kultur, so dass die Vermehrung unterbrochen wird und zusätzlich

pro Stunde ( $= dx$ ) 10% der Bakterien ( $dy/y = -0,1$  bzw.  $dy/y = -10\%$ ) eingehen, so nimmt ihre Zahl exponentiell mit der Zeit ab.

Es muss erwähnt werden, dass die Verwendung von  $dx$  in unseren Beispielen mathematisch nicht exakt ist: In Strenge erhält man eine Exponentialfunktion aus dem Ansatz Gl. (A-16) nur, wenn  $y$  und  $x$  kontinuierliche Variable sind. Bei unseren Anwendungsbeispielen gilt dies jedoch nicht. An

die Stelle der kontinuierlichen Variablen  $y$  tritt dort eine Größe, die nur ganze Zahlen annehmen kann, nämlich die Zahl der Bakterien. Sie kann nur in ganzzahligen Schritten verändert werden. Daher kann auch  $dy/y$  nicht beliebig klein werden. Bei *großen* Zahlen von  $y$  gilt dies jedoch in recht guter Näherung, und in Näherung kann man dann auch Gl. (A-18) zur Beschreibung heranziehen. (Entsprechendes gilt auch für den radioaktiven Zerfall.)

## A.5 Weitere mathematische Beziehungen

### Potenzen und Wurzeln

1. Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

$$(a^n)^m = a^{nm}, \quad a^0 = 1.$$

2. Rechenregeln für Potenzen mit ungleicher Basis

$$a^n b^n = (ab)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

3. Rechenregeln für Wurzeln mit gleicher Basis

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}. \text{ Speziell: Quadratwurzel } a^{1/2} = \sqrt{a}$$

$$a^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},$$

$$(a^{1/n})^{1/m} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

4. Rechenregeln für Wurzeln mit ungleicher Basis

$$a^{1/n} b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab},$$

$$\frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

### Logarithmen

Ist  $a^b = c$  ( $c > 0$ ), dann schreibt man  $b = \log_a c$  und nennt  $b$  den *Logarithmus von*

$c$  zur *Grundzahl*  $a$ .  $b$  bezeichnet also diejenige Zahl, mit der man  $a$  potenzieren muss, um  $c$  zu erhalten. Aus den Potenzgesetzen ergeben sich dann die folgenden *logarithmischen Rechenregeln*:

$$\log_a (cd) = \log_a c + \log_a d,$$

$$\log_a \left(\frac{c}{d}\right) = \log_a c - \log_a d,$$

$$\log_a (c^n) = n \log_a c, \quad \log_a \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n} \log_a c.$$

Die Logarithmen zur Grundzahl 10 bezeichnet man als *dekadische* oder *Brigg'sche Logarithmen*. Für sie ist folgende Abkürzung üblich:

$$\log_{10} c = \lg c.$$

Von besonderer Wichtigkeit in der höheren Mathematik und auch Physik sind die sog. *natürlichen Logarithmen*. Ihre Basis ist die durch einen Grenzwert (Limes) definierte *Euler'sche Zahl*

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281\dots$$

Da die natürlichen Logarithmen so häufig auftreten, hat man auch für sie eine Abkürzung eingeführt und man schreibt:

$$\log_e c = \ln c.$$

Dabei stehen die Buchstaben  $\ln$  für *logarithmus naturalis*.

pro Stunde ( $= dx$ ) 10% der Bakterien ( $dy/y = -0,1$  bzw.  $dy/y = -10\%$ ) eingehen, so nimmt ihre Zahl exponentiell mit der Zeit ab.

Es muss erwähnt werden, dass die Verwendung von  $dx$  in unseren Beispielen mathematisch nicht exakt ist: In Strenge erhält man eine Exponentialfunktion aus dem Ansatz Gl. (A-16) nur, wenn  $y$  und  $x$  kontinuierliche Variable sind. Bei unseren Anwendungsbeispielen gilt dies jedoch nicht. An

die Stelle der kontinuierlichen Variablen  $y$  tritt dort eine Größe, die nur ganze Zahlen annehmen kann, nämlich die Zahl der Bakterien. Sie kann nur in ganzzahligen Schritten verändert werden. Daher kann auch  $dy/y$  nicht beliebig klein werden. Bei *großen* Zahlen von  $y$  gilt dies jedoch in recht guter Näherung, und in Näherung kann man dann auch Gl. (A-18) zur Beschreibung heranziehen. (Entsprechendes gilt auch für den radioaktiven Zerfall.)

## A.5 Weitere mathematische Beziehungen

### Potenzen und Wurzeln

1. Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

$$(a^n)^m = a^{nm}, \quad a^0 = 1.$$

2. Rechenregeln für Potenzen mit ungleicher Basis

$$a^n b^n = (ab)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

3. Rechenregeln für Wurzeln mit gleicher Basis

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}. \text{ Speziell: Quadratwurzel } a^{1/2} = \sqrt{a}$$

$$a^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}, \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},$$

$$(a^{1/n})^{1/m} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}.$$

4. Rechenregeln für Wurzeln mit ungleicher Basis

$$a^{1/n} b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab},$$

$$\frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

### Logarithmen

Ist  $a^b = c$  ( $c > 0$ ), dann schreibt man  $b = \log_a c$  und nennt  $b$  den *Logarithmus von*

$c$  zur *Grundzahl*  $a$ .  $b$  bezeichnet also diejenige Zahl, mit der man  $a$  potenzieren muss, um  $c$  zu erhalten. Aus den Potenzgesetzen ergeben sich dann die folgenden *logarithmischen Rechenregeln*:

$$\log_a (cd) = \log_a c + \log_a d,$$

$$\log_a \left(\frac{c}{d}\right) = \log_a c - \log_a d,$$

$$\log_a (c^n) = n \log_a c, \quad \log_a \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n} \log_a c.$$

Die Logarithmen zur Grundzahl 10 bezeichnet man als *dekadische* oder *Brigg'sche Logarithmen*. Für sie ist folgende Abkürzung üblich:

$$\log_{10} c = \lg c.$$

Von besonderer Wichtigkeit in der höheren Mathematik und auch Physik sind die sog. *natürlichen Logarithmen*. Ihre Basis ist die durch einen Grenzwert (Limes) definierte *Euler'sche Zahl*

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281\dots$$

Da die natürlichen Logarithmen so häufig auftreten, hat man auch für sie eine Abkürzung eingeführt und man schreibt:

$$\log_e c = \ln c.$$

Dabei stehen die Buchstaben  $\ln$  für *logarithmus naturalis*.

Die Umrechnung von Logarithmen zu verschiedenen Grundzahlen erfolgt nach der Beziehung

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

Speziell für  $a = 10$  und  $b = e$ , d. h. für die Umrechnung von natürlichen in dekadische Logarithmen (und umgekehrt) ergibt sich:

$$\lg x = \lg e \cdot \ln x = 0,4343 \ln x$$

bzw.

$$\ln x = \ln 10 \cdot \lg x = \frac{1}{\lg e} \lg x = 2,3025 \lg x.$$

**Lineare und quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten x**

$$ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Fläche und Volumen einfacher geometrischer Figuren und Körper**

Fläche	Volumen
 Quadrat $a^2$	 Würfel $a^3$
 Rechteck $ab$	 Quader $abc$
 Dreieck $\frac{ah}{2}$	 Pyramide $\frac{abh}{3}$
 Parallelogramm $ah$	 Parallelepiped $abh$
 Trapez $\frac{(a+b)h}{2}$	
 Kreis $\pi r^2$	 Kugel $\frac{4}{3} \pi r^3$
 Ellipse $ab\pi$	 Ellipsoid $\frac{4}{3} \pi abc$

**Trigonometrie (Winkelfunktionen)**

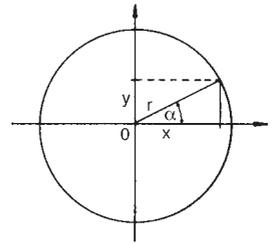
Definitionen am Kreis:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cotan \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



Trigonometrische Beziehungen:

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cotan \alpha = (\tan \alpha)^{-1}$$

**Differentialgleichung**

Definition: Die Ableitung  $y'$  einer Funktion  $y = f(x)$  im Punkt  $P(x, y)$  beschreibt die Steigung der Tangente an die Kurve  $y = f(x)$  im Punkt  $P$ . Man berechnet sie (vgl. Abb.), indem man den Differenzenquotienten zu einem dichtbenachbarten Punkt  $Q$  bildet,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

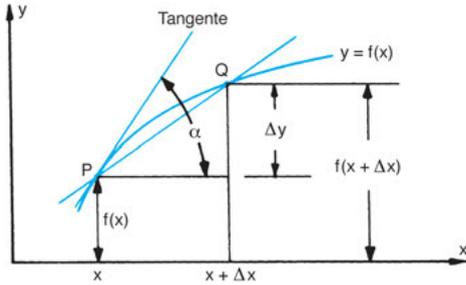
und dann den Punkt  $Q$  gegen  $P$ , d. h.  $\Delta x$  gegen Null gehen lässt:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

bzw.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Andererseits wird die Steigung der Tangente auch durch  $\tan \alpha$  angegeben, so dass gilt  $y' = \tan \alpha$ .



Differentiationsregeln:

$$y = cf(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = c \frac{df(x)}{dx}, \quad \text{wenn } c = \text{konst.}$$

$$y = f(x) + g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$$

$$y = f(x) g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

(Produktregel)

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(g(x))^2} \left( g(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right)$$

(Quotientenregel)

$$y = f(g(x)) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} \quad (\text{Kettenregel})$$

**Integralrechnung**

Definition: Die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differentialrechnung. In Formeln ausgedrückt:

Differentiation                      Integration

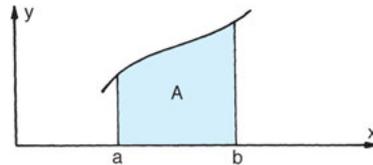
$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \longrightarrow F(x) = \int f(x) dx + C$$

Man nennt den Ausdruck  $\int f(x) dx$  *unbestimmtes Integral* von  $f(x)$  und bezeichnet die Funktion  $F(x)$  als *Stammfunktion* von  $f(x)$ . Sie ist durch  $f(x)$  nur bis auf eine Konstante  $C$  bestimmt, die man *Integrationskonstante* nennt.

Will man die Fläche  $A$  bestimmen, die zwischen der  $x$ -Achse und einem Teil einer durch die Funktion  $f(x)$  beschriebenen Kurve liegt (vgl. Abb.), dann berechnet man das bestimmte Integral:

$$A = \int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Die Endpunkte des Intervalls, über das sich die Integration erstreckt, nennt man *Integrationsgrenzen*.



Integrationsregeln:

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx, \quad \text{wenn } c = \text{konst.}$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int_a^b y(x) dx = - \int_b^a y(x) dx$$

(Vorzeichenwechsel bei Vertauschung der Integrationsgrenzen)

$$\int_a^b y(x) dx + \int_b^c y(x) dx = \int_a^c y(x) dx$$

(Intervalladditivität)

Einige gebräuchliche mathematische Funktionen mit Ableitung und Integral:

Funktion $y(x)$	Ableitung $\frac{dy}{dx}$	unbest. Integral $\int y(x) dx$	best. Integral $\int_a^b y(x) dx$
C (Konstante)	0	$x + C$	
$x$	1	$\frac{x^2}{2} + C$	$\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x + C (x \neq 0)$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$	
$x^2$	$2x$	$\frac{1}{3} x^3 + C$	
$ax^n + b$ ( $n$ reell)	$nax^{n-1}$	$\frac{a}{n+1} x^{n+1} + bx + C$ (außer für $n = -1$ )	
$\sin ax$	$a \cos ax$	$-\frac{1}{a} \cos ax + C$	$\int_0^\pi \sin x dx = 2$
$\sin^2 ax$	$2a \sin ax \cos ax$	$\frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C$	$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$
$\cos ax$	$-a \sin ax$	$\frac{1}{a} \sin ax + C$	$\int_0^\pi \cos x dx = 0$
$e^{ax}$	$a e^{ax}$	$\frac{1}{a} e^{ax} + C$	$\int_0^1 e^x dx = e - 1$ $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ ( $a > 0$ )
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$	
$\log_{10} x^*$	$\frac{0,4343}{x}$	$0,4343 (x \ln x - x) + C$	

\* Vgl. hierzu den Abschnitt über Logarithmen.

