

PHYSIK II

Leitfaden zur
Einführungsvorlesung
Frühjahrssemester 2008

H. Rudin 1992

III. ELEKTRIZITAETSLEHRE

1. ELEKTROSTATIK	-1-
1.1 EIGENSCHAFTEN DER ELEKTRISCHEN LADUNG	-1-
1.2 COULOMB'sches GESETZ	-2-
1.3 ELEKTRISCHE FELDSTAERKE E & POTENTIAL U EINER PUNKTLADUNG	-2-
1.4 SUPERPOSITION DER FELDER VIELER PUNKTLADUNGEN	-4-
1.5 DAS DURCHFLUTUNGSGESETZ VON GAUSS	-4-
1.6 FELD \vec{E} & POTENTIAL U DER HOMOGEN GELADENEN KUGEL	-6-
1.7 DIVERGENZ EINES VEKTORFELDES \vec{E} ; $\text{div } \vec{E}$	-6-
1.8 LADUNG AUF LEITENDEN MATERIALIEN; INFLUENZ	-9-
1.9 ELEKTRISCHER DIPOL	-11-
1.10 KONDENSATOR UND KAPAZITAET	-13-
1.10.1 Serie- & Parallelschaltung von Kondensatoren	-14-
1.10.2 Potentielle Energie des geladenen Kondensators	-15-
1.10.3 Energiedichte w des elektrischen Feldes	-15-
1.10.4 Anziehungskraft der ebenen Kondensatorplatten	-15-
1.11 LADUNG Q IM ELEKTRISCHEN FELD	-17-
1.12 ELEKTRISCHER DIPOL \vec{p} IM \vec{E} -FELD	-18-
1.12.1 Homogenes \vec{E} -Feld	-18-
1.12.2 Inhomogenes \vec{E} -Feld	-19-
1.13 ISOLATOREN (DIELEKTRIKA) IM \vec{E} -FELD	-19-
1.13.1 Relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r	-20-
1.13.2 Elektrische Polarisisation \vec{P} & Suszeptibilität χ_e	-21-
1.13.3 Die Verschiebungsdichte \vec{D}	-23-
1.13.4 Begriff der Rotation, $\text{rot } \vec{v}$, eines Vektorfeldes	-24-
1.13.5 Die Gesetze der Elektrostatik	-25-
2. STATIONAERE ELEKTRISCHE STROEME	-26-
2.1 DER ELEKTRISCHE WIDERSTAND R	-27-
2.2 STROM-SPANNUNGS-CHARAKTERISTIK; OHM'sches GESETZ	-27-
2.3 QUELLEN ELEKTRISCHER ENERGIE; SPANNUNGS- & STROMQUELLEN	-29-
2.4 LEITUNGSMECHANISMEN	-30-
2.4.1 Metallische Leitung	-30-
2.4.2 Elektrolytische Leitung; Faraday'sche Gesetze	-31-
2.5 DIE KIRCHHOFF'schen GESETZE	-32-
2.6 DAS MAGNETISCHE FELD STATIONAERER STROEME	-35-
2.6.1 Das magnetische Dipolfeld; magnetisches Moment \vec{m}	-37-
2.6.2 Definition der Stromstärke-Einheit	-38-
2.7 BEWEGTE LADUNG IM \vec{B} -FELD; TECHNISCHE ANWENDUNGEN	-39-
2.7.1 Ladung im homogenen \vec{B} -Feld	-39-
2.7.2 Ladung im inhomogenen \vec{B} -Feld	-40-
2.7.3 Hall-Effekt	-41-
3. ZEITLICH VERAENDERLICHE STROEME (QUASISTATIONAERE STROEME)	-42-
3.1 EIN- & AUSSCHALTVOORGANG IM R-C-KREIS	-42-
3.2 MAXWELL'sche ERGAENZUNG	-43-
3.4 RELATIVITAETSGESETZ UND INDUKTIONSGESETZ	-45-
3.5 DAS BETATRON	-47-
3.6 SELBSTINDUKTION	-48-
3.7 EIN- & AUSSCHALTVOORGANG IM R-L-KREIS; ENERGIE IM \vec{B} -FELD	-48-
3.8 GEKOPPELTE STROMKREISE; GEGENINDUKTIVITAET M	-49-
3.9 MATERIE IM \vec{B} -FELD; MAGNETISCHE SUSZEPTIBILITAET	-50-
3.9.1 Mikroskopisches Modell; Magnetisierung \vec{M}	-51-
3.9.2 Stetigkeitsbedingungen für \vec{H} - & \vec{B} -Feld	-54-

4. WECHSELSTROM	-55-
4.1 EINFUEHRUNG KOMPLEXER GROESSEN ZUM RECHNEN	-55-
4.2 WECHSELSTROM-LEISTUNG; EFFEKTIVWERTE $U(\text{eff})$ & $I(\text{eff})$	-57-
4.2.1 Zur Messung von Wechselströmen	-58-
4.2.2 Wirkleistung, Blindleistung & Scheinleistung	-58-
4.3 DER TRANSFORMATOR	-59-
4.4 BEISPIELE VON WECHSELSTROM-KREISEN	-60-
4.4.1 Der RL-Kreis	-60-
4.4.2 Der RLC-Seriekreis; Resonanz	-60-
4.5 DREHSTROM	-62-
4.6 FREIE ELEKTRISCHE SCHWINGUNG; RLC-SERIEKREIS	-63-
5. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN	-64-
5.1 Ebene, linear polarisierte el. magn. Welle	-65-
5.2 Energietransport & Poyntingvektor	-66-
5.3 Elektrische Wellen entlang Drähten; Lechersystem	-67-
5.4 HERTZ'scher Dipol	-68-
5.5 Das elektromagnetische Spektrum	-70-

IV. OPTIK

1. REFLEXION UND BRECHUNG	-71-
1.1 DAS PRINZIP VON FERMAT	-73-
1.2 TOTAL-REFLEXION	-74-
1.3 POLARISATION DURCH REFLEXION; BREWSTER'scher WINKEL	-74-
2. GEOMETRISCHE OPTIK	-76-
2.1 ABBILDENDES SYSTEM	-76-
2.1.1 Die dünne Linse als abbildendes System	-76-
3. WELLENOPTIK	-78-
3.1 LINSENWIRKUNG IM WELLENBILD	-78-
3.2 BEUGUNG	-79-
3.2.1 Beugung am Strichgitter	-79-
3.2.2 Beugung an der Spalblende	-81-
3.2.3 Beugungsbegrenzte Auflösung; Rayleigh-Kriterium	-83-
3.2.4 Abbe'sche Theorie der mikroskopischen Abbildung	-83-
3.3 DISPERSION	-85-
3.4 REFLEXION UND TRANSMISSION AN GRENZFLAECHE	-86-
3.5 INTERFERENZ; FARBEN DUENNER SCHICHTEN	-87-
3.6 DOPPELBRECHUNG	-89-
3.6.1 Herstellung von zirkular polarisiertem Licht	-90-
3.7 OPTISCHE AKTIVITAET	-92-

V. EINBLICK IN DIE MODERNE PHYSIK

1. QUANTISIERUNG DER ENERGIE	-93-
1.1 STRAHLUNGSGESETZ & PLANCK'sche KONSTANTE h	-93-
1.2 PHOTOEFFEKT (LICHELEKTRISCHER EFFEKT)	-93-
1.3 LINIENSPEKTREN	-94-
2. WELLENMECHANIK	-95-
2.1 DIE SCHROEDINGERGEICHUNG	-95-
2.2 WELLENFUNKTION DES FREIEN TEILCHENS	-95-
2.2.1 Wellenfunktion & Aufenthaltswahrscheinlichkeit	-97-
2.3 TEILCHEN IM UNENDLICH TIEFEN POTENTIALTOPF	-97-
2.3.1 Die Unschärferelation	-98-
2.4 ENERGIE-EIGENWERTE DES WASSERSTOFFATOMS	-99-

Die Erfahrung lehrt uns, dass neben der Gravitationswechselwirkung eine zweite Wechselwirkung grosser Reichweite auftritt, welche auf der Existenz ELEKTRISCHER LADUNGEN beruht. Wir müssen die Ladung als eine Gegebenheit der Natur ansehen, wie etwa die Zeit oder die Masse; sie besitzt eine über die Mechanik hinausgehende physikalische Dimension, welche mit dem Symbol Q bezeichnet wird. Im INTERNATIONALEN EINHEITENSYSTEM wird aber nicht die elektrische Ladung, sondern die elektrische STROMSTAERKE als zusätzliche BASISGROESSE festgelegt. Die Einheit der Stromstärke, auf deren Definition wir später eingehen werden, ist das AMPERE (A). Daraus ergibt sich die LADUNGSEINHEIT:

$$1 \text{ COULOMB (C)} = 1 \text{ AMPERE} \cdot \text{SEKUNDE (A} \cdot \text{s)}$$

Die ELEKTROSTATIK behandelt die Kraftwirkung ruhender Ladungen. Die ELEKTRODYNAMIK beschreibt die Wirkungen bewegter Ladungen.

1. ELEKTROSTATIK

1.1 EIGENSCHAFTEN DER ELEKTRISCHEN LADUNG

Seit dem Altertum ist bekannt, dass Körper durch Reiben "elektrisch" gemacht werden können. Gezielte Experimente mit elektrisch geladenen Körpern wurden vor allem im 18. Jahrhundert durchgeführt, sie sind verknüpft mit Namen wie etwa C.A. COULOMB, H. CAVENDISH und B. FRANKLIN. Elektrische Ladungen haben folgende Eigenschaften:

1. Es gibt zwei Arten von Ladungen, die sich gegenseitig neutralisieren können. Wir nennen sie "positiv" und "negativ".
2. Ladung ist immer an Materie gebunden.
3. Gleichartig geladene Körper stossen sich ab, verschiedenartig geladene Körper ziehen sich an.
4. Es gibt Stoffe, an denen die Ladungen örtlich haften, die ISOLATOREN (Glas, Bernstein, Kunststoff etc.) und solche, wo sich die Ladungen spontan auf der Oberfläche verteilen, die METALLE.
5. Für die elektrische Ladung gilt ein Erhaltungssatz:
IN EINEM ABGESCHLOSSENEN SYSTEM IST DIE ALGEBRAISCHE SUMME DER LADUNGEN KONSTANT.
6. Die Ladung ist QUANTISIERT; alle beobachteten Ladungen sind ganzzahlige Vielfache der ELEMENTARLADUNG $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
7. Für die Kraftwirkungen zwischen Ladungen gilt das SUPERPOSITIONS-PRINZIP:
Die Kraft, welche zwei Ladungen Q1 und Q2 auf eine dritte Ladung Q ausüben, ist gleich der vektoriellen Summe der Kräfte, welche Q1 bzw. Q2 allein auf Q ausüben würden.

1.2 COULOMB'sches GESETZ (1785)

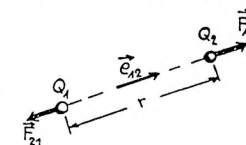
Charles A. Coulomb hat mit der von ihm erfundenen Drehwaage die Kraftwirkungen zwischen elektrisch geladenen Metallkugeln quantitativ untersucht und gefunden:

DIE GEGENSEITIGE KRAFTWIRKUNG ZWISCHEN ZWEI ELEKTRISCH GELADENEN KOERPERN IST DEM PRODUKT DER BEIDEN LADUNGSMENGEN DIREKT UND DEM QUADRAT IHRER ENTFERNUNG UMGEKEHRT PROPORTIONAL. DIE KRAFT HAT DIE RICHTUNG DER VERBINDUNGSLINIE DER BEIDEN LADUNGEN.

Wie schon beim Gravitationsgesetz muss auch hier vorausgesetzt werden, dass die Ausdehnung der Körper verglichen mit ihrem Abstand klein ist. Wir führen deshalb den fiktiven Begriff der PUNKTLADUNG ein und schreiben für die Kraftwirkung auf die Punktladung Q2, herrührend von der Punktladung Q1:

$$(1) \quad \vec{F}_{12} = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (Q1 \cdot Q2 / r^2) \cdot \vec{e}_{12}$$

COULOMB-GESETZ im VAKUUM.



Die in (1) auftretende Konstante ϵ_0 heisst Influenzkonstante. Im SI-System hat sie den Wert

$$(2) \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}, \text{ INFLUENZKONSTANTE.}$$

Das Coulomb-Gesetz und das Gravitationsgesetz haben dieselbe mathematische Struktur. Sie unterscheiden sich jedoch in der Stärke der Wechselwirkung (im mikroskopischen Bereich kann die Gravitation gegenüber der Coulombkraft vernachlässigt werden). Im Gegensatz zur Masse kann die Ladung aber auch negativ sein, sodass anziehende oder abstossende elektrische Kräfte auftreten, während Gravitation immer Anziehungskräfte erzeugt.

UEBUNG:

Das Elektron besitzt eine Ruhemasse $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ und eine negative Elementarladung. Wie gross ist das Verhältnis von Coulombabstossung zu Gravitations-Anziehung zwischen zwei Elektronen?

1.3 ELEKTRISCHE FELDSTAERKE \vec{E} & POTENTIAL U EINER PUNKTLADUNG

Im Ursprung eines Koordinatensystems soll sich die Punktladung Q befinden. Dann hat der Raum die Eigenschaft, dass eine zweite Punktladung, die PROBELADUNG q, an der Stelle $\vec{r} = (x, y, z)$ die Kraft

$$(3) \quad \vec{F} = \vec{e}_r \cdot Q \cdot q / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2)$$

beträgt. Die von q unabhängige Grösse \vec{F}/q nennt man die elektrische Feldstärke \vec{E} .

$$(4) \quad \vec{E}(\vec{r}) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (Q/r^2) \cdot \vec{e}_r, \text{ ELEKTRISCHE FELDSTAERKE } \vec{E} \text{ DER PUNKTLADUNG Q.}$$

Dimension: (Kraft/Ladung),
Einheit : N/C .

In jedem Raumpunkt gilt dann

(5) $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, KRAFT AUF PROBELADUNG q .

In Analogie zur Gravitationsfeldstärke ist das Linienintegral der Feldstärke \vec{E} entlang eines geschlossenen Weges immer gleich null (s. Mechanik, Seite 40).

(6) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$,

DAS ELEKTROSTATISCHE FELD \vec{E} IST KONSERVATIV; ES BESITZT EIN POTENTIAL $U(x,y,z)$.

Wählen wir den Nullpunkt im Unendlichen, so erhalten wir für die Potentialfunktion der Punktladung Q:

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{oder} \quad U(\vec{r}) = - Q / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0) \cdot \int_{\infty}^r \vec{e}_r \cdot d\vec{r} / r^2.$$

(7) $U(r) = (1 / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q / r$, COULOMB-POTENTIAL DER PUNKTLADUNG Q.

Dimension: (Arbeit/Ladung), Einheit: J/C, 1 J/C = 1 Volt (V).

Das Potential $U(x,y,z)$ gibt an, welche Arbeit aufgewendet werden muss, um die positive Einheitsladung vom Potentialnullpunkt nach $\vec{r} = (x,y,z)$ zu verschieben.

DER GRADIENT DER SKALAREN FUNKTION U; grad U :

Aus einer skalaren Funktion $U(x,y,z)$ kann durch Bildung der drei partiellen Ableitungen das Vektorfeld grad U hergeleitet werden.

(8) $\text{grad } U(x,y,z) = (\partial U / \partial x, \partial U / \partial y, \partial U / \partial z)$.

Es erweist sich als nützlich, den NABLA-OPERATOR $\vec{\nabla} = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$ einzuführen, sodass gilt

$$\text{grad } U = \vec{\nabla} U.$$

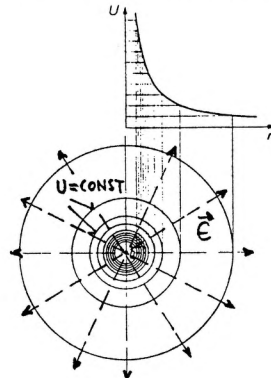
Wie in den Übungen gezeigt wird, existiert für ein KONSERVATIVES VEKTORFELD $\vec{E}(x,y,z)$ immer ein SKALARES POTENTIALFELD $U(x,y,z)$. \vec{E} und U sind verknüpft durch die Beziehung

(9) $\vec{E}(x,y,z) = - \text{grad } U(x,y,z)$.

Punkte mit gleichem Potential bilden eine Aequipotentialfläche.

(10) $U(x,y,z) = \text{const.}$, AEQUIPOTENTIALFLÄCHE.

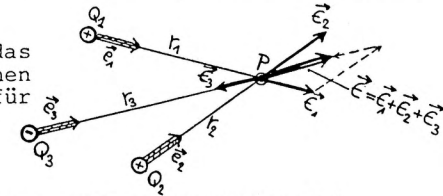
Die Feldlinien der Feldstärke \vec{E} stehen immer senkrecht zu den Aequipotentialflächen. Aus Symmetriegründen sind die zur Punktladung gehörenden Aequipotentialflächen $U(r)=\text{const.}$ Kugelflächen, die dazu orthogonalen Feldlinien des E-Feldes sind radiale Geraden.



1.4 SUPERPOSITION DER FELDER VIELER PUNKTLADUNGEN

Sind viele Punktladungen vorhanden, so ergibt sich das Feld \vec{E} in einem beliebigen Punkt P durch vektorielle Addition der Felder \vec{E}_i aller Ladungen Q_i . Also

(11) $\vec{E}(P) = (1 / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot ((Q_1 / r_1^2) \cdot \vec{e}_1 + (Q_2 / r_2^2) \cdot \vec{e}_2 + (Q_3 / r_3^2) \cdot \vec{e}_3 + \dots)$



Da für jeden Summanden in (11) das Linienintegral über einen geschlossenen Weg verschwindet, trifft dies auch für das resultierende Feld \vec{E} zu.

(12) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, DAS ELEKTROSTATISCHE FELD EINER BELIEBIGEN LADUNGSVERTEILUNG IST KONSERVATIV.

Das zu \vec{E} gehörige Potential U folgt ebenfalls durch Superposition der Potentialbeiträge der einzelnen Punktladungen:

(13) $U(p) = (1 / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot ((Q_1 / r_1) + (Q_2 / r_2) + (Q_3 / r_3) + \dots)$.

1.5 DAS DURCHFLUTUNGSGESETZ VON GAUSS

In der Mechanik der Strömungen haben wir das skalare Produkt $\vec{v} \cdot d\vec{A}$ eines Geschwindigkeitsfeldes mit einem Flächenelement als Fluss von \vec{v} durch dA bezeichnet (Mechanik, Seite 75). Ganz analog führen wir nun den Begriff des elektrischen Feldflusses ϕ durch eine Fläche A ein:

(14) $d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$, ELEKTRISCHER FELDFLUSS dφ DURCH dA.

Jetzt fragen wir nach dem elektrischen Gesamtfluss ϕ durch eine geschlossene Fläche A, welche eine Anzahl Punktladungen Q_i umschließt. Denken wir uns ein Q_i als Spitze eines Kegels, dessen Mantellinien den Raumwinkel $d\Omega$ bilden, so schneidet dieser das Flächenelement $dA = d\Omega \cdot r^2 / \cos\alpha$ aus A heraus (s. Figur). Der von Q_i herrührende Fluss durch dA ist

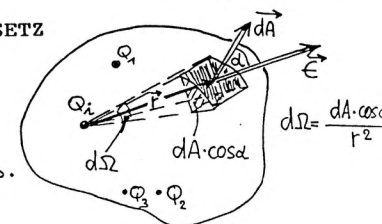
$$d\phi_i = (1 / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (Q_i / r^2) \cdot dA \cdot \cos\alpha, \text{ und mit } d\Omega = dA \cdot \cos\alpha / r^2 :$$

$$d\phi_i = (1 / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q_i d\Omega.$$

Integration über den vollen Raumwinkel $\Omega = 4 \cdot \pi$ ergibt dann

$\phi_i = Q_i / \epsilon_0$ und Summation über alle Punktladungen Q_i führt auf

(15) $\phi = \sum_i Q_i / \epsilon_0$. DURCHFLUTUNGSGESETZ VON GAUSS.



DER ELEKTRISCHE FLUSS DURCH EINE GESCHLOSSENE FLÄCHE IST GLEICH DER UMSCHLOSSENEN LADUNG, DIVIDIERT DURCH ϵ_0 .

UEBUNG:

Beweise, dass das Feld einer ausserhalb der geschlossenen Fläche A liegenden Punktladung durch A den Gesamtfluss null erzeugt.

Das Gesetz von Gauss ist eine Konsequenz des Coulomb-Gesetzes und des Superpositionsprinzips. Ist A eine konzentrische Kugelfläche bezüglich einer Punktladung Q, so folgt aus (15) umgekehrt das Coulombgesetz.

Liegt im Raum eine kontinuierliche Ladungsverteilung vor (eine "Ladungswolke"), so beschreiben wir diese durch eine Ladungsdichte $\rho(x,y,z)$.

(16) $\rho(x,y,z)$, LADUNGSDICHTE. Dimension: (Ladung/Volumen), Einheit: C/m³.

Auf jedes Ladungselement $\rho(x,y,z) \cdot dV$ im Volumenelement dV können wir dann das Coulomb-Gesetz anwenden. Dies führt uns auf folgende Formulierung des Durchflutungsgesetzes von Gauss:

Umschliesst eine geschlossene Fläche A ein Volumen V, so ist

(17) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (1/\epsilon_0) \iiint \rho(x,y,z) \cdot dV$.

(17) ist lediglich eine andere Schreibweise von (15) und sagt uns, wie ein Oberflächenintegral der elektrischen Feldstärke mit einem Volumenintegral der Ladungsdichte ρ verknüpft ist. Wir können auch sagen, dass die ELEKTROSTATIK des VAKUUMS durch die beiden Gleichungen

(17) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (1/\epsilon_0) \iiint \rho(x,y,z) \cdot dV$ und (12) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

beschrieben wird.

Das Gauss'sche Gesetz ist sehr nützlich zur Berechnung des E-Feldes, wenn eine Ladungsverteilung hoher räumlicher Symmetrie vorliegt. So folgt z.B aus (17) sofort:

IM INNERN EINER HOMOGEN GELADENEN KUGELSCHALE IST KEIN ELEKTRISCHES FELD VORHANDEN.

AUSSERHALB EINER KUGELSYMMETRISCHEN LADUNGSVERTEILUNG HERRSCHT DASSELBE ELEKTRISCHES FELD, WIE WENN DIE GESAMTLADUNG ALS PUNKTLADUNG IM KUGELZENTRUM SITZEN WUERDE.

Versuche, die beiden Aussagen zu beweisen. Analoges gilt auch für das Gravitationsfeld von Massenverteilungen (vgl. Mechanik, Seite 41). Der dort geführte Beweis, dass das Gravitationsfeld im Innern einer homogenen Kugelschale null ist, wäre mit Hilfe des Gauss'schen Gesetzes viel einfacher gewesen. (Der Gravitationsfeldfluss durch eine geschlossene Fläche ist proportional der eingeschlossenen Masse).

1.6. FELD \vec{E} UND POTENTIAL U DER HOMOGEN GELADENEN KUGEL

Eine Ladung Q sei homogen auf ein kugelförmiges Volumen mit dem Radius R verteilt, sodass die Ladungsdichte $\rho = Q/(4 \cdot \pi \cdot R^3/3)$ ist. Aus Symmetriegründen müssen die E-Feldlinien radial verlaufen. Durch eine konzentrische Kugelfläche mit dem Radius $r \geq R$ ist der Fluss

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot E(r)$

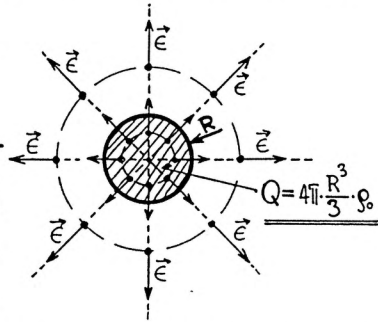
und nach (17) $4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot E(r) = Q/\epsilon_0$, somit

$E(r) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q/r^2$ für $r \geq R$.

Eine konzentrische Kugelfläche mit $r < R$ umschliesst die Ladung $Q \cdot (r/R)^3$, es ist

$4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot E(r) = Q \cdot r^3 / (\epsilon_0 \cdot R^3)$ oder

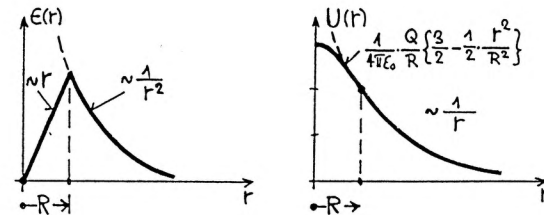
$E(r) = Q / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3) \cdot r$, für $r < R$.



Das Potential $U(r) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q/r$ ausserhalb der Kugel hat an der Kugeloberfläche den Wert $U(R) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q/R$, daran schliesst das Potential im Innern stetig an, also

$U(r) = U(R) - \int_R^r Q / (4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R^3) \cdot r \cdot dr$.

$U(r) = (1/(8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q/R \cdot (3 - (r^2/R^2))$, für $r < R$.



1.7 DIVERGENZ EINES VEKTORFELDES \vec{E} ; $\text{div } \vec{E}$

Am obigen Beispiel wurde die Nützlichkeit der "integralen" Form (17) des Gesetzes von Gauss demonstriert. In manchen Fällen ist eine "differentielle" Formulierung erforderlich, d.h. eine Aussage über das lokale Verhalten des Feldes \vec{E} in einem Raumpunkt, wenn in diesem Punkt die Ladungsdichte ρ vorhanden ist. Wir benötigen dazu den mathematischen Begriff der Divergenz.

Um einen festen Punkt P des Vektorfeldes \vec{E} legen wir eine geschlossene Fläche A, welche das Volumen V umschliesst. Jetzt betrachten wir den Quotienten aus dem Feldfluss ϕ durch A und dem umschlossenen Volumen V und bilden dessen Grenzwert, wenn sich die Fläche A auf den festen Punkt P zusammenzieht und $V \rightarrow 0$ geht.

Definition:

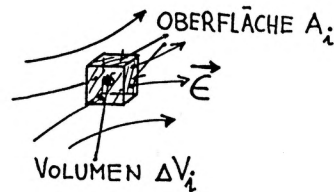
$$(18) \quad \boxed{\text{div } \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{V}}, \quad \text{DIVERGENZ VON } \vec{E} \text{ IM PUNKT P.}$$

Wenn das Feld $\vec{E}(x, y, z) = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z))$ gegeben ist, kann der Grenzwert (18) berechnet werden (s. Ergänzungen und Übungen). Es zeigt sich, dass $\text{div } \vec{E}$ durch partielles Ableiten der Komponenten von \vec{E} folgendermassen ausgedrückt werden kann:

$$(19) \quad \boxed{\text{div } \vec{E} = \partial E_x / \partial x + \partial E_y / \partial y + \partial E_z / \partial z} \quad \text{oder} \quad \boxed{\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}.$$

Wird ein kleines Volumenelement $\Delta V_i \rightarrow 0$ durch die Oberfläche A_i abgegrenzt, so kann wegen (18) der Feldfluss durch A_i geschrieben werden als

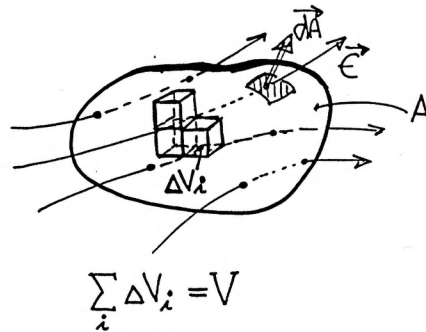
$$(20) \quad \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A}_i = \Delta V_i \cdot \text{div } \vec{E}.$$



Denken wir uns das makroskopische, von A eingeschlossene Volumen V durch differentiell kleine, würfelförmige ΔV_i aufgebaut, so ist die Summe aller Feldflüsse durch die Würfeloberflächen gerade gleich dem Feldfluss durch A. Dies ist so, weil alle Flussbeiträge von inneren Würfelflächen paarweise mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommen und sich wegheben. Mit (20) ergibt sich dann

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sum_i \Delta V_i \cdot \text{div } \vec{E} \quad \text{oder}$$

$$(21) \quad \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint \text{div } \vec{E} \cdot dV.$$



Durch Vergleich von (21) mit (17) folgt:

$$(22) \quad \boxed{\text{div } \vec{E} = \varrho(x, y, z) / \epsilon_0}, \quad \text{DURCHFLUTUNGSGESETZ VON GAUSS in DIFFERENTIELLER FORM}$$

Ist die Ladungsverteilung $\varrho(x, y, z)$ gegeben, so stellt (22) eine partielle Differentialgleichung für $\vec{E}(x, y, z)$ dar. Da \vec{E} konservativ ist, also durch $-\text{grad } U$ ersetzt werden kann, gilt auch

$$\text{div grad } U = -\varrho / \epsilon_0.$$

In kartesischen Koordinaten bedeutet dies wegen (8) und (19):

$$(23) \quad \boxed{\Delta U / \partial x^2 + \Delta U / \partial y^2 + \Delta U / \partial z^2 = -\varrho(x, y, z) / \epsilon_0}.$$

Die linke Seite kürzen wir mit dem Symbol des LAPLACE-OPERATORS $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ ab.

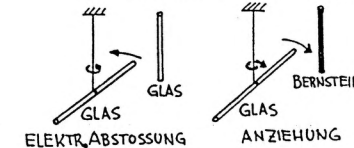
$$(23) \quad \boxed{\Delta U(x, y, z) = -\varrho(x, y, z) / \epsilon_0}, \quad \text{POISSON-GLEICHUNG.}$$

Das elektrostatische Potential muss immer der Poissongleichung genügen. In ladungsfreien Gebieten, wo also $\varrho = 0$ ist, erfüllt das Potential $U(x, y, z)$ immer die Laplace-Gleichung

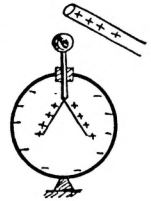
$$(24) \quad \boxed{\Delta U(x, y, z) = 0}, \quad \text{LAPLACE-GLEICHUNG.}$$

DEMONSTRATIONEN:

1. REIBUNGS-ELEKTRIZITÄT
Zwei Sorten von Ladung.



2. LADUNGSNACHWEIS MIT ELEKTROMETER

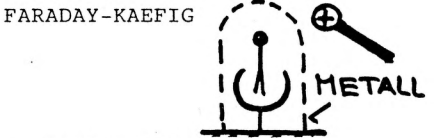
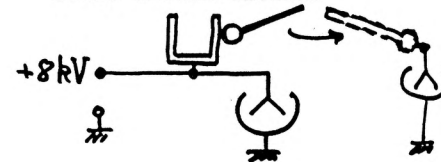


3. BERNSTEIN & KATZENFELL
Hörbare "Funken" bei Ladungstrennung.

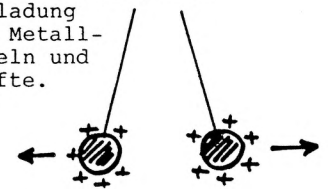
4. STATISCHES V-METER (Trüb-Täuber)
Messung der entstehenden Potentialdifferenzen durch Reibung.

5. LADUNG SITZT AUF AUSSENSEITE EINES METALL-BECHERS

6. FARADAY-KAEFIG



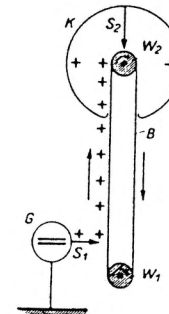
8. ELEKTRISIERMACHINE
Aufladung von Metallkugeln und Kräfte.



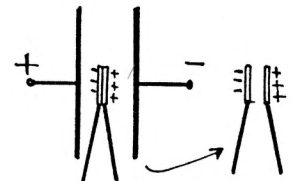
7. AUFLADUNG DURCH GLASBECHER HINDURCH
Isolatoren sind durchlässig für elektrische Felder.