## A.6 Einige Naturkonstanten

*Mechanik:*

Avogadro-Konstante	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Elektronenmasse (Ruhemasse des Elektrons)	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Protonenmasse (Ruhemasse des Protons)	$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutronenmasse (Ruhemasse des Neutrons)	$m_n \approx m_p + m_e$
Gravitationskonstante	$G = 6,68 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

Einige gebräuchliche mathematische Funktionen mit Ableitung und Integral:

Funktion $y(x)$	Ableitung $\frac{dy}{dx}$	unbest. Integral $\int y(x) dx$	best. Integral $\int_a^b y(x) dx$
C (Konstante)	0	$x + C$	
$x$	1	$\frac{x^2}{2} + C$	$\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x + C (x \neq 0)$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$	
$x^2$	$2x$	$\frac{1}{3} x^3 + C$	
$ax^n + b$ ( $n$ reell)	$nax^{n-1}$	$\frac{a}{n+1} x^{n+1} + bx + C$ (außer für $n = -1$ )	
$\sin ax$	$a \cos ax$	$-\frac{1}{a} \cos ax + C$	$\int_0^\pi \sin x dx = 2$
$\sin^2 ax$	$2a \sin ax \cos ax$	$\frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C$	$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$
$\cos ax$	$-a \sin ax$	$\frac{1}{a} \sin ax + C$	$\int_0^\pi \cos x dx = 0$
$e^{ax}$	$a e^{ax}$	$\frac{1}{a} e^{ax} + C$	$\int_0^1 e^x dx = e - 1$ $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ ( $a > 0$ )
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$	
$\log_{10} x^*$	$\frac{0,4343}{x}$	$0,4343 (x \ln x - x) + C$	

\* Vgl. hierzu den Abschnitt über Logarithmen.

## A.6 Einige Naturkonstanten

*Mechanik:*

Avogadro-Konstante	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Elektronenmasse (Ruhemasse des Elektrons)	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Protonenmasse (Ruhemasse des Protons)	$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutronenmasse (Ruhemasse des Neutrons)	$m_n \approx m_p + m_e$
Gravitationskonstante	$G = 6,68 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

**Wärme:**

Tripelpunkt des Wassers  
 Absoluter Temperaturnullpunkt  
 Gaskonstante  
 Boltzmann-Konstante

$$\begin{aligned} T &= 273,16 \text{ K}; p = 6,13 \cdot 10^2 \text{ Pa} \\ T &= 0 \text{ K} \\ R &= 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \\ k &= 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \\ &= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \end{aligned}$$

**Elektrizität:**

Elementarladung  
 Elektrische Feldkonstante  
 Magnetische Feldkonstante  
 Vakuumlichtgeschwindigkeit  
 Faraday-Konstante

$$\begin{aligned} e &= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \epsilon_0 &= 8,855 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1} \\ \mu_0 &= 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1} \\ c &= 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \\ F &= 9,648 \cdot 10^4 \text{ C mol}^{-1} \end{aligned}$$

**Optik:**

Planck'sche Konstante  
 Rydberg-Konstante  
 Radius der 1. Bohr'schen Bahn im H-Atom

$$\begin{aligned} h &= 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \\ R &= 13,598 \text{ eV} = 2,178 \cdot 10^{-18} \text{ J} \\ r_{\text{Bohr}} &= 0,0529 \text{ nm} \end{aligned}$$

## A.7 Angelsächsisches Einheitensystem

Die Einführung des SI ist im Prinzip weltweit sehr erfolgreich gewesen und hat zu wesentlicher Vereinfachung geführt. Die in Tab. 1.2 aufgeführten anderen Einheitensysteme sind inzwischen weitgehend aus dem Alltag verschwunden. Einzige Ausnahme bildet das *Angelsächsische System*, dessen Ersetzung durch das SI zwar in den USA und Kanada begonnen, dann aber 1986 aus wirtschaftlichen Gründen wieder rückgängig gemacht wurde. Dieses System ist altmodisch und unangenehm in der Anwendung, da ei-

nerseits eine Unzahl von nicht-kohärenten Einheiten mit willkürlichen Umrechnungsfaktoren zugelassen, und andererseits keine dezimale Unterteilung vorgesehen ist. Es wird empfohlen, diese Einheiten nicht mehr zu benutzen.

In den folgenden Tabellen beschränken wir uns auf eine Auswahl. Die Umrechnungszahlenwerte ins SI, die bisweilen 9 stellig sind, wurden zumeist auf 2–3 Stellen gerundet. Bei Bedarf höherer Präzision sollte man im Internet nachsuchen.

**Massen**

Name	Symbol	Umrechnung	Zahlenwert in SI
grain	gr	1/7000 lb	$64,799 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$
dram	dr	1/16 oz	$1,77 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$
ounce	oz	1/16 lb	$28,35 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$
pound	lb	<b>Vorsicht! Nicht mit Pfund identisch!</b>	0,454 kg
quarter		28 lb	12,701 kg
hundred-weight	cwt	112 lb	50,802 kg
ton	t	2240 lb	1016 kg
troy pound	lb t	5760 gr	0,373 kg

**Längen**

Name	Symbol	Umrechnung	Zahlenwert in SI
inch	in	1/12 ft	$25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
foot	ft	1/3 yd	0,305 m
yard	yd		0,914 m
rod	rd	5.5 yd	5,03 m
mile	ml	1760 yd	1609,344 m
mile (US)			1609,347 m
nautical mile	n mile		1853,2 m

**Wärme:**

Tripelpunkt des Wassers  
 Absoluter Temperaturnullpunkt  
 Gaskonstante  
 Boltzmann-Konstante

$$\begin{aligned} T &= 273,16 \text{ K}; p = 6,13 \cdot 10^2 \text{ Pa} \\ T &= 0 \text{ K} \\ R &= 8,314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \\ k &= 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \\ &= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \end{aligned}$$

**Elektrizität:**

Elementarladung  
 Elektrische Feldkonstante  
 Magnetische Feldkonstante  
 Vakuumlichtgeschwindigkeit  
 Faraday-Konstante

$$\begin{aligned} e &= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \epsilon_0 &= 8,855 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1} \\ \mu_0 &= 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1} \\ c &= 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \\ F &= 9,648 \cdot 10^4 \text{ C mol}^{-1} \end{aligned}$$

**Optik:**

Planck'sche Konstante  
 Rydberg-Konstante  
 Radius der 1. Bohr'schen Bahn im H-Atom

$$\begin{aligned} h &= 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \\ R &= 13,598 \text{ eV} = 2,178 \cdot 10^{-18} \text{ J} \\ r_{\text{Bohr}} &= 0,0529 \text{ nm} \end{aligned}$$

## A.7 Angelsächsisches Einheitensystem

Die Einführung des SI ist im Prinzip weltweit sehr erfolgreich gewesen und hat zu wesentlicher Vereinfachung geführt. Die in Tab. 1.2 aufgeführten anderen Einheitensysteme sind inzwischen weitgehend aus dem Alltag verschwunden. Einzige Ausnahme bildet das *Angelsächsische System*, dessen Ersetzung durch das SI zwar in den USA und Kanada begonnen, dann aber 1986 aus wirtschaftlichen Gründen wieder rückgängig gemacht wurde. Dieses System ist altmodisch und unangenehm in der Anwendung, da ei-

nerseits eine Unzahl von nicht-kohärenten Einheiten mit willkürlichen Umrechnungsfaktoren zugelassen, und andererseits keine dezimale Unterteilung vorgesehen ist. Es wird empfohlen, diese Einheiten nicht mehr zu benutzen.

In den folgenden Tabellen beschränken wir uns auf eine Auswahl. Die Umrechnungszahlenwerte ins SI, die bisweilen 9 stellig sind, wurden zumeist auf 2–3 Stellen gerundet. Bei Bedarf höherer Präzision sollte man im Internet nachsuchen.

**Massen**

Name	Symbol	Umrechnung	Zahlenwert in SI
grain	gr	1/7000 lb	$64,799 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$
dram	dr	1/16 oz	$1,77 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$
ounce	oz	1/16 lb	$28,35 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$
pound	lb	<b>Vorsicht! Nicht mit Pfund identisch!</b>	0,454 kg
quarter		28 lb	12,701 kg
hundred-weight	cwt	112 lb	50,802 kg
ton	t	2240 lb	1016 kg
troy pound	lb t	5760 gr	0,373 kg

**Längen**

Name	Symbol	Umrechnung	Zahlenwert in SI
inch	in	1/12 ft	$25,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
foot	ft	1/3 yd	0,305 m
yard	yd		0,914 m
rod	rd	5.5 yd	5,03 m
mile	ml	1760 yd	1609,344 m
mile (US)			1609,347 m
nautical mile	n mile		1853,2 m

**Flächen**

square inch, square foot, square yard, square rod ,  
etc. (*Symbole*: z. B. in<sup>2</sup> oder sq in , etc.)

*Weitere Beispiele:*

Name	Symbol	Umrechnung	Zahlenwert in SI
rood		1210 yd <sup>2</sup>	1011,71 m <sup>2</sup>
acre		4 rood	4046,86 m <sup>2</sup>
square mile		640 acre	2,589988 · 10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup>

**Volumina**

cubic inch, cubic foot, (*Symbole* z. B. in<sup>3</sup> oder  
cubic yard, etc. cu in, etc.)  
fluid drachm, fluid (*Symbole* z. B. fl dr,  
ounce, fluiddram, etc.)  
dry pint, dry quart, (*Symbole* z. B. dry pt  
dry gallon, dry barrel (US), etc.)

*Zusätzlich weitere Unterscheidung zwischen Gültigkeitsbereichen UK und US .*

*Beispiele:*

Name	Symbol	Umrechnung	Zahlenwert in SI
fluid ounce (UK)	fl oz (UK)		28,4131 · 10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup>
fluid ounce (US)	fl oz (US)		29,5735 · 10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup>
pint (UK)	pt (UK)	½ qt (UK)	0,568 · 10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup>
quart (UK)	qt (UK)	¼ gal (UK)	
gallon (UK)	gal (UK)	277.42 in <sup>3</sup> (UK)	4,5461 · 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
gallon (US)	gal (US)	231 in <sup>3</sup> (US)	3,7854 · 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
barrel (US)		9702 in <sup>3</sup> (US)	0,1589 m <sup>3</sup>
dry barrel (US)	bbbl (US)	7056 in <sup>3</sup>	0,1156 m <sup>3</sup>



# Register

---

- $\alpha$ -Umwandlung 364
- A-scan 119
- abbildender Strahlengang 323, 339
- Abbildung, optische 310, 316
  - mit Linsen 316
- Abbildungsdiagramm 324
- Abbildungsfehler, optische 317, 326 – 328
  - Astigmatismus 326 – 327
  - Bildfeldwölbung 328
  - chromatischer Fehler 328
  - Farbfehler 328
  - Öffnungsfehler 317, 328
  - sphärischer Fehler 317, 328
  - Verzeichnung 328
- Abbildungsgleichung 318 – 319, 321 – 323
  - für eine brechende Fläche 318
  - für eine Grenzfläche 319
  - für eine Linse 319
  - für zwei Linsen 321
- Abbildungsmaßstab 325, 338
- abgeleitete Einheit 5
- abgeleitete Größe 3
- abgeschlossenes System 38
- Abklingzeit 80
- Abmagerungskur 406
- Abplattung der Erde 21
- absolute Dielektrizitätskonstante 177
- absolute Luftfeuchtigkeit 154
- absolute Temperatur 123
- absoluter Fehler 443, 447
- Absorption 81, 102, 258, 297, 415
  - von Blutplasma 297
  - von Licht 253, 258
- Absorptions-Spektrallinien 258
- Absorptionsgesetz 102, 290
- Absorptionsgrad 110, 261
- Absorptionskonstante 291, 297, 388
  - spezifisch 297
- Absorptionsspektrum 258, 274, 292, 295
  - des Wassers 274
- Absorptionsvermögen 110, 261, 290
- AC 168
- achromat 328
- adaptive Optik 351
- Addition von Geschwindigkeiten 12
- Aderhaut 332
- Adhäsion 53
- Adhäsionskraft 53
- Adiabatexponent 96, 130
- adiabatische Kompression 410
- adiabatische Schallausbreitung 96, 130
  - Zustandsgleichung 130
- Adsorption 54
- Aerosol 147
- Aggregatzustand 44, 123
- Akkommodationsbreite 331
- Akkord 113 – 115, 409
- Aktionspotential 116, 206, 216
- Aktivierung 383
- Aktivität 369
- Akustik 89, 94, 113
  - Frequenzbereich 94
- akustische Welle 89, 93
- Alexandrit-Laser 273
- alternating current 168
- Altersbestimmung 417
- Alveolen 52
- Ampere 5, 164
- Amperemeter 229
- Amplitude 75, 85, 92
  - Modulation 85
  - Vektor 92
- Amplitudenfunktion 90, 103
  - der ebenen harmonischen Welle 90
  - einer anharmonischen Welle 103
- Amplitudenstruktur, optische 343
- Analog-Kamera 358
- Analog-Digital-Wandler 227
- Analysator, Polarisation 300
- Anfangsbedingung einer Schwingung 90
- angelsächsische System 458
- anharmonische Schwingung 83
- anharmonische Welle 102
- Anion 160, 213
- anisotrope Stoffe 293
- Anode 210
- Anodenstrom 210
- Anregung eines Elektrons 372
- Antenne 199
- Anti-Stokes-Prozess 345
- Antineutrino 365
- Antiteilchen 360
- aperiodischer Grenzfall 80
- Aperturblende 324, 357
- aplanat 328
- Äquipotentialfläche 173
- Äquivalentdosis 394
- Äquivalenz von Masse und Energie 34, 361
- Aräometer (Senkspindel) 59
- Arbeit 32
- Archimedi'sches Prinzip 58
- argentum colloidale 147

- Argon-Laser 274  
 astigmatische Differenz 327  
 atomare Masseneinheit 362  
 Atomkern 359–360  
 Atomrumpf 252  
 ATR-Spektroskopie 314  
 Audiometrie 99  
 Aufenthaltswahrscheinlichkeit 251, 254  
 Auflösungsvolumen 342  
 Aufladevorgang 189  
 Auflicht 341  
 Auflichtfarben 334  
 Auflösungsgrenze, Abbe'sche 341  
 Auflösungsvermögen 287, 341, 416  
 Auftrieb 58  
 Auftriebkraft 59  
 Auge 24, 247, 322, 328, 330, 332, 335–337, 358, 416  
 – Adaption 331  
 – Akkomodation 330  
 – Alterssichtigkeit 330  
 – Brechkraft 330  
 – Druck 24  
 – Farbsehen 334  
 –, – Zäpfchen 335  
 – Fehlsichtigkeit 330  
 –, – Alterssichtigkeit, Presbyopie 331  
 –, – Kurzsichtigkeit 331  
 –, – Kurzsichtigkeit, Myopie 330  
 –, – Übersichtigkeit, Hypermetropie 330  
 – Fernpunkt 330  
 – Kurzsichtigkeit 330  
 – Nahpunkt 330, 337  
 – Netzhaut 332  
 – Öffnung, relative 331  
 – optische Abbildung 329  
 – Sehapparat 333  
 – Sehweite, deutlicher 336  
 – Sehzelle 332  
 – Stäbchen-Zelle 332  
 – Übersichtigkeit 330  
 – Vergrößerung 336  
 – Zäpfchen-Zelle 332, 335  
 Augenempfindlichkeit 334  
 Augenhintergrund 351  
 Augenlinse 338  
 Augenspiegel 332  
 Ausbreitung von Schwingungen 89  
 Ausbreitungsvektor 247, 298  
 Ausdehnungskoeffizient 144  
 Ausdehnungsthermometer 126  
 Auslenkung 75–76, 95  
 Auslöschung 106  
 – durch Superposition 106  
 Autobatterie 213  
 Autoradiographie 375  
 Autostereographie 333  
 Avogadro-Konstante 5, 132, 214, 457  
 axialer Vektor 14, 25  
 $\beta$ -Umwandlung 365–366, 373  
 B-scan 119  
 Bahngeschwindigkeit 15  
 Baryon 359  
 Basiseinheiten 4  
 Basisgrößen 3  
 beamer 338  
 Becquerel 370  
 Beharrungsvermögen 18  
 Beleuchtungsstärke 248  
 Benetzung 54  
 Bernoulli'sche Gleichung 62  
 Beschattung 347  
 Beschleunigung 13, 15–16, 405  
 – bei der Kreisbewegung 15  
 – Bemessung 405  
 Beschleunigungsarbeit 34  
 Besetzungsinversion 270  
 Bestrahlungsstärke 246  
 Beugung 93, 281, 286–287  
 – am breiten Einfachspalt 283  
 – Doppelspalt 281, 283  
 – Draht 283  
 – dreidimensionales Gitter 283  
 – dünner Draht 283  
 – Einfachspalt 281, 283  
 – elektromagnetischer Wellen 281  
 – Kreisscheibe 283  
 – Lochblende 283, 286  
 – optisches Strichgitter 283  
 – von Röntgenstrahlen 287  
 Beugungsgitter 284  
 Beugungsmaxima 286  
 Beugungsminima 286  
 Beugungsscheibchen 287, 351  
 Beweglichkeit 212, 218  
 Bi-Metall-Thermometer 127  
 Biegung 50  
 Bikonkav-Linse 321  
 Bikonvex-Linse 321  
 Bild-Chip 358  
 Bild, reelles 309–310, 325, 337–338  
 – der Lupe 337  
 – im Mikroskop 338  
 – virtuelles 309–310, 325, 337  
 Bildpunkt 308, 317–318  
 Bildschirm 232, 235, 266  
 Bildsensor 358  
 Bildstabilisatoren 357  
 Bildungswärme 153  
 Bildverstärker (Röntgen-) 391  
 binäre Ziffer 224  
 binäres Element 400  
 Binärsystem 224  
 binary digit 224, 400  
 Binnendruck 137  
 Bio-Elektronenmikroskop 348  
 Bio-TEM 348  
 biomolekulare Funktionsdynamik 267

- bit 224, 400  
 Blasenkammer 138, 377  
 Blasinstrument 113  
 Blaze-Gitter 285  
 Bleiakкумуляtor 213  
 Blende, optische 324  
 Blinder Fleck 333  
 Blindleistung 204  
 Blindwiderstand 194  
 Blitz und Donner 95  
 Blutdruck 24, 70  
 Blutdruckregelung 399  
 Blutkörperchen-Senkungsgeschwindigkeit 67  
 Blutkreislauf 69  
 Bodendruck 57  
 Bogenmaß 10  
 Bohr'schen Magneton 182  
 Bohr'sches Atommodell 249, 251  
 – angeregter Zustand 251  
 – Energieniveau 250  
 – Grundzustand 251  
 – moderne Theorieansätze 251  
 – stationäre Elektronenbahn 250  
 Boltzmann'sche Verteilungsfunktion 134  
 Boltzmann-Konstante 458  
 Bragg'sche Reflexionsbedingung 283, 287  
 Bragg-Maximum 372  
 Brechkraft 320–321, 329  
 – des Auges 329  
 Brechung 93, 311, 414  
 Brechungsgesetz (Snellius) 108, 288, 312  
 Brechungsindex 108, 278, 288–289, 312–313  
 Brechungsquotient 108  
 Brechwert 320  
 Brechzahl 289  
 Bremsstrahlung 384–385  
 Bremsung 405  
 Brennpunkt 311, 319  
 – bildseitig 319  
 – gegenstandseitig 319  
 Brennstrahl 323  
 Brennweite 319, 321  
 Brewster-Winkel 302  
 Brille 321, 330, 416  
 Brillenglas 321, 326  
 BTPS (body temperature and pressure, saturated)  
 131  
 Bündel-Strahlengang 324, 339  
 Bunsenbrenner 62
- Candela 6, 248  
 Carnot'scher Kreisprozess 140, 410  
 Celsius-Skala 125  
 channel plate 355  
 Channel-Multiplier 355  
 charakteristische Röntgenstrahlung 384–385  
 Charge-Coupled-Device-(CCD-)Element 356  
 chemische Bindung 42, 252  
 chemische Energie 36  
 chemische Mikroanalyse 347  
 Chemolumineszenz 265  
 chromatische Tonleiter 114  
 CIELAB-System 336  
 Clausius-Clapeyron'sche Gleichung 156  
 CO<sub>2</sub>-Laser 269, 274  
 Coderahmen 400  
 Coherent Anti-Stokes Raman Scattering Mikroskopie  
 (CARS) 344  
 Colorimetrie 334  
 Commission Internationale d'Eclairage 335  
 Compton-Effekt 389  
 Computertomografie 120, 391–392  
 Continuous-wave-Betrieb, cw-Betrieb 271  
 Cortisches Organ 116  
 Coulomb 159  
 Coulomb-Kraft 44, 161  
 Cryomikroskopie 348  
 Cyberknive 379  
 Czerny-Abbildungsdiagramm 324
- Dalton'sches Gesetz 130  
 Dämmerungssehen 248, 331  
 Dampfdruck 153  
 Dampfdruckerniedrigung 155  
 Dampfdruckkurve 156  
 Dämpfungsfaktor 80  
 Dämpfungskonstante des Pendels 81, 102  
 – einer Welle 102  
 Datenverarbeitung, optische 316  
 Dauerstrich-Betrieb 271  
 Dauerstrichlaser 269  
 DC 168  
 de Broglie-Wellenlänge 305, 346  
 Defektelektron 219  
 Defibrillator 217  
 Deformationsenergie 38  
 Dehnung 48, 104–105  
 – elastische 105  
 Dehnwellen-Geschwindigkeit 96  
 Depolarisation 207, 216  
 destruktive Interferenz 106  
 Detektor, optischer 353  
 – Photodioden-Array 353  
 Determinismus 254  
 Dezibel 79, 97–98  
 dezimale Vielfache 4  
 Dia-Projektor 338  
 Diaphanoskopie 293  
 Diathermie 217  
 Dichroismus 293  
 dichroitische Stoffe 294  
 Dichte 19, 59  
 dichtes Medium 110  
 Dielektrikum 176–177  
 Dielektrizitätsfunktion 289  
 Dielektrizitätskonstante 177, 289  
 – lineare 289  
 Dielektrizitätszahl 177

- Differentialgleichung 78, 455  
 – Amplitudenfunktion 78  
 Differentialgleichung (Schwingung) 77, 80–81  
 – der harmonischen Schwingung 77  
 – einer gedämpften Schwingung 80  
 – inhomogen 81  
 differentieller Widerstand 167  
 diffuse Reflexion 109  
 Diffusion 148  
 Diffusionskoeffizient 149  
 Diffusionspotential 205  
 Digital-Messgerät 228  
 Digital-Voltmeter 228  
 Digitalelektronik 223  
 Digitalkamera 358  
 Digitalthermometer 128  
 Dimension 3  
 Dimensionsgleichung 442  
 Dimmer 241  
 Diode 209, 221  
 Dioptrie 320  
 Dipolmoment 174, 182  
 – elektrisches 174  
 – magnetisches 182  
 direct current 168  
 Dispersion 147, 290, 293, 313, 328  
 – anormale 293  
 – grobe 147  
 – normale 293  
 Dissoziationsgrad 212  
 Doppelbrechung 290, 293  
 Doppler-Effekt 99–101, 119, 415  
 – beim Licht 100  
 Dosimetrie 392–394  
 Dosisleistung 393  
 Dotierung 220  
 Drehimpuls 29  
 Drehimpulserhaltung 40, 406  
 Drehimpulserhaltungssatz 40  
 Drehmoment 24–25  
 Drehspul-Messwerk 227–228  
 Drehstrom 192  
 Dreifarben-Theorie 336  
 Dreifarbenbuntdruck 335–336  
 Dreiklang 114  
 Dreiphasen-Spannung 192  
 Driftgeschwindigkeit 218  
 Drossel 195, 211  
 Druck 24, 56, 405  
 – im Auge 24  
 Druckbauch 113  
 Druckknoten 113  
 Druckmessung 58  
 Druckspannung 48  
 Dual-System 224  
 Dualität oder Welle-Teilchen-Dualismus 246  
 dunkeladaptiertes Auge 247  
 dünnes Medium 110  
 Dur-Tonleiter 114  
 Durchlassfilter 279  
 Durchlassstrom 222  
 Durchlicht 341  
 Durchlichtfarben 334  
 durchschnittlicher Fehler 446  
 dynamisches Gleichgewicht 22–23, 154  
 Dynamo-Maschine 238  
 Dynamo-Prinzip 239  
 Dynamometer 24  
  