9. VAN DE GRAAF GENERATOR



10. MIESCH'sche PLATTEN
Influenz.

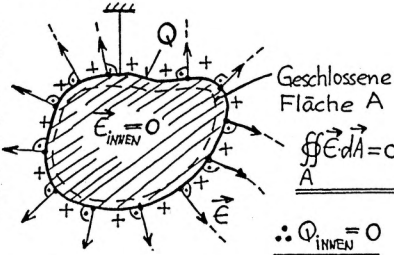


1.8 LADUNG AUF LEITENDEN MATERIALIEN; INFLUENZ.

Elektrisch leitende Materialien enthalten bewegliche Ladungsträger (z.B. "Leitungselektronen" bei Metallen). Wird ein Leiterstück in ein elektrostatisches Feld \vec{E} gebracht, so verschoben sich die beweglichen Ladungsträger so lange, bis das äussere Feld durch das Feld der bewegten Ladungsträger im Innern des Körpers exakt zu null kompensiert wird. Daraus folgt:

(25) $\vec{E} = 0$; IM INNERN EINES LEITERS EXISTIERT KEIN ELEKTROSTATISCHES FELD.
innen

Wir denken uns einen isoliert aufgehängten Leiter, auf welchen eine Ladung Q aufgebracht wird. Wegen (25) ist der elektrische Fluss durch jede vollständig im Innern liegende geschlossene Fläche gleich null. Somit ist nach dem Gesetz von Gauss im Innern des Leiters auch keine elektrische Ueberschussladung vorhanden; dies bedeutet notwendigerweise:



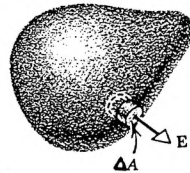
WIRD EIN ELEKTRISCHER LEITER AUFGELADEN, SO VERTEILT SICH DIE LADUNG AUF DER OBERFLÄCHE DES LEITERS.

Ausserhalb des Leiters muss ein von den Oberflächenladungen erzeugtes Feld auftreten. Weil jede zur Leiteroberfläche parallele Feldkomponente eine Ladungsverschiebung bewirken würde, werden diese Komponenten im statischen Fall null sein.

DIE \vec{E} -FELDLINIEN STEHEN IMMER SENKRECHT ZUR OBERFLÄCHE EINES GELADENEN LEITERS.

DIE LEITEROBERFLÄCHE IST EINE AEQUIPOTENTIALFLÄCHE.

Grenzen wir nun ein zylindrisches Volumenelement derart ab, dass die Grundfläche dA des Zylinders unmittelbar unter, die Deckfläche dA unmittelbar ausserhalb der Leiteroberfläche liegt, so wird die Oberflächenladung dQ umschlossen.



$dQ = \sigma \cdot dA$, σ = FLÄCHENLADUNGSDICHTE in C/m^2 .

Da nur die Deckfläche dA vom \vec{E} -Feld durchsetzt wird und zum Feldfluss beiträgt, folgt aus dem Durchflutungsgesetz von Gauss

$\sigma \cdot dA / \epsilon_0 = dA \cdot E$ oder

(26) $\sigma = \epsilon_0 \cdot E$.

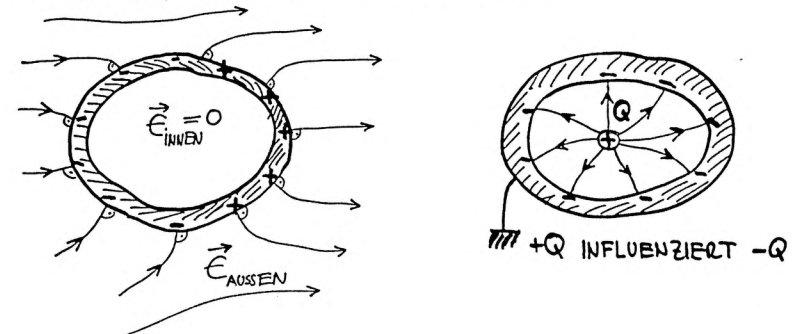
DIE FLÄCHEN-LADUNGSDICHTE EINES GELADENEN LEITERS IST GLEICH $\epsilon_0 \cdot E$. SIE IST POSITIV, WENN DER FELDVEKTOR \vec{E} AN DER LEITEROBERFLÄCHE NACH AUSSEN ZEIGT, UND NEGATIV, WENN DIESER INS INNERE DES LEITERS ZEIGT.

Die Tatsache, dass kein elektrostatisches Feld in leitendem Material vorhanden ist und ferner die Gesetze (17) und (12) gelten, führt dazu, dass ein durch Metallwände umschlossenes Volumen

feldfrei bleibt, auch wenn sich das Metallgefäss in einem äusseren statischen \vec{E} -Feld befindet. (Abschirmeffekt des FARADAY-KAEFIGS).

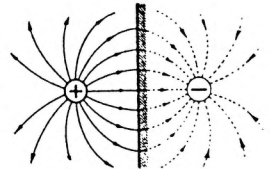
ZUM $1/r^2$ -KRAFTGESETZ: Wir haben schon beim Gravitationsgesetz (Mechanik, S.41) gesehen, dass die Feldfreiheit im Innern einer homogenen Kugelschale eine Folge des $1/r^2$ -Kraftgesetzes ist. Dieselbe Argumentation kann auf die geladene Hohlkugel übertragen werden. Umgekehrt lässt sich $E = 0$ experimentell sehr exakt überprüfen, sodass die $1/r^2$ -Abhängigkeit im Coulomb'schen Gesetz mit grosser Genauigkeit gesichert ist (der Exponent weicht weniger als 10^{-16} von 2 ab).

Der Faradaykäfig hindert auch Felder von Ladungen im Innern daran, in den Aussenraum auszutreten, vorausgesetzt, dass der Käfig geerdet ist. Eine Ladung im Innern induziert auf der Innenwand eine entgegengesetzt gleich grosse Ladung.



INFLUENZ & SPIEGELBILD-LADUNG:

Betrachten wir das Feld von zwei Punktladungen +Q und -Q im Abstand 2a (s. unten: elektrischer Dipol), so wird die Spiegelsymmetrieebene eine Aequipotentialfläche sein. Ersetzen wir die Symmetrieebene durch eine geerdete Metallplatte im Abstand a von der positiven Ladung, so verschwindet die rechte Hälfte des ursprünglichen Feldes, ohne dass die linke Hälfte sich ändert. Befindet sich also eine Punktladung vor einer leitenden, geerdeten Ebene, so können wir das Feld mit Hilfe des Coulombgesetzes berechnen, wenn wir uns im Abstand a hinter der Metallebene eine entgegengesetzt gleich grosse Ladung denken.



SAUGWIRKUNG VON SPITZEN:

Trägt eine Metallkugel vom Radius R die Ladung Q, so ist die Feldstärke an der Oberfläche

$E(R) = (1/4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0) \cdot Q/R^2$, das Potential $U(R) = (1/4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0) \cdot Q/R$.

Es ist also $E(R) = U(R)/R$.

Je kleiner der Radius, umso grösser ist für ein gegebenes Potential

der Kugel die Feldstärke an ihrer Oberfläche. Wird die Krümmung der Oberfläche zu gross, wie dies etwa bei einer Metallspitze der Fall ist, so treten Feldstärken auf, die zu Ionisation der Luft oder zu Emission von Ladungsträgern aus dem Metall führen (Feldemission). In der Hochspannungstechnik müssen deshalb polierte Metalloberflächen mit genügend grossen Krümmungsradien verwendet werden. Eine Anwendung des Phänomens der Spitzenentladung findet sich im Feldemissions-Mikroskop.

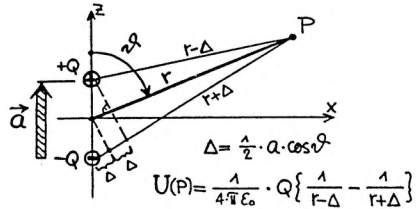
1.9 ELEKTRISCHER DIPOL

Unter einem elektrischen Dipol versteht man ein Ladungssystem, das aus einer negativen Punktladung $-Q$ und einer um den Vektor \vec{a} verschobenen, ebenso grossen Ladung $+Q$ besteht. Diese Ladungsverteilung besitzt das elektrische Dipolmoment \vec{p} , eine vektorielle Grösse, definiert durch

(27) $\vec{p} = Q \cdot \vec{a}$, ELEKTRISCHES DIPOLMOMENT \vec{p} .

Lassen wir die z-Richtung unseres Koordinatensystems mit \vec{a} zusammenfallen, sodass die Ladungen symmetrisch zum Ursprung O liegen, ergibt sich ein rotationssymmetrisches Potential der Form $U(r, \vartheta)$. Wir beschränken uns auf Feldpunkte, welche verglichen mit der Ausdehnung a weit weg liegen (Fernzone), setzen also voraus:

(28) $r \gg a$.



Das Superpositionsprinzip liefert

$U(r, \vartheta) = (Q/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (1/(r-\Delta) - 1/(r+\Delta))$, mit $\Delta = (a/2) \cdot \cos \vartheta$.

Wegen (28) ist $\Delta/r \ll 1$ und U wird approximiert durch

$U(r, \vartheta) = (Q/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (1/r) \cdot (1 + \Delta/r - (1 - \Delta/r))$ oder

(29) $U(r, \vartheta) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot Q \cdot a \cdot (\cos \vartheta) / r^2$.

Im Unterschied zum $1/r$ -Abfall des Potentials einer Punktladung (eines "Monopols"), fällt $U(r, \vartheta)$ des Dipols bei festem ϑ mit $1/r^2$, also schneller ab. Mit der Definition (27) erhalten wir

(30) $U(\vec{r}) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot \vec{p} \cdot \vec{e}_r / r^2$.

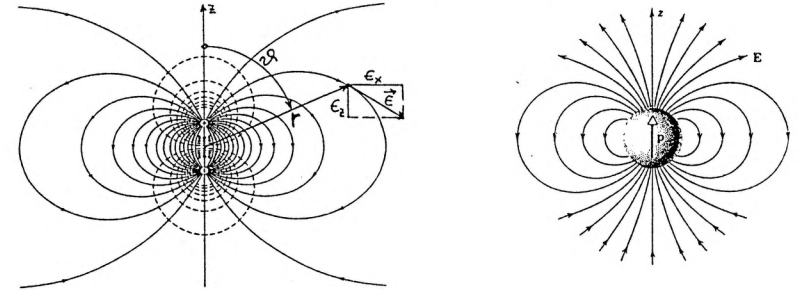
In der Nahzone unseres Systems ist (28) nicht erfüllt und das Dipolpotential (30) weicht vom wirklichen Potential ab. Ein idealer Dipol liegt vor, wenn a beliebig klein, dafür Q so gross ist, dass $Q \cdot a = p$ einen endlichen Wert hat.

Das elektrische Feld \vec{E} gewinnt man durch Bildung des negativen Gradienten von $U(\vec{r})$. Ohne die Rechnung hier auszuführen geben wir das Resultat:

(31) $E_x(r, \vartheta) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (3 \cdot p \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta) / r^3$,
 $E_z(r, \vartheta) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (p \cdot (3 \cdot \cos^2 \vartheta - 1)) / r^3$,

oder kompakter geschrieben:

(32) $\vec{E} = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)) \cdot (3 \cdot (\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \cdot \vec{p}) / r^5$.



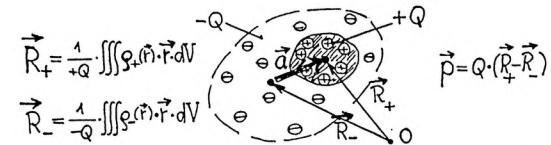
Der Begriff des Dipolmomentes lässt sich allgemeiner für eine beliebige Ladungsverteilung $g(x, y, z)$ fassen, nämlich

(33) $\vec{p} = \iiint g(\vec{r}) \cdot \vec{r} \, dV$, DIPOLMOMENT EINER LADUNGSVERTEILUNG.

UEBUNG:

Zeige, dass wenn (33) auf das oben besprochene System von Punktladungen angewendet wird, gerade (27) herauskommt, und zwar unabhängig von der Wahl des Koordinatenursprungs.

Nehmen wir als Beispiel einer Ladungsverteilung jene eines Atoms. Diese stellen wir uns vor als negative Ladungswolke, gebildet von den Elektronen. Im Innern davon sitzt der Atomkern, praktisch als positive Punktladung. Das Atom als Ganzes ist elektrisch neutral, es hat keinen Monopol-Charakter (d.h. kein mit $1/r$ abfallendes Potential). Die Definition (33) läuft darauf hinaus, dass der Betrag des Dipolmomentes gleich ist der Kernladung, multipliziert mit dem Abstand des LADUNGSSCHWERPUNKTES der Elektronenwolke vom Kern.



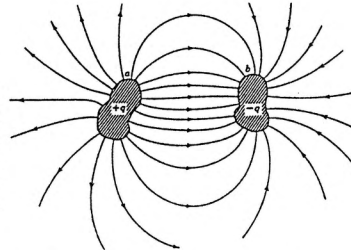
Allgemein hat eine gesamthaft neutrale Ladungsverteilung immer dann ein elektrisches Dipolmoment, wenn der Schwerpunkt der positiven Ladung nicht mit jenem der negativen zusammenfällt. Ueberlege in diesem Zusammenhang, wie das elektrische Dipolmoment des Wassermoleküls zustande kommt.

1.10 ELEKTRISCHER KONDENSATOR UND KAPAZITAET C

Zwei voneinander isolierte Leiter bilden einen KONDENSATOR. Wird der eine Leiter (a) mit der Ladung +Q, der andere Leiter (b) mit -Q aufgeladen, so bildet sich ein elektrisches Feld E aus, dessen Feldlinien von der einen Leiteroberfläche ausgehen und auf der anderen enden. Die beiden Leiteroberflächen (a) und (b) sind Aequipotentialflächen. Es besteht zwischen ihnen die Potentialdifferenz

$U = U(a) - U(b)$. POTENTIALDIFFERENZ .

Als Folge des Superpositionsprinzips steigt die Feldstärke E in jedem Raumpunkt proportional zur Ladungsmenge Q, sodass auch die Potentialdifferenz U zwischen den Leitern proportional Q anwächst. Wir bezeichnen die Proportionalitätskonstante mit 1/C; es gilt:



(34) $U = Q/C$ oder $C = Q/U$, KAPAZITAET C des Kondensators

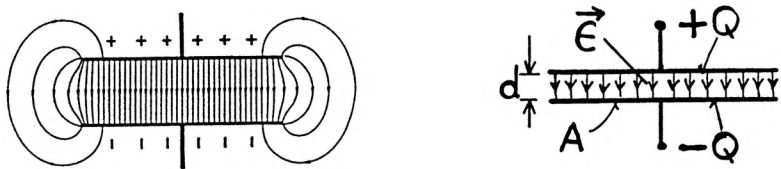
Dimension: (Ladung/Spannung)
Einheit : C/V , $1 \text{ C/V} = 1 \text{ F (Farad)}$.

DIE KAPAZITAET WIRD DURCH DIE GEOMETRIE DER LEITERANORDNUNG BESTIMMT.

Die Definition des Kondensators schliesst auch den Fall ein, dass nur ein einziger Leiter vorhanden ist; man denke sich in diesem Fall den zweiten Leiter unendlich weit weg.

DER PLATTENKONDENSATOR

Als speziell einfaches Beispiel betrachten wir den aus zwei planparallelen Platten bestehenden Kondensator. Seine Geometrie ist durch die Plattenfläche A und den Plattenabstand d charakterisiert. Sein elektrisches Feld ist im Gebiet des Plattenzentrums nahezu homogen; in der Nähe des Plattenrandes entsteht ein inhomogenes "Randfeld".



Wir setzen nun voraus, dass der Abstand d der Platten sehr viel kleiner ist, als ihre lineare Ausdehnung (z.B der Platten-durchmesser bei Kreisform). Dann dürfen wir das Randfeld als kleine Störung vernachlässigen und das E-Feld als homogen betrachten.

Nach dem Influenzgesetz (26) ist $E = Q/(\epsilon_0 \cdot A)$. Mit $U = E \cdot d$ erhalten wir aus (34) sofort

(35) $C = \epsilon_0 \cdot A/d$, KAPAZITAET DES PLATTENKONDENSATORS.

Wir lesen daraus ab, dass die Kapazität umso grösser ist, je grösser die Plattenfläche und je geringer der Plattenabstand. Die Beziehung (34) lautet hier auch

$U = (1/(\epsilon_0 \cdot A)) \cdot Q \cdot d$.

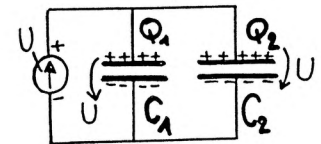
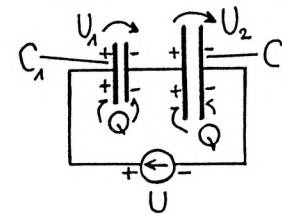
Bei konstanter Ladung Q nimmt U mit dem Plattenabstand linear zu, wobei das Auseinanderziehen der Platten mit einem Arbeitsaufwand verbunden ist. Bei konstanter Geometrie wächst natürlich Q proportional U.

1.10.1 Serie- & Parallelschaltung von Kondensatoren

Schaltet man Kondensatoren hintereinander, so addieren sich die Spannungsabfälle U1, U2, ... usw. zur gesamten Potentialdifferenz U. Die Ladung Q ist wegen der Erhaltung der Gesamtladung auf jedem Kondensator dieselbe. Also

$U = U1 + U2 + \dots$ oder $Q/C = Q/C1 + Q/C2 + \dots$, somit

(36) $1/C = 1/C1 + 1/C2 + \dots$ ADDITION DER REZIPROKEN KAPAZITAETEN BEI SERIESCHALTUNG.



Schaltet man Kondensatoren parallel, so liegt über jedem Kondensator dieselbe Spannung; die Ladungen sind nach Massgabe der einzelnen Kapazitäten verschieden und addieren sich zur Gesamtladung Q:

$Q = Q1 + Q2 + \dots$ oder $C \cdot U = C1 \cdot U + C2 \cdot U + \dots$, somit

(37) $C = C1 + C2 + \dots$ ADDITION DER KAPAZITAETEN BEI PARALLELSCHALTUNG.

Beachte: die KAPAZITAET irgend eines Kondensators wird durch das Symbol des Plattenkondensators dargestellt und bedeutet ein IDEALISIERTES SCHALTELEMENT. KONDENSATOREN sind wirkliche Elemente. Sie besitzen eine Kapazität C, haben aber daneben noch andere, hier noch nicht zur Diskussion stehende Eigenschaften (s. Kapitel über Wechselstrom).

1.10.2 Potentielle Energie des geladenen Kondensators

Um die Ladung Q eines Kondensators um dQ zu erhöhen, muss +dQ vom negativ geladenen Leiter zum positiven gebracht werden, wobei die Potentialdifferenz $U(Q) = Q/C$ überwunden, also die Arbeit $dW = dQ \cdot U$ geleistet werden muss. Integration über Q von null bis Q ergibt die potentielle Energie

$$E(\text{pot}) = \int_0^Q Q \cdot dQ/C \quad \text{oder} \quad E(\text{pot}) = Q^2/(2C).$$

Mit (34) können wir E(pot) verschieden ausdrücken:

$$(38) \quad E(\text{pot}) = (1/2) \cdot Q^2/C. \quad (39) \quad E(\text{pot}) = (1/2) \cdot C \cdot U^2. \quad (40) \quad E(\text{pot}) = (1/2) \cdot Q \cdot U.$$

1.10.3 Energiedichte w des elektrischen Feldes

Beim Aufladen eines Kondensators wird im Raum zwischen den Leitern ein elektrisches Feld \vec{E} aufgebaut. Die vorhandene potentielle Energie wird also auch durch das \vec{E} -Feld repräsentiert. Im Falle des Plattenkondensators können wir mit (39) und der Beziehung $U = E \cdot d$, die potentielle Energie schreiben als

$$E(\text{pot}) = (1/2) (\epsilon_0 \cdot A/d) \cdot E^2 \cdot d^2 \quad \text{oder} \quad E(\text{pot}) = (1/2) \cdot (\epsilon_0 \cdot A \cdot d \cdot E^2).$$

$A \cdot d$ ist das vom \vec{E} -Feld ausgefüllte Volumen, $E(\text{pot})/(A \cdot d)$ die potentielle Energie w pro Volumeneinheit.

$$(41) \quad w = \epsilon_0 E^2/2, \quad \text{ENERGIEDICHTE DES ELEKTRISCHEN FELDES.}$$

Der betrachtete Spezialfall des homogenen \vec{E} -Feldes beim Plattenkondensator lässt sich auf ein beliebiges, inhomogenes Feld verallgemeinern, da wir jedes inhomogene Feld durch infinitesimal kleine, homogene Feldgebiete zusammensetzen können. Die Gleichung (41) IST ALLGEMEIN GÜLTIG.

1.10.4 Anziehungskraft der ebenen Kondensatorplatten

Das \vec{E} -Feld zwischen den Platten entsteht durch Superposition der Felder, welche durch die Oberflächenladungen +Q und -Q erzeugt werden. Zwischen den Platten verstärken sie sich, d.h. jede Plattenladung liefert das Feld E/2; im Aussenraum sind die beiden Feldbeiträge entgegengesetzt gleich; der Aussenraum ist feldfrei. Es ist demnach so, dass jede Platte mit dem Ladungsbetrag Q sich im Feld E/2 der gegenüberliegenden Plattenladung befindet. Die Kraftwirkung auf eine Platte ist $F = Q \cdot E/2$. Mit $Q = \epsilon_0 \cdot A \cdot E$ ergibt sich:

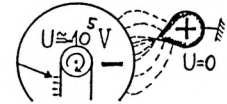
$$(42) \quad F = \epsilon_0 \cdot A \cdot E^2/2 \quad \text{oder} \quad F = \epsilon_0 \cdot A \cdot U^2/(2 \cdot d^2), \quad \text{ANZIEHUNGSKRAFT DER PLATTEN.}$$

UEBUNG:

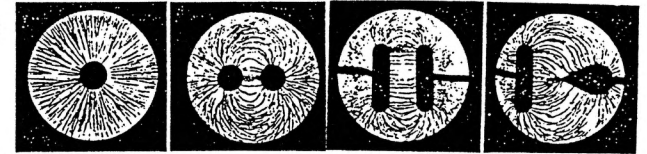
Leite (42) unter Verwendung von (38) mit Hilfe der Beziehung $F = -dE(\text{pot})/dx$ her.

DEMONSTRATIONEN:

1. "SAUGWIRKUNG" VON METALLSPITZEN



2. FELDLINIENBILDER

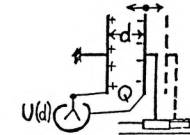


3. PLATTENKONDENSATOR

U(d) bei Q = const.

Q(d) bei U = const.

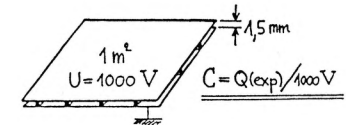
Q(U) bei d = const.



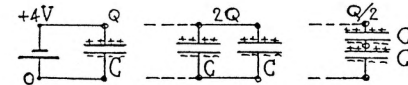
4. KAPAZITAET DES PLATTENKONDENSATORS QUANTITATIV

$A = 1 \text{ m}^2$, $d = 1,5 \text{ mm}$.

$C = 5,9 \text{ nF}$ gemessen.



5. SERIE- & PARALLELSCHALTUNG

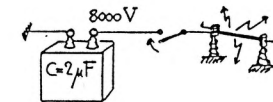


6. ENERGIE DES GELADENEN KONDENSATORS

$U = 8000 \text{ V}$, $C = 2 \mu\text{F}$

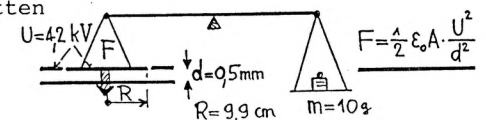
$E(\text{pot}) = 64 \text{ J}$.

Stahldraht explodiert bei Entladung.



7. KIRCHHOFF-WAAGE

Anziehung der Kondensatorplatten quantitativ gemessen.



1.11 LADUNG Q IM ELEKTRISCHEN FELD

Wir denken uns einen Plattenkondensator, der in einem evakuierten Raum das homogene Feld \vec{E} erzeugt. Die eine Platte liegt auf dem negativen Potential $U_1 = -U$, die andere ist geerdet ($U_2 = 0$). In diesem Feld soll sich ein Elektron der Masse m und der Ladung $Q = -e$ befinden. Für das negativ geladene Elektron stellt das \vec{E} -Feld ein **KONSERVATIVES KRAFTFELD** $\vec{F} = -e \cdot \vec{E}$ dar. Wählen wir den Nullpunkt der potentiellen Energie des Elektrons auf Erdpotential ($U_2=0$), so besitzt es an der negativen Kondensatorplatte die potentielle Energie $E(\text{pot}) = e \cdot U$. Hat es dort die Anfangsgeschwindigkeit null, so wird es entlang der Feldlinien beschleunigt und trifft auf der geerdeten Platte mit der kinetischen Energie $m \cdot v_0^2 / 2 = e \cdot U$ auf. Lassen wir auf negativem Potential $-U$ einen glühend heißen Draht Elektronen verdampfen (Glühkathode) und bringen wir an der geerdeten Elektrode eine kleine Austrittsöffnung an, so liegt bereits ein **elektrostatistischer TEILCHENBESCHLEUNIGER** vor, in diesem Fall eine **"ELEKTRONENKANONE"**.

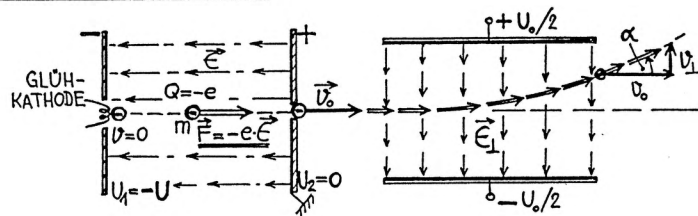
HAT EIN ZUNAECHEST RUHENDES, DIE LADUNG Q TRAGENDES TEILCHEN, DIE POTENTIALDIFFERENZ U DURCHLAUFEN, SO IST IHM DIE KINETISCHE ENERGIE

(43) $E(\text{kin}) = Q \cdot U$ ERTEILT WORDEN.

Es ist üblich und bequem, die Energie beschleunigter Teilchen in der Energieeinheit Elektronenvolt (eV) anzugeben.

EIN ELEKTRONENVOLT (1eV) IST DIE ENERGIE, DIE EIN TEILCHEN BEIM DURCHFALLEN DER POTENTIALDIFFERENZ VON 1 VOLT ERHAELT, WENN ES EINE ELEMENTARLADUNG TRAEGT.

(44) $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.



Beachte: Unabhängig von der Geometrie der elektrostatischen Feldlinien, ist der Zuwachs an kinetischer Energie allein von der durchlaufenen Potentialdifferenz abhängig.

Mit einem senkrecht zur Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \sqrt{2 \cdot Q \cdot U / m} \cdot \vec{e}_0$ stehenden, homogenen elektrischen Feld \vec{E}_1 , erzeugt durch Platten der Länge L , kann der Teilchenstrahl abgelenkt werden. In Analogie zum schiefen Wurf im homogenen Gravitationsfeld ist die Flugbahn zwischen den Ablenkplatten eine Parabel. Während der Aufenthaltszeit $t = L/v_0$ im Ablenkbereich, erhalten die Teilchen eine normal zu \vec{v}_0 stehende Geschwindigkeitskomponente $v_L = Q \cdot E_1 \cdot t / m$. Der Ablenkwinkel α ist dann gegeben durch

(45) $\text{tg } \alpha = v_L / v_0$ oder $\text{tg } \alpha = Q \cdot E_1 \cdot L / (m \cdot v_0^2)$.

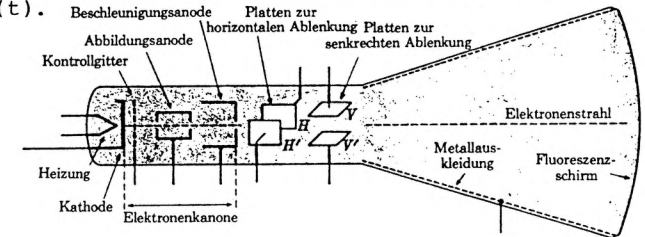
Mit $E_1 = U_0 / D$ und $m \cdot v_0^2 = 2 \cdot Q \cdot U$ erhält man

(46) $\text{tg } \alpha = U_0 \cdot L / (2 \cdot U \cdot D)$.

WICHTIG:

Der Ablenkwinkel α hängt weder von der Ladung, noch von der Masse der Teilchen ab. Dies bedeutet: geladene Teilchen, welche am gleichen Ort mit der Geschwindigkeit $\vec{v}=0$ starten, durchlaufen im elektrostatischen Feld dieselbe Bahn, und zwar **UNABHAENGIG VON Q UND m**.

Im Kathodenstrahloszillograf werden die besprochenen Bauelemente, also Elektronenkanone und elektrostatische Ablenkplatten, verwendet. Die horizontalen Ablenkplatten werden durch eine proportional der Zeit anwachsende "Sägezahn"-Spannung angesteuert (Zeitablenkung), die vertikalen mit der als Funktion der Zeit zu messenden Spannung $U(t)$.

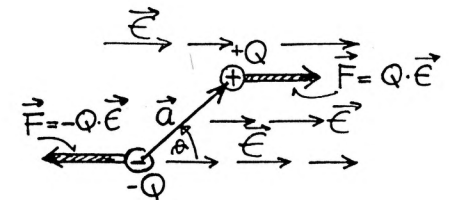


1.12 ELEKTRISCHER DIPOL \vec{p} IM \vec{E} -FELD

1.12.1 Homogenes \vec{E} -Feld

Im homogenen Feld \vec{E} verschwindet die resultierende Kraft auf den Dipol $\vec{p} = Q \cdot \vec{a}$, denn die Kräfte $Q \cdot \vec{E}$ und $-Q \cdot \vec{E}$ auf die beiden Punktladungen kompensieren sich. Der Dipol-Schwerpunkt wird also **NICHT BESCHLEUNIGT**. Hingegen erfährt der Dipol ein Drehmoment \vec{M} als Folge des wirkenden Kräftepaars.

(47) $\vec{M} = Q \cdot \vec{a} \times \vec{E}$ oder $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$, DREHMOMENT AUF DIPOL.



POTENTIELLE ENERGIE $E_{\text{pot}}(\vartheta)$:

Wir wählen $E_{\text{pot}}(\pi/2)$ als Nullpunkt und drehen den Dipol um die festgehaltene negative Punktladung in die Stellung ϑ . Dabei muss die positive Ladung um $a \cdot \cos \vartheta$ in Feldrichtung verschoben, also die Arbeit $-Q \cdot a \cdot E \cdot \cos(\vartheta)$ geleistet werden.

(48) $E_{\text{pot}} = - \vec{p} \cdot \vec{E}$, POTENTIELLE ENERGIE DES DIPOLS.

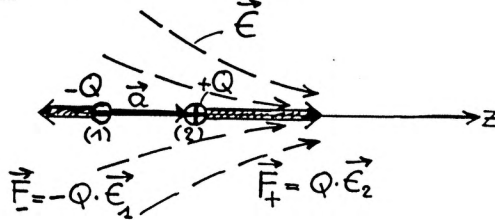
Aehnlich wie eine Magnetnadel im Erd- Magnetfeld, hat der elektrische Dipol im elektrostatischen Feld die Tendenz, sich parallel zu \vec{E} einzustellen (stabile Lage).

1.12.2 Inhomogenes \vec{E} -Feld

Ein elektrisches Feld $\vec{E} = (0, 0, E)$ sei entlang der z-Achse gerichtet und die z-Komponente E soll mit z anwachsen, also einen positiven Gradienten dE/dz besitzen. Legen wir einen elektrischen Dipol \vec{p} parallel zum \vec{E} -Feld in die z-Achse, die negative Punktladung liege an der Stelle $(0, 0, z)$, so erfährt er die Kraft

$F_z = Q \cdot (E(z+a) - E(z))$, für differentiell kleines a also
 $F_z = Q \cdot (E(z) + a \cdot dE/dz - E(z))$, somit $F_z = Q \cdot a \cdot dE/dz$ oder

(49) $F_z = p \cdot dE/dz$, KRAFT AUF DIPOL .



Diese Beziehung gilt nur für die hier speziell gewählte Konfiguration, sie lässt sich aber leicht verallgemeinern und lautet dann:

(50) $F_x = \vec{p} \cdot \text{grad } E_x$, $F_y = \vec{p} \cdot \text{grad } E_y$, $F_z = \vec{p} \cdot \text{grad } E_z$.

Damit auf einen Dipol eine von null verschiedene resultierende Kraft wirken kann, ist die Inhomogenität des \vec{E} -Feldes an der betreffenden Stelle eine Voraussetzung. Die Kraftwirkung hängt zusätzlich noch von der Orientierung des Dipols ab. Liegt dieser z.B. parallel zur \vec{E} -Feldlinie, wie im obigen Spezialfall, so wird der Dipol ins Gebiet grösserer Feldstärke gezogen.

1.13 ISOLATOREN (DIELEKTRIKA) IM \vec{E} -FELD

Bis jetzt haben wir das Feld von im leeren Raum verteilten elektrischen Ladungen untersucht und gefunden, dass die beiden Gleichungen

(17) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (1/\epsilon_0) \cdot \iiint \rho(x,y,z) \cdot dV$ und (12) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

die Elektrostatik im Vakuum vollständig beschreiben. Ferner haben wir gesehen, dass im Innern von elektrisch leitenden Materialien, insbesondere von Metallen, keine elektrostatischen Felder vorhanden sein können. Andererseits zeigte das Experiment, dass Isolatoren elektrische Kraftwirkungen nicht abschirmen, sondern dass sie vom \vec{E} -Feld durchdrungen werden (daher "Dielektrika"). Es stellt sich nun die Frage, in welcher Weise die obigen Gleichungen abgeändert, respektive durch neue physikalische Begriffe ergänzt werden müssen, um die Elektrostatik in Isolatoren richtig zu beschreiben.

1.13.1 Relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r

Experimentell lässt sich leicht verifizieren, dass die Kapazität C eines Kondensators sich ändert, wenn der vom \vec{E} -Feld eingenommene Raum mit einem isolierenden Material ausgefüllt wird. Es zeigt sich, dass C immer grösser C(Vakuum) ist. Durch das Verhältnis $C/C(\text{Vakuum})$ wird die Materialkonstante ϵ_r definiert:

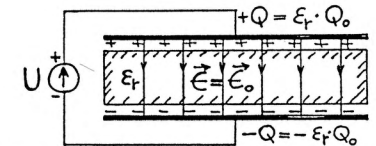
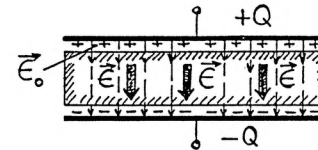
(51) $\epsilon_r = C/C(\text{Vakuum})$, DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTE ϵ_r (D.K.).

Typische Werte bei Zimmertemperatur und Normaldruck für einige feste, flüssige und gasförmige Stoffe sind:

STOFF	D.K.
Quarzglas	3,7
Porzellan	6
TiO ₂	40-80
Petroleum	2,1
Benzol	2,3
Aceton	21
Wasser	80,3
He	1,000060
O ₂	1,000486
O ₃	1,0019

Denken wir uns einen Plattenkondensator, welcher die KONSTANTE LADUNG Q trägt, sodass das Feld $E(\text{Vakuum})=E_0$ vorliegt. Füllen wir nun den Raum zwischen den Platten mit einem Isolator, so können wir aus (51) folgenden Schluss ziehen: die Spannung $U=Q/C$ mit Dielektrikum ist kleiner als im Vakuum, was bedeutet, dass der Mittelwert der Feldstärke E längs einer Feldlinie im Dielektrikum ebenfalls um den Faktor ϵ_r kleiner ist.

(52) $E = (1/\epsilon_r) \cdot E_0$, KLEINERE FELDSTÄRKE E IM DIELEKTRIKUM, BEI GLEICHER LADUNG Q AUF DEN PLATTEN .



Legen wir eine KONSTANTE SPANNUNG U über die Platten, so muss $E=E_0$ sein. Wegen $Q=U \cdot C$ muss dann beim Einschleiben des Dielektrikums weitere Ladung von der Spannungsquelle auf den Kondensator fließen, die ursprüngliche Ladung Q_0 nimmt um den Faktor ϵ_r zu.

(53) $Q = \epsilon_r \cdot Q_0$, MEHR ZUGEFÜHRTE LADUNG, BEI GLEICHER SPANNUNG ÜBER DEM KONDENSATOR .

Aus (39) folgt, dass dabei auch die potentielle Energie $(1/2) \cdot C \cdot U^2$ um den Faktor ϵ_r zunimmt, sodass wir mit (41) auch schreiben können:

(54) $w = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 / 2$, ENERGIEDICHTE DES FELDES IM DIELEKTRIKUM.

Die Vakuum-Feldstärke \vec{E}_0 folgt natürlich aus dem Coulomb'schen Gesetz (1) durch Aufsummieren der Feldbeiträge, erzeugt von den Ladungselementen $dQ = \sigma \cdot dA$ auf den Plattenflächen. Aus der Abschwächung des Feldes durch ein Dielektrikum nach (52) müssen wir schliessen, dass das Coulomb'sche Gesetz für die Feldstärke im Innern eines Isolators, herrührend von einer Punktladung Q im Abstand r , lautet:

$$(55) \quad \vec{E}(\vec{r}) = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0)) \cdot (Q/r^2) \cdot \vec{e}_r, \text{ COULOMBFELD IM DIELEKTRIKUM.}$$

UEBUNG:

Welche Bedeutung hat (55) für die Eigenschaften von Wasser ($\epsilon_r \approx 80$) als Lösungsmittel?

1.13.2 Elektrische Polarisation \vec{P} und Suszeptibilität χ_e

Wir versuchen jetzt, die beobachteten Eigenschaften der Isolatoren mit einem mikroskopischen Modell zu erklären. Atome oder Moleküle können polar sein, d.h. sie können ein Dipolmoment \vec{p} besitzen. Es seien im Volumen V des Dielektrikums N solche Dipole \vec{p} vorhanden. Unter der Polarisation \vec{P} verstehen wir dann das Dipolmoment pro Volumeneinheit, also

$$(56) \quad \vec{P} = (1/V) \cdot \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \text{ POLARISATION } \vec{P}.$$

Dimension: (Ladung/Fläche), Einheit: C/m².

Falls die mikroskopischen Dipolvektoren \vec{p} regellos gerichtet sind, ist ihre Vektorsumme null und damit $P = 0$. Andererseits ist P maximal, wenn alle \vec{p} unter sich ausgerichtet sind. Im allgemeinen muss ein äusseres \vec{E} -Feld angelegt werden, damit sich eine Polarisation ausbildet. Grundsätzlich führen dann zwei Prozesse zur Polarisation:

a) VERSCHIEBUNGSPOLARISATION.

Die Atome oder Moleküle besitzen zunächst kein Dipolmoment. Erst ein äusseres Feld \vec{E} deformiert die Elektronenwolke derart, dass ihr Ladungsschwerpunkt nicht mehr mit jenem der positiven Kernladungen zusammenfällt. Es gilt

$$(57) \quad \vec{p} = \alpha \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad \alpha = \text{POLARISIERBARKEIT DES ATOMS (MOLEKUELS).}$$

Dimension von α : (Volumen), Einheit: m³.

Alle mikroskopischen Dipolmomente \vec{p} sind parallel zum äusseren Feld \vec{E} gerichtet.

DIE VERSCHIEBUNGSPOLARISATION IST TEMPERATUR-UNABHAENGIG.

b) ORIENTIERUNGSPOLARISATION.

Die Moleküle besitzen schon ohne äusseres Feld ein PERMANENTES DIPOLMOMENT \vec{p} , sie sind POLAR.

Beispiele polarer Moleküle: H₂O, CHCl₃, CH₂Cl₂.

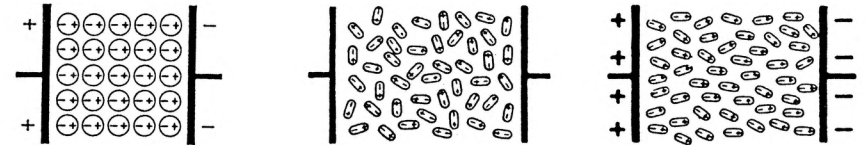
Unpolare Moleküle: CH₄, CCl₄ (Symmetrie).

Das äussere \vec{E} -Feld richtet die permanenten mikroskopischen Dipole

aus. Diese Ausrichtung wird aber durch die TEMPERATURBEWEGUNG behindert. P nimmt mit steigender Temperatur ab.

DIE ORIENTIERUNGSPOLARISATION IST TEMPERATURABHAENGIG.

Verschiebungspolarisation tritt immer auf, auch als Zusatz zur Orientierungspolarisation.



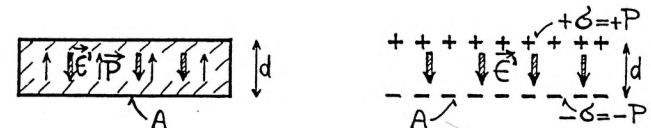
VERSCHIEBUNGSPOLARISATION

ORIENTIERUNGSPOLARISATION

Die Erfahrung zeigt, dass die Polarisation \vec{P} in sehr guter Näherung proportional zum wirkenden \vec{E} -Feld anwächst. Zur Verknüpfung von \vec{P} und \vec{E} führen wir eine dimensionslose Materialkonstante, die elektrische Suszeptibilität χ_e ein.

$$(58) \quad \vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad \chi_e = \text{ELEKTRISCHE SUSZEPTIBILITAET.}$$

Wir denken uns jetzt eine dielektrische, ebene Platte der Dicke d und der Fläche A , in welcher eine homogene, senkrecht zu den Flächen A stehende Polarisation \vec{P} vorhanden ist. Das totale Dipolmoment dieser Platte ist dann $p(\text{total}) = P \cdot A \cdot d$. Nun belegen wir die Plattenflächen mit Ladung der konstanten Flächendichte $+\sigma$ bzw. $-\sigma$ und ersetzen das Materialvolumen durch Vakuum. Ist σ gerade gleich P , so erzeugt diese Ladungsverteilung dasselbe totale Dipolmoment $\sigma \cdot A \cdot d = P \cdot A \cdot d$, wie vorher die polarisierte Platte. Dies bedeutet, dass die beiden Systeme ausserhalb des Plattenvolumens



dasselbe \vec{E} -Feld erzeugen. Zwischen den Flächenladungen $+\sigma$ und $-\sigma$ herrscht nach dem Satz von Gauss das homogene Feld $E' = \sigma/\epsilon_0$. Nun gilt auch in Anwesenheit eines Dielektrikums, dass beim Verschieben einer Probeladung auf einem geschlossenen Weg, die geleistete Arbeit verschwinden muss (sonst liesse sich ein Perpetuum mobile bauen). Also wie im Vakuum ist auch im Dielektrikum

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Das heisst aber, dass das längs d GEMITTELTE FELD IM DIELEKTRIKUM ebenfalls gleich E' ist. Wegen $\sigma = P$ erhalten wir;

$$(59) \quad \vec{E}' = -(1/\epsilon_0) \cdot \vec{P}, \quad \text{MITTLERES, DURCH DIE POLARISATION } \vec{P} \text{ ERZEUGTES FELD } \vec{E}' \text{ IM DIELEKTRIKUM.}$$

Nun betrachten wir wieder die Situation entsprechend der Figur auf Seite 20 links. Offenbar kommt das Feld \vec{E} im Innern des Dielektrikums zustande durch Superposition des Vakuumfeldes \vec{E}_0 und dem Feld $\vec{E}' = -\vec{P}/\epsilon_0$ von der polarisierten Materie.

$$(60) \quad \vec{E} = \vec{E}_0 - (1/\epsilon_0) \cdot \vec{P}$$

\vec{P} ist aber selbst durch das innere Feld \vec{E} über die Suszeptibilität χ_e bestimmt, nämlich durch $\vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$, dies in (60) eingesetzt, ergibt:

$$(61) \quad \vec{E} \cdot (1 + \chi_e) = \vec{E}_0$$

Der Vergleich mit (52) liefert den Zusammenhang

$$(62) \quad 1 + \chi_e = \epsilon_r$$

Die Polarisation \vec{P} erzeugt an der Oberfläche des Dielektrikums eine POLARISATIONSLADUNG $Q_p = P \cdot A$, welche das äussere Feld E_0 um den Faktor $\epsilon_r^{-1} = (1 + \chi_e)^{-1}$ schwächt. Allgemein ist folgende Aussage richtig:

AN DER GRENZFLÄCHE EINES DIELEKTRIKUMS IST DIE NORMALKOMPONENTE E_{\perp} DES ELEKTRISCHEN FELDES UNSTETIG.

Im Unterschied zu den Polarisationsladungen Q_p an dielektrischen Grenzflächen, bezeichnet man die beweglichen Ladungen Q an Leiteroberflächen als WAHRE LADUNGEN. Wir können sagen:

NEBEN DEN WAHREN LADUNGEN SIND AUCH DIE POLARISATIONSLADUNGEN QUELLEN DES \vec{E} -FELDES.

1.13.3 Die Verschiebungsdichte \vec{D}

Zur Beschreibung der elektrischen Phänomene in Dielektrika ist es sinnvoll, eine weitere physikalische Grösse einzuführen, nämlich das Vektorfeld \vec{D} der elektrischen Verschiebung. Dieses ist definiert durch

$$(63) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \text{VERSCHIEBUNGSDICHTE } \vec{D}.$$

Dimension: (Ladung/Fläche), Einheit: C/m².

Im Vakuum ist $\vec{P}=0$ und $\vec{D}=\epsilon_0 \cdot \vec{E}$. In isotropen Dielektrika ist die Polarisation \vec{P} immer parallel zu \vec{E} gerichtet, sodass auch der \vec{D} -Vektor zu \vec{E} parallel ist. In anisotropen Medien ist dies aber nicht so, weil die Elektronen sich nicht in jeder Richtung gleich gut verschieben lassen und folglich die Richtung von \vec{P} nicht gleich der von \vec{E} ist (vgl. Doppelbrechung in der Optik). Im allgemeinen fallen die Feldlinien von \vec{D} nicht mit jenen von \vec{E} zusammen. Die Suszeptibilität ist dann ein Tensor. Wir beschränken uns hier jedoch auf isotrope Medien.

Drückt man \vec{P} mit (58) durch die Suszeptibilität χ_e aus, so folgt aus (63)

$$(64) \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} (1 + \chi_e) \quad \text{oder} \quad \vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}.$$

Während die Normalkomponente des \vec{E} -Feldes beim Eintritt ins Dielektrikum wegen der Reduktion um den Faktor $1/\epsilon_r$ unstetig ist, trifft dies für das \vec{D} -Feld nicht zu, denn nach (64) tritt der Faktor ϵ_r bei der Bildung von \vec{D} auch im Zähler auf, sodass er sich mit $(1/\epsilon_r)$ wegekürzt. Der von aussen ins Dielektrikum eintretende Feldfluss von \vec{D} setzt sich ungeschwächt ins Innere fort; dies bedeutet, dass die an der Grenzfläche sitzenden Polarisationsladungen keine Quellen für das \vec{D} -Feld darstellen.

NUR WAHRE LADUNGEN Q SIND QUELLEN DES \vec{D} -FELDES.

Nun können wir die eingangs Kapitel 1.13 gestellte Frage nach der Gültigkeit von (17) und (12) in Dielektrika beantworten. Die im Gauss'schen Satz (17) rechts auftretenden Ladungen fassen wir als "wahre" Ladungen auf. Im Vakuum ($\vec{P} = 0$) ist wegen (63) die Gleichung (17) äquivalent

$$(65) \quad \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint \rho(x,y,z) \cdot dV, \quad \text{SATZ VON GAUSS.}$$

In Dielektrika treten zusätzlich noch Polarisationsladungen auf, diese sind aber keine Quellen des \vec{D} -Feldes, sodass (65) sowohl im Vakuum, als auch im Dielektrikum die richtige Form des Gauss'schen Satzes ist.

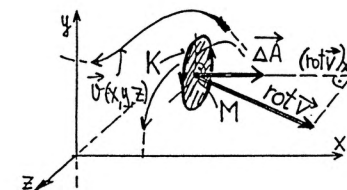
Die Gleichung (12) für das \vec{E} -Feld, welches auch im Dielektrikum für die Kraftwirkung auf Ladungen verantwortlich ist, ist nach wie vor gültig (siehe obiges Argument mit dem Perpetuum mobile).

Mit (64) lässt sich die Gleichung (54) für die Energiedichte im Feld in der allgemein gültigen Form schreiben

$$(66) \quad w = \vec{D} \cdot \vec{E} / 2, \quad \text{ENERGIEDICHTE IM ELEKTROSTATISCHEN FELD.}$$

1.13.4 Zum Begriff der Rotation eines Vektorfeldes \vec{v} ; $\text{rot } \vec{v}$

Im Kapitel 1.7 haben wir den Begriff der Divergenz eines Vektorfeldes \vec{v} , $\text{div } \vec{v}$, eingeführt. Sie ist eine skalare Grösse und macht lokal, d.h. in jedem Punkt des Feldes \vec{v} , eine Aussage über die Quellstärke an dieser Stelle. Eine andere Aussage über eine lokale Eigenschaft des Vektorfeldes \vec{v} macht seine "Rotation" im betreffenden Punkt. Die Rotation eines Vektorfeldes ist wieder ein Vektor, wird also z.B durch drei kartesische Komponenten bestimmt. Es sei ein Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z)$ gegeben. In einem beliebigen Punkt M ist die x-Komponente $(\text{rot } \vec{v})_x$ folgendermassen definiert: durch den Punkt M legen wir ein kleines Flächenelement ΔA , dessen Normalenvektor $\Delta \vec{A}$ in x-Richtung zeigt. ΔA werde durch die Kurve K



berandet, welche bezüglich der x-Richtung im rechts-Sinn durchlaufen wird. Dann ist

$$(67) \quad (\text{rot } \vec{v})_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{v} \cdot d\vec{r}}{\Delta A}, \quad \text{x-KOMPONENTE VON rot } \vec{v}.$$

Entsprechendes gilt für die andern Komponenten.

UEBUNG:

Betrachte das Geschwindigkeitsfeld einer mit ω um die x-Achse rotierenden starren Scheibe und berechne $(\text{rot } \vec{v})_x$ auf der x-Achse. (Die \vec{v} -Feldlinien sind hier geschlossene Kreislinien).

Beachte, dass für das konservative \vec{E} -Feld $\text{rot } \vec{E}$ sicher verschwindet, weil $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$ immer null ist. Dies bedeutet auch:

EIN ROTATIONSFREIES FELD HAT KEINE GESCHLOSSENEN FELDLINIEN (ES IST KEIN "WIRBELFELD").

1.13.5 Die Gesetze der Elektrostatik

In diesem Kapitel haben wir zur Beschreibung der Elektrostatik DREI VEKTORFELDER benützt, nämlich

ELEKTRISCHES FELD	\vec{E}
ELEKTRISCHE POLARISATION	\vec{P}
ELEKTRISCHE VERSCHIEBUNGSDICHTE	\vec{D}

Ferner haben wir ZWEI MATERIALKONSTANTEN definiert:

RELATIVE DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTE	ϵ_r
ELEKTRISCHE SUSZEPTIBILITÄT	χ_e

Es bestehen zwischen diesen Grössen die Beziehungen:

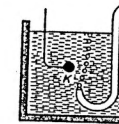
$$\begin{aligned} \vec{P} &= \chi_e \epsilon_0 \vec{E}, & \epsilon_r &= 1 + \chi_e \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, & \vec{D} &= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \end{aligned}$$

Wir können jetzt die Gesetze der Elektrostatik im Dielektrikum (mit $\epsilon_r=1$ gelten sie auch im Vakuum) folgendermassen formulieren:

INTEGRALE FORM	DIFFERENTIELLE FORM
(68) $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint \rho(x,y,z) \cdot dV$	(68a) $\text{div } \vec{D} = \rho(x,y,z)$
(69) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$	(69a) $\text{rot } \vec{E} = 0$

DEMONSTRATIONEN:

1. ALUMINIUM-SPAENE ZWISCHEN KONDENSATORPLATTEN
Kraft auf geladene Partikel
2. ABLENKUNG EINES WASSERSTRAHLS IM E-FELD
3. ELEKTRONENSTRAHL & ABLENKPLATTEN IM K.O.
4. OFFENE K.O.- ROEHRE
5. D.K.- MESSUNG VON CIBANIT, GLAS & OEL
6. D.K.- MESSUNG VON WASSERSTOFF, LUFT & CO2
Qualitativ mittels Schwingkreis mit Schallfrequenz
7. KRAFT DES INHOMOGENEN E-FELDES AUF ELEKTRISCHEN DIPOL
Luftblasen in Oel



8. KOLLEKTION VON TECHNISCHEN KONDENSATOREN

2. STATIONAERE ELEKTRISCHE STROEME

In der Elektrostatik befinden sich die beweglichen Ladungsträger in Ruhe; es existieren keine Potentialdifferenzen in einem Leiter. Durch äussere Energiequellen (z.B. eine Batterie) kann jedoch längs eines Leiters eine Potentialdifferenz aufrechterhalten werden, sodass sich die LADUNGSTRAEGER BEWEGEN und damit ein ELEKTRISCHER STROM fliesst. Die Stromstärke I in einem Leiter ist definiert als Ladungsmenge Q, die pro Zeiteinheit durch jeden Leiterquerschnitt hindurchfliesst.

$$(70) \quad I = dQ/dt, \quad \text{STROMSTAERKE I.}$$

Dimension: (Ladung/Zeit)
Einheit : C/s , 1 C/s = 1 A (Ampere).

Ein Leiter ist ein System, welches bewegliche Ladungsträger anbietet. Wichtige Beispiele solcher Systeme sind

- a) Metalle, mit Elektronen als Ladungsträger.
- b) Elektrolyte, mit beweglichen Ionen.
- c) Freie Ladungen im Vakuum, z.B. in der Elektronenröhre.

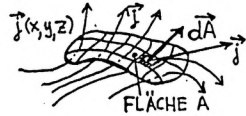
Enthält der Leiter an der Stelle (x,y,z) n Ladungsträger der Ladung q pro Volumeneinheit, und bewegen sich diese mit der Geschwindigkeit \vec{v} , so ergibt sich die Stromdichte

$$(71) \quad \vec{j} = n(x,y,z) \cdot q \cdot \vec{v}(x,y,z), \quad \text{STROMDICHTe } \vec{j}.$$

Dimension: (Strom/Fläche),
Einheit : A/m².

Der Strom durch eine beliebige Leiterfläche kann dann geschrieben werden als

(72)
$$\underline{I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}}$$
 , STROM DURCH FLÄCHE A.



STATIONÄRE STROME sind dadurch gekennzeichnet, dass $\vec{j}(x,y,z)$ NICHT VON DER ZEIT ABHÄNGT.

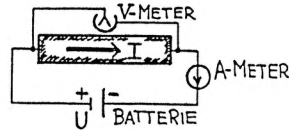
2.1 DER ELEKTRISCHE WIDERSTAND R

Liegt über den Enden eines Leiters die von einer Batterie aufrechterhaltene Potentialdifferenz oder Spannung U, so wird der Widerstand des Leiters definiert durch

(73)
$$\underline{R = U/I}$$
 , ELEKTRISCHER WIDERSTAND R .

Dimension: (Spannung/Stromstärke)
Einheit : V/A , 1 V/A = 1Ω (Ohm).

Die von der Batterie dem Leiter zugeführte Leistung P, ist gleich der Arbeit, welche pro Zeiteinheit aufgebracht werden muss, um in der Batterie positive Ladung vom negativen zum positiven Pol zu transportieren.



(74)
$$\underline{P = dQ \cdot U / dt}$$
 oder
$$\underline{P = I \cdot U}$$
 , LEISTUNG P .

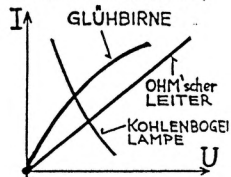
Mit (73) kann die Leistung auch durch den Widerstand R und U oder I ausgedrückt werden, also

(75)
$$\underline{P = U^2 / R}$$
 oder (75a)
$$\underline{P = I^2 \cdot R}$$
 .

Die im Verbraucher z.B. in Wärme umgewandelte Energie ist gleich der Abnahme der chemischen Energie in der Batterie. Auf die Physik der Energiequellen, sowie Strom- und Spannungsquellen gehen wir später ein. Dasselbe gilt für Strom- und Spannungsmessinstrumente.

2.2 STROM-SPANNUNGS-CHARAKTERISTIK. OHM'sches GESETZ

Für die meisten Leiter ist der Widerstand R nicht konstant, sondern ist seinerseits eine Funktion des Stromes oder der Spannung. Den Verlauf der Stromstärke $I=f(U)$, als Funktion der am Verbraucher angelegten Spannung U, nennt man STROM-SPANNUNGS-CHARAKTERISTIK. Nebenstehende Figur zeigt einige Beispiele. Der Sonderfall, dass I linear mit U wächst, der Widerstand $R=U/I$ also



konstant ist, trifft z.B. für metallische Leiter bei konstanter Temperatur in guter Näherung zu; man nennt solche Leiter OHM'sche LEITER. Sie gehorchen der Beziehung

(76)
$$\underline{R = U/I = konst.}$$
 , OHM'sches GESETZ.

STEIFISCHER WIDERSTAND ρ_w EINES OHM'schen LEITERS:

Bei gegebener Geometrie des Leiters ist der Widerstand Materialabhängig. Als entsprechende Materialkonstante wird der spezifische Widerstand eingeführt. Ein homogenes, Ohm'sches Material mit konstantem Querschnitt A und der Länge L, besitzt den Widerstand

(77)
$$\underline{R = \rho_w \cdot L / A}$$
 , ρ_w = SPEZIFISCHER WIDERSTAND .

Dimension von ρ_w : (Widerstand·Länge)
Einheit: Ω·m .

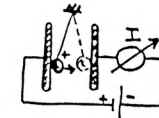
Der reziproke Wert von ρ_w ist das Leitvermögen.

(78)
$$\underline{1/\rho_w = \sigma_w}$$
 , LEITVERMÖGEN σ_w .

Dimension: 1/(Widerstand·Länge)
Einheit : Ω⁻¹m⁻¹.

DEMONSTRATIONEN:

1. STROM = BEWEGTE LADUNG
Metallkugel als beweglicher Ladungsträger.

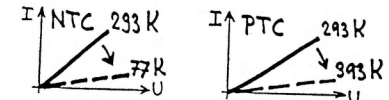


2. ZWEI BEISPIELE VON STROM-MESSINSTRUMENTEN
Hitzdraht- & Drehspulinstrument.

3. CHARAKTERISTIK VERSCHIEDENER LEITER



4. TEMPERATUR-ABHÄNGIGKEIT VON R
NTC- & PTC-Widerstand



5. LEITENDER GLASSTAB
Isolator oder nicht, eine Frage der Temperatur. (Ionenleitung bei ca. 900 K beobachtet).

6. SUPRALEITUNG BEI 90 K .
Hochaktuell: YBaCuO-Probe, als 90 K- Supraleiter seit 2. März 1987 bekannt. Auch Schweben auf inhomogenem Magnetfeld demonstriert.



In einem stromführenden Leiterstück der Länge L herrscht das elektrische Feld $E = U/L$ und es ist $I = E \cdot L/R$. Mit (77) heisst dies auch: $I/A = E/\rho_w$ oder

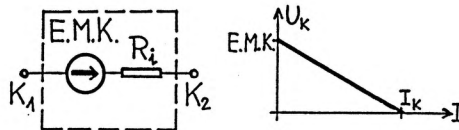
(79) $\vec{j} = \sigma_w \cdot \vec{E}$. STROMDICHTE = LEITVERMOEGEN • FELDSTAERKE.

Im homogenen Medium ist die Stromdichte \vec{j} in jedem Punkt parallel zur lokalen Feldstärke.

2.3 QUELLEN ELEKTRISCHER ENERGIE; SPANNUNGS- & STROMQUELLEN

Elektrische Energiequellen sind immer auch Ladungs- und Spannungsquellen. In ihrem Innern wirken Kräfte, welche positive und negative Ladungen trennen und an den betreffenden Polen in einem gewissen Ausmass anhäufen, also zwischen diesen eine Spannung (von alters her "elektromotorische Kraft", E.M.K. genannt) erzeugen. Je nach Art der Quelle sind verschiedene Ursachen für diese Kräfte verantwortlich, etwa chemische Prozesse beim galvanischen Element oder elektrische Felder bei induktiven Quellen (Dynamo). Eine Quelle besitzt neben ihrer E.M.K. immer auch einen INNENWIDERSTAND Ri, denn sie enthält metallische oder elektrolytische Leiter. Schematisch kann die Quelle als eine Serieschaltung der E.M.K. mit dem Innenwiderstand Ri aufgefasst werden. Bei Belastung mit der Stromstärke I entsteht über Ri der Spannungsabfall I·Ri, sodass zwischen den Klemmen K1 und K2 die Spannung Uk entsteht:

(80) $U_k = E.M.K. - I \cdot R_i$, KLEMMENSPPANNUNG Uk.



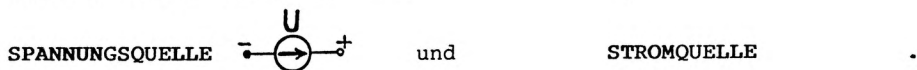
Wird die Quelle kurzgeschlossen, d.h., werden die Klemmen K1 und K2 widerstandslos verbunden, so fliesst der Strom

(81) $I_k = E.M.K./R_i$, KURZSCHLUSS-STROM.

Durch Kurzschliessen können Quellen mit niedrigem Innenwiderstand zerstört werden (z.B. Autoakku). Sind die Klemmen offen (Lastwiderstand $R = \infty$), also $I=0$, so ist die Klemmenspannung gleich der E.M.K. und heisst die LEERLAUFSPANNUNG.

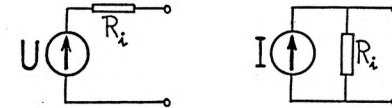
KURZSCHLUSS-STROM & LEERLAUFSPANNUNG CHARAKTERISIEREN DIE QUELLE.

Zum Berechnen von Schaltungen werden wirkliche Energiequellen mit Vorteil durch fiktive, ideale Elemente dargestellt. Es sind dies



Eine Spannungsquelle liefert unabhängig von der Belastung immer dieselbe Klemmenspannung U. Eine Stromquelle liefert auch bei noch so grossem Lastwiderstand immer denselben Strom I. Die

Pfeilrichtung in den Symbolen gibt die Stromrichtung durch den geschlossenen Kreis an. Die folgenden Darstellungen einer Energiequelle durch Spannungsquelle mit Seriewiderstand oder Stromquelle mit Parallelwiderstand sind AEQUIVALENT, denn beide ergeben die Leerlaufspannung $U(\text{leer})=E.M.K.$ und den Kurzschluss-Strom $I(\text{kurz})=E.M.K./R_i$, vorausgesetzt, dass für die Spannungsquelle $U = E.M.K.$ und für die Stromquelle $I = E.M.K./R_i$ gewählt wird.



2.4 LEITUNGSMECHANISMEN

Wenn wir die spezifischen elektrischen Widerstände verschiedener Materialien vergleichen, können sie in folgende Klassen eingeteilt werden: METALLE, HALBLEITER und ISOLATOREN. Wir greifen einige typische Vertreter und ihre spezifischen Widerstände bei Raumtemperatur heraus.

Table with 4 columns: Material, rho_m (Ohm-m), Material, rho_m (Ohm-m), Material, rho_m (Ohm-m). Rows include Silber, Kupfer, Gold, Eisen, Quecksilber, Germanium, Silizium, Porzellan, Quarzglas, Hartgummi.

Zum Vergleich der spezifische Widerstand einer NaCl-Lösung: 0,1 mol/m³ 930 Ohm-m, 1 " 94 "

Die gewaltigen Unterschiede in der elektrischen Leitfähigkeit dieser Stoffgruppen sind in ihren unterschiedlichen Leitungsmechanismen begründet. Wir betrachten an dieser Stelle ein klassisches (nicht quantenmechanisches) Modell der metallischen Leitung, sowie die elektrolytische Leitung.

2.4.1 Metallische Leitung

In einem Metall sind die Valenzelektronen nicht an ein bestimmtes Atom gebunden, sondern sie können innerhalb des Kristallgitters, welches durch die Atomrümpfe (positive Ionen) gebildet wird, umherwandern. Beachte aber, dass in jedem Volumenelement, das noch eine grosse Zahl von Ionen enthält, Ladungsneutralität herrscht. Im Falle des Kupfers wird pro Atom etwa ein LEITUNGSELEKTRON zur Verfügung gestellt. Wir können die Gesamtheit der Leitungselektronen als "Elektronengas" auffassen, welches im Metallvolumen eingesperrt ist. Diese Elektronen besitzen eine mittlere Geschwindigkeit <v> von etwa 1,6·10^6 m/s, deren Richtung ohne äusseres Feld regellos verteilt ist.