 E-health 401  
 ebene Welle 90, 101, 107  
 ebener Winkel 10  
 ebullioskopische Konstante 155  
 Echo 95, 109, 119  
 Echokardiographie 120  
 Echolotprinzip 95  
 Edelgaskonfiguration 43  
 EEG 207, 413  
 effektive Spannung 204  
 effektive Stromstärke 204  
 Effektivwert 192  
 Eichnormale 5  
 Eigenfrequenz 75, 81  
 Eigenschwingung 87, 112, 407  
 Eigenvolumen 136  
 einarmiger Hebel 26  
 Einfallsebene 109, 310  
 Einfallslot 108  
 Einheitengleichung 442  
 Einheitensystem 4, 458  
 – angelsächsisches 458  
 Einschwingvorgang 81–82, 114  
 EKG 83, 193, 207, 413  
 elastische Streuung 389  
 elastische Verformung 48, 406  
 elastische Welle 93  
 elastischer Stoß 39–40  
 Elastizitätsmodul 48, 96  
 elektrische Arbeit 28, 159, 161, 167, 171, 174, 178,  
 202, 458  
 – Feldenergie 178  
 – Feldenergiedichte 178  
 – Feldkonstante 174, 458  
 – Feldstärke 167, 171  
 – Ladung 159  
 – Leistung 202  
 – Spannung 161  
 – Waage 28  
 elektrischer Dipol 163–165, 174–175, 218  
 – Leiter 218  
 – Strom 163–164  
 – Widerstand 165, 411  
 elektrisches Feld 171–172, 175–176  
 – Potential 172  
 Elektrizitätsleitung im menschlichen Organismus 215  
 Elektro-Dynamo 238  
 Elektro-Motor 239  
 Elektroenzephalogramm 207, 413

- Elektrokardiogramm 83, 193, 207  
 Elektrolyt 212, 412  
 elektrolytische Dissoziation 212  
 elektromagnetische Kräfte 20  
 elektromagnetische Welle 198–199, 245–246, 254,  
 275, 288, 291, 298, 415  
 – Deutung 254  
 – Energiedichte 246  
 – Entstehung 275  
 – Induktion 184  
 – Intensität 246, 292  
 – Polarisation 298  
 – Reflexion 292  
 – Strahlungsleistung 291  
 elektromagnetisches Feld 199  
 Elektrometer 185, 236  
 Elektromyogramm 207  
 Elektron 160, 359  
 Elektron-Loch-Paar 220  
 Elektronen-Optik 345  
 – Kondensator 345  
 – Objektiv 345  
 Elektronenenergieverlust-Spektroskopie 347  
 Elektronengleichgewicht 393  
 Elektronenhülle 41  
 Elektronenmasse 457  
 Elektronenmikroskop 287, 342, 345  
 – Auflösungsgrenze 346  
 – Bildkontrast 346  
 – Strahlengang 346  
 – Vergrößerung 346  
 Elektronenmikroskopie 347  
 – analytische 347  
 Elektronenröhre 209  
 Elektronenstrahl 304  
 Elektronenstrahlröhre 233  
 Elektronenvolt 162  
 Elektrophorese 214  
 Elektroradiogramm 413  
 Elektroschock 216, 412  
 elektrostatisches Feld 170  
 Element 359  
 Elementarladung 160, 360, 458  
 Elementarteilchen 18, 305, 359  
 Elementarwelle, Huygens'sche 107  
 Emission von Licht 252, 255–256, 265, 270  
 – induzierte 270  
 – nichtthermische 265  
 – spontane 255  
 – stimulierte 256  
 Emissions-Computertomograf 376  
 Emissionsspektrum 256, 295  
 Emissionstomografie 376  
 Emissionsvermögen 261  
 Emitterstrom 222  
 Empfänger 241  
 Empfindlichkeitskurve des Auges 248  
 Emulsion 147  
 Endoskop 314  
 Energie 32, 178, 186  
 Energie, Leistung 406  
 Energiebilanz 143  
 Energiedichte 96, 178  
 – im Kondensator 178  
 – im Wellenfeld 96  
 – in der Spule 186  
 Energiedosis 392–393  
 Energieerhaltungssatz 37  
 Energiegewinnung 418  
 Energieniveau 250  
 Energiequanten 253  
 Energiequelle 35  
 Energiestrom 96  
 Energiestromdichte 96  
 Energieterm-Schema 365  
 Energietransferkoeffizient 393  
 Energieumwandlung 38, 75, 140  
 Entfernungshören 117  
 Enthalpie 139  
 Entladevorgang 189  
 – beim Kondensator 189  
 Entropie 141  
 Entspiegelung 279  
 Entwicklung 358  
 Eosin 344  
 Episkop 338  
 Epoxy-Harz 348  
 Er/YAG-Laser 274  
 Erdanziehung 21  
 Erdbeschleunigung 21  
 Ergometer 36  
 Erhaltungssätze 37  
 Erregerfrequenz 81  
 erzwungene Schwingung 75, 81, 407  
 – Kräftebilanz 81  
 evidenzbasierte Medizin 401  
 Excimer-Laser 274  
 Exponentialfunktion 102, 292, 452  
 Extinktion 102, 291, 297  
 – kolloidales System 297  
 Extinktionskonstante 102, 291, 298  
 Extinktionsspektrum 292  
 Fadenpendel 38, 78  
 Fahrenheit-Skala 126  
 Farad 174  
 Faraday'sche Reizung 217  
 Faraday'sches Gesetz 213  
 Faraday-Effekt 303  
 Faraday-Käfig 176  
 Faraday-Konstante 214, 458  
 Farbe 413  
 Farbempfindung 334  
 Farben 335  
 Farbfernsehbild 335  
 Farbfilter 279  
 Farbmeterik 334  
 Farbraum 336

- Farbsättigung 335  
 Farbsehen 334  
 Farbtemperatur 264  
 Farbton 335  
 Farbvalenz 335  
 Farbvalenzvektor 336  
 Federkonstante 78  
 Federkraft 77  
 Federpendel 76, 78  
 Federwaage 24  
 Fehler 443–444, 446  
 – absoluter 443  
 – des Mittelwertes 445  
 – durchschnittlicher 446  
 – einer Funktion 448  
 – prozentualer 443  
 – relativer 443  
 – systematischer 444  
 – zufälliger 444  
 Fehler des Mittelwertes 445  
 Fehler einer Funktion 448  
 Fehlerabschätzung 442, 445  
 Fehlerfortpflanzung 445, 447  
 Fehlerintervall 443  
 Fehlerquadrate 449  
 – Methode der kleinsten 449  
 Fehlsichtigkeit des Auges 330  
 Fehlstelle 219  
 Feinststaub 73  
 Feldeffekt-Transistor 223  
 Feldlinie 171, 180  
 Feldlinse 338  
 Feldstärke 21, 171, 180  
 Femtosekunden-Laser 270  
 Fernrohr 350  
 – astronomisches 351  
 – Auflösungsgrenze 351  
 – Kepler'sches 351  
 – Prismenglas 351  
 Fernsehen 349  
 Fernsehen, Prinzip 348  
 Ferromagnet 181  
 Festkörper 44, 87  
 Festkörperbildspeicher 236  
 Fick'sches Gesetz 149  
 Fieberthermometer 127  
 Film-Projektor 338  
 Fixierung 358  
 Flachbildschirm 236  
 Flageolet-Ton 113  
 Fledermaus-Echolot 95  
 Fließgleichgewicht 38, 143, 263  
 Fliehkraft 22  
 Fluchtgeschwindigkeit 100  
 Fluoreszenz 265, 267, 340, 343–344  
 – löschen der 267  
 Fluoreszenz-Marker-Methode 267  
 Fluoreszenzmikroskop 344  
 Fluoreszenzmikroskopie 344  
 Fluorometrie 354  
 Flüssigkeit 46, 63  
 – ideale 63  
 – reale 63  
 Flüssigkeitsmanometer 58  
 Flüssigkeitsthermometer 126  
 focused ion beam (FIB) 347–348  
 Förderarbeit (Volumenarbeit) 61  
 Förderleistung des Herzens 61  
 Foto-Objektiv 357  
 Fotografie 280, 326  
 Fotografierprozess 358  
 Fourier, Spektrometer 353  
 Fourier-Analyse 84  
 Fourier-Reihe 84, 103, 114  
 Fourierkoeffizient 84  
 freie Oberfläche 51  
 freie Schwingung 75–76  
 freie Weglänge 134, 210  
 freier Fall 21, 37  
 Freiheitsgrad 133  
 – der Rotation 133  
 – der Translation 133  
 Frequenz 9, 15, 76, 93, 200  
 Frequenzfilter 197  
 Frequenzspektrum 87  
 Frequenzverdopplung 105  
 Fusion 381, 418  
  
 $\gamma$ -Prozess 383  
 $\gamma$ -Spektrum 367  
 galvanische Reizung 217  
 galvanisches Element 162  
 Gamma-Kamera 375–376  
 Gammaknife 377–378  
 Gammastrahlung 364  
 Gas 44, 46, 129, 136  
 – ideales 129  
 – reales 136  
 Gasdruck 131  
 Gasentladung 211  
 Gasgemisch 130  
 Gaskonstante 129, 137, 458  
 Gastheorie, kinetische 131  
 Gasthermometer 126  
 Gauß-Fehler der Einzelmessung 446  
 Gauß'sche Verteilungskurve 446  
 gedämpfte Schwingung 75, 79–80, 407  
 – aperiodischer Grenzfall 80  
 – Kriechfall 80  
 gedämpfte Welle 101  
 Gefrierpunktserniedrigung 155  
 Gefrietrocknung 155  
 geführte Welle 315  
 Gegenkopplung 398  
 Gegenstandspunkt 308, 317  
 Gehör 116  
 Gehörgang 116  
 Gehörknöchelchen 116