Legen wir ein äusseres Feld an, so überlagert sich der ungeordneten Bewegung eine für alle Elektronen gleiche Geschwindigkeitskomponente in negativer Feldrichtung. Die Elektronen stossen aber mit den Atomrümpfen zusammen und geben dadurch die im E-Feld gewonnene Energie ab, was zu einer Temperaturerhöhung des Metalls führt. Die Elektronen besitzen eine mittlere freie Weglänge s , sodass die Zeit zwischen zwei Stössen im Mittel gerade gleich $s/\langle v \rangle$ ist. Während dieser Zeit werden die Elektronen ihre Geschwindigkeit um

$$\Delta \vec{v} = -(e \cdot \vec{E} / m) \cdot (s / \langle v \rangle)$$

ändern. Die mittlere gerichtete Geschwindigkeit zwischen zwei Stössen ist also

$$(82) \quad \vec{v}(\text{Drift}) = - e \cdot \vec{E} \cdot s / (2 \cdot \langle v \rangle \cdot m), \quad \text{DRIFTGESCHWINDIGKEIT.}$$

Sind n Leitungselektronen pro Volumeneinheit vorhanden, so ergibt sich mit (71) der Zusammenhang

$$(83) \quad \vec{j} = n \cdot e \cdot s / (2 \cdot \langle v \rangle \cdot m) \cdot \vec{E}$$

und damit wegen (79)

$$(84) \quad \sigma_w = n \cdot e \cdot s / (2 \cdot \langle v \rangle \cdot m) \quad \text{oder} \quad \rho_w = 2 \cdot \langle v \rangle \cdot m / (n \cdot e \cdot s)$$

Die mittlere freie Weglänge s nimmt mit steigender Temperatur ab, weil die intensivere Bewegung der Ionenrümpfe die Elektronen stärker behindert, was den normalerweise beobachteten positiven Temperaturkoeffizienten des Widerstandes von Metallen erklärt. Ist T konstant, kommen jedoch in (84) nur konstante Grössen vor, d.h. es ergibt sich aus diesem Modell tatsächlich ein OHM'scher Leiter. Die Bewegung der Elektronen unter dem Einfluss des E-Feldes ist zu vergleichen mit der Bewegung eines im Schwerefeld fallenden Partikels in einer viskosen Flüssigkeit. Es ist ein DISSIPATIVER VORGANG. Die pro Zeiteinheit entstehende JOULE'sche WAERME ist äquivalent der elektrischen Leistung $P = I \cdot U$ der äusseren Energiequelle.

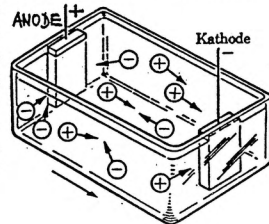
Beachte, dass die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ von der ungeordneten Temperaturbewegung der Elektronen etwa 10^{10} mal grösser ist, als eine typische Driftgeschwindigkeit $v(\text{Drift})$, welche den Strom erzeugt.

UEBUNG:

Berechne $v(\text{Drift})$ für Kupfer, wenn $j = 1 \text{ A/mm}^2$ ist.

2.4.2 Elektrolytische Leitung; Faraday'sche Gesetze

Elektrolytische Lösungen und Schmelzen sind Stoffe, in welchen geladene Atome oder Moleküle, also IONEN, die beweglichen Ladungsträger sind. Im Gegensatz zur metallischen Leitung treten hier chemische Prozesse auf; es scheiden sich an den Elektroden Stoffe ab. Betrachten wir als Beispiel eine Silberchlorid-Lösung, so wandern positive Silberionen (Ag^+) zur negativen Elektrode (Kationen) und negative Chlorionen (Cl^-) zur positiven Elektrode (Anionen).



Für die Masse m des abgeschiedenen Stoffes und den damit verbundenen Ladungstransport Q gelten die FARADAY'schen GESETZE:

$$\text{I.} \quad m = A \cdot Q, \quad A = \text{ELEKTROCHEMISCHES AEQUIVALENT.}$$

Dimension: Masse/Ladung, Einheit: kg/C .

Die elektrolytisch an einer Elektrode abgeschiedene Stoffmenge ist der transportierten Ladung $Q = I \cdot t$ proportional.

Ein Ion der WERTIGKEIT Z trägt die Ladung $Z \cdot e$. Ist M die Molmasse und N_A die Avogadrozahl, so besteht die Beziehung

$$Q = (m/M) \cdot N_A \cdot Z \cdot e \quad \text{oder} \quad m = (M/Z) \cdot (1/(N_A \cdot e)) \cdot Q$$

$$M/Z = \text{AEQUIVALENTE MASSE}, \quad N_A \cdot e = F \quad \text{die FARADAY-ZAHL;}$$

$$F = 96487 \text{ C/mol.}$$

Das zweite Faraday'sche Gesetz lautet dann:

II. Durch gleiche elektrische Ladungen Q abgeschiedene Stoffmengen verhalten sich wie die äquivalenten Massen der betreffenden Stoffe.

$$m = (M/Z) \cdot Q/F$$

2.5 DIE KIRCHHOFF'schen GESETZE

Wir fragen jetzt nach der Stromverteilung innerhalb eines Leitersystems, in welchem die einzelnen stromführenden ZWEIGE in einem beliebigen NETZ verknüpft sind. Die Widerstände der einzelnen Leiter und die in ihnen allfällig vorhandenen Spannungsquellen seien vorgegeben; gesucht sind die einzelnen ZWEIGSTROEME I_k . Das Problem kann mit Hilfe der zwei Kirchhoff'schen Regeln gelöst werden.

$$1. \quad \sum I_k = 0, \quad \text{KNOTENREGEL}$$

In jedem Knoten (Verzweigungspunkt) ist die Summe der zufließenden gleich der Summe der wegfließenden Ströme. (Algebraische Summe).

$$2. \quad \sum I_k R_k = \sum U_k, \quad \text{MASCHENREGEL}$$

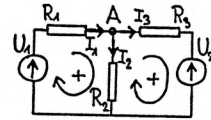
In jeder Masche (aus dem Leiternetz herausgegriffener, in sich geschlossener Stromkreis) ist die Summe der Spannungsabfälle in den einzelnen Zweigen gleich der Summe der wirkenden EMK's.

Die mit willkürlichen Pfeilrichtungen markierten, zunächst noch unbekanntem Stromrichtungen, müssen für die Maschenregel im Uhrzeigersinn etwa positiv, die andern negativ gerechnet werden. Ebenfalls sind die EMK's positiv zu zählen, wenn sie einen Strom im positiven Sinn hervorrufen.

Die Knotenregel folgt aus der Ueberlegung, dass in einem Knoten keine Ladung angehäuft werden kann und dass das Prinzip der

Ladungserhaltung gelten muss. Die Maschenregel ist eine Konsequenz der Grundgleichung (69). Im Beispiel des nebenstehenden Netzwerkes erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die unbekanntenen Zweigströme:

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 - I_3 &= 0 && \text{Knoten A} \\
 I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 &= U_1 && \text{Masche 1)} \\
 - I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 &= -U_2 && \text{Masche 2)}
 \end{aligned}$$

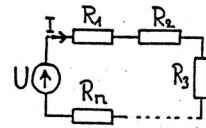


Bemerkung: Es ist ökonomischer, die Zweigströme als Superposition von Maschenströmen darzustellen, sodass die Knotenregel automatisch erfüllt ist (s. Übungen und Ergänzungen).

EINFACHE ANWENDUNGEN:

a) Serieschaltung von Widerständen

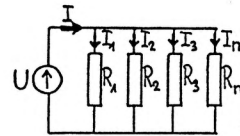
$$\begin{aligned}
 I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \dots + I \cdot R_n &= U \\
 I \cdot (R_1 + R_2 + \dots + R_n) &= U \\
 \text{(85)} \quad \boxed{R(\text{tot}) = R_1 + R_2 + \dots + R_n}
 \end{aligned}$$



b) Parallelschaltung von Widerständen

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n \\
 I_1 \cdot R_1 &= U && U/R_1 + U/R_2 + \dots + U/R_n = I \\
 I_2 \cdot R_2 &= U && \\
 \dots & && \\
 I_n \cdot R_n &= U && U/R(\text{tot}) = I
 \end{aligned}$$

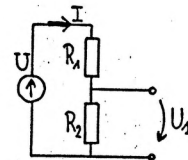
$$\text{(86)} \quad \boxed{1/R(\text{tot}) = 1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n}$$



c) Spannungsteiler (Potentiometer)

Im Leerlauf, d.h. mit R(Last)=∞, ist I = U/(R1+R2). Die Ausgangsspannung wird über R2 abgegriffen und beträgt somit ohne Belastung

$$\text{(87)} \quad \boxed{U_1 = U \cdot R_2 / (R_1 + R_2)}$$



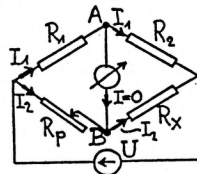
d) Die Wheatstone'sche Brücke

Das Potentiometer Rp wird so eingestellt, dass der Brückenstrom Ib verschwindet und somit die Potentiale U(A) und U(B) gleich sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_p \quad \text{und} \quad I_1 \cdot R_2 = I_2 \cdot R_x$$

R1, R2 und Rp sind bekannt, sodass Rx bestimmt werden kann:

$$\boxed{R_x = R_2 \cdot R_p / R_1}$$

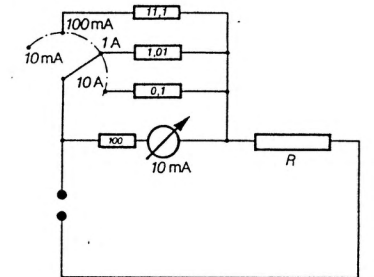
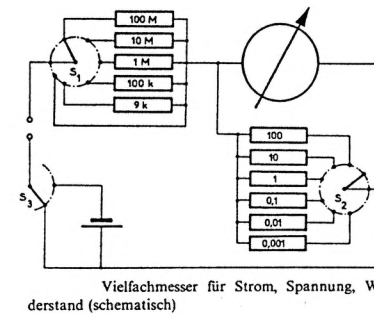


UEBUNG:

- a) Berechne die Ausgangsspannung eines Potentiometers, welches mit einem Widerstand R belastet wird.
- b) Berechne den Brückenstrom einer Wheatstone'schen Brücke als Funktion der vier Zweigwiderstände.

AMPERE- UND VOLT-METER:

Der Zeigerausschlag der meisten Messgeräte hängt nur vom Strom durch das Instrument ab (z.B. vom Strom durch die Drehspule). Innenwiderstand Ri und der für Vollausschlag erforderliche Strom I(max) charakterisieren das Instrument. Durch geeignete Parallelwiderstände (Shunt) kann der Strom-Messbereich erhöht werden. Andererseits kann das Amperemeter als Voltmeter verwendet werden, denn bei Vollausschlag liegt die Spannung U = I(max)·Ri über den Klemmen des Instrumentes. Durch Zuschalten von geeigneten Seriewiderständen wird der Messbereich erhöht.



Ein umschaltbares Amperemeter (verschiedene Parallelwiderstände oder Shunts) mißt den Strom durch den Verbraucher R

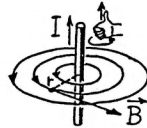
DEMONSTRATIONEN:

1. FALLENDE CHARAKTERISTIK DER BOGENLAMPE
2. KURZSCHLUSS-STROM & LEERLAUF-SPANNUNG EINER BATTERIE
3. ELEKTROLYTISCHE ZERSETZUNG VON WASSER
4. ELEKTROLYTISCHE ABSCHIEDUNG VON BLEI ("BLEIBAUM")
5. POTENTIOMETER
6. WHEATSTONE-BRUECKE
7. UMEICHEN EINES A-METERS ZU EINEM V-METER
8. VERGLEICH VON STATISCHEM- & STROMFUEHRENDEM V-METER
9. KOMPENSATIONSMETHODE

Wir wenden nun die Gesetze (89) oder (90) auf spezielle Leiterkonfigurationen an.

a) **B-FELD DES GERADLINIGEN STROMES**

Aus Symmetriegründen sind hier die **B**-Feldlinien sicher konzentrische Kreise zum Leiter. Die Anwendung des Ampère'schen Verkettungsgesetzes ist deshalb besonders einfach. Das Linienintegral längs einer Feldlinie mit Radius r ergibt dann $2 \cdot \pi \cdot r \cdot B(r)$, während das Integral auf der rechten Seite von (90) gleich dem Strom I ist. Wir erhalten



$$(92) \quad \underline{B(r) = \mu_0 I / (2 \pi \cdot r) .}$$

Beachte, dass die Richtung von **B** einen Umlaufsinn definiert, welcher mit der Stromrichtung ein "Rechtssystem" bildet ("rechte Handregel").

UEBUNG:

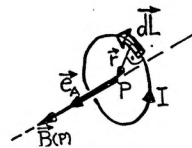
Veruche, das Resultat (92) durch Integration von (89) längs des geraden Drahtes zu erhalten.

b) **DAS B-FELD IM ZENTRUM EINES KREISSTROMES**

In diesem Fall bietet sich das Biot-Savart-Gesetz zur Lösung an. Der Aufpunkt P liegt im Zentrum des Kreisstromes, d.h. r ist konstant und $d\vec{L} \times \vec{e}_r = dL \cdot \vec{e}_A$. (89) liefert:

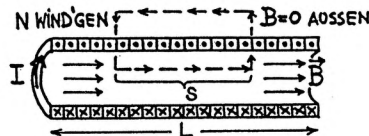
$$B = \mu_0 / (4 \cdot \pi) \cdot I \cdot 2 \cdot \pi \cdot r / r^2 \text{ und}$$

$$(93) \quad \underline{B = \mu_0 I / (2 \cdot r) \cdot \vec{e}_A .}$$



c) **B-FELD DER LANGEN, DUENNEN SPULE**

Eine Spule (Solenoid) sei im Vergleich zum Windungsradius sehr lang, sodass Randeffekte vernachlässigt werden können. Aus Symmetriegründen muss das **B**-Feld parallel zur Rotations-symmetrieachse liegen. Wir wenden das Ampère'sche Verkettungsgesetz (90) an und wählen den rechteckigen Integrationsweg entsprechend untenstehender Figur. Nur das achsenparallele Wegstück im Innern der Spule liefert Beiträge zum Linienintegral, denn die radial nach aussen verlaufenden Wegstücke stehen normal zum **B**-Feld und in grosser Entfernung von der Achse ist B=0. Die rechte Seite von (90) ergibt $\mu_0 N \cdot (s/L) \cdot I$, wenn L die Spulenlänge, N die Gesamtwindungszahl und s die Länge des im Innern der Spule liegenden achsenparallelen Wegstückes ist. Wir erhalten damit $B \cdot s = \mu_0 N \cdot (s/L) \cdot I$ oder

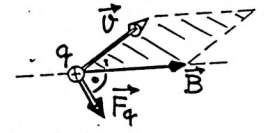


$$(94) \quad \underline{B = \mu_0 \cdot N \cdot I / L , \quad \text{MAGNETFELD DER LANGEN DUENNEN SPULE.}}$$

2.6 **DAS MAGNETISCHE FELD B STATIONAERER STROEME (MAGNETOSTATIK)**

Das magnetische Feld **B** hat die Eigenschaft, auf eine mit der Geschwindigkeit **v** bewegte Probeladung q eine Kraft **F_q** auszuüben und ist definiert durch die Beziehung

$$(87) \quad \underline{F_q = q \cdot v \times B , \quad \text{LORENTZKRAFT.}}$$



Aus dieser Definition ergibt sich für **B** die Dimension: (Kraft·Zeit/(Ladung·Länge)), und die Einheit: N·s/(C·m) oder Vs/m², 1 Vs/m² = 1 T (Tesla).

Die Lorentzkraft steht sowohl senkrecht auf **B** als auch auf die momentane Geschwindigkeit **v**, d.h. auf die Bahnkurve des geladenen Teilchens. Letzteres bedeutet:

DAS STATIONAERE MAGNETFELD LEISTET KEINE ARBEIT AM GELADENEN TEILCHEN.

Befindet sich ein stromführender Leiter, der n bewegliche Ladungsträger der Ladung q pro Volumeneinheit enthält, in einem Magnetfeld **B**, so erfährt jedes Leiterelement dL eine Kraft **dF**. Diese lässt sich mit (71) und (87) berechnen:

Ist der Leiterquerschnitt A, so enthält das Element der Länge dL gerade n·A·dL Ladungsträger, welche nach (87) die Kraft n·A·dL·q·v × B erfahren. Nach (71) ist aber n·q·v = j die Stromdichte und A·j = I die Stromstärke. Fassen wir das Leiterelement als Vektor dL in Richtung der Stromdichte auf, können wir schreiben:

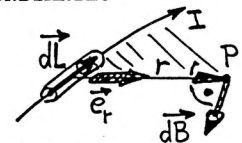
$$(88) \quad \underline{dF = I \cdot dL \times B , \quad \text{BIOT-SAVART-KRAFT.}}$$

Wir haben bisher festgestellt, dass bewegte Ladungen und stromführende Leiter im Magnetfeld Kräfte erfahren, ohne danach zu fragen, auf welche Weise **B**-Felder überhaupt zustande kommen. Experimente von Oersted (1819), Biot und Savart (1820) sowie Ampere (1820-1825), haben gezeigt, dass elektrische Ströme Magnetfelder verursachen. Die exakte Beziehung zwischen Strom und Magnetfeld kann durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$(89) \quad \underline{dB = \mu_0 / (4 \cdot \pi) \cdot I \cdot (dL \times e_r) / r^2 , \quad \text{BIOT-SAVART-GESETZ.}}$$

$$\underline{\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s} / (\text{A} \cdot \text{m}) , \quad \text{INDUKTIONSKONSTANTE.}}$$

Jedes Leiterelement erzeugt am festen Ort P (der betrachtete "Aufpunkt") einen Feldbeitrag dB gemäss (89). Das Gesamtfeld B in P erhält man durch Integration von (89) entlang des notwendigerweise geschlossenen Leiters. (89) führt durch mathematische Umformung auf



$$(90) \quad \underline{\oint B \cdot dr = \mu_0 \iint j \cdot dA , \quad \text{AMPERE'SCHES VERKETTUNGSGESETZ.}}$$

Und

$$(91) \quad \underline{\oint B \cdot dA = 0 , \quad \text{ES EXISTIEREN KEINE MAGNETISCHEN MONOPOLE.}}$$

Oder in differentieller Schreibweise:

$$(90a) \quad \underline{\text{rot } B = \mu_0 j} \quad \text{und} \quad (91a) \quad \underline{\text{div } B = 0 .}$$

2.7 BEWEGTE LADUNG IM \vec{B} -FELD; TECHNISCHE ANWENDUNGEN

2.7.1 Ladung im homogenen \vec{B} -Feld

Ein Teilchen der Masse m trägt die Ladung q und besitzt zur Zeit $t=0$ die Geschwindigkeit $\vec{v}(0)$ in einem homogenen, statischen Feld \vec{B} . Wie ändert sich \vec{v} als Funktion von t ? Welche Bahn beschreibt das Teilchen?

Wir zerlegen \vec{v} in eine Normalkomponente \vec{v}_\perp und eine Parallelkomponente \vec{v}_\parallel zu \vec{B} , schreiben also

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_\perp(t) + \vec{v}_\parallel(t).$$

Dies eingesetzt in (87), ergibt für die Kraft:

$$\vec{F}_q = q \cdot (\vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel) \times \vec{B} \quad \text{oder} \quad \vec{F}_q = q \cdot \vec{v}_\perp \times \vec{B}.$$

$\vec{v}_\parallel \times \vec{B} = 0$. \vec{F}_q besitzt keine Komponente parallel zu \vec{B} , sodass $\vec{v}_\parallel = \vec{v}_\parallel(0)$ konstant bleibt. In der Projektion auf eine Normalebene zu \vec{B} führt m eine gleichförmige Kreisbewegung aus, denn \vec{F}_q steht normal zu \vec{v}_\perp , wirkt als Zentripetalkraft und ändert den Betrag von \vec{v}_\perp nicht. Durch Gleichsetzen von Zentripetalkraft und Lorentzkraft

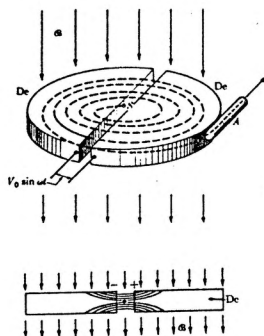
$$m \cdot v_\perp^2 / R = q \cdot v_\perp \cdot B \quad \text{folgt der Bahnradius}$$

$$(100) \quad R = m \cdot v_\perp / (q \cdot B), \quad \text{ZYKLOTRON-RADIUS.}$$

Beachte, dass der Krümmungsradius R bei gegebener Ladung q und bekanntem Feld B durch den **IMPULS** bestimmt wird. Anwendung: durch Ausmessen der Krümmungsradien von Teilchen-Bahnen in Blaskammern werden die Impulse von Reaktionsprodukten aus Elementarteilchenreaktionen bestimmt. Liegt eine Komponente v_\parallel vor, so ist die Teilchenbahn eine **SCHRAUBENLINIE** konstanter Steigung. Aus (100) ist ersichtlich, dass die Kreisfrequenz $\omega = v_\perp / R$ oder

$$(101) \quad \omega_{\text{ZYKL.}} = q \cdot B / m, \quad \text{die ZYKLOTRON-FREQUENZ,}$$

nicht von der Teilchengeschwindigkeit abhängt (für $v \ll c$). Diese Tatsache bildet die Grundlage der Teilchenbeschleunigung mit dem **ZYKLOTRON**. Im Prinzip besteht dieses aus einer senkrecht zum \vec{B} -Feld liegenden, diagonal aufgeschnittenen Metalldose, den beiden "Dee's", an welche eine Wechselspannung mit der Zyklotronfrequenz angelegt wird. Im Zentrum befindet sich eine Ionenquelle (z.B. eine Wasserstoff-Gasentladung zur Erzeugung von Protonen). Das im Spalt zwischen den Dee's herrschende \vec{E} -Feld hat unabhängig vom Radius der Teilchenbahn immer gerade das zur Beschleunigung nötige Vorzeichen. Der Bahnradius wächst mit jedem Energiezuwachs. Erreicht er einen bestimmten Maximalwert, wird das Teilchen durch eine Deflektorplatte ausgelenkt und fliegt tangentiell weg. Der Teilchenstrahl ist ein mit der Zyklotronfrequenz gepulster Strahl.



ÜBUNG:

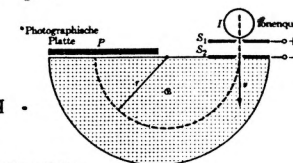
Ein Zyklotron besitzt einen Austrittsradius von $R=92$ cm, das Magnetfeld beträgt maximal $B=1,5$ T. Auf welche Energie (in eV) können Protonen beschleunigt werden? Wie gross ist die Frequenz ω (Zyklotron)/ $2\pi = f$ (Zyklotron)?

Das MASSENSPEKTROMETER:

Eine weitere Anwendung der Kraftwirkungen elektrischer und magnetischer Felder finden wir im Massenspektrometer. Ionen der Masse m und der Ladung q werden elektrostatisch beschleunigt und senkrecht zu den Feldlinien eines homogenen B-Feldes eingeschossen. Aus $m \cdot v^2 / 2 = q \cdot U$ und (100) ergibt sich der Bahnradius

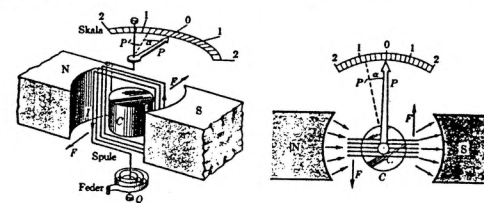
$$(102) \quad r = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{2 \cdot U \cdot (m/q)}.$$

Das Massenspektrometer misst den QUOTIENTEN m/q .



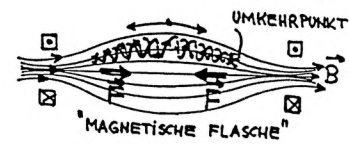
Das DREHPUL-INSTRUMENT ZUR MESSUNG VON GLEICHSTROM:

Aus den Gleichungen (95) und (96) ersehen wir, dass eine drehbar gelagerte, ebene Spule, die von einem \vec{B} -Feld durchsetzt wird, ein Drehmoment erfährt, welches dem Spulenstrom I proportional ist. Versieht man die Spule mit einer Torsionsfeder, ist der Drehwinkel einer **GLEICHSTROM** führenden Spule ein Mass für diesen Strom.



2.7.2 Ladung im inhomogenen Feld

Weil die Lorentzkraft immer senkrecht zur momentanen Geschwindigkeit zeigt, ist $v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2$ auch im inhomogenen \vec{B} -Feld eine konstante der Bewegung. Die spiralenförmige Bahn einer Ladung q erzeugt immer ein magnetisches Moment \vec{m} , welches zum \vec{B} -Feld antiparallel steht. $E(\text{pot}) = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ ist immer positiv, nimmt also im schwachen B-Feld den kleinsten Wert an. Dies bedeutet, dass eine Kraftkomponente vorhanden ist, welche das Teilchen aus dem Gebiet starker B-Felder fernhält, das inhomogene Feld wirkt als "magnetischer Spiegel". Es ist daher möglich, geladene Teilchen in einer "magnetischen Flasche" einzufangen. (s. Van Allen Strahlungsgürtel und Plasmaphysik).



2.7.3 Hall-Effekt (E. Hall, 1879)

Bringt man eine Leiterplatte, längs derer ein Strom fließt, in ein zur Platte senkrecht stehendes Magnetfeld, so tritt eine Potentialdifferenz zwischen gegenüberliegenden Punkten am Rand der Platte auf. Ursache für diese Hall-Spannung U_H , bzw. das damit verknüpfte Querfeld E_H , ist die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$, wobei \vec{v} die Driftgeschwindigkeit der beweglichen Ladungen q ist. Infolge dieser Kraft werden die Ladungsträger in dem Mass seitlich abgelenkt, dass das dadurch entstehende elektrische Feld \vec{E}_H gerade ausreicht, die Lorentzkraft zu kompensieren. Es ist

(103) $q \cdot \vec{E}_H = - q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

mit (71) kann v durch den Strom I und den Leiterquerschnitt $b \cdot d$ ausgedrückt werden, nämlich

$v = I / (n \cdot q \cdot b \cdot d)$.

Die Hall-Spannung $U_H = b \cdot E_H$ wird dann

(104) $U_H = 1 / (n \cdot q) \cdot I \cdot B / d$, HALL-SPANNUNG U_H .

Das reziproke Produkt aus Ladungsträgerkonzentration und Ladung bezeichnet man als die Hallkonstante eines Materials.

(105) $R_H = 1 / (n \cdot q)$, HALL-KONSTANTE.

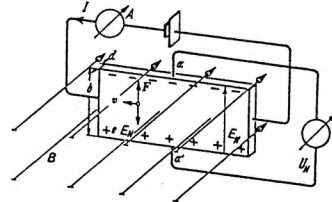
WICHTIG:

Eine Messung der Hallspannung $U_H = R_H I \cdot B / d$ nach Betrag und Vorzeichen, erlaubt bei Kenntnis von I , B und Probendicke d eine Bestimmung sowohl der KONZENTRATION der Ladungsträger als auch deren LADUNGSVORZEICHEN.

Bei Metallen sind die Ladungsträger Elektronen und es ist $R = -1 / (n \cdot e)$. Halbleiter, wie z.B. InAs, zeigen, verglichen mit Metallen, grosse Hall-Spannungen, weil hier n klein ist. Mit Hilfe von Halbleiter-Hallsonden können Magnetfelder bequem gemessen werden (handelsübliche "Gaussmeter").

DEMONSTRATIONEN:

1. ABLENKUNG BEWEGTER LADUNG IM B-FELD
2. MAGNETISCHE FELDLINIEN VON GERADLINIGEM STROM & KREISSTROM
3. BIOT-SAVART-KRAFT AUF STROMFÜHRENDEN LEITER
4. MAGNET ZERBRECHEN
5. TORUS-SPULE, LANGE DUENNE SPULE, STROMSCHLEIFE & PERMANENTMAGNET
6. HALL-EFFEKT
7. UNIPOLARINDUKTION
8. IONENREIBUNG
9. LORENTZ-SCHAUKEL
10. DREHSPULINSTRUMENT
11. LAUTSPRECHER
12. KRAFT ZWISCHEN STROEMEN



3. ZEITLICH VERAENDERLICHE STROEME (QUASISTATIONAERE STROEME)

Im Folgenden betrachten wir Ströme und Felder, die zeitlich nicht konstant sind. Die Aenderungen sollen aber so langsam sein, dass die Laufzeiten der Signale in unseren Netzwerken (Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit c) vernachlässigbar sind. Man nennt solche Ströme und Felder "quasistationär". Es stellt sich nun die Frage, ob die Maxwell'schen Gleichungen für stationäre Felder (s.Seite 38) auch auf zeitabhängige Felder anwendbar sind, oder ob sie revidiert werden müssen. Die Antwort gibt das Experiment.

3.1 EIN- & AUSSCHALTVOORGANG IM R-C-KREIS

Im nebenstehend dargestellten R-C-Kreis ist die Kapazität C zunächst ungeladen (Schalterstellung b). Zur Zeit $t=0$ wird der Schalter nach a) umgelegt, sodass infolge der wirkenden konstanten Spannung U_0 ein Ladestrom $I(t)$ fließt. Wie verhält sich $I(t)$ im Zeitintervall $0 \leq t < \infty$? In jedem Zeitpunkt t muss die Maschengleichung erfüllt sein. Ueber der Kapazität ist der Spannungsabfall $U_C = Q(t)/C$ und

(106) $I(t) \cdot R + Q(t)/C = U_0$.

Ableiten nach t führt wegen $dQ/dt = I$ auf

(107) $dI/dt + I/(R \cdot C) = 0$,

mit der allgemeinen Lösung

(108) $I(t) = I(0) \cdot \exp(-t/(RC))$.

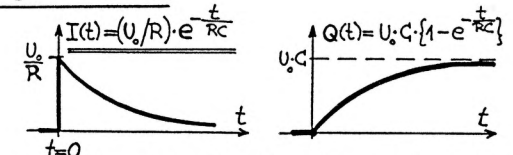
Zur Zeit $t=0$ liegt der gesamte Spannungsabfall über R (wegen $U_C = 0$), also wird $I(0) = U_0/R$ die Anfangsbedingung sein. Die Lösung lautet somit

(109) $I(t) = (U_0/R) \cdot \exp(-t/(RC))$.

Der Ladestrom nimmt exponentiell mit der ZEITKONSTANTEN $\tau = R \cdot C$ ab.

Die Ladung $Q(t)$ ergibt sich aus $Q(t) = \int_0^t I(t) \cdot dt$, also

(110) $Q(t) = C \cdot U_0 (1 - \exp(-t/(RC)))$.



Für $t \gg R \cdot C$ liegt die Gesamtspannung U_0 über C , d.h. der Kondensator trägt die Ladung $Q(\infty) = C \cdot U_0$. Ist die Kapazität geladen, und wird der Schalter zur Zeit $t=0$ bei b) geschlossen, so ergibt die Lösung von (107):

(111) $I(t) = - (U_0/R) \cdot \exp(-t/(R \cdot C))$

und

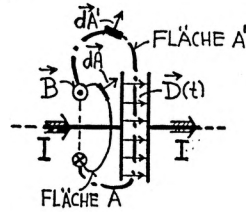
(112) $Q(t) = C \cdot U_0 \cdot \exp(-t/(R \cdot C))$.

3.2 DIE MAXWELL'sche ERGAENZUNG

Das für statische Felder gültige Ampère'sche Verkettungsgesetz (90) führt auf einen Widerspruch, wenn die Felder zeitabhängig sind. Wir können dies am speziellen Beispiel des Ladevorgangs beim Plattenkondensator einsehen. Der Integrationsweg des Linienintegrals von \vec{B} soll die Stromzuführung umschliessen und die Fläche A beranden, welche vom Strom I durchstossen wird. Es ist dann nach (90)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad \text{oder} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I.$$

Wählen wir jedoch als vom Integrationsweg berandete Fläche nicht A, sondern A', welche zwischen den Kondensatorplatten verläuft und folglich nicht von I durchstossen wird, so ergibt die rechte Seite null, anstatt I, obwohl das Linienintegral auf der linken Seite dasselbe geblieben ist. Dieser Widerspruch wird behoben, wenn das Ampere'sche Verkettungsgesetz (90) durch den



MAXWELL'schen VERSCHIEBUNGS-STROM

$$\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

ergänzt wird. (90) geht dann über in

$$(113) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint (\vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t) \cdot d\vec{A}.$$

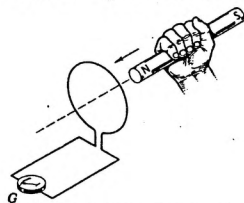
Dass diese Gleichung widerspruchsfrei ist, sehen wir an unserem speziellen Beispiel leicht ein, wenn wir beachten, dass der Betrag des Verschiebungsvektors \vec{D} gleich ist der Flächendichte der wahren Ladung auf den Kondensatorplatten. Es ist also

$$\iint_{A'} \vec{D} \cdot d\vec{A}' = Q \quad \text{und} \quad \iint_{A'} (\partial \vec{D} / \partial t) \cdot d\vec{A}' = I.$$

(113) wird unabhängig davon, ob A oder A' als Fläche gewählt wird. Man kann allgemeiner argumentieren und zeigen, dass die MAXWELL'sche ERGAENZUNG $\partial \vec{D} / \partial t$ zur Stromdichte \vec{j} im Ampère'schen Verkettungsgesetz zwingend aus dem Prinzip der LADUNGSERHALTUNG folgt.

3.3 INDUKTION (Michael FARADAY, 1831)

Bewegt man einen Permanentmagneten auf einen geschlossenen Leiterkreis zu, so fließt in diesem ein Strom. Zieht man den Magneten zurück, fließt ein Strom in umgekehrter Richtung. Ruht der Magnet relativ zum Leiterkreis, so fließt kein Strom. Der Permanentmagnet kann auch durch eine stromführende Spule ersetzt werden. Die Beobachtung lehrt:



Jede Aenderung des magnetischen Flusses durch eine von einem Leiter begrenzte Fläche, erzeugt in diesem **INDUKTIONSTROEME**, deren Stärke und Richtung von der Art der Aenderung abhängt.

Induktionswirkungen gehorchen der LENZ'schen REGEL:

DIE INDUKTIONSTROEME HABEN EINE SOLCHE RICHTUNG, DASS IHR EIGENES MAGNETFELD DER INDUZIERENDEN FLUSS-AENDERUNG ENTGEGENWIRKT, DER INDUZIERENDE VORGANG ALSO GEHEMT WIRD.

Weil natürlich der ENERGIESATZ erfüllt sein muss, erfordern induzierende Vorgänge (z.B. das Bewegen des Magneten) immer eine den Induktionswirkungen entsprechende ARBEIT.

Der Induktionsstrom im Leiterkreis ist eine Folge der **INDUZIERTEN E.M.K.**, (E.M.K. = $U(\text{ind})$), welche auch bei Abwesenheit des materiellen Leiters entlang einer geschlossenen Kurve C vorhanden ist. Bezeichnen wir den magnetischen Fluss durch C hindurch mit

$$(114) \quad \Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \text{MAGNETISCHER FLUSS } \Phi,$$

Einheit: $V \cdot s$, $1 V \cdot s = 1 \text{ Wb (Weber)}$,

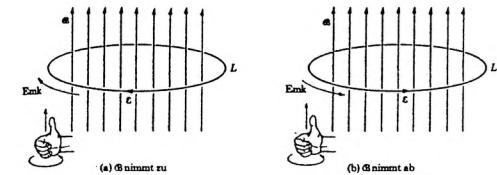
so wird die induzierte Spannung quantitativ beschrieben durch

$$(115) \quad U(\text{ind}) = - d\Phi / dt, \quad \text{FARADAY'sches INDUKTIONSGESETZ.}$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite beinhaltet die Lenz'sche Regel. Wir wollen zunächst annehmen, dass der geschlossene Weg im Laborsystem ortsfest ist. (115) kann auch in der Form geschrieben werden:

$$(116) \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - (d/dt) \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

\vec{E} ist das **INDUZIERTE ELEKTRISCHE FELD**. Beachte, dass der Umlaufsinn des Linienintegrals mit dem Vektor des Flächenelementes $d\vec{A}$ ein Rechtssystem bildet.



Das Induktionsgesetz in der Form (116) besagt, dass jedes zeitlich variable \vec{B} -Feld von einem \vec{E} -Feld umgeben ist, dessen Zirkulation nicht null ist. Aus der Definition von $\text{rot } \vec{E}$ nach (67), folgt die differentielle Formulierung von (116), (Satz von Stokes), nämlich

$$(117) \quad \text{rot } \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t, \quad \text{INDUKTIONSGESETZ in differentieller Form.}$$

Für zeitunabhängige \vec{B} -Felder gehen (116) und (117) über in (69) bzw. (69a), schliessen also den Fall statischer Felder ein. In (117) sind \vec{E} und \vec{B} im gleichen Koordinatensystem zu messen.

Das Induktionsgesetz in der Form (115) oder (116) ist aber auch gültig, wenn der Leiterkreis sich relativ zum \vec{B} -Feld bewegt, wenn unter \vec{E} in (116) jenes Feld verstanden wird, welches ein mit dem Leiter mitbewegter Beobachter misst. Unter $d\Phi/dt$ auf der rechten

Seite ist die **TOTALE ABLEITUNG** des magnetischen Flusses nach der Zeit zu verstehen; sie enthält im allgemeinen zwei Anteile: eine von der zeitlichen Variation $\partial/\partial t$ von $B(t)$ herrührende Aenderung, und eine Flussänderung, welche eine Folge einer geometrischen Variation des Leiterkreises ist. Als Beispiel betrachten wir den Fall einer im homogenen, zeitlich konstanten \vec{B} -Feld rotierenden Leiterschleife, wo also $\partial B/\partial t = 0$ ist.

ROTIERENDE LEITERSCHLEIFE IM HOMOGENEN \vec{B} -FELD:

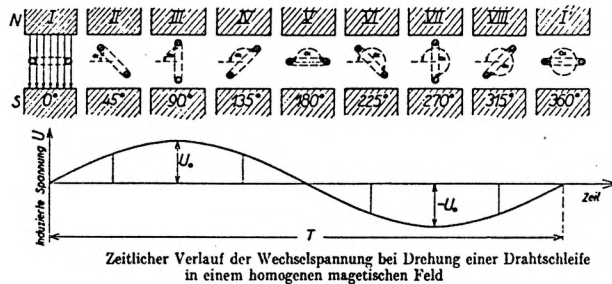
In einem zeitlich konstanten, homogenen Magnetfeld soll eine Leiterschleife, welche die Fläche A umschliesst, um eine zum \vec{B} -Feld senkrecht stehende Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Der Flächenvektor \vec{A} bildet mit \vec{B} den Winkel $\varphi = \omega \cdot t$. Der Fluss $\Phi(t)$ durch A ist dann

(118) $\Phi(t) = B \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t).$

Nach dem Faraday'schen Induktionsgesetz (115) resultiert in der Leiterschleife die induzierte Spannung

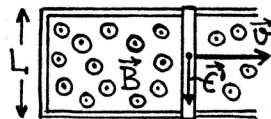
(119) $U(\text{ind}) = \omega \cdot B \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t).$

Das Prinzip des Wechselspannungsgenerators beruht auf (119).



3.4 RELATIVITÄTS-PRINZIP UND INDUKTIONSGESETZ

Das Relativitätsprinzip besagt, dass die physikalischen Gesetze in verschiedenen Inertialsystemen die gleichen sind. Ist die Relativgeschwindigkeit $|\vec{v}|$ zweier Systeme klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c , so sind die Raum- und Zeitkoordinaten durch die Galileitransformation verknüpft (s. Mechanik, Seite 15). Die Gesetze müssen dann **INVARIANT** gegenüber **GALILEI-TRANSFORMATION** sein. Dass das Faraday'sche Induktionsgesetz (116) diese Forderung erfüllt, können wir an folgendem Beispiel einsehen: Eine rechteckige Leiterschleife wird von einem zeitlich konstanten, homogenen Magnetfeld \vec{B} durchsetzt. Die eine Seite des Rechtecks besteht aus einem beweglichen Leiterstück der Länge L , das sich mit der Geschwindigkeit v nach rechts verschiebt. Ein Beobachter im Laborsystem gibt folgende Interpretation: Die magnetische Flussänderung ist $d\Phi/dt = B \cdot L \cdot v$, die induzierte Spannung wird nach (116)



(120) $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = - B \cdot L \cdot v.$

Nun betrachten wir den Vorgang im mit \vec{v} nach rechts bewegten System S' , in welchem das Leiterstück der Länge L ruht. Wieder können wir (116) anwenden. Der im Labor feste Leiter und das \vec{B} -Feld bewegen sich jetzt mit $\vec{v}' = -\vec{v}$ nach links, die Flussänderung pro Zeiteinheit und die im Kreis induzierte Spannung stimmt mit (120) überein. Wenn der in S' sitzende Beobachter jedoch vom \vec{B} -Feld nichts weiss, wird er die Situation anders interpretieren: im Leiterstück L stellt er ein elektrisches Feld \vec{E}' fest, denn die Ladungsträger erfahren die Lorentzkraft $q \cdot \vec{v}' \times \vec{B}$, die er als elektrostatische Kraft $q \cdot \vec{E}'$ deutet. Im rechteckigen Kreis misst er somit die E.M.K

(121) $\oint \vec{E}' \cdot d\vec{r} = - B \cdot L \cdot v,$

was mit (120) wiederum übereinstimmt (Umlaufsinn wie in (120)).

Das Faraday'sche Induktionsgesetz steht im Einklang mit dem Prinzip der Relativität der elektromagnetischen Felder. Wir halten fest: misst ein Beobachter O in seinem Koordinatensystem S ein elektrisches Feld \vec{E} und ein Magnetfeld \vec{B} , so misst der Beobachter O' im mit \vec{v} bewegten System S' das elektrische Feld

(122) $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}.$

(122) gilt nur, wenn Glieder der Ordnung $(v/c)^2 \ll 1$ vernachlässigt werden. Die streng korrekten Transformations-Gleichungen sind die der **LORENTZ-TRANSFORMATION** der speziellen Relativitätstheorie, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Die Grundgleichungen der Elektrodynamik sind gegenüber der Elektrostatik durch die Maxwell'sche Ergänzung im Ampere'schen Verkettungsgesetz und durch das Induktionsgesetz zu modifizieren. Die **MAXWELL'SCHEN GLEICHUNGEN IM VAKUUM** lauten :

INTEGRALE FORM	DIFFERENTIELLE FORM
1. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = (1/\epsilon_0) \cdot \iiint \rho \cdot dV,$	$\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0,$
2. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0,$	$\text{div } \vec{B} = 0,$
3. $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = - (d/dt) \cdot \iint \vec{B} \cdot d\vec{A},$	$\text{rot } \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t,$
4. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \iint (\vec{j} + \epsilon_0 \cdot \partial \vec{E} / \partial t) \cdot d\vec{A},$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \cdot \partial \vec{E} / \partial t).$

Diese vier Gleichungen beschreiben die Elektrodynamik im Vakuum vollständig. Sie geben den Zusammenhang zwischen elektrischem Feld \vec{E} und magnetischem Feld \vec{B} bei gegebenen Stromverteilungen und Ladungsverteilungen. Diese formalen Beziehungen entsprechen den klassischen Gesetzen der Elektrizitätslehre:

1. COULOMB'sches GESETZ, bzw. GAUSS'sches DURCHFLUTUNGSGESETZ.
2. GAUSS'scher SATZ DER MAGNETOSTATIK (es gibt keine magn. Monopole).
3. FARADAY'sches INDUKTIONSGESETZ.
4. AMPERE-MAXWELL'sches GESETZ.

3.5 DAS BETATRON

Das Betatron ist ein Elektronenbeschleuniger, welcher zwei Eigenschaften des \vec{B} -Feldes gleichzeitig ausnützt: einerseits hält die Lorentzkraft $\vec{F}_q = -e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ die Elektronen auf einer Kreisbahn, andererseits erzeugt die zeitliche Änderung $\dot{\phi}$ des magnetischen Flusses das zur tangentiellen Beschleunigung der Elektronen erforderliche \vec{E} -Feld. Es besteht aus einer evakuierten Toroidröhre, deren Kreisebene zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten liegt, welcher das Feld $B(r)$ erzeugt. Damit die Elektronen im Toroid kreisen, muss nach (100) die Beziehung erfüllt sein

$$(123) \quad m \cdot v = e \cdot R \cdot B(R) \quad R = \text{Bahnradius im Toroid.}$$

Der magnetische Fluss durch den umlaufenen Kreisquerschnitt ist $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$, oder wenn wir das über die Kreisfläche gemittelte Magnetfeld mit $B(\text{mittel})$ bezeichnen,

$$\phi = \pi \cdot R^2 \cdot B(\text{mittel}).$$

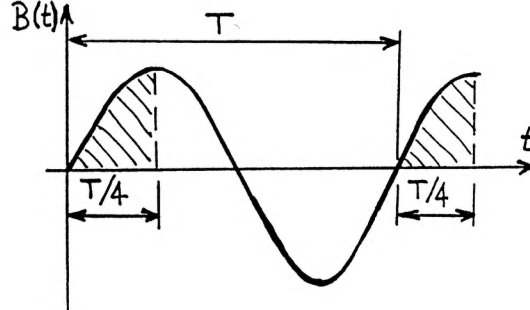
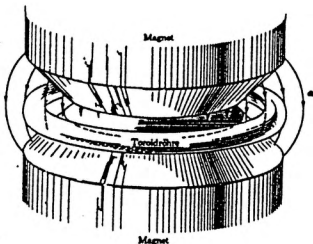
Ist B zeitabhängig, so ergibt das Induktionsgesetz (116) das tangentiell wirkende elektrische Feld $E = \pi \cdot R^2 \cdot \dot{B}(\text{mittel}) / (2 \cdot \pi \cdot R)$ oder die Kraft $F(\text{tang})$

$$(124) \quad F(\text{tang}) = e \cdot R \cdot \dot{B}(\text{mittel}) / 2.$$

Differenzieren von (123) nach der Zeit führt auf $m \cdot \dot{v} = e \cdot R \cdot \dot{B}(R)$, wobei $m \cdot \dot{v} = F(\text{tang})$ ist. Dies in (124) eingesetzt, liefert die Bedingung, welcher der Feldverlauf $B(r)$ genügen muss, damit bei zeitlich sich änderndem B -Feld der Bahnradius R konstant bleibt:

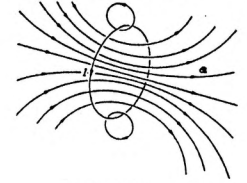
$$(125) \quad \boxed{B(R) = B(\text{mittel}) / 2} \quad \text{BEDINGUNG für das FELD } B(r) \text{ im BETATRON mit Bahnradius } R.$$

Die Polflächen des Magneten müssen derart gestaltet sein, dass (125) erfüllt ist. Der Elektromagnet wird mit Wechselstrom der Periode T betrieben. Nur während des Zeitintervalls $T/4$ jeder Periode, wo $B(t)$ und dB/dt positiv sind, werden die Elektronen beschleunigt und auf ihrer Bahn gehalten. Es handelt sich also um eine gepulste Elektronenquelle. Im Zeitpunkt niedrigen B -Feldes werden Elektronen ins Toroid injiziert, im Zeitbereich des maximalen B -Feldes werden sie aus der Kreisbahn ausgelenkt. Es sind Betatrons bis zu Energien von 350 MeV für kernphysikalische Untersuchungen gebaut worden. Eine wichtige Anwendung ist die Verwendung des Betatrons zur Erzeugung von Röntgenstrahlen hoher Energie für die Krebstherapie.



3.6 SELBSTINDUKTION

Jeder Leiterkreis, der einen Strom I führt, wird von einem magnetischen Fluss ϕ durchsetzt, der nach dem Biot-Savart-Gesetz (89) proportional I sein muss. Wir bezeichnen die Proportionalitätskonstante mit L . Sie ist durch die Leitergeometrie bestimmt und hat somit einen festen Wert für jeden starren Leiter. Es ist



Magnetischer Fluss in einem Stromkreis.

$$(126) \quad \boxed{\phi = L \cdot I} \quad \text{und} \quad \boxed{d\phi/dt = L \cdot dI/dt}.$$

Nach dem Induktionsgesetz (115) wird eine der Stromänderung entgegengerichtete Spannung induziert (LENZ'sche REGEL).

$$(127) \quad \boxed{U(\text{ind}) = -L \cdot dI/dt}, \quad \text{SELBSTINDUKTIONSKOEFFIZIENT } L, \text{ Einheit: Vs/A, } 1\text{Vs/A} = 1 \text{ H (Henry)}$$

Als Spezialfall eines Leiters wollen wir eine lange, dünne Spule vom Querschnitt A , mit der Länge ℓ und der totalen Windungszahl N betrachten. Das homogene B -Feld im Innern der Spule ist nach (94) $B = \mu_0 \cdot N \cdot I / \ell$, der Fluss durch jede Windung $A \cdot B$, der Gesamtfluss durch den Leiterkreis also $\phi = \mu_0 \cdot N^2 \cdot A \cdot I / \ell$.

$$\dot{\phi} = (\mu_0 \cdot N^2 \cdot A / \ell) \cdot \dot{I},$$

$$(128) \quad \boxed{L = \mu_0 \cdot N^2 \cdot A / \ell}, \quad \text{SELBSTINDUKTIONSKOEFFIZIENT DER LANGEN, DÜNNEN SPULE.}$$

Beachte: die INDUKTIVITÄT irgend eines Leiters wird durch das Symbol einer Spule dargestellt und bedeutet ein IDEALISIERTES SCHALTELEMENT. Spulen sind wirkliche Elemente, sie besitzen neben ihrer Induktivität L im allgemeinen auch einen Ohm'schen Widerstand R und eine Kapazität C (weil zwischen den einzelnen Windungen elektrische Felder vorhanden sind).

3.7 EIN- & AUSSCHALT VORGANG IM R-L-KREIS; ENERGIEDICHTE IM B-FELD

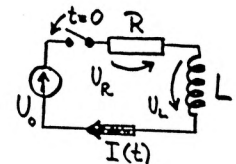
Im nebenstehend dargestellten Stromkreis wird der Schalter zur Zeit $t=0$ geschlossen, d.h. die Spannung U_0 angelegt. Wie verhält sich der Strom $I(t)$? Ueber der Induktivität L ist nur ein Spannungsabfall U vorhanden, solange dI/dt nicht null ist und die induzierte Gegenspannung $-L \cdot dI/dt$ kompensiert werden muss. $U_L = L \cdot dI/dt$. Die Maschengleichung lautet:

$$I(t) \cdot R + L \cdot dI/dt = U_0$$

oder

$$\boxed{\dot{I} + (R/L) \cdot I = U_0/L}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:



$$(129) \quad \boxed{I(t) = (U_0/R) \cdot (1 - \exp(-(R/L) \cdot t))}.$$

Zur Zeit $t=0$ fließt noch kein Strom, für $t \gg L/R$ wird $I = U_0/R$, denn der gesamte Spannungsabfall liegt dann über R . Die Zeitkonstante ist $\tau = L/R$. Wäre kein Ohm'scher Widerstand vorhanden,

würde der Strom linear ins Unermessliche ansteigen; es wäre immer $dI/dt = U_0/L$.

Um den Strom I durch L zu erzeugen, muss die Spannungsquelle die Arbeit

$$W = \int_0^t U_L \cdot I \cdot dt \quad \text{oder} \quad W = L \int_0^I (dI/dt) \cdot I \cdot dt \quad \text{abgeben.}$$

Dies ist aber $W = L \int_0^I I \cdot dI$ oder

$$(130) \quad \boxed{W = L \cdot I^2 / 2} \quad \text{IN DER INDUKTIVITÄT L GESPEICHERTE ENERGIE, WENN DER STROM I FLIESST.}$$

Diese Energie wird durch das aufgebaute Magnetfeld repräsentiert. Ziehen wir das homogene B-Feld der langen, dünnen Spule heran, so folgt aus (128):

$$W = (\mu_0 \cdot N^2 \cdot A / \ell) \cdot I^2 / 2.$$

Division durch das Spulenvolumen $A \cdot \ell$ und Benützung von $B = \mu_0 \cdot N \cdot I / \ell$, führt auf die Energiedichte des Magnetfeldes

$$(131) \quad \boxed{w = (1/2) \cdot B^2 / \mu_0} \quad \text{ENERGIEDICHTE DES MAGNETFELDES.}$$

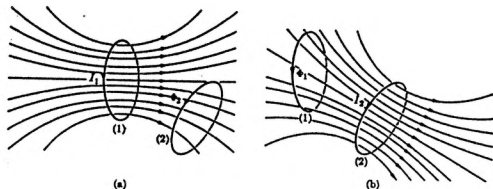
Wird der Schalter im R-L-Seriekreis geöffnet, wenn der vorhandene Strom U_0/R fließt, so erzeugt der grosse negative Wert von dI/dt eine riesige induzierte Spannung in L, welche den Strom aufrechterhalten möchte. Dies führt zu einem unerwünschten Spannungsdurchschlag im Schalter. Solche "Ausschaltspitzen" lassen sich vermeiden, wenn eine Kapazität parallel zur Induktivität gelegt wird.

Geht die Spannung U_0 zur Zeit $t=0$ (beim Strom U_0/R) auf null zurück, ohne dass der Stromkreis unterbrochen wird, so fällt der Strom exponentiell mit der Zeitkonstanten R/L auf null ab. Die in L gespeicherte magnetische Energie wird in R in Joule'sche Wärme verwandelt.

3.8 GEKOPPELTE STROMKREISE; GEGENINDUKTIVITÄET M

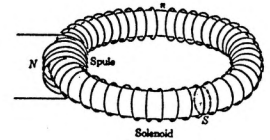
Liegen zwei benachbarte Stromkreise 1 und 2 vor, so wird im allgemeinen der Strom I_1 im ersten Kreis einen magnetischen Fluss durch den Kreis 2 erzeugen. Jede Stromänderung dI_1/dt wird eine induzierte Spannung $U_{12}(\text{ind})$ im Kreis 2 zur Folge haben. Die entsprechende Wirkung $U_{21}(\text{ind})$ hat dI_2/dt in 2 auf Kreis 1. Der Koeffizient der gegenseitigen Induktion M ist definiert durch

$$(132) \quad \boxed{U_{12}(\text{ind}) = - M \cdot dI_1/dt} \quad \text{und} \quad \boxed{U_{21}(\text{ind}) = - M \cdot dI_2/dt}.$$



Der Koeffizient M der gegenseitigen Induktion ist ein Mass für die Kopplung zweier Kreise. Ein wichtiger Vertreter eines gekoppelten Systems ist der TRANSFORMATOR, wo Primär- und Sekundärkreis induktiv gekoppelt sind (siehe Abschnitt Wechselstrom).

Hier betrachten wir als spezielles Beispiel eine Spule 1 mit N Windungen, die um den Mittelteil eines Toroidsolenoids 2 mit n Windungen pro Längeneinheit und einem Querschnitt A gewickelt sind. Das B-Feld der Toroidspule 2 ist $B = \mu_0 \cdot n \cdot I$, sein Fluss durch die Spule 1 somit $\Phi = \mu_0 \cdot N \cdot A \cdot n \cdot I$. Die Gegeninduktivität beträgt



$$(133) \quad \boxed{M = \mu_0 \cdot N \cdot n \cdot A}.$$

Schreibt man die Maschengleichungen für gekoppelte Stromkreise auf, so erscheinen die gegeninduzierten Spannungen (132) zusätzlich zu allfällig in den Kreisen vorhandenen E.M.K.'s auf der rechten Seite. Handelt es sich speziell um GEKOPPELTE SCHWINGKREISE, so entstehen gekoppelte Differentialgleichungen, analog zu jenen für gekoppelte Pendel (s. Mechanik, Seite 88). Ihre Lösungen ergeben im allgemeinen ebenfalls Energieaustausch zwischen den Kreisen, begleitet von Schwebungserscheinungen.

3.9 MATERIE IM MAGNETFELD; MAGNETISCHE SUSZEPTIBILITÄET χ_m

Schalten wir bei der oben dargestellten Anordnung den Strom I in der Toroidspule aus, so wird in der Spule mit N Windungen eine Spannung induziert, welche dem Feld B (Vakuum) im Toroid, beim Strom I, proportional ist, d.h. das B-Feld lässt sich auf diese Weise aus der Induktionswirkung bestimmen. Füllen wir nun das ganze Toroidvolumen mit Materie, stellen wir experimentell fest, dass, bei gleichem Strom I, das Feld B (Materie) von B (Vakuum) verschieden ist. Wir definieren die Materialkonstante μ_r :

$$(134) \quad \boxed{\mu_r = B(\text{Materie}) / B(\text{Vakuum})}, \quad \text{RELATIVE PERMEABILITÄET } \mu_r.$$

Die Abweichung der relativen Permeabilität von eins, $\mu_r - 1$, bezeichnen wir als

$$(135) \quad \boxed{\chi_m = \mu_r - 1}, \quad \text{MAGNETISCHE SUSZEPTIBILITÄET } \chi_m.$$

Bezüglich ihrer magnetischen Suszeptibilität teilen wir die Stoffe in drei Hauptgruppen ein:

- a) DIAMAGNETISCHE STOFFE, $\chi_m < 0$.

Wismut,	Bi,	$\chi_m = -165 \cdot 10^{-6}$
Quecksilber,	Hg,	- 28 10^{-6}
Gold,	Au,	- 34 10^{-6}
- b) PARAMAGNETISCHE STOFFE, $\chi_m > 0$.

Platin,	Pt,	$\chi_m = +280 \cdot 10^{-6}$
Aluminium,	Al,	+ 21 10^{-6}
- c) FERROMAGNETISCHE STOFFE, $\chi_m \gg 1$.

Eisen	Fe(4%Si),	$\chi_m = 5800$
Nickel	Ni(0,7%Mn),	1120
μ -Metall (NiFeCuCr),		110000.

Probekörper dieser drei Stoffgruppen zeigen unterschiedliches Verhalten, wenn man sie in ein **INHOMOGENES MAGNETFELD** bringt. Diamagnetische Stoffe erfahren Kräfte, die zu schwachen Feldgebieten hin zeigen. Para- und ferromagnetische Stoffe werden ins starke B-Feld gezogen. Die Kraftwirkung auf Ferromagnete ist einige tausend mal grösser, als auf para- oder diamagnetische Stoffe.

3.9.1 Mikroskopisches Modell; Magnetisierung \vec{M}

Atome oder Moleküle können ein magnetisches Moment \vec{m} besitzen, dessen Ursprung in der Bewegung der Elektronen um den Atomkern ("Bohr'sche Bahnen") begründet ist.

Die Atome **DIAMAGNETISCHER SUBSTANZEN** besitzen **KEIN MAGNETISCHES MOMENT \vec{m}** , wenn kein äusseres \vec{B} -Feld vorhanden ist.

PARAMAGNETISCHE ATOME haben auf Grund ihrer elektronischen Struktur ein **PERMANENTES MAGNETISCHES MOMENT \vec{m}** .

In **FERROMAGNETISCHEN STOFFEN** bilden sich **DOMAENEN**, die sogenannten **WEISS'schen BEZIRKE** aus, innerhalb derer die atomaren magnetischen Momente unter sich parallel ausgerichtet sind. Die lineare Ausdehnung der Domänen kann sehr verschieden sein, typisch etwa 0,1 mm.

Zunächst sind bei Para- und Ferromagneten makroskopisch keine resultierenden magnetischen Momente vorhanden (bei Ferromagneten möglich), weil die mikroskopischen Momente statistisch verteilt sind. Was passiert nun beim Anlegen eines äusseren \vec{B} -Feldes ?

a) DIAMAGNETISMUS:

Durch die Induktionswirkung beim Einbringen in ein \vec{B} -Feld werden die atomaren Elektronenströme so modifiziert, dass alle Atome **DEM \vec{B} -FELD ENTGEGENGERICHTETE MAGNETISCHE MOMENTE \vec{m}** bilden (Lenz'sche Regel). Die Ausrichtung ist **TEMPERATUR-UNABHÄNGIG**.

b) PARAMAGNETISMUS

Die permanenten, zunächst ungeordneten atomaren Momente \vec{m} , versuchen sich im \vec{B} -FELD **AUSZURICHTEN**, werden aber durch die Temperaturbewegung in diesem Prozess behindert. Der Paramagnetismus ist **TEMPERATURABHÄNGIG**. Im Gegensatz zum Diamagnetismus liegen hier die Momente \vec{m} mehrheitlich parallel zum angelegten Feld.

c) FERROMAGNETISMUS

Die Bildung von Weiss'schen Domänen ist nur **UNTERHALB** einer **KRITISCHEN TEMPERATUR T_c** , der **CURIE-TEMPERATUR** des betreffenden Materials möglich (z.B. $T_c=1047$ K für Fe). Beim Anlegen des äusseren \vec{B} -Feldes passieren zwei Dinge: die in Feldrichtung magnetisierten Domänen wachsen auf Kosten der andern durch Verschieben ihrer Domänenwände, die ungünstig gerichteten Domänen drehen sich als Ganzes in die Feldrichtung (**UMKLAPP-PROZESS**).

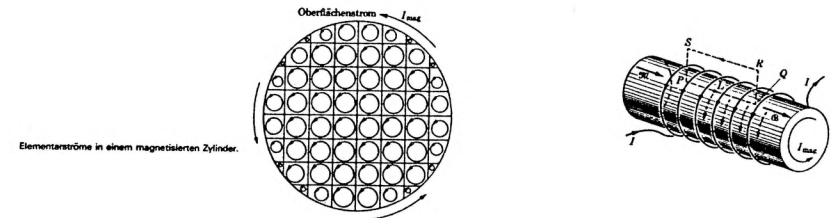
DIE MAGNETISIERUNG \vec{M} :

Enthält das Volumen V die Anzahl N atomare magnetische Momente \vec{m}_i , so ist das makroskopische magnetische Moment pro Volumeneinheit

$$(136) \quad \vec{M} = (1/V) \cdot \sum_{i=1}^N \vec{m}_i, \quad \text{die MAGNETISIERUNG } \vec{M}.$$

Dimension: Strom·Fläche/Volumen,
Einheit: A/m .

Betrachten wir nun einerseits einen langen, dünnen Hohlzylinder der Länge L, mit kreisförmigem Querschnitt A, in dessen Mantelfläche der Kreisstrom I fliesst, und andererseits ein Stück Materie derselben Form, welches homogen in Richtung der Mantellinien die Magnetisierung \vec{M} aufweist. Das magnetische Dipolmoment des Stromes im Hohlzylinder ist definitionsgemäss $I \cdot A$, sodass $I \cdot A / (A \cdot L) = I/L$ sein magnetisches Moment pro Volumeneinheit ist. Setzen wir $I/L = M$, so ist die Stromkonfiguration des Hohlzylinders jener des mit \vec{M} magnetisierten Materials gleicher Geometrie äquivalent. Diese Tatsache ist auch daran ersichtlich, dass sich die mikroskopischen Kreisströme im Innern aufheben und nur der Strom in der Mantelfläche übrigbleibt.



Wendet man diesen Sachverhalt auf die mit Materie gefüllte Toroidspule auf Seite 50 an, kann folgendermassen argumentiert werden: die Spule mit $n = N/L$ Windungen pro Meter erzeugt das B-Feld $B_0 = \mu_0 \cdot I \cdot N/L$; die Magnetisierung \vec{M} der Materie wirkt selbst wie eine Spule und liefert den Beitrag $B_1 = \mu_0 \cdot M$ ans Gesamtfeld. Wir können schreiben

$$(137) \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot (N \cdot I/L + M).$$

Einführung des Feldes

$$(138) \quad \vec{H} = N \cdot I/L, \quad \text{MAGNETISCHE ERREGUNG } H,$$

ergibt:

$$(139) \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}).$$

Das \vec{H} -FELD wird durch "WAHRE" STROEME erzeugt. (Mit dem Amperemeter messbare Leiterströme).

Die **MAGNETISIERUNG** wird durch **MIKROSKOPISCHE STROEME** in der Materie erzeugt.

Das \vec{B} -FELD entspringt sowohl "WAHREN", als auch **MIKROSKOPISCHEN STROEMEN**.

MAGNETISCHE SUSZEPTIBILITAET χ_m UND PERMEABILITAET μ_r :

In Analogie zur Gleichung (58) der Elektrostatik, $\vec{P} = \chi_e \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$, müsste nun die Magnetisierung \vec{M} dem wirkenden \vec{B} -Feld proportional gesetzt werden. Aus historischen Gründen tun wir das nicht, sondern definieren die magnetische Materialkonstante χ_m durch

(140) $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, **MAGNETISCHE SUSZEPTIBILITAET χ_m .**

Einsetzen in (139) ergibt

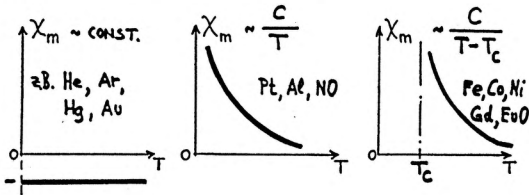
(141) $\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot \vec{H}$, **PERMEABILITAET $(1 + \chi_m) = \mu_r$.**

Die mikroskopische Betrachtung, basierend auf der Magnetisierung \vec{M} , führt uns gerade zu den in (134) und (135) phänomenologisch eingeführten Beziehungen. Die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität χ_m für paramagnetische Stoffe gehorcht der Beziehung

(142) $\chi_m = \text{const}/T$, **CURIE-GESETZ.**

Ferromagnete zeigen oberhalb der Curie-Temperatur T_c paramagnetisches Verhalten:

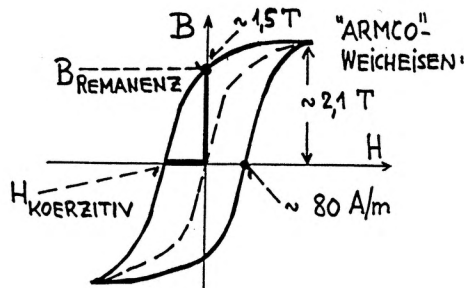
(143) $\chi_m = \text{const}/(T - T_c)$, **CURIE-WEISS-GESETZ.**



DIE HYSTERESE:

Wirkt auf einen Ferromagneten, der zunächst unmagnetisiert sein soll, eine magnetische Erregung \vec{H} , so wird seine Magnetisierung \vec{M} , und damit auch die Induktion $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, im $B(H)$ -Diagramm auf der sogenannten "Neukurve" anwachsen. Wird H wieder auf null reduziert, so bleibt eine gewisse Magnetisierung M und das **REMANENZ-FELD $B(H=0) = B(\text{REMANENZ})$** erhalten (Permanentmagnet). Um B zum Verschwinden zu bringen, ist das entgegengerichtete Koerzitivfeld **$H(\text{KOERZITIV})$** erforderlich. Oszillation des H -Feldes führt auf die **HYSTERESIS-SCHLEIFE**.