- Geiger-Müller-Zählrohr 374  
gekoppelte Federpendel 87  
– Grundschiwingung 87  
– Oberschiwingung 87  
gekoppelte Pendel 85–86  
– Eigenschwiwingungen 86  
Gelber Fleck 332  
geometrische Optik 246, 284, 306  
geradlinige Bewegung 14  
Geräusch 103  
Geschwindigkeit 11, 16, 405  
Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm 17  
Geschwindigkeitsgefälle 64  
Geschwindigkeitsverteilung 133–134  
Gesetz von Malus 300  
Gesichtsfeld 324, 339  
Gesichtsfeldblende 324  
Gesundheitsgefährdungen durch Laser 275  
Gewichtskraft 21  
Gitter, optisches 353  
Gittermonochromators 285  
Gitterschiwingung 88  
Gitterstrukturen kristalliner Stoffe 288  
Glasfaserkabel 315  
gleichförmige Geschwindigkeit 11  
Gleichgewicht 28  
Gleichgewicht der Kräfte 23  
gleichmäßige Druckausbreitung 56  
Gleichrichter 210  
Gleichrichterdiode 222  
Gleichrichterschaltung 222  
Gleichspannung 163  
Gleichspannungsquelle 167–168  
Gleichverteilungssatz 133  
Gleichzeitigkeit 9  
Gleitreibung 31  
Gleitreibungszahl 31  
Glimmentladung 211  
global positioning system 243  
Glühbirne 313  
Glühemission 209  
Glühkathode 209  
Glühlampe 255, 260, 263–264  
Glühlicht 249  
Glühwürmchen 265  
Goldrubin 47  
GPS 243  
Graßmann'sche Gesetz 335  
Gradmaß 10  
grafische Darstellung 11  
Gravitation 20  
Gravitationsfeld 21  
Gravitationsgesetz 20  
Gravitationskonstante 20, 457  
Gravitationskraft 20  
Gray 393  
Grenzfläche 51  
Grenzflächeneffekte 72  
Grenzwellenlänge 384  
Grün-Fluoreszierende-Protein (GFP) 267  
Größengleichung 3  
Grundfrequenz 84, 103  
Grundgrößen 3  
Grundschiwingung 87  
Grundton 103, 114  
Grundumsatz 143  
Grundzustand 253  
grünes Fluoreszenzprotein 344  
gummielastisch 64  
gyromagnetisches Verhältnis 363  
Hadron 359  
Haftreibung 31  
Haftreibungswinkel 31  
Haftreibungszahl 31  
Hagen-Poiseuille'sches Gesetz 66, 70, 406  
Halbleiter 219  
Halbleiter-Diode 221  
Halbleiter-Ionisationsdetektor 374  
Halbleiter-Laser 272  
Halbleiterelektronik 221  
Halbton 115  
Halbwertsdicke 373  
Halbwertszeit 369  
Hämoglobin 274, 353  
Hämolyse 150, 411  
harmonische Schwiwingung 78, 83–84  
– Anfangsbedingung 78  
harmonische Welle 90  
Hauptebene 322  
Hauptquantenzahl 251  
Hauptsätze der Wärmelehre 138, 142  
Hebel 26  
– einarmig 26  
– zweiarmig 26  
Hebelarm 25  
Hebelgesetz 26  
Hebelwaage 28  
helladaptiertes Auge 247  
Henry 186  
Henry-Dalton'sches Gesetz 148  
Hertz 9, 76  
Hertz'scher Dipol 198  
Herz 60  
Herzflimmern 216  
Herzschrittmacher 208  
heteropolare (ionogene) Bindung 43  
Himmelsblau 298, 302  
Hintereinanderschalten von Widerständen 170  
Histogramm 446  
Hochpass-Filter 194  
Hochspannung 191, 203  
Hochtemperatursupraleiter 218  
Höhenstrahlung 369  
Hohlraumstrahlung 262  
Hohlspiegel 310, 351  
Holografie 280, 333  
Hologramm 280

- homogener Körper 47  
 homöopolare (kovalente) Bindung 42  
 Hooke'sches Gesetz 48, 105  
 Hörapparat 99  
 Hörbereich 94, 98  
 Hörgerät 116  
 Hörgrenze 94  
 Horizontal-Ablenkung 234  
 Hornhaut-Krümmung 327  
 Hörschall 93  
 Hubarbeit 32, 34  
 Hubble-Parameter 101  
 Hubblesches Gesetz 101  
 Huygens'sche Elementarwelle 107, 281  
 Huygens'sches Prinzip 107, 281, 289, 302  
 Hydratation 148  
 hydraulische Presse 56  
 Hydrodynamik 51, 61  
 Hydromechanik 51  
 Hydrostatik 54  
 hydrostatisches Paradoxon 58  
 Hypermetropie 330  
 Hyperpolarisation 207  
 Hyperschall 94  
 hypertone Lösung 150  
 hypotone Lösung 150
- Ideal-Schwarzer Körper 262–263, 356  
 ideale Flüssigkeit 61  
 ideale Gase 129  
 Immersions-Mikroskopie 343  
 Immersions-Öl 343  
 Impedanz 97, 195  
 Impuls 29  
 Impulserhaltung 406  
 Impulserhaltungssatz 38  
 indifferentes Gleichgewicht 29  
 indirekt ionisierende Strahlen 373  
 Induktionsprinzip 184  
 Induktionsspannung 185  
 induktiver Widerstand 194  
 Induktivität 195  
 induzierte Emission 255  
 inelastischer Stoß 39–40  
 Influenz 176  
 Informatik 224  
 Informationskette 399  
 Informationsübertragung 315, 399  
 Infrarot 355  
 Infrarot-Strahlung 356  
 – Thermographie 356  
 Infrashall 93–94  
 Innenwiderstand 168, 230  
 innere Energie 138, 410  
 innere Reibung 63  
 Instrumente, optische 337  
 Integralrechnung 456  
 integrierte Optik 316  
 Intensität 96, 201, 246  
 Intensitätsoptik 306  
 Interferenz 106, 110, 255, 275–276, 353  
 – destruktive 106, 276  
 – Experiment (Kohärenz) 255  
 – konstruktive 106, 276  
 – Phasendifferenz 277  
 – Verlauf-Filter 353  
 Interferenzfarbe 414  
 Interferenzfigur 106, 277, 282  
 Interferenzfilter 278–279  
 Interferenzmuster 278  
 Interferogramm 274  
 Interferometer 278  
 Interferometrie 278  
 Internationales Einheitensystem 4  
 Internet 400  
 Ion 43, 214  
 Ionendosis 393  
 Ionisation 372  
 Ionisationsdetektor 374  
 Ionisationsdichte 394  
 Ionisationsenergie 43, 211, 372  
 Ionisationskammer 374  
 ionisierende Strahlung 394  
 – dicht 394  
 – locker 394  
 ionogene (heteropolare) Bindung 43  
 Irisblende 331  
 irreversibler Prozess 139  
 isobare Zustandsänderung 129  
 isochore Zustandsänderung 130  
 Isolator 165, 220  
 isotherme Zustandsänderung 129  
 isotone Lösung 150  
 Isotop 360, 364  
 isotrope Stoffe 293
- Joule 32, 124  
 Joule'sche Wärme 202, 218
- Körperfarben 334  
*K*-Einfang 366  
*K*-Strahlung 366  
 Kalorie 124  
 Kalorimeter 125  
 Kältemischung 156  
 Kaltlicht 265  
 Kamera 356–357  
 – elektronische 356  
 Kammerton 94, 115  
 Kapazität 173, 195  
 kapazitiver Widerstand 193  
 Kapillarattraktion 54  
 Kapillardepression 55  
 Kapillarität 54  
 Kardinalelement 322–323, 330  
 – des Auges 330  
 Kathode 209  
 Kation 160, 213

- Kaustik-Figur 311, 328  
 Kelvin 6, 123, 125  
 Kernbindungskräfte 417  
 Kernenergie 36  
 Kernfusion 362, 381–382  
 Kernkraft 20  
 kernmagnetische Resonanz 362–363  
 Kernreaktor 382  
 Kernspaltung 382  
 Kernumwandlung 364, 383  
 – künstliche 383  
 Kilogramm 5  
 Kilowattstunde 202  
 kinetische Energie 34, 77, 132  
 Kirchhoffsche Regeln (Gesetze) 68, 169  
 Kirchhoffsches Strahlungsgesetz 263  
 Klang 103–104, 113  
 – Spektrum 104  
 Klanganalyse 103–104  
 Klangfarbe 104, 114, 116  
 – der Stimme 116  
 Klemmenspannung 168  
 Knall 103  
 Knickung 50  
 Knochenleitung des Schalls 116  
 Knotenpunkt 323  
 Knotenregel 169  
 Koagulation 148  
 Koexistenz von Phasen 137, 156  
 Kohärenz 255, 277  
 Kohärenzgrad 255  
 Kohärenzlänge 255, 268  
 Kohärenzzeit 255  
 Kohäsion 53  
 Kohäsionskraft 53  
 Kohlebogenlampe 211  
 Kollektivlinse 338  
 Kollektorstrom 222  
 kolloidales System 147, 297  
 – Extinktion 297  
 kommunizierendes System 58  
 Kompakt-Leuchtstofflampe 264  
 Kompassnadel 182  
 Komplementärfarben 336  
 Kompressibilität 49  
 Kompression 49  
 Kompressionsmodul 49, 96  
 Kondensator 172–173, 177  
 Kondensatorspannung 188  
 Kondenseroptik 349  
 Konfokales Fluoreszenz-Mikroskop 267  
 Konfokales Laser-Raster-Mikroskop (CLSM) 344  
 konstruktive Interferenz 106  
 Kontaktlinse 330–331  
 Kontaktspannung 127, 204  
 kontinuierliches elektromagnetisches Spektrum 104, 259  
 – akustisches Spektrum 104  
 – optisches Spektrum 259  
 Kontinuitätsgleichung 61  
 Kontrastmittel 390  
 Kontrastüberhöhung 334  
 Konvektion 144–145  
 Konvergenzwinkel 333  
 Konzentrationsspannung 205  
 Kopfwelle 408  
 Kopplung 85  
 Korrelative Mikroskopie (CLEM) 349  
 Kosmologie 101  
 kovalente (homöopolare) Bindung 42  
 Kraft 18, 20, 405  
 Kraft-Weg-Diagramm 33–34  
 Kraft-Zeit-Diagramm 29–30  
 Kräftebilanz der Schwingung 77  
 Kräftepaar 25–26  
 Kräfteparallelogramm 23  
 Kraftfeld 21  
 Kraftgesetz 104  
 Kreisbewegung 14  
 Kreisfrequenz 14, 76  
 Kreisprozess 140  
 – Carnot'scher 140  
 Kriechfall 80  
 Kriechverhalten 105  
 Kristallgitter 287, 304  
 kritischer Punkt 138, 156  
 krummlinige Bewegung 14  
 Kryomagnet 218  
 Kryoskopie 156  
 kryoskopische Konstante 156  
 Kugelwelle 91, 101, 107, 317  
 Kurzschluss, elektrischer 169, 315  
 – optischer 315  
 Kurzwelle 200, 241  
  
 labiles Gleichgewicht 29  
 Ladungsmessung 236  
 Ladungsträgererzeugung 211  
 Lambert-Beer'sches Gesetz 296  
 laminare Strömung 65  
 Länge 3  
 Längenkontraktion 7  
 Langwelle 200, 241  
 Laser 256, 268, 270–274  
 – aktive Stoffe 271  
 – Argon 274  
 – Bedingung 270  
 – CO<sub>2</sub> 274  
 – Drei-Niveau 271  
 – durchstimmbar 268  
 – Er/YAG 274  
 – Excimer 273–274  
 – Farbstoff 273  
 – Festkörper-Ionen 273  
 – Gas 273  
 – Halbleiter 273  
 – in der Medizin 270, 274  
 – mittlere Leistung 270