Beachte: Die von der Hysteresisschleife umschlossene Fläche hat die Dimension Arbeit/Volumen. Sie ist gleich der Arbeit, die bei einem Magnetisierungszyklus pro Volumeneinheit des betreffenden Stoffes verbraucht wird.



3.9.2 Stetigkeitsbedingungen für \vec{H} - & \vec{B} -Feldlinien an Grenzflächen

Nachdem wir nun neben dem elektrischen Feld \vec{E} und dem Magnetfeld \vec{B} die elektrische Verschiebungsdichte \vec{D} , sowie die magnetische Erregung \vec{H} eingeführt haben, können wir die Maxwell'schen Gleichungen in allgemeiner, auch bei Anwesenheit von Materie gültiger Form anschreiben. Sie lauten in differentieller Form:

(144)
$$\begin{matrix} 1. & \text{div } \vec{D} = \rho , & 2. & \text{div } \vec{B} = 0 , \\ 3. & \text{rot } \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t , & 4. & \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t . \end{matrix}$$

Ferner gelten die **MATERIALGLEICHUNGEN:**

(145)
$$\vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} , \quad \vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} , \quad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} .$$

Ueber das Verhalten der \vec{B} - und \vec{H} -Feldlinien an Grenzflächen geben die Gleichungen 2 und 4 Auskunft. Wählen wir zur Bildung von $\text{div } \vec{B}$ ein zylindrisches Volumenelement so, dass eine Deckfläche unmittelbar oberhalb, die andere unmittelbar unterhalb der Grenzfläche zweier Medien liegt, folgt aus 2:

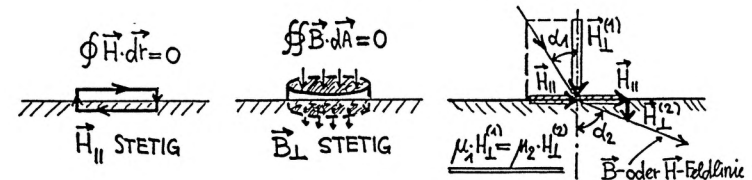
DIE NORMALKOMPONENTE VON \vec{B} AUF DIE GRENZFLAECHE IST STETIG.

Wählen wir andererseits zur Bildung von $\text{rot } \vec{H}$ einen rechteckigen Weg, dessen eine lange Seite unmittelbar über der Grenzfläche, die andere darunter verläuft, während die Schmalseiten des Rechtecks beliebig kurz sind, die Rechtecksfläche also gegen null geht, so folgt aus 4:

DIE TANGENTIALKOMPONENTE VON \vec{H} AUF DIE GRENZFLAECHE IST STETIG.

Aus untenstehender Figur kann man ablesen, dass die mit dem Lot zur Grenzfläche von den Feldlinien gebildeten Winkel α_1 und α_2 der Bedingung genügen:

(146) $\text{tg } \alpha_1 / \text{tg } \alpha_2 = \mu_1 / \mu_2$, **BRECHUNGSGESETZ für MAGNETISCHE FELDLINIEN.**



Aus (146) ersieht man, dass beim Uebergang magnetischer Feldlinien von z.B. Luft in ein ferromagnetisches Material, wegen $\mu_2 \gg 1$, der Winkel α_2 nahe bei 90 Grad liegt. Magnetische Feldlinien haben die Tendenz, im Innern von Ferromagneten entlang deren Oberfläche zu laufen, während sie aussen fast senkrecht zur Grenzfläche stehen. Oberflächen von Ferromagneten sind nahezu "magnetische Aequipotentialflächen".

UEBUNGSAUFGABE: Berechne das B -Feld im Luftspalt d eines Elektromagneten. Stromwindungszahl, mittlerer Weg der Feldlinien im Eisenjoch und dessen Permeabilität sind gegeben.

DEMONSTRATIONEN:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. R-C-KREIS | 2. TRANSFORMATOR-VERSUCH NACH ELIHU THOMSON |
| 3. LENZ'sche REGEL, STABMAGNET & RING | |
| 4. ROTIERENDE SPULE IM SOLENOID | 5. WALTENHOFEN'sches PENDEL |
| 6. R-L-KREIS | 7. INDUKTIVES ZUENDEN VON GLUEHLAMPEN |
| 8. ZUENDSPANNUNG VON GLIMMLAMPE | |
| 9. MATERIE IM INHOMOGENEN MAGNETFELD | |
| 10. MODELL "WEISS'sche BEZIRKE" | 11. BESTIMMUNG DER PERMEABILITAET |
| 12. BARKHAUSEN-EFFEKT | |
| 13. CURIE-TEMPERATUR VON Fe & Ni | 14. HYSTERESE |
| 15. MAGNETOSTRIKTION | 16. MAGNETISCHE ABSCHIRMUNG |

4. WECHSELSTROM

Im Alltag und in der Elektrotechnik ganz allgemein, nehmen die Wechselströme eine zentrale Stellung ein. Unter einem Wechselstromkreis verstehen wir ein Netzwerk, dessen Zweige Ohm'sche Widerstände R, Induktivitäten L und Kapazitäten C enthalten. Alle vorkommenden Spannungsquellen sollen Spannungen der Form $U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ liefern. Die Fragestellung lautet: welche Ströme I(t) fließen in den Zweigen eines Netzwerks, wenn die Spannungsquellen vorgegeben sind? Wir interessieren uns nur für den **STATIONÄREN ZUSTAND**. D.h. wir warten, bis die Einschwingvorgänge abgeklungen sind und berechnen Ströme der Form $I = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, wenn eine Spannung $U = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ wirkt. Es ist die **STROM-AMPLITUDE** I_0 und die **PHASENVERSCHIEBUNG** φ gegenüber der Spannung zu berechnen.

4.1 EINFUEHRUNG KOMPLEXER GROESSEN ZUM RECHNEN

Wechselspannungen und Ströme sind messbare, reelle physikalische Grössen. Da sie eine Amplitude und eine mit der Zeit linear anwachsende Phase besitzen, können wir sie im **ZEIGERDIAGRAMM** darstellen (vgl. Mechanik, Kapitel 9.3, Seite 87). Da ein Zeiger vom Betrag A und dem Phasenwinkel φ in der Gauss'schen Zahlenebene die **KOMPLEXE ZAHL**

(147) $z = A \cdot \exp(i \cdot \varphi)$ oder $z = A \cdot \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

(i = imaginäre Einheit, $i^2 = -1$),

darstellt, führen wir komplexe Rechnungsgrössen für Spannung und Strom ein:

(148) $\hat{U} = U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$ KOMPLEXE SPANNUNG. $\hat{I} = I_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t + \varphi)$ KOMPLEXER STROM.

DIE IMPEDANZ \hat{Z} :

Liegt über einem Verbraucher (im allgemeinen ein Zweipol, welcher aus R-, L- und C-Gliedern zusammengesetzt ist) die Spannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$, wird ein Strom $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ fließen. Den komplexen Quotienten \hat{U}/\hat{I} aus den zugehörigen komplexen Grössen (148), bezeichnen wir als Impedanz \hat{Z}

(149) $\hat{Z} = \hat{U}/\hat{I}$, IMPEDANZ \hat{Z} .

Bei Serieschaltung oder Parallelschaltung von Zweipolen, gelten für die Gesamtimpedanzen die gleichen Rechenregeln, wie für Ohm'sche Widerstände:

$\hat{Z}(\text{Serie}) = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \dots$, $(1/\hat{Z})(\text{parallel}) = (1/\hat{Z}_1) + (1/\hat{Z}_2) + \dots$

In jedem Zeitpunkt t muss in jeder Masche das zweite Kirchhoff'sche Gesetz (s.Kap. 2.5) erfüllt sein. Die komplexe Schreibweise der Spannungsabfälle über den einzelnen Zweigen der Masche hat den grossen Vorteil, dass beim Summieren **DIE PHASENBEZIEHUNGEN AUTOMATISCH BERUECKSICHTIGT WERDEN**.

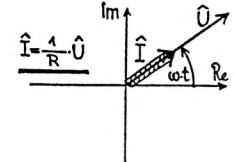
DIE IMPEDANZ \hat{Z}_R DES OHM'schen WIDERSRANDES R:

Definitionsgemäss ist $U = I \cdot R$ der Spannungsabfall über R. Die Impedanz wird

(150) $\hat{Z}_R = R$, $\hat{I} = (1/R) \cdot \hat{U}$

oder

$I(t) = (U_0/R) \cdot \cos(\omega \cdot t)$.
STROM UND SPANNUNG SIND IN PHASE.



DIE IMPEDANZ \hat{Z}_L DER INDUKTIVITAET L:

Der Spannungsabfall über L ist $U = L \cdot dI/dt$, damit die induzierte Gegenspannung gerade kompensiert wird. Nach der Maschenregel gilt also

$U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) = L \cdot d\hat{I}/dt$.

Integration führt auf

$\int L \cdot d\hat{I} = \int U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$ oder $\hat{I} = (U_0/(i \cdot \omega \cdot L)) \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$.

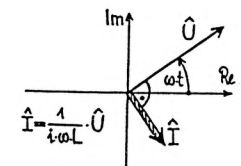
Daraus erhalten wir die Impedanz

(151) $\hat{Z}_L = i \cdot \omega \cdot L$.

Der Faktor i ist gleich $\exp(i \cdot \pi/2)$, somit

$\hat{I} = (U_0/(\omega \cdot L)) \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t - \pi/2)$.

DER STROM HINKT DER SPANNUNG UM $\pi/2$ NACH.



DIE IMPEDANZ \hat{Z}_C DER KAPAZITAET C:

Der Spannungsabfall über C ist Q/C , die Maschengleichung lautet

$$U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) = Q/C .$$

Mit $I = dQ/dt$ ergibt die Differentiation nach t

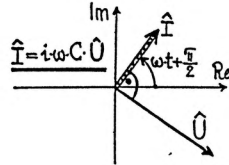
$$\hat{I} = i \cdot \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t) .$$

Die Impedanz wird

$$(152) \quad \hat{Z}_C = 1/(i \cdot \omega \cdot C) ,$$

$$\hat{I} = \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \exp(i(\omega \cdot t + \pi/2)) .$$

DER STROM LAEUFT DER SPANNUNG UM $\pi/2$ VORAUSS.



4.2 WECHSELSTROM-LEISTUNG; EFFEKTIVWERTE U(eff) und I(eff)

Wenn die Wechselspannung $U(t)=U_0 \cos(\omega \cdot t)$ in einem Zweipol den Strom $I(t)=I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ erzeugt, so gibt die Spannungsquelle im Zeitpunkt t die momentane Leistung $P(t)=I(t) \cdot U(t)$ ab.

$$P(t) = I_0 \cdot U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

oder

$$P(t) = I_0 \cdot U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot (\cos(\omega \cdot t) \cos \varphi - \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin \varphi) , \text{ somit}$$

$$(153) \quad P(t) = I_0 \cdot U_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos^2(\omega \cdot t) - I_0 \cdot U_0 \cdot (1/2) \cdot \sin \varphi \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t) .$$

Bei der Bildung des zeitlichen Mittelwertes $\langle P \rangle$ von P(t), gibt der zweite Summand von (153) keinen Beitrag ("ungerade Funktion der Zeit"). Der erste Term liefert:

$$(154) \quad \langle P \rangle = (I_0 \cdot U_0 / 2) \cdot \cos \varphi , \quad \text{WECHSELSTROMLEISTUNG .}$$

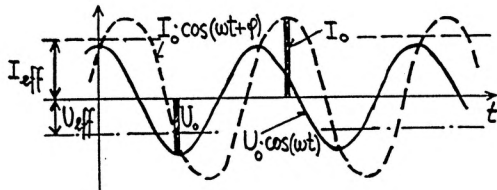
In der Elektrotechnik bezeichnet man die Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats von Strom oder Spannung als **EFFEKTIVWERT** I(eff) bzw. U(eff). Also

$$I(\text{eff}) = \sqrt{\langle I^2 \rangle} \quad \text{und} \quad U(\text{eff}) = \sqrt{\langle U^2 \rangle} , \text{ oder}$$

$$(155) \quad I(\text{eff}) = I_0 / \sqrt{2} \quad \text{und} \quad U(\text{eff}) = U_0 / \sqrt{2} , \quad \text{EFFEKTIVWERT.}$$

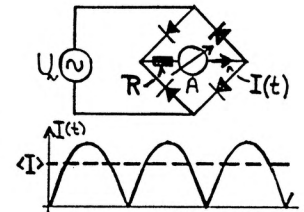
Die mittlere Leistung (154) ist damit auch

$$(156) \quad \langle P \rangle = I(\text{eff}) \cdot U(\text{eff}) \cdot \cos \varphi , \quad \text{WECHSELSTROMLEISTUNG.}$$



4.2.1 Zur Messung von Wechselströmen

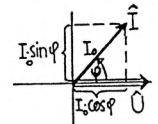
Der Zeigerausschlag eines Drehspulinstrumentes ist dem Strom proportional. Wegen der Trägheit des mechanischen Systems kann es bei den üblichen Wechselstrom-Frequenzen nur den Mittelwert, also null, anzeigen. Wird hingegen der Wechselstrom zuerst gleichgerichtet (z.B. Vollweggleichrichtung nach Graetz, wie in nebenstehender Figur), so entspricht der Zeigerausschlag dem Betrag des Mittelwertes. Auf der Skala ist der Effektivwert angeschrieben, welcher **NUR FÜR SINUSFOERMIGEN ZEITLICHEN VERLAUF DES STROMES RICHTIG IST**. Daneben gibt es auch Instrumente, die vom Messprinzip her das Quadrat des Stromes anzeigen, z.B. das Hitzdrahtinstrument und das Weicheiseninstrument. Der abgelesene Effektivwert ist in diesem Fall unabhängig vom zeitlichen Stromverlauf richtig. Das **DYNAMOMETER** besteht aus einer festen Magnetfeldspule und einer Drehspule. Werden die Spulen in Serie geschaltet, liegt ein Wechselstrominstrument vor, welches "quadratisch" anzeigt. Legt man die eine Spule in den Stromkreis, die andere mit einem Vorschaltwiderstand parallel zu den Verbraucherklammern (Spannungsmessung), so wirkt das Dynamometer direkt als **WATTMETER**, d.h. es misst den wahren Mittelwert von $I(t) \cdot U(t)$.



4.2.2 Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung

Der Mittelwert (156) der Wechselstrom-Leistung wird auch als **WIRKLEISTUNG**, der Faktor $\cos \varphi$ als **LEISTUNGSFAKTOR** bezeichnet. Der Faktor $\cos \varphi$ tritt auf, weil nur derjenige Stromanteil im zeitlichen Mittel zu einer von null verschiedenen Leistung führt, welcher mit der Spannung U in Phase ist. Die Stromkomponente $I_0 \cdot \sin \varphi$ trägt zu $\langle P \rangle$ nichts bei. Wir unterscheiden daher:

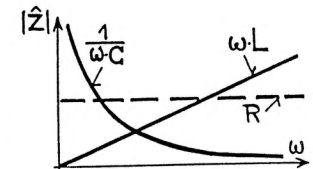
- WIRKLEISTUNG** $I(\text{eff}) \cdot U(\text{eff}) \cdot \cos \varphi ,$
- BLINDLEISTUNG** $I(\text{eff}) \cdot U(\text{eff}) \cdot \sin \varphi ,$
- und
- SCHEINLEISTUNG** $I(\text{eff}) \cdot U(\text{eff}) .$



Im Falle rein induktiver oder rein kapazitiver Last liegt nur Blindleistung vor. Man bezeichnet

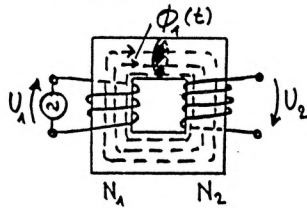
- $|Z_L| = \omega \cdot L$ als **INDUKTIVEN BLINDWIDERSTAND** oder **INDUKTANZ**
- und
- $|Z_C| = 1/(\omega \cdot C)$ als **KAPAZITIVEN BLINDWIDERSTAND** oder **REAKTANZ**.

Wird eine Spannungsquelle mit dem Effektivwert U(eff) rein induktiv belastet, so nimmt I(eff) mit zunehmender Frequenz ab (Drossel-effekt). Mit rein kapazitiver Last ist der Blindwiderstand für tiefe Frequenzen gross (bei Gleichspannung fließt kein stationärer Strom). Eine Ohm'sche Last besitzt den Wirkwiderstand R und I(eff) ist unabhängig von der Frequenz.



4.3 DER TRANSFORMATOR

In Wechselstromkreisen tritt als neues Element der TRANSFORMATOR auf. Der Transformator ist ein Vierpol, mit dessen Hilfe eine Wechselspannung U_1 an den Eingangsklemmen ("Primärkreis") in eine grössere oder kleinere Spannung U_2 gleicher Frequenz umgewandelt und über den Ausgangsklemmen ("Sekundärkreis") abgegriffen wird. Er besteht aus Primär- und Sekundärspule, die normalerweise auf einen gemeinsamen Eisenkern gewickelt sind. Der Eisenkern hat die Funktion, einerseits die Induktivitäten L_1 und L_2 der Spulen zu erhöhen und andererseits eine möglichst perfekte induktive Kopplung, d.h. maximale Gegeninduktivität M , zu erreichen. Wir betrachten im folgenden den unbelasteten Transformator; der Sekundärkreis sei also offen, sodass kein Strom I_2 fliesst. (Allgemeine Behandlung in den Ergänzungen für Physiker).



Ueber der Primärspule der Windungszahl N_1 liegt die Spannung $U_1(t) = U_1 \cdot \cos(\omega \cdot t)$. Der magnetische Fluss Φ_1 im Eisenkern wird sich so einstellen, dass die induzierte Gegenspannung $-N_1 \cdot \dot{\Phi}_1$ durch U_1 gerade kompensiert wird.

$$U_1 = N_1 \cdot \dot{\Phi}_1$$

Die Flussänderung $\dot{\Phi}_1$ induziert in der Sekundärspule mit der Windungszahl N_2 die Spannung

$$U_2 = -N_2 \cdot \dot{\Phi}_1$$

Wir erhalten also

$$(157) \quad \boxed{U_2/U_1 = -N_2/N_1}, \quad \text{UEBERSETZUNGS-VERHAELTNIS } \ddot{u} = -N_2/N_1.$$

Beim idealen Trafo sind die Spuleninduktivitäten so gross, dass der Wirkwiderstand gegenüber dem Blindwiderstand vernachlässigbar ist. Im LEERLAUF sind dann U_1 und Primärstrom I_1 um 90 Grad phasenverschoben. Unter sekundärer Ohm'scher Belastung sind beim idealen Trafo U_1 und I_1 , sowie U_2 und I_2 in Phase. Wegen der Energieerhaltung ist die sekundär entnommene Leistung gleich der primär hineingesteckten Leistung.

$$I_2 \cdot U_2 = I_1 \cdot U_1, \quad \text{somit wird}$$

$$(158) \quad \boxed{I_2/I_1 = -N_1/N_2}.$$

Der Transformator dient sowohl zur Erzeugung hoher Spannungen (z.B. bei der Uebertragung elektrischer Energie über grosse Distanzen), als auch zur Erzeugung grosser Ströme (z.B. beim Schweiss-Trafo und dem Induktions-Schmelzofen).

4.4 BEISPIELE VON WECHSELSTROM-KREISEN

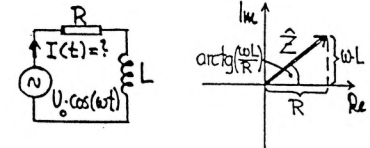
4.4.1 Der RL-Kreis

Ein Ohm'scher Widerstand R sei mit der Induktivität L in Serie geschaltet. Wie gross ist die Amplitude I_0 und die Phasenverschiebung φ des Stromes, wenn die Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ angelegt wird? Die Gesamtimpedanz des Zweipols ist

$$\hat{Z} = R + i \cdot \omega \cdot L$$

oder

$$\hat{Z} = \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} \cdot \exp(i \cdot \arctg(\omega \cdot L/R)).$$



Nach (149) erhalten wir den Strom

$$\hat{I} = \hat{U} / (R + i \cdot \omega \cdot L)$$

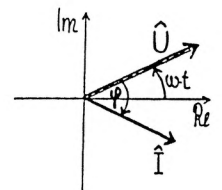
oder

$$\hat{I} = (U_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}) \cdot \exp(i(\omega \cdot t - \arctg(\omega \cdot L/R))),$$

woraus Stromamplitude und Phasenverschiebung abgelesen wird:

$$(159) \quad \boxed{I_0 = U_0 / \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}}, \quad \text{STROMAMPLITUDE}$$

$$(160) \quad \boxed{\varphi = -\arctg(\omega \cdot L/R)}, \quad \text{PHASENVERSCHIEBUNG.}$$



Gemäss (154) gibt die Spannungsquelle die Wirkleistung $\langle P \rangle = (I_0 \cdot U_0 / 2) \cdot \cos \varphi$ an den Stromkreis ab. Mit den Beziehungen (159) und (160) können wir auch schreiben:

$$\langle P \rangle = (I_0^2 / 2) \cdot \sqrt{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} \cdot \cos \varphi \quad \text{oder} \quad \langle P \rangle = I^2(\text{eff}) \cdot R.$$

Die dem Kreis während einer Periode T zugeführte Energie ist gleich der pro Periode im Ohm'schen Widerstand produzierten Joule'schen Wärme.

UEBUNG:

Berechne die Stromamplitude I_0 und die Phasenverschiebung φ des Stromes gegenüber der Spannung für den R-C-Kreis.

4.4.2 Der RLC-Seriekreis; Resonanz

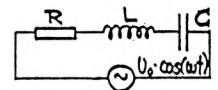
Fügen wir zum soeben besprochenen RL-Kreis noch das kapazitive Element C hinzu, so erhalten wir den SERIE-RESONANZKREIS. Der Imaginärteil der Impedanz enthält jetzt zwei Beiträge, den positiven der Induktivität, $\omega \cdot L$, und den negativen der Kapazität, $-1/(\omega \cdot C)$. Es ist

$$\hat{Z} = R + i(\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))$$

oder

$$\hat{Z} = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))^2} \cdot \exp(i \cdot \arctg((\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))/R)),$$

DIE IMPEDANZ DES RLC-SERIEKREISES.



4.5 DREHSTROM

Von grosser technischer Bedeutung ist der DREIPHASEN- oder DREHSTROM, welcher durch einen Generator ähnlich der schematischen Darstellung auf Seite 45 erzeugt wird, der jedoch drei um 120 Grad gegeneinander verdrehte, rotierende Spulen besitzt. Die drei entstehenden Spannungen werden in verketteter Form zum Verbraucher befördert, nämlich durch den allen Spulen gemeinsamen NULL-LEITER M und die drei AUSSENLEITER R, S und T. Zwischen M und jedem Aussenleiter besteht die Wechselspannung von 220 V Effektivwert. Zwischen je zwei Aussenleitern ergibt sich aus dem Zeigerdiagramm die Spannung $220 \cdot \sqrt{3} = 380$ V. Neben dem geringen Aufwand an Zuleitungen bietet der Dreiphasenstrom also zwei Spannungswerte an. Liegen drei gleiche Verbraucher zwischen M und den Aussenleitern (STERNSCHALTUNG), so führt der Null-Leiter keinen Strom. Liegen drei Verbraucher zwischen den Aussenleitern, spricht man von DREIECK-SCHALTUNG.



Schaltet man in die drei Stromkreise Spulen ein, deren Achsen gegeneinander um 120 Grad verdreht sind, so erzeugen die Spulenströme ein magnetisches DREHFELD, das gleich rasch rotiert, wie das Spulensystem des Generators. (s. Demonstration "Kurzschlussanker- Motor").

DEMONSTRATIONEN:

1. DREHSPULINSTRUMENT & GLEICHRICHTER
2. U(eff) MIT GLUEHLAMPEN (Vergleich Wechsel- und Gleichstrom)
3. Z(ω) FUER R, L & C
4. PHASENVERSCHIEBUNG MIT R, L & C
5. DYNAMOMETER
6. MODELL KURZSCHLUSSANKER-MOTOR
7. TRANSFORMATOR
8. MODELL "UEBERLANDLEITUNG" MIT UND OHNE HOCHSPANNUNGS-TRAFO
9. SCHWEISSTRANSFORMATOR
10. TESLA-TRANSFORMATOR (100 000 Volt bei 750 kHz)
11. SERIE-RESONANZKREIS
12. FREQUENZFILTER (Tonfrequenzen)

Daraus folgt der Strom $\hat{I} = \hat{U}/\hat{Z}$, also

$$\hat{I} = (U_0/\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))^2}) \cdot \exp(i(\omega \cdot t - \arctg((\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))/R)))$$

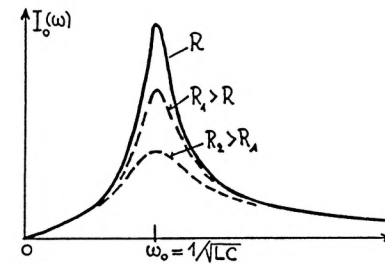
Stromamplitude und Phasenverschiebung als Funktion der Frequenz sind:

(161) $I_0 = U_0/\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - 1/(\omega \cdot C))^2}$, STROMAMPLITUDE ,

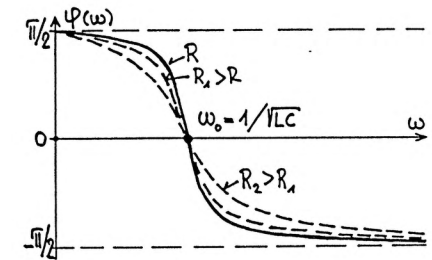
(162) $\varphi = \arctg((1/(\omega \cdot C) - \omega L)/R)$ PHASENVERSCHIEBUNG.

Für $\omega \cdot L = 1/(\omega \cdot C)$ verschwindet der Imaginärteil der Impedanz, die Stromamplitude wird maximal, $I_{max} = U_0/R$, Strom und Spannung sind in Phase.

(163) $\omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}$, RESONANZ-FREQUENZ.



STROM-RESONANZKURVE $I_0(\omega)$



PHASENVERSCHIEBUNG $\varphi(\omega)$

An der Resonanzstelle liegt kein Blindwiderstand vor, die vom Kreis aufgenommene Leistung ist maximal, nämlich

(164) $\langle P_{max} \rangle = U^2(eff)/R$, AUFGENOMMENE LEISTUNG BEI RESONANZ.

Die Resonanzkurve wird um so schlanker und das Maximum um so höher, je geringer der Ohm'sche Widerstand ist.

Wir haben hier nur die "Stromresonanz" betrachtet. Kurven von ähnlichem Charakter erhält man auch beim Auftragen der Spannungen über R, L und C oder der aufgenommenen Leistung als Funktion der Frequenz. Im Detail ist der Verlauf dieser Kurven aber verschieden. Ueber der Induktivität L und der Kapazität C treten bei Resonanzfrequenz Spannungen auf, die wesentlich höher liegen können, als die Amplitude U_0 der angelegten Spannung.

(165) $U_L/U_0 = U_C/U_0 = \omega_0 \cdot L/R = 1/(\omega_0 \cdot C \cdot R)$, SPANNUNGSUEBERHOEHUNG.

UEBUNG:

- a) Man berechne die vom Serie-Resonanzkreis aufgenommene Leistung $\langle P(\omega) \rangle$ als Funktion der Kreisfrequenz und diskutiere die "Energie-Resonanzkurve".
- b) Wie gross ist an der Resonanzstelle die im Kreis gespeicherte Energie ?
- c) Wie gross ist der Q-Wert ?
 $Q = 2\pi \cdot \text{gespeicherte Energie} / (T \cdot \langle P(\omega_0) \rangle)$.

4.6 FREIE ELEKTRISCHE SCHWINGUNG; RLC-SERIEKREIS

In 4.4.2 haben wir gesehen, dass eine am RLC-Kreis angelegte Wechselspannung zur Erscheinung der elektrischen Resonanz führt. Dies bedeutet aber, dass dieser Kreis ein schwingungsfähiges System mit einer bestimmten EIGENFREQUENZ darstellt. Wir wollen die Differentialgleichung dieser Schwingung aus einer Energiebetrachtung herleiten. Zu einer bestimmten Zeit t soll der Strom I(t) fließen und die Kapazität C soll gerade die Ladung Q(t) tragen. Die Gesamtenergie setzt sich dann zusammen aus dem magnetischen Anteil $E(\text{mag}) = L \cdot I^2/2$ und dem elektrischen Anteil $E(\text{el}) = Q^2/(2 \cdot C)$. Diese gespeicherte Energie nimmt aber ständig ab, weil im Ohm'schen Widerstand R in der Zeit dt die Joule'sche Wärme $I^2 \cdot R \cdot dt$ produziert wird. Der Energieerhaltungssatz verlangt demnach die Beziehung

(166)
$$\frac{d}{dt} (Q^2/(2 \cdot C) + L \cdot I^2/2) = - I^2 \cdot R .$$

Ausführung der Differentiation ergibt

$$(Q/C) \cdot dQ/dt + L \cdot I \cdot dI/dt + I^2 \cdot R = 0 .$$

Aus $dQ/dt = I$ und $dI/dt = d^2Q/dt^2$ folgt die Schwingungsgleichung

(167)
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + (R/L) \cdot dQ/dt + (1/(L \cdot C)) \cdot Q = 0 .$$

Mit $R/L = 2\beta$ und $\omega_0^2 = 1/(L \cdot C)$ erhalten wir die bekannte Form

(168)
$$\ddot{Q} + 2\beta \cdot \dot{Q} + \omega_0^2 \cdot Q = 0 ,$$

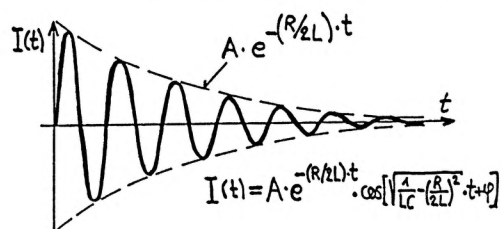
oder nach nochmaliger Ableitung nach t:

(169)
$$\ddot{I} + 2\beta \cdot \dot{I} + \omega_0^2 \cdot I = 0 , \quad \text{DIFFERENTIALGLEICHUNG DER GEDAEMPFTEN SCHWINGUNG.}$$

 (vgl. Mechanik, Seite 83).

Für $\beta < \omega_0$, also nicht zu starke Dämpfung, lautet die allgemeine Lösung:

(170)
$$I(t) = A \cdot \exp(-\beta \cdot t) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi) , \quad \text{GEDAEMPFTES SCHWINGUNG.}$$



Der DAEMPFUNGSFAKTOR $\beta = R/(2L)$ ist verantwortlich für die zeitlich exponentiell abnehmende Stromamplitude und für die Reduktion der Eigenfrequenz gegenüber der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems. A und φ sind beliebige Integrationskonstanten. Wenn wir β und ω_0^2 des elektrischen Schwingkreises und des gedämpften Federpendels (Mechanik, S. 83) vergleichen, ergibt sich die

Zuordnung

$$R/(2L) \longleftrightarrow \alpha/(2 \cdot m) \quad \text{und} \quad 1/(L \cdot C) \longleftrightarrow k/m .$$

Es entspricht also der Ohm'sche Widerstand R dem Reibungskoeffizient α des mechanischen Pendels, die Induktivität L der Masse m und die reziproke Kapazität $1/C$ der Federkonstanten k. Die magnetische Energie $L \cdot I^2/2$ ist dann der kinetischen Energie $m \cdot v^2/2$ im Pendel zugeordnet, während die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie $Q^2/(2 \cdot C)$ der potentiellen Energie $k \cdot x^2/2$ der gespannten Feder analog ist. Die Joule'sche Verlustleistung $I^2 \cdot R$ ist der Reibungsleistung $\alpha \cdot v^2$ äquivalent. Im elektrischen Schwingkreis liegt die gespeicherte Energie alternierend in MAGNETISCHER und ELEKTRISCHER FELDENERGIE vor, im mechanischen Schwingkreis in KINETISCHER und POTENTIELLER ENERGIE.

5. ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN

Die Existenz elektromagnetischer Wellen, sowie die elektromagnetische Natur des Lichtes, ist von James Clerk MAXWELL auf Grund seiner Feldgleichungen (144) schon 1864 vorausgesagt worden. Es hat mehr als zwanzig Jahre gedauert, bis es Heinrich HERTZ gelungen ist, elektromagnetische Wellen in der Umgebung elektrischer Schwingkreise mit kleiner Induktivität und Kapazität nachzuweisen. Er hat Wellenlängen, und damit auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit c), gemessen, aber auch Reflexion, Brechung und Polarisation nachgewiesen.

Wir wollen die Maxwell'schen Gleichungen (144) für \vec{E} und \vec{B} in einem homogenen Medium der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_r \epsilon_0$ und der Permeabilität $\mu_r \mu_0$ betrachten. Das Material soll isolierend ($\vec{j} = 0$) und elektrisch neutral sein ($\rho = 0$). Die Feldgleichungen lauten dann:

(171)
$$\begin{aligned} (1) \quad \text{div } \vec{E} &= 0 , & (2) \quad \text{div } \vec{B} &= 0 , \\ (3) \quad \text{rot } \vec{E} &= - \dot{\vec{B}} , & (4) \quad \text{rot } \vec{B} &= \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \dot{\vec{E}} . \end{aligned}$$

Beachte die Symmetrie der Gleichungen bezüglich \vec{E} und \vec{B} . Ein sich änderndes \vec{B} -Feld erzeugt ein \vec{E} -Feld (Faraday'sches Induktionsgesetz (3)), ein sich änderndes \vec{E} -Feld erzeugt ein \vec{B} -Feld (Ampere-Maxwell'sches Gesetz (4)). Diese Kopplung zwischen \vec{E} und \vec{B} ermöglicht die wellenförmige Ausbreitung der elektromagnetischen Felder. Wir leiten jetzt die Wellengleichung für das \vec{E} -Feld her, indem wir in (3), mit Hilfe von (4), \vec{B} eliminieren. Dies geschieht durch Bildung der Rotation auf beiden Seiten von (3) und Ableitung nach t in (4):

(3a)
$$\text{rot rot } \vec{E} = - \text{rot } \dot{\vec{B}} , \quad (4a) \quad \text{rot } \dot{\vec{B}} = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \ddot{\vec{E}} ,$$

somit erhalten wir

(172)
$$\text{rot rot } \vec{E} = - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \ddot{\vec{E}} .$$

Nun genügt jede Komponente des Vektors $\text{rot rot } \vec{V}$ eines beliebigen Vektorfeldes \vec{V} , z.B. die x-Komponente, der mathematischen Identität

$$(173) \quad (\text{rot rot } \vec{V})_x = (\text{grad div } \vec{V})_x - \Delta V_x .$$

Anwendung auf (172), unter Berücksichtigung von (1), $\text{div } \vec{E} = 0$, führt auf die Wellengleichung für jede Komponente von \vec{E} , z.B.

$$(174) \quad \boxed{\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = (1/(\epsilon_r \epsilon_0 / \mu_r \mu_0)) \cdot \Delta E_x} , \quad \text{WELLENGLEICHUNG FUER } E_x(x,y,z,t) .$$

Der Koeffizient vor $\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$ ist gerade das Quadrat der Phasengeschwindigkeit. Wir haben also im Vakuum ($\epsilon_r = \mu_r = 1$) die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$(175) \quad \boxed{c = \sqrt{1/(\epsilon_0 \mu_0)}} , \quad \text{PHASENGESCHWINDIGKEIT DER ELEKTROMAGNETISCHEN WELLE IM VAKUUM.}$$

Mit $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ A}\cdot\text{s}/(\text{V}\cdot\text{m})$ und $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ V}\cdot\text{s}/(\text{A}\cdot\text{m})$ wird

$$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s} .$$

In Materie ist die Lichtgeschwindigkeit um den Faktor $\sqrt{1/(\epsilon_r \mu_r)}$ kleiner als im Vakuum (s. auch Begriff des Brechungsindex n in der Optik).

UEBUNG:

Benütze $\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla}_{\text{op}} \times \vec{V}$, $\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla}_{\text{op}} \cdot \vec{V}$ und $\text{grad } V_x = \vec{\nabla}_{\text{op}} V$ zum Beweis von (173).

Man kann in (171) auch \vec{E} eliminieren und erhält in analoger Weise die Wellengleichung für jede Komponente von \vec{B} (Uebung), z.B.

$$(176) \quad \boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = (1/(\epsilon_r \epsilon_0 / \mu_r \mu_0)) \cdot \Delta B_y} , \quad \text{WELLENGLEICHUNG FUER } B_y(x,y,z,t) .$$

5.1 Die ebene, linear polarisierte elektromagnetische Welle

Durch die Differentialgleichungen (174) und (176) wird eine grosse Mannigfaltigkeit von Wellen beschrieben. Wir gehen hier nur auf die einfachste Lösung, nämlich die EBENE WELLE ein, wo also \vec{E} und \vec{B} nur von einer Ortskoordinate, welche in der Ausbreitungsrichtung liegt, abhängen. Dies sei die z-Achse, also ist $\vec{E} = \vec{E}(z,t)$ und $\vec{B} = \vec{B}(z,t)$. Dann ist $\text{div } \vec{E} = \partial E_z / \partial z$ und $\text{div } \vec{B} = \partial B_z / \partial z$. Weil die Felder nach (1) und (2) aber divergenzfrei sind, muss $\partial E_z / \partial z = 0$ sein, d.h., dass \vec{E} keine Komponente in Richtung der Fortpflanzung haben kann. Dasselbe gilt für \vec{B} .

ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN SIND TRANSVERSAL.

\vec{E} (bzw. \vec{D}) UND \vec{B} STEHEN NORMAL ZUR AUSBREITUNGSRICHTUNG.

Die Richtung der x-Achse soll mit \vec{E} zusammenfallen, sodass $\vec{E}(z,t)$ gegeben ist durch $(E_x(z,t), 0, 0)$, mit

$$(177) \quad \boxed{E_x(z,t) = E_0 \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t)} , \quad \omega/k = v(\text{Phase}) .$$

Das zugehörige magnetische Feld $\vec{B}(z,t)$ erhalten wir mit (177) aus dem Induktionsgesetz, $\partial \vec{B} / \partial t = - \text{rot } \vec{E}$. Nur die y-Komponente von $\text{rot } \vec{E}$ ist von null verschieden, sodass \vec{B} parallel zur y-Achse

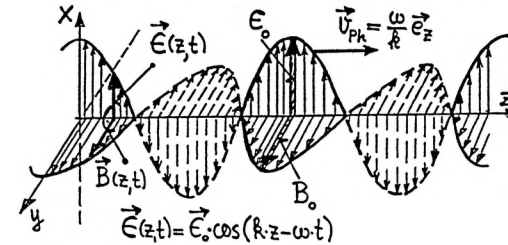
liegen muss. Es ist

$$-(\text{rot } \vec{E})_y = -\partial E_x / \partial z , \text{ woraus folgt: } \partial B_y / \partial t = k \cdot E_0 \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t) .$$

Durch Integration über t erhalten wir

$$(178) \quad \boxed{B_y(z,t) = B_0 \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t)} , \text{ mit } B_0 = k \cdot E_0 / \omega .$$

Die Gleichungen (177) und (178) besagen, dass \vec{E} und \vec{B} in Phase sind, senkrecht aufeinander stehen, mit der Fortpflanzungs-Richtung



ein RECHTSSYSTEM bilden, und dass immer die Beziehung erfüllt ist:

$$(179) \quad \boxed{E(z,t)/B(z,t) = v(\text{Phase})} .$$

Im Vakuum ist $v(\text{Phase}) = c$.

Die betrachtete Welle hat die Eigenschaft, dass der elektrische Feldvektor $\vec{E}(z,t)$ immer in der xz-Ebene schwingt. Man nennt eine solche Welle LINEAR POLARISIERT.

5.2 ENERGIETRANSPORT & POYNTING-VEKTOR \vec{S}

Wir wissen, dass das elektrische Feld \vec{E} nach (54) eine lokale Energiedichte $w(\text{el}) = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot E^2 / 2$ repräsentiert, während die Energiedichte im Magnetfeld $w(\text{mag}) = B^2 / (2 \cdot \mu_r \mu_0)$ ist. In einer elektromagnetischen Welle ist aber immer (179) erfüllt, sodass $w(\text{el}) = w(\text{mag})$ wird. Es ist also

$$(180) \quad \boxed{w = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E^2} , \quad \text{LOKALE ENERGIEDICHTE IN EINER ELEKTROMAGNETISCHEN WELLE.}$$

Da sich \vec{E} und \vec{B} mit der Phasengeschwindigkeit fortbewegen, wird durch jedes zu $\vec{v}(\text{Phase})$ normal stehendes Flächenelement dA pro Zeiteinheit die Energie $w \cdot v(\text{Phase}) \cdot dA$ transportiert. Wir bezeichnen die Energieströmung pro Zeit und Fläche mit S .

$$(181) \quad \boxed{S = w \cdot v(\text{Phase})} , \quad \text{ENERGIESTROMUNG PRO ZEIT- & FLAECHEINEINHEIT.}$$

Mit Hilfe von (179) und (180) lässt sich S auch schreiben als

$$S = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E \cdot v^2(\text{Phase}) \quad \text{oder} \quad S = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E \cdot B / (\epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0) .$$

Dies ist aber gerade identisch mit $S = E \cdot H$. Man kann nun S als den Betrag eines STROMUNGS-VEKTORS \vec{S} auffassen. \vec{S} zeigt in Richtung von $\vec{v}(\text{Phase})$ und kann als Vektorprodukt von \vec{E}

und \vec{H} ausgedrückt werden:

(182) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, **POYNTING-VEKTOR.**
 Dimension: Energie/(Fläche Zeit)
 Einheit : $J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$.

Der Ausdruck (182) ist allgemein gültig, nicht nur für die hier diskutierte, ebene Welle. Dies ist so, weil jede beliebige Welle lokal, d.h. in einem differentiell kleinen Volumenelement, als Bestandteil einer ebenen Welle aufgefasst werden kann.

Beachte: Der Betrag des Poyntingvektors variiert zeitlich und örtlich.

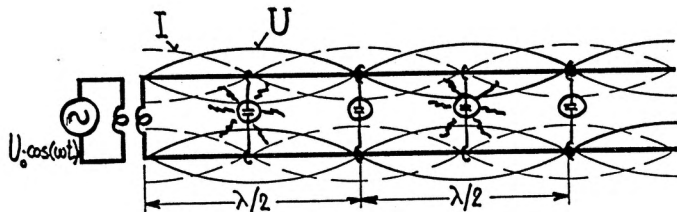
$$S(z,t) = E_0 \cdot H_0 \cdot \cos^2(k \cdot z - \omega t).$$

Die Richtung von \vec{S} fällt aber immer in die Fortpflanzungsrichtung der Welle. Im zeitlichen Mittel ist der Energietransport durch die Einheitsfläche pro Sekunde

(183) $\langle S \rangle = E_0 \cdot H_0 / 2$, **ZEITLICHER MITTELWERT DES POYNTING-VEKTORS.**

5.3 Elektrische Wellen entlang Drähten; Lechersystem

Im Gegensatz zum Fall "quasistationärer" Ströme (s. Kap. 3), ist bei "schnell veränderlichen" Feldern, also bei relativ hochfrequenten Wechselströmen, die Stromstärke längs eines Leiters nicht mehr konstant. Tritt an einer Stelle eines Leiters eine rasche Potentialänderung auf, so wirkt sich die Störung an weiter entfernten Stellen erst später aus. Nach der Maxwell'schen Theorie ergibt sich eine Ausbreitungsgeschwindigkeit, welche der Lichtgeschwindigkeit im den Draht umgebenden Medium entspricht. Drahtwellen treten z.B. an einem aus parallelen Drähten bestehenden System auf, dem sogenannten **LECHERSYSTEM**, das wir experimentell untersuchen wollen. Ueber eine Kopplungsschleife am linken Ende wird ein Hochfrequenz-Generator induktiv angekoppelt. Das rechte Ende des Leitersystems ist offen. Die Spannung pflanzt sich zunächst längs der Drähte von links nach rechts fort, am offenen rechten Ende tritt eine Reflexion derart auf, dass dort ein Spannungsbauch liegt (s. Mechanik, p.93). Die Kopplungsschleife



links bedeutet einen Kurzschluss, sodass hier die Potentialdifferenz null zwischen den Drähten erzwungen wird. Ist die Drahtlänge ein ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/4$, so bildet sich eine stehende Welle aus, die das elektrische Analogon zur stehenden

Seilwelle, mit einem festen und einem freien Seilende, darstellt. Die Potentialänderung längs der Drähte hat eine Stromwelle zur Folge, wobei am offenen, rechten Ende ein Stromknoten, am linken, geschlossenen Ende ein Strombauch liegt. Die stehende Stromwelle ist um $\lambda/4$ gegenüber der Spannungswelle verschoben. Im Experiment weisen wir die Spannungsbäuche und Knoten mittels Glimmlämpchen nach, die wir parallelgeschaltet längs des Systems verschoben. An den Spannungsbäuchen brennen die Glimmlampen maximal, an den Knoten verlöschen sie. Bei einer Frequenz von $\nu = 27,3$ MHz ist der Abstand der Knoten $\lambda/2 = 5,5$ m. Daraus ergibt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \nu \cdot \lambda$ von $3 \cdot 10^8$ m/s.

5.4 Der HERTZ'sche Dipol

Der Prototyp einer Quelle für elektromagnetische Wellen ist der **HERTZ'sche DIPOL**. Wir können seine Wirkungsweise gut verstehen, wenn wir von einem Lechersystem ausgehen, dessen parallele Drähte gerade die Länge $\lambda/4$ besitzen. Durch Aufbiegen in eine gestreckte Konfiguration erhalten wir die Dipolantenne der Länge $L = \lambda/2$, welche durch einen Generator der Frequenz $\nu = c/\lambda$ in ihrer Grundschwingung angeregt wird. Der Strombauch im Zentrum bewirkt eine periodische Ladungsanhäufung entgegengesetzten Vorzeichens an den Enden des Drahtes. Es liegt somit ein oszillierendes elektrisches Dipolmoment $p(t)$ vor.

(184) $p(t) = p_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$

oder mit $p_0 = q \cdot L$, wenn q die effektive oszillierende Ladung bedeutet:

(185) $p(t) = q \cdot L \cos(\omega \cdot t)$.

Wir können hier die mathematisch relativ anspruchsvolle Berechnung des elektromagnetischen Feldes in der Umgebung des oszillierenden Dipols, ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen, nicht durchführen. Aber einige qualitative Aussagen sind trotzdem möglich. Im Abschnitt 1.9 haben wir gesehen, dass ein in z-Richtung liegender, statischer Dipol in der xy-Ebene ein \vec{E} -Feld erzeugt, welches auf dieser Ebene senkrecht steht. Die zeitliche Änderung der Geometrie unseres oszillierenden Dipols lässt in jedem Punkt der xy-Ebene einen \vec{E} -Vektor erwarten, der ebenfalls oszilliert, d.h. parallel zur z-Achse schwingt. Da die Ausbreitung des Feldes mit der endlichen Geschwindigkeit c erfolgt, erhalten wir eine vom Dipol weglaufende elektrische Welle mit $\lambda = c/\nu = 2 \cdot L$. Nach dem Biot-Savart Gesetz müssen aber auch kreisförmige, zur z-Achse konzentrisch liegende magnetische Feldlinien auftreten, denn die oszillierende Ladung stellt einen Wechselstrom dar. \vec{E} und \vec{H} sind auf der xy-Ebene offenbar so gerichtet, dass ein Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ entstehen kann, der einer auslaufenden Welle, also einer **ENERGIE-ABSTRAHLUNG** entspricht. In Richtung der z-Achse ist die Situation anders: aus Symmetriegründen kann es keine \vec{E} -Komponente geben, welche normal zur z-Achse steht, folglich muss der Poyntingvektor in z-Richtung verschwinden.

IN SEINER SCHWINGUNGSRICHTUNG KANN EIN LINEARER OZILLATOR KEINE ENERGIE ABSTRAHLEN.

Offensichtlich ist die Strahlungsintensität vom Winkel θ zwischen Schwingungsrichtung und Emissionsrichtung abhängig. Für Distanzen $r \gg \lambda$ (in der sogenannten "Fernzone") ergibt die exakte Rechnung die nachfolgenden Resultate.

\vec{E} und \vec{H} sind in Phase, für ihre Amplituden E_0 und H_0 gilt:

$$E_0 \propto (\ddot{p}/r) \cdot \sin\theta, \text{ ebenso } H_0 \propto (\ddot{p}/r) \cdot \sin\theta.$$

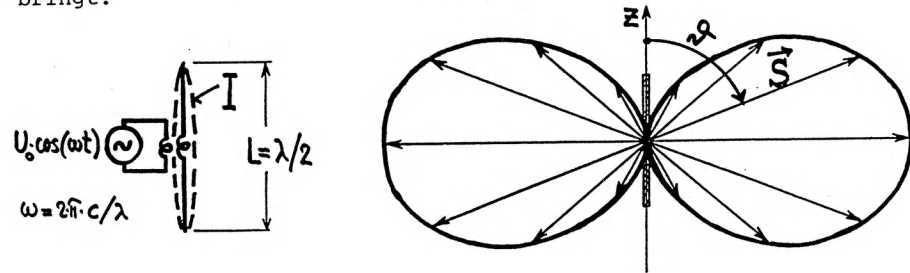
Die zweite zeitliche Ableitung \ddot{p} des Dipolmomentes $p(t)$ ist nach (185) auch

$$\ddot{p} = -\omega^2 \cdot q \cdot L \cos(\omega \cdot t) \text{ oder } \ddot{p} = q \cdot \ddot{z}.$$

Der zeitliche Mittelwert $\langle S \rangle = E_0 \cdot H_0 / 2$ ist somit proportional dem Quadrat der Beschleunigung \ddot{z} der Ladung oder der 4. Potenz der Frequenz, und fällt mit $1/r^2$ ab (wie dies der Energiesatz verlangt).

$$(186) \quad \langle S \rangle \propto \omega^4 \cdot p_0^2 \cdot \sin^2\theta / r^2.$$

Die graphische Darstellung von (186) führt zum STRAHLUNSDIAGRAMM. Dies ist das zur Dipolachse rotationssymmetrische Polardiagramm von $\langle S \rangle$, welches die räumliche Verteilung der Dipolstrahlung zum Ausdruck bringt.



Die exakte Berechnung von $\langle S \rangle$ und Integration über die Kugeloberfläche führt zur totalen, zeitlich gemittelten Strahlungsleistung

$$(187) \quad \langle P \rangle = \omega^4 \cdot p_0^2 / (12 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot c^3), \text{ TOTALE MITTLERE STRAHLUNGSLEISTUNG.}$$

Der Energieverlust durch Ausstrahlung wirkt sich als Dämpfung des Antennen-Schwingkreises aus. In Analogie zum Dämpfungswiderstand R eines RLC-Kreises spricht man hier vom STRAHLUNGSWIDERSTAND der Antenne.

Bemerkung zur ebenen Welle: Im strengen Sinn treten die in 5.1 besprochenen, ebenen elektromagnetischen Wellen in der Natur nicht auf. Wie im Falle des Hertz'schen Dipols, gehen die elektromagnetischen Wellen immer von räumlich eng begrenzten Zentren aus, z.B. von Sende-Antennen für Radiowellen oder von strahlenden Atomen in einer Lichtquelle. Befinden wir uns jedoch in Distanzen, die gross sind, verglichen mit der Quellendimension, so kann das Wellenfeld lokal in sehr guter Näherung durch eine ebene Welle approximiert werden. In diesem Sinn ist der oszillierende Dipol auch eine Quelle ebener Wellen.

DEMONSTRATIONEN:

1. GEDAEMPFTTE, FREIE SCHWINGUNG (RLC-Seriakreis)
2. ERZEUGUNG UNGEDAEMPFTER SCHWINGUNGEN; RUECKKOPPLUNG (Transistor-Oszillator)
3. LECHER-SYSTEM
4. MICHELSON-INTERFEROMETER (Oszillator 10,7 GHz, Wellenlänge 2,8 cm gemessen, daraus c-Bestimmung. Reflexion an Metallspiegel)
5. LINEAR POLARISIERTE E.M. WELLE (elektrische Dipolantenne, Nachweis der Polarisation)

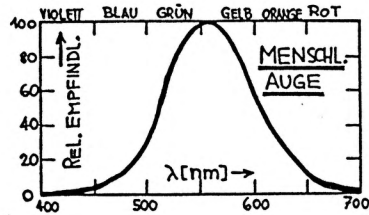
5.5 Das elektromagnetische Spektrum

Die elektromagnetischen Wellen überdecken ein breites Frequenz- und Wellenlängengebiet. Entsprechend ihrem Ursprung werden sie traditionellerweise klassifiziert. Die Abgrenzungen sind aber fließend und verschiedene Quellen können Wellen sich überlappender Energiebereiche erzeugen. In der folgenden Tabelle sind die Wellenlängenbereiche mit den zugehörigen Frequenzen $\nu = c/\lambda$ und den Quantenenergien $E = h\nu$ angegeben. ("Energiequanten" s. Kap. V).

STRAHLUNG (Quelle)	Wellenlänge λ (m)	Frequenz ν (Hz)	Energie $h\nu$ (eV)
RADIOWELLEN (el. Schwingkreis)	$10^5 - 0,3$	$3 \cdot 10^9 - 10^{10}$	$10^{-11} - 4 \cdot 10^{-6}$
MIKROWELLEN (el. UHF-Schwingkreis)	$0,3 - 10^{-3}$	$10^9 - 3 \cdot 10^{11}$	$4 \cdot 10^{-6} - 10^{-3}$
INFRAROT (Wärmestrahlung, Molekülschwingungen)	$10^{-3} - 7,8 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{14}$	$10^{-3} - 1,6$
SICHTBAR (Elektronen-Übergänge in Atomhülle)	$7,8 \cdot 10^{-7} - 3,8 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{14} - 8 \cdot 10^{14}$	$1,6 - 3,2$
ULTRAVIOLETT (Atome in elektrischen Gasentladungen)	$3,8 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{14} - 5 \cdot 10^{17}$	$3 - 2 \cdot 10^3$
ROENTGEN (Röntgenröhre, Bremsstrahlung)	$10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	$1,2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^5$
GAMMA (Kernstrahlung, Radioaktivität)	$10^{-10} - 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{22} - 3 \cdot 10^{24}$	$10^4 - 10^7$

IV. OPTIK

Die Optik behandelt die Gesamtheit der Erscheinungen und Gesetze der ELEKTROMAGNETISCHEN WELLEN. Von speziellem Interesse ist der Wellenlängenbereich zwischen etwa 380 nm und 780 nm, welcher vom menschlichen Auge als sichtbares Licht wahrgenommen wird. Die relative spektrale Empfindlichkeit des photopischen Receptorsystems (Zapfen-System), bezogen auf den Maximalwert bei 555 nm (grün-gelb), ist in nebenstehender Figur dargestellt. Für physikalische Experimente werden in vielen Fällen Photoplatten oder elektronische Detektoren verwendet, deren spektrale Empfindlichkeit über den sichtbaren Frequenzbereich hinaus gross sein kann.



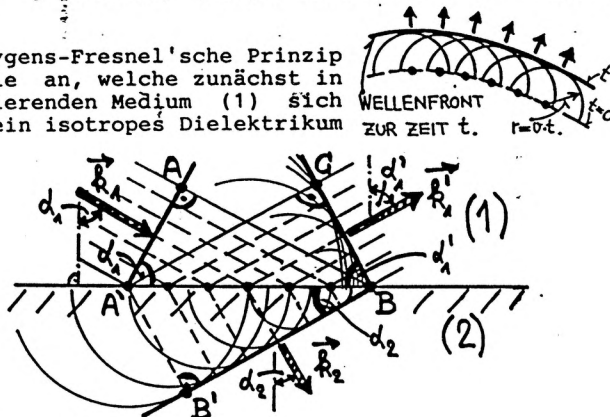
1. REFLEXION UND BRECHUNG

Wie wird eine ebene elektromagnetische Welle, insbesondere sichtbares Licht, an GRENZFLÄCHEN zwischen verschiedenen DIELEKTRISCHEN MATERIALIEN beeinflusst? Um diese Frage zu beantworten, müssten wir eigentlich Lösungen der Wellengleichung suchen, welche an den Grenzflächen bestimmte, durch die Maxwell'schen Gleichungen festgelegte Randbedingungen erfüllen. Anstatt diesen rigorosen mathematischen Weg zu gehen, machen wir Gebrauch von einem allgemeinen, für alle Wellen gültigen Prinzip, welches schon 1678 von Christian HUYGENS intuitiv gefunden und 1818 von Augustin Jean FRESNEL mathematisch begründet wurde.

DAS HUYGENS-FRESNEL'sche PRINZIP:

Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer Kugelwelle (Elementarwelle) aufgefasst werden. Zu einem späteren Zeitpunkt wird die neue Wellenfront durch die allen Elementarwellen gemeinsame Tangentialfläche (Envelope) gebildet.

Wir wenden nun das Huygens-Fresnel'sche Prinzip auf eine ebene Welle an, welche zunächst in einem isotropen, isolierenden Medium (1) sich ausbreitet und in ein isotropes Dielektrikum (2) eindringt. Die Grenzfläche zwischen (1) und (2) sei eben, die Phasengeschwindigkeiten in den beiden Medien seien v_1 und v_2 . Den Winkel zwischen der Einfallsrichtung K_1 und dem Lot auf die Grenzfläche bezeichnen wir mit α_1 .



Aus der Figur lesen wir ab, dass während der Laufzeit Δt für die Strecke \overline{AB} , eine Elementarwelle mit Zentrum in A' im Medium (1) den Radius $\overline{A'C} = v_1 \cdot \Delta t$ und im Medium (2) den Radius $\overline{A'B'} = v_2 \cdot \Delta t$ erreicht. Die rechtwinkligen Dreiecke $A'AB$ und BCA' sind kongruent. Wir erhalten das

REFLEXIONSGESETZ:

(1) $\alpha_1 = \alpha_1'$, EINFALLSWINKEL = REFLEXIONSWINKEL.

EINFALLENDER UND REFLEKTIERTER WELLENSTRAHL BILDEN MIT DEM EINFALLSLOT EINE EBENE.

Ferner muss gelten

$\sin \alpha_1 = \overline{AB} / \overline{A'B}$ und $\sin \alpha_2 = \overline{A'B'} / \overline{A'B}$.

Daraus folgt weiter

(2) $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1 / v_2$.

Den Quotienten aus den Phasengeschwindigkeiten in den beiden Medien bezeichnet man als relativen Brechungsindex.

(3) $n_{12} = v_1 / v_2$, DEFINITION des RELATIVEN BRECHUNGSINDEX n_{12} .

Mit (2) und (3) lautet das

BRECHUNGSGESETZ:

(4) $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = n_{12}$,

EINFALLENDER UND GEBROCHENER WELLENSTRAHL BILDEN MIT DEM EINFALLSLOT EINE EBENE .

Der Brechungsindex n eines Stoffes, bezogen auf das Vakuum, ist der absolute Brechungsindex, eine Materialkonstante:

(5) $n = c/v$, ABSOLUTER BRECHUNGSINDEX .

Haben zwei Stoffe die absoluten Brechzahlen n_1 und n_2 , so folgt aus (3) und (5):

(6) $n_{12} = n_2 / n_1$.

Nach der Maxwell'schen Theorie ist die Lichtgeschwindigkeit in Materie gegenüber dem Vakuum gerade um den Faktor $1/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ reduziert (s. Seite 65). Für dielektrische Stoffe ist die relative Permeabilität $\mu_r \approx 1$, sodass hier gilt

(7) $n = c/v \approx \sqrt{\epsilon_r}$, MAXWELL'sche RELATION.

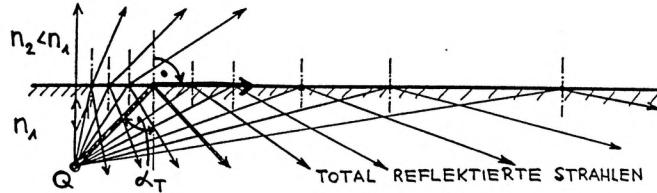
Beachte:

Wenn wir die statisch definierte Dielektrizitätskonstante (s. Seite 20) einsetzen, gilt die Maxwell'sche Relation für Isolatoren, solange elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen grösser als 1 nm betrachtet werden. Im Frequenzbereich von sichtbarem Licht muss der atomistischen Struktur der Materie Rechnung getragen und die Frequenzabhängigkeit von ϵ_r berücksichtigt werden.

1.2 TOTAL-REFLEXION

Wir setzen nun voraus, dass eine ebene Lichtwelle im Medium (1) auf die ebene Grenzfläche zum Medium (2) auftrifft, wobei (1) **OPTISCH DICHTER** sein soll, als das Medium (2). Es ist also $n_1 > n_2$. Lassen wir den Einfallswinkel α_1 anwachsen, so wird schliesslich der Grenzwinkel $\alpha_1 = \alpha_T$ erreicht, zu dem ein Brechungswinkel $\alpha_2 = 90^\circ$ gehört. Für den Grenzwinkel α_T gilt:

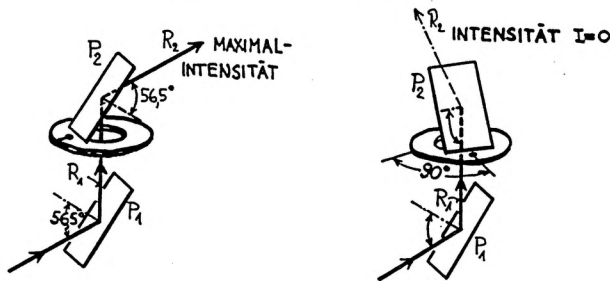
(9) $\sin \alpha_T = n_2/n_1$. GRENZWINKEL DER TOTALREFLEXION α_T .



Für Glas gegen Luft ist $n_2/n_1 \cong 1,00/1,50$ und $\alpha_T = 41,8^\circ$. Wenn dieser Grenzwinkel überschritten wird, ist ein Eindringen der Welle ins Medium (2) nicht mehr möglich; es tritt **TOTALREFLEXION** auf. Als eine von vielen technischen Anwendungen sei die "Glasfaser-Optik" erwähnt, wo Licht innerhalb von feinen Glasfäden mittels Totalreflexion transportiert wird. Für den Lichtverlust ist praktisch nur die Absorption im Glas, nicht die Reflexion verantwortlich, obwohl viele tausend Reflexionen stattfinden können.

1.3 POLARISATION DURCH REFLEXION; BREWSTER'scher WINKEL

Wird Licht etwa von einer thermischen Lichtquelle emittiert, so hat der elektrische Feldvektor in jedem festen Punkt der Welle die Eigenschaft, seine transversale Schwingungsrichtung als Funktion der Zeit statistisch zu ändern. Jede Richtung in der Normalebene zum Wellenvektor tritt gleich häufig auf. Die Lichtwelle ist **UNPOLARISIERT**. Wir lassen nun unpolarisiertes Licht von einer ebenen Glasplatte P1 (Brechzahl $n = 1,52$) unter dem Einfallswinkel $\alpha_1 = 56,5^\circ$ reflektieren. Der reflektierte Strahl R1 wird von einer identischen, zur ersten parallel orientierten Glasplatte P2 nochmals reflektiert (Strahl R2). Drehen wir nun P2 um R1 als Drehachse, so ändert die Intensität von R2. Sie ist maximal, wenn die Reflexionsebenen beider Platten parallel sind und sie wird null, wenn diese normal aufeinander stehen.