- Neodym-YAG 274
- Pulsdauer 270
- Schutzbrille 274
- Typen 272, 274
- LASER-Strahlung 268
- laser-aktives Medium 270
- Laser-Chirurgie 272
- Laser-Lithotripsie 272
- Laserbehandlung in der Medizin 272
  - Laser-Chirurgie 272
  - Laser-Lithotripsie 272
  - Photo-Ablation 272
  - Photo-Disruption 272
  - Photo-Koagulation 272
  - Photochemische Reaktion 272
- Laserpuls 344
- Laserpulse 269, 271
- Laserschutzbeauftragter 275
- Laserstrahlung 270
- latente Wärme 152
- Laue'sche Gleichung 283, 287
- Lautstärke 97, 99, 113
  - Frequenzabhängigkeit 99
- Lautstärkemaß 98
- Lebensdauer des angeregten Zustandes 256
- LED 272
- Lederhaut 332
- Leerlauf 169
- Leerlaufspannung 168
- Leervergrößerung 341
- Leistung 36, 202
- Leistungsfaktor 203
- Leiter 165
- Leitfähigkeit 166, 218
- Leitungselektron 163, 218
- Leitwert 165
- Lenz'sche Regel 186
- Lepton 359
- Leuchtelektron 252
- Leuchtschirmbild 391
- Leuchtstoffröhre 211, 266
- Licht 200, 245, 277, 299–300, 302, 310
  - elliptisch polarisiertes 299–300
  - inkohärentes 277
  - kohärentes 277
  - linear polarisiertes 299–300
  - natürliches 299
  - sichtbares 200
  - Streuung 302, 310
  - zirkular polarisiertes 299–300
- Licht-Rezeptor 332
- Lichtausbeute A 248
- Lichtbündel 307–308
  - paralleles 308
- lichtemittierende Halbleiter-Dioden, LEDs 264
- Lichtgeschwindigkeit 13, 19, 201, 289
- Lichtleiter 314–315
  - flexibler 314–315
- Lichtleiter-Endoskop 315
- Lichtmessgröße 246
- Lichtmikroskop 338
- Lichtquanten 253, 291
- Lichtquelle 248, 413
- Lichtstärke 248, 324
  - einer Linse 324
- Lichtstrahl 306–307, 323
- Lichtstreuung 266
- Lichtstrom 248
- Lichttechnik 248
- lichttechnische Größe 247
- Linearbeschleuniger 387
- lineare Näherungsgesetze 105
- lineare Superposition 83, 106, 276
- Linienpektrum 257
- Linse 317, 319–322, 324
  - Abbildungsdiagramm 324
  - Abbildungsgleichung 317, 319
  - asphärische 317
  - dicke 322
  - dünne 319
  - Klassifizierung 320
  - Sammel- 320
  - sphärische 317
  - Zerstreuung 320
- Linsenformel 320
- Linsengesetze 416
- Linsensystem 320, 322
- Lithotripter 118, 121
- Lochblende 286
- logarithmisches Dekrement 80, 102
- Logarithmus 453–454
- longitudinale Welle 92
- Longitudinalschwingung 87
- Lorentz-Kraft 182–183, 411
- Loschmidt'sche Konstante 5, 214
- Löslichkeit 152–153
- Lösung 146, 150
  - dynamische 146
  - hypertone 150
  - hypotone 150
  - isotone 150
- Lösungsfunktion der Schwingungsdifferentialgleichung 78
- Lösungswärme 152
- Luftleitung des Schalls 116
- Lumineszenz 265
- Lumineszenz-Archäologie 266
- Lupe 337–338
- Luziferin 266
- Lyophilisation 155
- Mach 408
- Mach-Kegel 408
- Magnetfeld 178
- Magnetic Particle Imaging 74
- magnetische Feldenergiedichte 179–181, 184, 186, 251, 458
  - Feldkonstante 181, 458

- Feldlinie 180
- Feldstärke 180
- Flussdichte 184
- Induktion 179, 181, 184
- Quantenzahl 251
- magnetischer Dipol 182, 184
  - Fluss 184
- magnetisches Feld 179, 362
  - Moment 362
- Magnetisierung 181
- Magnetoenzephalogramm 187
- Magnetokardiogramm 187
- Majoritätsträger 220
- Makromoleküle 45
- Markierung, radioaktive 379
- Maschenregel 169
- Masse-Energie-Äquivalenz 35, 361, 406
- Massenabsorptionskoeffizient 388
- Massendefekt 361
- Massendichte 48
- Massenkonzentration 147
- Massenmittelpunkt 27
- Massenzahl 360
- Massenzunahme, relativistische 345
- Materie 47
  - funktionalisierte 47
  - kondensierte 47
  - Nano- 72
  - nanoskopische 72
- Materiewelle 94, 303, 342, 415
  - Elektronen 303
  - Neutronen 303
  - Protonen 303
- mathematisches Pendel 78
- Maxwell'sche Gleichung 201–202
- mechanische Energie 36, 48, 75
  - Schwingung 75
  - Spannung 48
- Medium 110
  - dichtes 110
  - dünnes 110
- medizinische Informatik 399
- medizinische Robotik 402
- Mehrphoton-Prozess 253
- Membranpotential 205
- Meniskus 331
- Meson 359
- Messbereichserweiterung 231, 412
- Messfehler 445
- Messung von Ohm'schen Widerstand 236
- Messwerk 397
- metallische Bindung 43
- metamere Farben 334
- metastabil 269
- metastabiler Zustand 256, 271
- Meter 5
- Michelson-Interferometer 278
- Mikromassage 118
- Mikroskop 267, 324, 338, 343, 345
  - abbildender Strahlengang 339
  - Auflösungsgrenze 341
  - Beleuchtungsoptik 341, 343
  - Bündel-Strahlengang 339
  - Dunkelfeld-Methode 341
  - Durchstrahlungs-Objekt 340
  - Elektronenmikroskop 345
  - Fluoreszenzmikroskopie 267, 344
  - Gesamtvergrößerung 339
  - Gesichtsfeld 339
  - Immersionsmikroskopie 343
  - Kondensor-Optik 340, 343
  - numerische Apertur 342
  - Oberflächen-Objekt 340
  - Objekt-Mikrometer 340
  - Objektiv 338
  - Okular 338
  - Okular-Mikrometer 340
  - Phasenkontrastverfahren 343
  - Polarisationsmikroskopie 343
  - Projektiv 340
- Mikrotom 340
- Minoritätsträger 220
- Mischfarben 334–335
- Mitkopplung 398
- Mittelpunktsstrahl 323
- Mittelwelle 200, 241
- Mittelwert 203, 445
- mittlere Beschleunigung 13
- mittlere Lebensdauer 369
- mittlere Reichweite 388
- mittlerer Fehler des Mittelwertes 447
- Moderator (bei der Kernspaltung) 382
- Modulation 85
- Modulationsverfahren 243
- Mol 6
- Mol-Masse 5
- Molalität 146–147
- molare Masse 47
- molare Wärmekapazität 124, 136
- Molekül-Absorptionsspektroskopie 87
- molekulare Cluster 73
- Molekülbanden 259
- Molekülclustern 259
- Molekülschwingung 87, 295, 345
- Moll-Tonleiter 114
- momentane Auslenkung 75
- Momentangeschwindigkeit 12
- Momentanleistung 203
- Monochord 114
- Monochromator 285, 313, 353
- monoenergetische  $\alpha$ -Strahlung 365
- Musikinstrument 94, 103, 112–113
  - Blasinstrument 112
  - Saiteninstrument 112
  - Tonhöhe 113
- Mutter-Tochter-System (radioaktiv) 371
- Myopie 330

- n*-Halbleiter 220  
 Nachrichtenübermittlung, optische 315  
 Nachthimmel 351  
 Nachtsichtgerät 356  
 Nahfeld-Mikroskop, optisches (SNOM) 342  
 Nahfelder 349  
 Nano 47, 73–74  
   – -biophotonik 267  
   – -biotechnologie 72  
   – -elektronik 72  
   – -materie 47, 72, 74, 259  
   – -partikel 47  
   – -struktur 72–73  
   – -technologie 71  
   – -wissenschaft 71  
 Naturkonstanten 457  
 natürliche Strahlenexposition 369  
 Nebelkammer 138, 377  
 Nebenquantenzahl 251  
 Negativ 358  
 negative Beschleunigung (Abmessung) 14  
 Neodym/YAG-Laser 274  
 Netzebene 287  
 Netzhaut, Rezeptoren 332  
 Netzhautgrube 332  
 Netzwerk, elektrisches 167  
 Neutrino 359, 366  
 Neutron 359  
 Neutronenaktivierung 383  
 Neutronenmasse 457  
 Newton 20  
 Newton'sche Axiome 19, 63, 66, 278  
   – Flüssigkeit 63, 66  
   – Ringe 278  
 Nicht-Newton'sche Flüssigkeit 64, 66  
 Nichtleiter 165  
 nichtlineare Effekte 105  
 nichtlineare Optik 105, 276  
 nichtlineare Physik 105  
 Nicol'sches Prisma 301  
 Nierenstein 121  
 Nierensteinzertrümmerung 121  
 NMR 361–363  
 NMR-Tomografie 363  
 Normalkraft 31  
 Normalverteilung 446  
 Normalwert 129  
 Notenschrift, musikalische 114  
 Nukleon 359  
 Nukleonenerhaltungssatz 361  
 Nuklidkarte 361  
 Null-Leiter 192  
  
 obere Hörgrenze 94  
 Oberflächen-Abbildung 349  
 Oberflächeneffekt 73  
 Oberflächenrauigkeit 310  
 Oberflächenspannung 52  
 Oberflächenwelle 241  
  
 Oberschwingung 87–88, 114  
 Oberton 103, 114  
 Obertonreihe 114  
 Objektiv 317, 320–322, 338–339  
 Objektiv, Vario 322  
 Objektiv, Zoom 322  
 offenes System 38  
 Öffnung, relative 324  
 Öffnungsfehler 311, 320  
   – der Linse 320  
   – des Hohlspiegels 311  
 Öffnungsfehler 317  
 Ohm 165  
 Ohm'scher Widerstand 166, 236  
 Ohm'sches Gesetz 166  
 Ohr 98, 104, 116, 409  
   – Knochenleitung 116  
   – Luftleitung 116  
   – Schallempfindlichkeit 98  
 Ohrschnecke 116  
   – Aktionspotential 116  
 Oktave 113–114  
 Okular 338  
 Opal 73  
 Optik 306  
   – abbildende 306  
   – geometrische 306  
 optische Abbildung 310, 316, 329  
   – im Auge 310, 329  
   – mit Linsen 316  
 optische Aktivität 303  
   – spezifische Drehung 303  
 optische Elementarprozesse 256  
 optische Instrumente 316  
 Optische Kohärenztomographie (OCT) 274  
 optische Molekülspektroskopie 295  
 optische Strahlengänge 308, 323  
 optische Strahlung 245  
 optischer Spektralbereich 245  
 Optoelektronik 315  
 Ordnungszahl 360  
 Osmose 149  
 osmotische Arbeit der Niere 150–151  
   – Resistenz 150  
 osmotischer Druck 150, 411  
 Oszillator 75, 81, 290  
 Oszillograph 232  
 Oszilloskop 232  
 Overhead-Projektion 338  
  
*p*-Halbleiter 220  
 Paarbildung 362, 390  
 Parallel-Schwingkreis 197  
 Parallelschalten von Widerständen 170  
 Parallelstrahl 323  
 Pascal 24  
 Pauli'sches (Ausschließungs)-Prinzip 252  
 Pegelmaß 79, 97–98  
 Pendel 76, 407

- Pendelkette 87  
 Pendelstrahlung 378  
 Perilymphe 116  
 Periode 76  
 Periodensystem 359  
 Perkussion 117  
 Permeabilität 206  
 Permeabilitätszahl 181  
 perpetuum mobile 139, 142  
 PET (Positronen-Emissionstomographie) 376  
 Phase 76, 90, 192, 408  
 Phasenanalysator 352  
 Phasenanschnitts-Steuerung 240  
 Phasendifferenz 76, 78, 81, 192, 203  
 Phasengleichgewicht 156  
 Phasenkonstante 78, 90  
 Phasenkontrastverfahren 343  
 Phasenobjekt 343  
 Phasensprung 110, 112  
 – Reflexion 110  
 Phasenstruktur, optische 343  
 Phasenübergang 151  
 Phasenverschiebung 78, 192  
 Phasenwinkel 197  
 Phon 98  
 Phononen 88  
 Phosphoreszenz 265  
 Photo-Koagulation 272  
 photochemische Reaktion 272  
 Photodiode 272  
 Photodioden-Arrays 353, 356  
 Photoeffekt 355, 389  
 – äußerer 355  
 – innerer 355  
 Photoelektronenvervielfacher 355  
 Photometer 285, 352, 354  
 – Einstrahlphotometer 353  
 – Zwei-Küvetten-Verfahren 353  
 – Zweistrahlphotometer 353  
 photometrische Größe 247  
 photometrische Messgröße 247  
 Photomultiplier 355  
 Photon 247, 253, 359  
 photothermischer Prozess 272  
 Photozelle 355  
 physikalische Gesetze 105  
 – Gültigkeitsbereich 105  
 physikalische Größe 3  
 physikalische Optik 245  
 physiologische Optik 245  
 piezoelektrischer Effekt 117  
 piezoelektrisches Stellelement 178, 349, 352  
 Piezoelektrizität 117, 178  
 Pixel 236, 356, 358, 400  
 Planck'sches Wirkungsquantum (Konstante) 37, 182, 263, 458  
 Planität einer Oberfläche 109, 310  
 Planspiegel 310  
 Plasma 383  
 plastische Verformung 49  
 Plattenkondensator 172  
 Polarimeter 303, 415  
 Polarisation 90, 92  
 – elektrische 181  
 – elliptische 92  
 – lineare 92  
 – zirkulare 92  
 Polarisation, optische 92, 177, 300–301  
 – durch Dichroismus 301  
 – durch Doppelbrechung 301  
 – durch Reflexion 301  
 – durch Streuung 301  
 – elliptisch 300  
 – linear 300  
 – Wellen 92  
 – zirkular 300  
 Polarisationsebene 299  
 Polarisationsfilter 294, 300  
 Polarisationsgrad 300  
 Polarisationsspannung 213  
 Polarisationswelle 289  
 Polarisator 300  
 Polaroid-Filter 301  
 Polymere 45  
 Positron 360, 366  
 Positronenumwandlung 366  
 Potentialdifferenz 162, 172  
 potentielle Energie 33, 77  
 Potenzdarstellung von Zahlen 454  
 Power-Point-Projektor 338  
 Poynting-Vektor 247, 307  
 Primärfarben 335  
 Primärspannung 240  
 Primärstrahler 317  
 Prisma 285, 313, 353  
 Projektions-Apparat 337  
 Proportionalzählrohr 374  
 Proton 359  
 Protonenmasse 457  
 prozentualer Fehler 443  
 Prozess 139–140, 153  
 – endotherme 153  
 – endothermer 139  
 – exothermer 139, 153  
 – irreversibler 139–140  
 – reversibler 139–140  
 Puls-Laser 269, 274, 281  
 Pulsleistung, mittlere 270  
 Pumpe 59  
 Pumpniveau 271  
 Pupille 287, 331  
 Pyknometer 19  
 Pyroelektrizität 178  
 Quantenenergie 253  
 Quantenpunkt 72  
 Quantenzahl 251  
 Quantisierung 254

- Quarks 359  
 Quart 114  
 Quarzuhr 117  
 Quecksilberthermometer 127  
 Quint 114  
  
 Radar 95, 200  
 radioaktiver Zerfall 364  
 radioaktives Gleichgewicht 370–371, 418  
 Radioaktivität 364  
 radioimmunologisches Verfahren 380  
 Radiolumineszenz 265  
 Radionuklide 364  
 Radiowelle 103  
 Raster-Elektronenmikroskop (REM) 348  
 Raster-Kraftmikroskop 350  
 Raster-Optisches Nahfeld-Mikroskop 350  
 Raster-Sonden-Mikroskop (SXM) 349  
 Raster-Tunnelmikroskop 349  
 Rastermethode 344  
 Rastertechnik 344, 348–349  
 Rauigkeit einer Oberfläche 109  
 Raumwinkel 10, 405  
 Rauschen 237, 255  
   – elektrisches 237  
   – optisches 255  
 Rauschquelle 255, 268  
 ray-tracing-Programm 306, 324  
 razemische Stoffe 303  
 RC-Glied 190  
 Reaktionswärme 153  
 reale Flüssigkeit 63  
 reale Gase 136  
 Rechteckimpuls 189  
 Rechteckspannung 193  
 Redundanz 400  
 reduzierte Wärmemenge 141  
 Referenzton 98  
 reflektierte Welle 110  
 Reflexion 109–110, 266, 313, 354, 415  
   – diffuse 109  
   – ebene 309  
   – Phasensprung 110  
   – Totalreflexion 313  
 Reflexionsgesetz 109, 309  
 Reflexionsgrad 109, 261, 312  
 Reflexionskoeffizient 109–110  
 Reflexionsvermögen 109–110, 261, 312, 314  
 Regelkreis 397  
 Regelung 397  
 Regelwerk 397  
 Regenbogen 298  
 Reibung 30, 32, 63, 405  
   – in Flüssigkeiten und Gasen 31–32  
   – innere 63  
 Reibungsarbeit 34  
 Reibungskoeffizient 32  
 Reibungskraft 80  
 Reichweite 372–373  
   –  $\alpha$ -Strahlung 372  
   –  $\beta$ -Strahlung 373  
 reine Stimmung 114  
   – Tonleiter 114  
 relative biologische Wirksamkeit 154, 177, 394  
   – Dielektrizitätskonstante 177  
   – Luftfeuchtigkeit 154  
 relative Öffnung 324  
 relativer Fehler 443  
 relativistische Masse 19, 35  
 Relativitätstheorie 12, 18, 21, 34, 100, 307, 405  
 rem 394  
 Resistivität 166  
 Resonanz 81–82, 113, 290  
 Resonanz-Schwingkreis 196  
 Resonanzfluoreszenz 266  
 Resonanzkatastrophe 81–82  
 Resonanzkörper 112  
 Resonator 75, 81, 112–113, 270  
   – optischer 270  
 reversibler Prozess 139  
 Reynolds'sche Zahl 69  
 Richtungshören 116  
 RL-Glied 190  
 Rollreibung 31–32  
 Röntgenanalyse 349–350, 384  
 Röntgen-Durchleuchtungsbild 288  
 Röntgenbeugung 288  
 Röntgenbildverstärker 391  
 Röntgendurchleuchtungsgerät 350  
 Röntgengerät 413  
 Röntgenmikroskop 342  
 Röntgenröhre 240, 350, 384, 392  
 Röntgenspektrum 385  
 Röntgenstrahlung 287, 384  
 Rot-Grün-Brillen-Methode 333  
 Rotationsbeschleunigung 25  
 Rotverschiebung 100–101  
 Rubin-Laser 268, 273  
 Rückkopplung 197, 256, 270, 398  
 Rückstellkraft 104  
 Rückstreuung 109  
 Ruheenergie 35  
 Ruhemasse 19, 35  
 Rydberg-Konstante 257, 458  
  
 Sägezahnspannung 193, 234  
 Saiteninstrument 112  
 Satellitennavigation 243  
 Sättigungsdampfdruck 154  
 Satz von Fourier 84, 193, 305  
 Schale 251  
 Schall 113  
   – Empfindung 113  
 Schallamplitude 94  
 Schallausbreitung 408  
 Schallfeld 94  
 Schallfeldgrößen 94  
 Schallgeschwindigkeit 95–96

- in Festkörpern 96
- in Flüssigkeiten 96
- in Gasen 96
- longitudinaler Wellen 96
- transversaler Wellen 96
- Schallintensität 97–98
- Schmerschwelle 98
- Schallschnelle 95
- Schallstärke 97
- Schallwechseldruck 95
- Schallwelle 89, 93–94, 110
  - Energiegrößen 96
  - longitudinale 94
  - Reflexion 110
  - transversal 94
- Schärfentiefe 325
- Schärfentiefe 341
- Schattenwurf 286
- Schattenwurf-Projektion 350
- Scheinkraft 20
- Scheinwerfer 328
- Scherung 49
- Schmelzkurve 156
- Schmelzwärme 152, 156
- Schnellkochtopf 154
- Schritt-Motor 239
- Schwächungsvorgang 388
- Schwarzer Körper 262–263
- Schwarzkörper-Strahlung 263
- Schwebung 84–86
- schwere Masse 21
- Schweredruck 57
- Schwereelosigkeit 23
- Schwerependel 76
- Schwerkraft 21
- Schwerpunkt 27
- Schwingquarz 117–118, 178
- Schwingung 75–81, 83
  - Abklingzeit 80
  - Amplitudenfunktion 78, 81
  - Anfangsbedingung 78
  - anharmonische 83
  - Differentialgleichung 77
  - erzwungene 75, 81
  - freie 75–76
  - gedämpfte 79, 290
  - harmonische 78, 83
  - Reibungskraft 79
  - Superposition, lineare 83
  - Überlagerung 83
  - ungedämpfte 77
- Schwingungsbauch 111, 113
- Schwingungsdauer 76, 90
- Schwingungsebene 92
- Schwingungsfreiheitsgrad 133
- Schwingungsknoten 111, 113
- Schwingungsweite 76
- Sedimentation 22, 67, 406
- Sedimentationsgeschwindigkeit 67
- Sehen, stereoskopisch 333
- Sehhilfe 330
- Sehweite, deutliche 336
- Seilwelle 111
- Seitendruck 57
- Sekundärelektronenmikroskop (SEM) 348
- Sekundärelektronenvervielfacher 355
- Sekundärelement 213
- Sekundärspannung 240
- Sekundärstrahler 317
- Sekunde 5, 9
- Sekunde (Akkord) 114
- Selbstinduktion 185
- Selbstleuchtern 334
- selbstständige Gasentladung 211
- semipermeabel 149
- Sender 241
- Sensor 355
- Septime 114
- Serien-Schwingkreis 196
- Sext 114
- Siedepunkterhöhung 155
- Siedeverzug 137
- Siedevorgang 154
- Siemens 165
- Sievert 394
- Signal-Rausch-Verhältnis 237, 354
- Signifikanz-Test 449
- Sinter-Werkstoffe 53
- sinusförmige Wechselfspannung 191
- size effects 73
- Skalar 12
- Skalarfeld 22
- Skalarprodukt 451
- Skelett-Mechanik 26
- Smekal-Raman-Streuung 345
- Sol 147
- Solarkonstante 260
- Solvatation 148
- Sonne 298
- Sonnenlicht 264, 306
- Sonnenspektrum 248
- Sonnenuntergang 298
- Sonogramm 275
- Sonolumineszenz 265
- Spannarbeit 33–34
- Spannungs-Dehnungs-Diagramm 48
- Spannungsabfall 165
- Spannungsamplitude 204
- Spannungsdoppelbrechung 294
- Spannungsimpuls 193
- Spannungsmessung 230
- Spannungsquellen 162, 168
- SPECT 376
- Spektralanalyse 285, 295–297, 352–353
  - Absorption 353
  - Emission 353
  - Konzentrationsbestimmung 297
  - qualitativ 296

- quantitativ 296
- Spektralapparat 285, 313
- Spektralfarben 334
- Spektralfluorometer 354
- Spektrallinie 257, 295
  - Stoßverbreiterung 306
- Spektrallinien 256
- Spektralphotometer 296
- Spektrometer 353
  - Fourier 353
  - Vielkanal 353
- Spektrum 104, 200, 256–257, 295
  - eines Klanges 104
  - elektromagnetische Wellen 200
  - Emissions- 256
  - Energie 257
  - Frequenz 257
  - kontinuierliches 104, 295
  - Wellenlänge 257
  - Wellenzahl 257
- Sperrfilter 279
- Sperrkreis 197
- Sperrschicht 221
- Sperrstrom 221
- spezielle Relativitätstheorie 7
- spezifische Drehung 52, 124, 166, 217, 303
  - Leitfähigkeit 166, 217
  - Oberflächenenergie 52
  - Wärme 124
  - Wärmekapazität 124
- spezifischer Widerstand 166
- Spiegel 310, 352
  - adaptiver 352
- Spin 179, 362
- Spinquantenzahl 251
- spontane Emission 255
- Sprache, Frequenzbereich 94
- Spule 190
- Stäbchen-Zelle 332
- stabiles Gleichgewicht 28
- Stalagmometer 55
- Standardabweichung 446
- Standardbedingung STPD und BTPS 131
- Standfestigkeit 29
- stationäre Bohr'sche Bahn 250
- stationäre Elektronenbahn 250
- statistisches Gleichgewicht 23
- STED-Mikroskop 344
- Stefan-Boltzmann'sches Gesetz 263
- stehende Welle 110, 112
- Stellelement 178
- Stellwerk 397
- Stempeldruck 56
- Stereoskop 333
- Stethoskop 71, 117
- Steuerspannung 222
- Steuerung 397
- Stimmbänder 115
- Stimme 115
  - Stimmgebung 115
    - Resonanzraum 115
  - stimmhafte Laute 116
  - stimmlose Laute 116
  - Stimmritze 115
  - Stimmung, Tonleiter 114
    - reine 114
- Stimulated Emission Depletion (STED-)
  - Mikroskop 267
- stimulierte Emission 256
- Stoßanregung 265
- Stoßdämpfer 65
- Stoßionisation 211
- Stoßwelle 118
- Stoffgemisch 146
- Stoffmenge 47, 146
- Stoffmengendichte 48
- Stoffmengenkonzentration 146
- Stokes'sches Gesetz 67
- Stokes-Prozess 345
- STPD (standard temperature and pressure)
  - 131
- Strahl 294, 312
  - außerordentlicher 294
  - gebrochener 312
  - ordentlicher 294
  - reflektierter 312
- Strahlendosis 392–394, 418
- Strahlengang, optischer 306, 323–324
  - abbildender 323
  - Bündel 324
  - Konstruktion 323
- Strahlenschutz 394
- Strahlstärke 246
- Strahlungscharakteristik eines Dipols 199
- Strahlungsdetektor 373
- Strahlungsenergie 36
- Strahlungsgesetze von 263
  - Kirchhoff 263
  - Planck 263
  - Stefan-Boltzmann 263
- Strahlungsintensität 199
- Strahlungsleistung 96, 246
- Strahlungsmessgeräte 353–355
  - äußerem Photoeffekt 355
  - innerem Photoeffekt 355
  - Photodiode 355
  - Photodioden-Array 353, 356
  - Photoelement 355
  - Photowiderstand 355
  - Thermoelement 355
- Strahlungsquelle 249
- Strahlverfolgungs-Programm 306, 324
- Streichinstrument 112
- Streureflexion 109, 310
- Streuung 102, 415
- Streuungskonstante 291
- Strom-Spannungs-Kennlinie 166–167
- Stromdichte 164, 167

- Stromleitung 208, 210, 212, 215 – 217  
 – im Elektrolyt 212  
 – im Festkörper 217  
 – im menschlichen Organismus 215  
 – im Vakuum 208  
 – in Gasen 210  
 – medizinische Anwendung 216  
 Strommessung 229 – 230  
 Stromstärke 66, 164  
 – einer Flüssigkeit 66  
 – elektrische 164  
 Strömungsauftrieb 63  
 Strömungswiderstand 66  
 subjektive Vergrößerung 339, 351  
 – des Fernrohrs 351  
 Sublimation 152  
 Sublimationskurve 156  
 Sublimationswärme 152  
 Summenpotential 207  
 Summierungszeit des Auges 331  
 Superposition 83, 85, 106, 276  
 – ungestörte 106  
 – von Schwingungen 83  
 – von Wellen 106, 276  
 Superpositionsprinzip 275  
 Supraleiter 217  
 Svedberg-Einheit 68  
 Synchron-Motor 239  
 Synchrotron 387  
 Synchrotronstrahlung 350  
 systematischer Fehler 444  
 Système International d'Unités 4  
 Szintigramm 376, 380  
 Szintillationsdetektor 375  
  
*t*-Test 450  
 technische Optik 245  
 Teilchenbeschleuniger 387  
 Teilchengrößeneffekt 73  
 Teilchenzahldichte 48  
 Tele-Curie-Einheit 377 – 378  
 Telemedizin 402  
 Temperatur 123, 132  
 Temperaturgleichgewicht 261  
 Temperaturskalen 125  
 Temperaturstrahlung 260, 262, 356  
 temperierte Stimmung 114  
 Termschema 256  
 Terz 114  
 Tesla 184  
 Theorie der Farbmetrik 335  
 thermische Anregung 44, 144, 260, 265  
 – Ausdehnung 144  
 – Bewegung 44  
 – Strahlung 260, 414  
 Thermoelement 127 – 128  
 Thermogramm 356  
 Thermographie 356  
 Thermospannung 128  
  
 Tiefenschärfe 325  
 Tiefpass-Filter 194 – 195  
 Titan-Saphir Laser 269, 273  
 Tomogramm 274  
 Ton 103, 113 – 114  
 – Frequenzintervall 114  
 Tonhöhe 113  
 Tonleiter 113 – 114  
 – chromatische 114  
 – Dur 114  
 – Moll 114  
 – reine Stimmung 114  
 – temperierte Stimmung 114  
 Tonometer 24  
 Tonspektrum 113  
 Torsion 49  
 Torsionsmodul 50, 96  
 Torsionswinkel 50  
 Tracer 379  
 träge Masse 18, 21  
 Trägheit 18  
 Trägheitskraft 20, 22  
 Trägheitsmoment 25  
 Transducer 118  
 Transformator 239  
 Transistor 197, 222  
 Translation 30  
 Translationsbeschleunigung 25  
 Transmissions-Elektronenmikroskop 345  
 Transmissionsgrad 109, 261, 312  
 Transmissionsvermögen 109, 261, 312  
 Transport elektrischer Energie 191  
 transversale Welle 92  
 Transversalschwingung 87  
 Triangulation 7  
 Tribolumineszenz 265  
 trichromatische Mischung 335 – 336  
 Triggerspannung 235  
 Trigonometrie 455  
 trigonometrische Funktion 78, 90  
 Triode 210  
 Tripelpunkt 156, 458  
 Trockeneis 157  
 Trommelfell 116  
 turbulente Strömung 68, 407  
 Tyndall-Effekt 297  
 Tyndall-Streuung 302  
  
 Überlagerung 83, 106  
 – destruktive 83  
 – konstruktive 83  
 Überlandleitung 191, 203  
 Übersättigung 137  
 Überschall-Flugzeug 408  
 Übersichtigkeit 330  
 Übertragungsfunktion 398  
 Ultra-Mikrotome 347  
 ultraharter Röntgenstrahl 386  
 Ultrakurzzeit-Puls laser 269 – 270

- Ultraschall 93–94, 117–120  
 – Absorption 118  
 – Ausbreitungsgeschwindigkeit 119  
 – Bad 117  
 – Bildaufnahme-Verfahren 119  
 – Diagnose 120  
 – Diathermie 118  
 – Doppler-Effekt 119  
 – Echo 119  
 – in der Medizin 118  
 – Laufzeit 119  
 – Mikroskop 118  
 – Puls 118  
 – Schrei, Fledermaus 95  
 Ultrazentrifugation 68  
 Ultrazentrifuge 22  
 Umwandlungswärme 151  
 Unbestimmtheitsprinzip 305  
 ungestörte Superposition 106  
 Unschärferelation 305  
 unselbstständige Gasentladung 211  
 untere Hörgrenze 94–95, 98  
 Unterkühlung 138  
 UV-Mikroskop 342
- Vakuumlichtgeschwindigkeit 5, 458  
 Valenzelektron 43, 252, 257  
 Van der Waals-Bindung 44  
 Van der Waals-Gleichung 137  
 Van der Waals-Kraft 44  
 van't Hoff'sches Gesetz 150  
 Varianz 446  
 Vario-Objektiv 357  
 Vektor 12, 450–451  
 – Komponentendarstellung von 451  
 – Rechnen mit 450  
 Vektorfeld 21, 172  
 Vektorprodukt 451  
 Verdampfungswärme 152  
 Verdunsten 154  
 vereinheitlichte Atommassenkonstante 362  
 Verformung 105  
 – plastische 105  
 Verformungsarbeit 33  
 Verformungsenergie 139  
 Vergrößerung 325, 336–337  
 – optische 325  
 – subjektive 336–337  
 Verlustenergie 36  
 Verschiebungsdichte 178  
 Verstärkerfolie 390  
 Vertikal-Ablenkung 233  
 Viskoelastizität 64  
 Viskosität 63  
 Viskositätsmessung 64  
 Volt 162  
 Volta'sche Spannungsreihe 163  
 Voltmeter 229  
 Volumenarbeit 135, 139  
 Wahrscheinlichkeitswelle 305  
 Wärmebewegung 123  
 Wärmebild 356  
 Wärmeenergie 36, 123  
 Wärmekapazität 124, 135, 409  
 Wärmeleck 356  
 Wärmeleitung 145  
 Wärmemenge 123, 410  
 Wärmepumpe 410  
 Wärmeschädigung 272  
 Wärmestrahlung 144, 249, 260, 264  
 Wärmetönung 139, 153  
 Wärmetransport 144, 260  
 Wärmeübergang 144  
 Wasserstrahlpumpe 62  
 Wasserwelle 91  
 Watt 36, 202  
 Weber 184  
 Weber-Fechner'sches Gesetz 98, 331  
 Wechselspannung 163, 185, 190, 203  
 Wechselstrom 190, 194–196, 204, 239, 412  
 – Amplitude 195  
 – Motor 239  
 – Widerstand 194–196  
 Weg-Zeit-Diagramm 11, 17  
 Weg-Zeit-Gesetz 17  
 Weißlichthologramm 281  
 Weiß 260  
 Welle 75, 89–90, 92–93, 96, 101–103, 106,  
 108–110, 255, 266, 277, 298–299, 307, 315  
 – Absorption 102  
 – akustische 93  
 – Amplitude 90, 92  
 – anharmonische 102  
 – Ausbreitungsgeschwindigkeit 90, 92  
 – Brechung 108  
 – Ebene 108, 307  
 – elliptisch polarisiert 92  
 – Energieerhaltungssatz 110  
 – Energiegröße 96  
 – Fourier-Analyse 103  
 – Frequenz 90  
 – gedämpfte 101  
 – geführte 315  
 – Grenzfläche 108  
 – inkohärente 255  
 – kohärente 255  
 – linear polarisierte 92, 299  
 – mechanische 89  
 – Phase 90  
 – Polarisation 90, 298  
 – räumliche Periodizität 92  
 – Reflexion 109, 266  
 – Schwingungsdauer 90  
 – stehende 277  
 – Streuung 102  
 – Superposition 276  
 – Transmission 109  
 – transversale 92, 276, 298

- Überlagerung 106
- unpolarisierte 92, 299
- Wellenlänge 90
- zeitliche Periodizität 92
- zirkulare 92, 299
- Welle-Teilchen-Dualismus 304
- Wellenberg 92
- Wellenfeld 89, 91, 107
- Wellenfläche 91, 308
- Wellenfront-Analysator 352
- Wellenfunktion 251
- Wellenlänge 90 – 91, 201, 408
- Wellenoptik 275
- Wellenpaket 305
- Wellenwiderstand 97, 110
- Wellenzahl 92
- Wertetabelle 442
- Wheatstone'sche Brückenschaltung 237, 413
- Widerstand 66, 165 – 166, 193, 236
  - elektrischer 165
  - induktiver 193
  - kapazitiver 193
  - Ohm'scher 166, 236
  - Strömungs- 66
- Widerstandsthermometer 128, 409
- Wien'sches Verschiebungsgesetz 264
- Windkesselfunktion des Herzens 70
- Winkelbeschleunigung 16
- Winkelgeschwindigkeit 14 – 15
- Winkelmaße 10
- Wirkleistung 203
- Wirkung 36
- Wirkungsgrad 141, 410
- Wirkungsquantum, Planck'sches 37, 182, 247, 458
- Wirkwiderstand 194
- Wölbungsdruck 70
- Wurzelrechnung 454
- zähe Flüssigkeit 63
- Zähigkeit 63
- Zäpfchen-Zelle 332
- Zeitdehnung 9 – 10
- Zeitdilatation 10
- Zeitkonstante 189 – 190
- Zeitmessung 9
- Zentrifugalkraft 22
- Zentrifuge 22
- Zentripetalbeschleunigung 16
- Zentripetalkraft 22
- Zerfallkonstante 369
- Zerfallsgesetz 369
- Zerfallskanal 367
- Zerfallsreihe 367
- Zerreiß-Vorgang 105
- Zerstäuber 62
- Zerstrahlung 360, 366, 390
- Zonenzentrifugation 67
- zufälliger Fehler 444
- Zugspannung 48
- Zustandsänderung 129 – 130
  - isobare 129
  - isochore 130
  - isotherme 129
- Zustandsgleichung 129 – 130, 137
  - idealer Gase 129
  - realer Gase 137
  - van der Waal'sche 137
  - vom Gasgemisch 130
- Zustandsgrößen 129
- Zwei-Photonen-Anregung 343
- zweiarmiger Hebel 26
- Zweischritt-Abbildung (Mikroskop) 339
- Zweistrahl-Oszilloskop 235
- Zweistrahlphotometer 353, 417
- Zwischenbild 338
- Zwischenbild (Mikroskop) 340
- Zylinderlinse 327