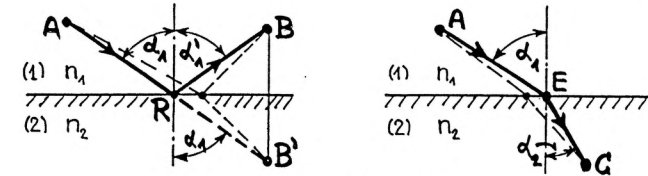


1.1 DAS PRINZIP VON FERMAT (Pierre de Fermat, 1650)

Physikalische Gesetze können auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Ein schönes Beispiel dafür ist die Formulierung von Reflexions- und Brechungsgesetz durch ein allgemeines "**Variationsprinzip**", welches auf den Mathematiker Fermat zurückgeht. Es besagt:

Ein Licht-Wellenstrahl, der durch zwei Punkte A und B hindurchläuft, folgt immer jenem Weg, der verglichen mit benachbarten Wegen zu einem Extremum der Laufzeit $t(A \rightarrow B)$ führt.

In einem homogenen Medium verlangt das Fermat'sche Prinzip offensichtlich minimale Laufzeit zwischen zwei Punkten, also geradlinige Lichtausbreitung. Im Falle der Reflexion ist leicht einzusehen, dass die Laufzeit für den reflektierten Strahl von A über R nach B ein Minimum ist. Er verläuft immer im Medium (1) mit



konstanter Geschwindigkeit v_1 ; der Weg ARB und damit die Laufzeit ist dann minimal, wenn ARB' zum Spiegelbild B' von B eine Gerade, d.h. das Reflexionsgesetz $\alpha_1 = \alpha_2$ erfüllt ist. Ueberschreitet der Wellenstrahl die Grenzfläche zwischen den Medien (1) und (2), so stellt sich das Extremalproblem, den Eintrittspunkt E so zu finden, dass die Summe der Laufzeiten für AE in (1) und EC in (2) minimal wird. Die Rechnung ergibt genau das Brechungsgesetz (4).

UEBUNG:

Beweise, dass die minimale Laufzeit zwischen A und C gerade dann erreicht wird, wenn das Brechungsgesetz erfüllt ist.

Die Anzahl der Wellenlängen, welche zwischen zwei Punkten auf dem Wellenstrahl liegen, ist gleich dem Produkt aus Laufzeit und Frequenz. Da die Frequenz unabhängig vom Brechungsindex konstant ist, bedeutet minimale Laufzeit auch eine minimale Zahl von Wellenlängen zwischen den festen Punkten. Misst die Koordinate s die Weglänge auf dem Wellenstrahl und ist λ_0 die Wellenlänge im Vakuum, so ist $\lambda(s) = \lambda_0/(n(s))$ die Wellenlänge an der Stelle s. Die Zahl N der Wellenlängen zwischen A und C wird dann

$N = (1/\lambda_0) \int_A^C n(s) \cdot ds$. Man nennt

(8) $\int_A^C n(s) \cdot ds$ die **OPTISCHE WEGLAENGE**.

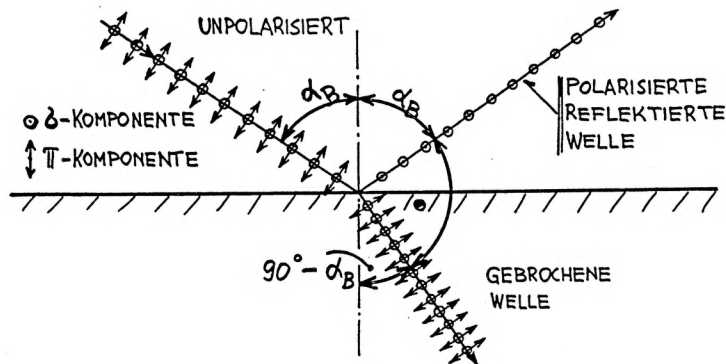
Das Fermat'sche Prinzip kann auch so ausgedrückt werden:

Zwischen zwei Punkten eines Wellenstrahls ist der Verlauf des Strahles so, dass der **OPTISCHE WEG** ein Extremum ist.

Der spezielle Einfallswinkel $\alpha_1 = \alpha_B$ (Brewsterwinkel), bei welchem dieses Phänomen auftritt, ist jener Winkel, für welchen reflektierter und gebrochener Strahl gerade normal aufeinander stehen. (Experimentell gefunden durch David BREWSTER, 1811). Dies bedeutet, dass der Brechungswinkel $\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$ ist. Nach dem Brechungsgesetz (4) wird dann

(10) $\boxed{\text{tg } \alpha_B = n_2/n_1}$, BREWSTERWINKEL α_B .

Wie lässt sich nun dieses Verhalten erklären? Sowohl das Reflexionsgesetz (1) als auch das Brechungsgesetz (4), zu deren Herleitung wir lediglich das Huygens-Fresnel'sche Prinzip herangezogen haben, macht zwar eine Aussage über die Ausbreitungsrichtung der Welle, sagt aber nichts über die auftretenden Intensitäten. Die Intensitätsberechnung würde die schon erwähnte rigorose Behandlung mit den Maxwell'schen Gleichungen erfordern. Etwas Einsicht bringt uns folgende einfache Betrachtung: wir zerlegen den elektrischen Vektor \vec{E} der Welle in die zwei Normalkomponenten \vec{E}_\parallel und \vec{E}_\perp , wobei \vec{E}_\parallel in der Reflexionsebene (diese enthält auch den gebrochenen Strahl) und \vec{E}_\perp senkrecht zu dieser Ebene schwingen soll. Ist das einfallende Licht unpolarisiert, so sind beide Komponenten gleich stark vertreten. Beim Eindringen der Welle ins Glas werden die hier vorhandenen Elektronen zu erzwungenen Dipol-schwingungen angeregt, d.h. sie wirken als Hertz'sche Dipole und senden Elementarwellen aus, die in ihrer Gesamtheit sowohl die reflektierte, als auch die gebrochene Welle erzeugen. Wenn nun (10) erfüllt ist, fallen die reflektierten Wellenstrahlen gerade mit der Dipolachse der in \parallel -Richtung schwingenden Elektronen zusammen, sodass diese zur reflektierten Welle nichts beitragen können. Anders bei den in \perp -Richtung angeregten Dipolschwingungen: sie emittieren mit maximaler Intensität in Reflexionsrichtung. Dies hat zur Folge, dass die REFLEKTIERTE WELLE VOLLSTÄNDIG POLARISIERT IST, und zwar SENKRECHT ZUR REFLEXIONSEBENE. Die gebrochene Welle ist in \parallel -Richtung nicht vollständig polarisiert, denn sie enthält auch Beiträge von \perp -Komponenten. Wenn in unserem Experiment die Reflexionsebene der Platte P2 gegenüber jener von P1 um 90° verdreht ist, enthält die vollständig polarisierte Welle R1, bezogen auf P2, nur \vec{E}_\parallel -Komponenten, sodass die für Reflexion erforderliche Feldkomponente fehlt. Es kann keine Reflexion auftreten. Die Platte P1 wirkt als POLARISATOR, P2 als ANALYSATOR.



2. GEOMETRISCHE OPTIK

Wenn wir in der Normalebene zum Wellenvektor k einer Lichtwelle eine Lochblende anbringen, deren Durchmesser gross ist, verglichen mit der Wellenlänge, so wird die Welle in ihrer lateralen Ausdehnung begrenzt, es entsteht ein LICHTBUENDEL oder WELLENBUENDEL. Dieses Lichtbündel wird als LICHTSTRAHL bezeichnet. Die Lichtstrahlen folgen dem Weg, auf welchem die Lichtenergie sich ausbreitet. In isotropen Medien sind sie gerade Linien, stehen senkrecht auf den Wellenflächen und sind identisch mit den durch die Vektoren k festgelegten Wellenstrahlen. Die GEOMETRISCHE OPTIK ist eine APPROXIMATION, indem sie BEUGUNGSEFFEKTE VERNACHLAESSIGT. (s. Kap. 3.6). Für die Diskussion abbildender Systeme (z.B. Spiegel und Linsen) ist die Betrachtungsweise der geometrischen Optik bequem und oft hinreichend genau.

2.1 ABBILDENDES SYSTEM

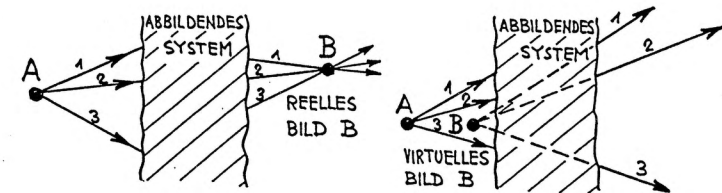
Treten die von einem OBJEKT PUNKT A ausgehenden Strahlen in ein IDEAL ABBILDENDES SYSTEM ein, so werden sie in ihrer Richtung so beeinflusst, dass sie nach passieren des Systems sich wieder in einem Punkt, dem BILDPUNKT B, schneiden. Aus verschiedenen physikalischen Gründen sind reale abbildende Systeme immer durch ABERRATIONEN gekennzeichnet, d.h. bildseitig schneiden sich die Strahlen in vielen Punkten, die ein endliches Volumen ausfüllen. Wir unterscheiden zwei Arten von Bildpunkten:

a) REELLES BILD

Die von A ausgehenden Strahlen schneiden sich wirklich in B. In diesem Fall lässt sich der Bildpunkt B auf einem Schirm auffangen.

b) VIRTUELLES BILD

Die von A ausgehenden Strahlen sind nach dem Verlassen des Systems divergent; sie scheinen von einem Punkt B herzukommen. Das Bild ist für einen Beobachter erkennbar, wenn er den austretenden Strahlen entgegenblickt.



2.1.1 Die dünne Linse als abbildendes System

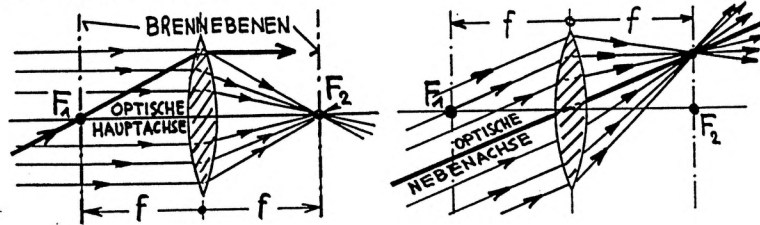
Am Beispiel der dünnen (oder "schlanken") Linse repetieren wir kurz die wichtigsten Begriffe im Zusammenhang mit abbildenden Systemen.

Unsere Linse besteht aus einem rotationssymmetrischen Stück Glas der Brechzahl n , welches durch zwei konvexe Kugelflächen mit den

Radien R1 und R2 begrenzt ist. Wir bezeichnen die Rotations-symmetrieachse als **OPTISCHE HAUPTACHSE**. In der Mitte ist die Linse dicker als am Rand, es ist eine **SAMMEL-LINSE**. Die Linse soll "dünn", d.h. ihre Dicke klein sein, verglichen mit den Krümmungsradien R1 und R2. Im Folgenden betrachten wir nur achsennahe Strahlen, welche mit der optischen Hauptachse kleine Winkel einschliessen ("Paraxialstrahlen"). Aus dem Brechungsgesetz (4) folgt unter dieser Voraussetzung, dass alle parallel zur optischen Hauptachse einfallenden Strahlen sich jenseits der Linse im sogenannten **BRENNPUNKT** schneiden. Der Abstand des Brennpunktes von der Linsenmitte heisst **BRENNWEITE f** der Linse. Sie hängt ab von den Krümmungsradien R1 und R2, sowie vom Brechungsindex des Linsenmaterials. Die reziproke Brennweite oder die Brechkraft ist

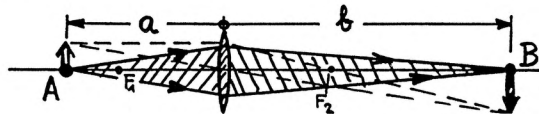
(11)
$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) .$$
 BRECHKRAFT $1/f$.
 Einheit: m^{-1} ,
 $1 m^{-1} = 1$ Dioptrie.

Die dünne Linse besitzt immer zwei symmetrisch liegende Brennpunkte F1 und F2, sowie zwei **BRENNEBENEN**, die normal zur optischen Hauptachse stehen und einen Brennpunkt enthalten. Als **HAUPTSTRAHL** bezeichnen wir einen Strahl durch die Linsenmitte; er wird nicht gebrochen und bildet eine **OPTISCHE NEBENACHSE**. Zu einer optischen Nebenachse parallel einfallende Strahlenbündel verlassen die Linse immer so, dass sie sich im Durchstosspunkt der Nebenachse durch die Brennebene schneiden. Für alle Strahlwege gilt natürlich das Prinzip der **UMKEHRBARKEIT** der Lichtrichtung. Insbesondere verlassen alle durch einen Brennpunkt auf die Linse einfallenden Strahlen, sogenannte **BRENNSTRAHLEN**, diese als zur optischen Hauptachse paralleles Strahlenbündel.



Liegt ein Gegenstandspunkt A im Abstand a auf der optischen Hauptachse, so gilt für den Abstand b des Bildpunktes B die Beziehung

(12)
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} ,$$
 ABBILDUNGSGLEICHUNG.



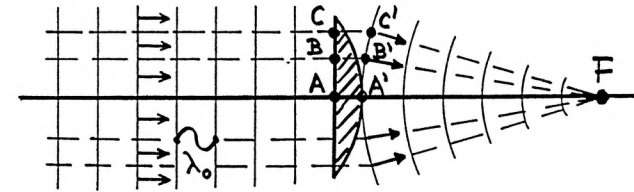
Beachte: Die Gegenstandsweite a ist immer positiv. Positives b bedeutet, dass das Bild auf der dem Gegenstand abgewandten Seite der Linse liegt. Für eine Zerstreulinse ist f negativ, was sich aus (11) ergibt, wenn die Krümmungsradien konkaver Flächen negativ genommen werden.

3. WELLENOPTIK

3.1 LINSENWIRKUNG IM WELLENBILD

Anstatt die Wirkungsweise einer Linse im geometrisch optischen Bild auf Grund des Brechungsgesetzes zu interpretieren, können wir auch nach der Veränderung fragen, welche eine Welle beim Durchlaufen der Linse erfährt. Wir betrachten eine ebene Welle, die parallel zur optischen Hauptachse einer plankonvexen Linse von links einfällt. Die **WELLENFLÄCHEN**, definiert als **FLÄCHEN GLEICHER PHASENLAGE**, sind Normalebenen zur Hauptachse. Folglich enthält die plane, linksseitige Linsenbegrenzung gerade Punkte gleicher Phasenlage des elektrischen Feldes, z.B. A, B und C. Im Linsenmaterial wird die Wellenlänge λ gegenüber λ_0 in der Luft, um den Faktor $1/n$ kürzer, d.h. der Phasenwinkel ändert sich bei festgehaltener Zeit t als Funktion des Ortes im Glas schneller, als in der Luft. Mit wachsendem Abstand von der Hauptachse sind also längere geometrische Wegstücke als $\overline{AA'}$, etwa $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ nötig, um gleichen Phasenzuwachs zu erreichen, denn die Weganteile, welche im Glas verlaufen, nehmen nach aussen ab. Oder anders ausgedrückt: die **OPTISCHEN WEGE**

$$\int_A^{A'} n \cdot ds , \int_B^{B'} n \cdot ds \text{ und } \int_C^{C'} n \cdot ds$$
 sind gleich gross.



Rechterhand von der Linse sind die **FLÄCHEN GLEICHER PHASE GEKRÜMMT**, sodass die Wellenstrahlen und damit der Energietransport überall auf die Hauptachse zu gerichtet ist. Bei der idealen Sammellinse nimmt die Dicke nach aussen gerade so ab, dass die Wellenflächen der ebenen, von links eintretenden Welle in Kugelflächen umgewandelt werden, deren Krümmungsmittelpunkt der rechtsseitige Brennpunkt F ist. Es entsteht eine **KONVERGENTE KUGELWELLE**. In analoger Weise wird bei einer reellen Abbildung die divergierende, von einem Gegenstandspunkt A ausgehende Kugewelle, durch die Sammellinse in eine auf den Bildpunkt B zulaufende, konvergierende Kugewelle umgewandelt.



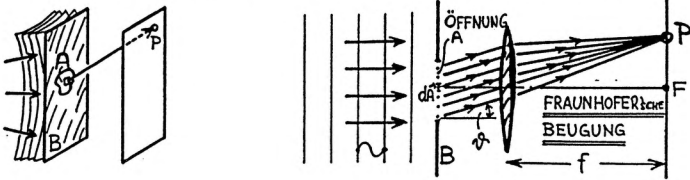
Beachte: Für alle vom Gegenstandspunkt A zum Bildpunkt B laufenden Wellenstrahlen ist der optische Weg, d.h. die Anzahl der dazwischen liegenden Wellenlängen und damit auch die Laufzeit, gleich gross. Es liegt ein Spezialfall des Fermat'schen Prinzips vor: die Laufzeit benachbarter Lichtstrahlen zwischen einem **PUNKT A** und seinem **BILDPUNKT B** ist **STATIONÄR**.

3.2 BEUGUNG

Das Phänomen der Beugung ist durch Arnold SOMMERFELD sehr treffend folgendermassen definiert worden:

Ist die Ausbreitung von Lichtstrahlen nicht geradlinig und erfolgt die Richtungsänderung nicht durch Reflexion oder Brechung, so liegt Beugung vor.

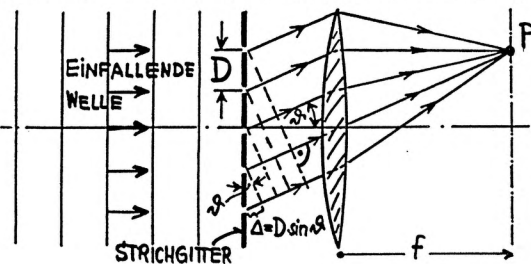
Beugung wurde 1665 von Francesco GRIMALDI entdeckt, aber erst von Fresnel mit Hilfe des Huygens'schen Prinzips als Wellenphänomen interpretiert. Sie tritt typischerweise auf, wenn eine Wellenfront auf ein undurchlässiges Hindernis B auftrifft, welches eine für die Welle durchlässige Oeffnung A besitzt. Die Amplitude des Wellenfeldes in einem hinter B liegenden Punkt P, ergibt sich aus der Superposition von Huygens'schen Elementarwellen, deren Zentren, über die Oeffnung A verteilt, in infinitesimalen Flächenelementen dA sitzen. Wir nehmen an, P sei unendlich weit weg vom Gebiet A, sodass alle Strahlen nach P unter sich parallel sind. Man nennt diesen Grenzfall **FRAUNHOFER'sche BEUGUNG**. In Praxis wird dieser Fall realisiert, indem man P in die Brennebene einer Sammellinse legt.



Wir betrachten hier zwei Spezialfälle, nämlich die Beugung am optischen Strichgitter und die Beugung an einer Spaltblende.

3.2.1 Beugung am Strichgitter

Ein optisches Gitter besteht aus einer sehr grossen Zahl paralleler, äquidistanter Spaltöffnungen. Der **ABSTAND D** benachbarter Spalte ist die **GITTERKOSTANTE**. Wir wollen der Einfachheit halber voraussetzen, dass die Breite der Spalte klein sei, verglichen mit der Wellenlänge des Lichtes, sodass im Querschnitt eines Spaltes nur eine einzige Elementarwelle ihren Ausgangspunkt hat. Unser Gitter soll **N SPALTEN** besitzen, auf die von links eine ebene Lichtwelle senkrecht auftrifft. Nun fragen wir nach der Amplitude A der Lichtwelle im Punkt P, welcher in der Brennebene einer Sammellinse liegt. Alle durch P gehenden Strahlen verlassen die Gitterspalte unter demselben Winkel phi. In der Gitterebene schwingen alle Huygens'schen Elementarwellen mit gleicher Phase. Ihre optische Weglänge nach P ist aber verschieden, sodass jede Spalte zwar mit gleicher Amplitude A₀, aber verschiedener Phase zur Gesamtamplitude A beiträgt.

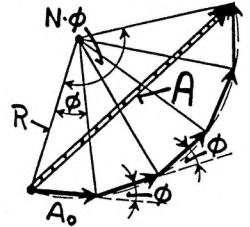


Für benachbarte Elementarwellen ist der Phasenunterschied

$$\phi = k \cdot \Delta \quad \text{oder} \quad \phi = 2 \cdot \pi \cdot (D/\lambda) \cdot \sin \varphi .$$

In komplexer Schreibweise führt die phasengerechte Addition der Elementarwellen im Punkt P zur Gesamtamplitude A auf

$$(13) \quad \hat{A} = \sum_{n=0}^{N-1} A_0 \cdot \exp(i \cdot n \cdot \phi) .$$



Aus der Figur liest man ab, dass der Umkreisradius R des entstehenden regelmässigen Polygons mit den Seiten A₀,

$R = A_0 / (2 \cdot \sin(\phi/2))$ ist und die Gesamtamplitude

$$A = 2 \cdot R \cdot \sin(N \cdot \phi/2) \quad \text{oder} \quad A = A_0 \cdot \sin(N \cdot \phi/2) / \sin(\phi/2) \text{ beträgt.}$$

Die Lichtintensität ist dem Quadrat der Amplitude proportional. Mit $A_0^2 = I_0$ und $\phi/2 = \pi \cdot (D/\lambda) \cdot \sin \varphi$ erhalten wir die Intensität

$$(14) \quad I = I_0 \cdot \frac{\sin^2(N \cdot \pi \cdot (D/\lambda) \cdot \sin \varphi)}{\sin^2(\pi \cdot (D/\lambda) \cdot \sin \varphi)} .$$

I wird maximal, wenn der Nenner verschwindet, also für $(D/\lambda) \cdot \sin \varphi = m$ oder

$$(15) \quad \sin \varphi = m \cdot \lambda / D \quad , \quad \text{HAUPTMAXIMA, mit ORDNUNG } m \text{ DES BEUGUNGSMAXIMUMS. (} m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{).}$$

Die Bedingung (15) bedeutet, dass bei maximaler Verstärkung die Wegunterschiede benachbarter Elementarwellen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Der Polygonzug in obiger Figur entartet zu einer Geraden der Länge N·A₀. Die Maximalintensität ist also

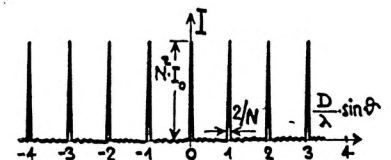
$$(16) \quad I(\max) = N^2 \cdot I_0 \quad . \quad \text{MAXIMALINTENSITAET.}$$

Nullstellen zwischen den Hauptmaxima treten auf, wenn der Zähler verschwindet, d.h. $N \cdot \pi \cdot (D/\lambda) \cdot \sin \varphi = \nu \cdot \pi$ (ν ganzzahl), also

$$(17) \quad I = 0, \quad \text{für} \quad \sin \varphi = \nu \cdot \lambda / (N \cdot D) \quad , \quad (\text{ausser für } \nu = m \cdot N).$$

Beachte: Die erste Nullstelle in der Nachbarschaft eines Hauptmaximums liegt umso näher, d.h. die **MAXIMA SIND UMSO SCHAERFER, JE GROESSER DIE ZAHL N DER GITTERSPALTEN IST.**

Es bilden sich auch Zwischenmaxima aus, wenn der Sinus im Zähler von (14) den Betrag eins erreicht. Deren Werte sind aber relativ zu den Hauptmaxima für grosse Strichzahlen N vernachlässigbar. Gute optische Gitter besitzen ca. 1000 bis 2000

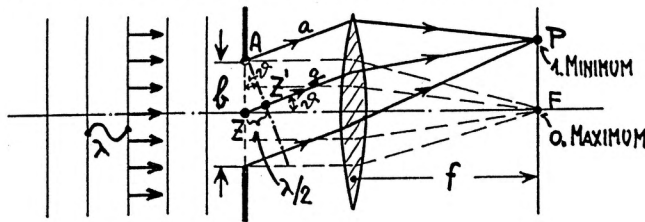


Striche pro mm, sodass die Intensitätsverteilung in der Brennebene der Sammellinse oder in grosser Entfernung aus lauter δ -Funktionen (den Hauptmaxima m-ter Ordnung, m ganzzahlig) besteht.

Da die Abstände der Hauptmaxima mit der Wellenlänge λ der Strahlung anwachsen, spielt das Gitter eine grosse Rolle als **SPEKTRALAPPARAT**, wo es zur Trennung verschiedener Wellenlängen oder zu deren Bestimmung verwendet wird.

3.2.2 Beugung an der Spaltblende

Nun lassen wir eine ebene Welle auf ein Hindernis einfallen, welches eine lange, spaltförmige Oeffnung der Breite b besitzt, deren Ebene parallel zu den Wellenfronten liegt. Ueber die Grösse von b setzen wir nichts voraus, werden aber sehen, dass die auftretenden Beugungserscheinungen am augenfälligsten sind, wenn b einige Wellenlängen beträgt. Die optische Hauptachse der hinter dem Spalt aufgestellten Sammellinse liegt in der Einfallrichtung und enthält das Spaltzentrum. Wie gross ist die Intensität $I(\vartheta)$ in der Brennebene, als Funktion des Beugungswinkels ϑ ?



Die Zentren der Huygens'schen Elementarwellen sind jetzt kontinuierlich über die Spaltbreite b verteilt. Für $\vartheta=0$ sind alle Elementarwellen in Phase, sodass sich eine maximale Intensität I_0 im Brennpunkt F ergibt. Auf der zur Längsrichtung des Spaltes Parallelen durch F ist die Intensität konstant. Jetzt wählen wir ϑ so, dass die Wegdifferenz des Strahls z vom Spaltzentrum Z , gegenüber dem Randstrahl a , gerade $\overline{ZZ'} = \lambda/2$ ist. Die Strahlen a und z löschen sich in P durch Interferenz aus, denn ihre Phasendifferenz ist π . Dasselbe gilt für alle Strahlenpaare, die von Spaltpunkten mit dem Abstand $b/2$ ausgehen; d.h. die Amplitude von jedem Strahl der einen Spalthälfte, wird durch einen der anderen Hälfte in P zu null kompensiert. Die Bedingung für die erste Nullstelle lautet:

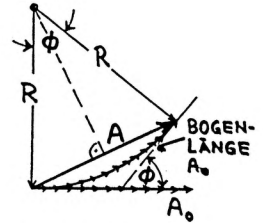
$$(18) \quad \sin \vartheta_1 = \lambda/b \quad \text{1. NULLSTELLE bei } \vartheta_1.$$

In analoger Weise können wir weitere Nullstellen angeben. Wählen wir $\vartheta = \vartheta_2$ so, dass Spaltpunkte im Abstand $b/4$ zu Strahlenpaaren mit Phasendifferenz π führen, muss $\sin \vartheta_2 = 2\lambda/b$ erfüllt sein. Allgemein erhalten wir für die m -te Nullstelle die Bedingung

$$(19) \quad \sin \vartheta_m = m \cdot \lambda/b \quad \text{m-te NULLSTELLE bei } \vartheta_m.$$

Der gesamte Intensitätsverlauf $I(\vartheta)$ wird wieder durch phasengerechte Addition der komplexen Amplituden gewonnen. Unendlich viele Elementarwellen, mit differentiell kleinen Amplituden, werden aufin-

tegriert. Anstatt einen regelmässigen Polygonzug, ergibt dann die graphische Darstellung ein Kreisbogenstück der Länge A_0 , wenn $I_0 = A_0^2$ die Maximalintensität im Brennpunkt ist. Dieser Kreisbogen bildet den Phasenwinkel ϕ , welcher gleich dem Phasenunterschied der von den Spalträndern ausgehenden Strahlen ist.

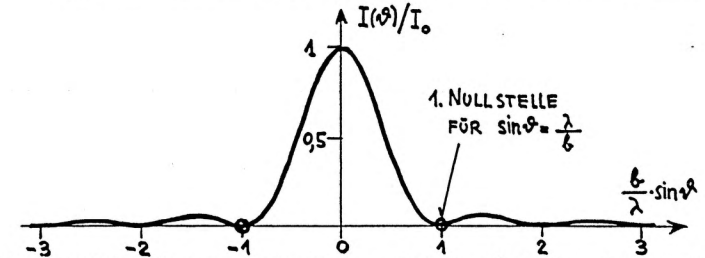


$$\phi = (2\pi/\lambda) \cdot b \cdot \sin \vartheta \quad \text{, Phasendifferenz der Randstrahlen.}$$

Die resultierende Amplitude A kann aus der Figur abgelesen werden. Es ist $R=A_0/\phi$ und $A=2 \cdot R \cdot \sin(\phi/2)$, also

$A = A_0 \cdot (\sin(\phi/2))/(\phi/2)$. Mit $I = A^2$ folgt

$$(20) \quad I(\vartheta) = I_0 \cdot (\sin^2(\pi \cdot (b/\lambda) \cdot \sin \vartheta)) / (\pi \cdot (b/\lambda) \cdot \sin \vartheta)^2.$$

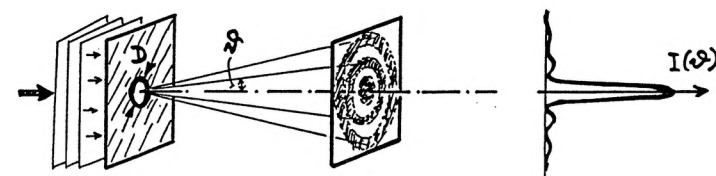


Nach den Regeln der geometrischen Optik wäre die Intensität in der Brennebene auf eine scharfe Gerade parallel zum Spalt begrenzt. Man sieht, dass die geometrische Optik nur im Grenzfall $b \gg \lambda$ anwendbar ist, dann liegen die Nullstellen des Intensitätsverlaufs beliebig nahe beim Nullpunkt.

BEUGUNG AN DER KREISBLENDE:

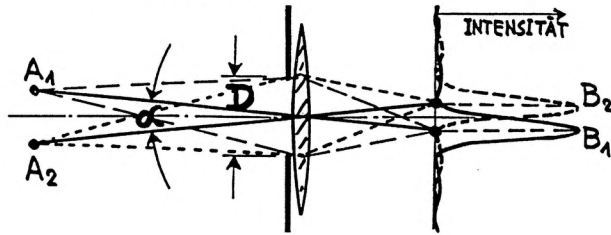
In optischen Instrumenten wirken die rotationssymmetrischen Linsen immer auch als kreisförmige Begrenzung der Lichtbündel. Neben den erwünschten Linsenwirkungen treten daher immer auch störende Beugungseffekte auf. Ersetzen wir obigen Spalt durch eine konzentrische Lochblende mit dem Durchmesser D , so ergibt die Rechnung in der Brennebene der Linse (Linsendurchmesser $\gg D$) eine rotationssymmetrische Intensitätsverteilung mit ähnlichem Profil wie in obiger Figur. Der zur ersten Nullstelle gehörende Beugungswinkel genügt der Beziehung

$$(21) \quad \sin \vartheta = 1,22 \cdot \lambda/D \quad \text{, 1. NULLSTELLE für die KREISBLENDE.}$$



3.2.3 Beugungsbegrenzte Auflösung; Rayleigh-Kriterium.

Zwei unendlich weit entfernte Gegenstandspunkte A1 und A2, sollen in der Brennebene einer Linse abgebildet werden (z.B. durch die Objektivlinse eines Fernrohrs oder durch das menschliche Auge). Die Verbindungsgeraden von A1 und A2 zum Objektivmittelpunkt bilden den **SEHWINKEL** α . Wie klein darf nun α sein, damit noch zwei verschiedene Bildpunkte B1 und B2 entstehen? Würden keine Beugungseffekte am Linsendurchmesser oder an der Eintrittsblende auftreten, wären B1 und B2 ebenfalls punktförmig, d.h. α dürfte beliebig klein sein. In Wirklichkeit gibt es aber gar keine Bildpunkte, sondern zwei Beugungsfiguren B1 und B2, welche sich je nach Sehwinkel und Blendendurchmesser, mehr oder weniger stark überschneiden. Die Lage der beiden Intensitätsmaxima ist noch gut örtlich getrennt wahrnehmbar, wenn das erste Minimum von B1 mit dem Maximum von B2 zusammenfällt. Da $\alpha \ll 1$ ist, folgt die Bedingung:



(22) $\alpha \geq 1,22 \cdot \lambda / D$, RAYLEIGH'sches AUFLÖSUNGSKRITERIUM.

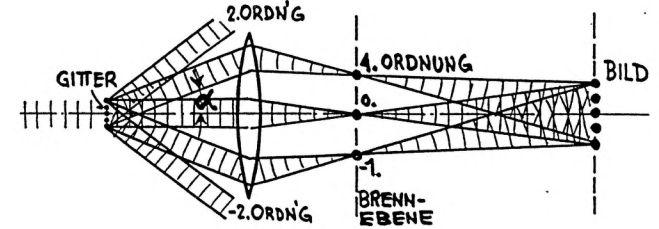
UEBUNG:

Wie gross ist das angulare, beugungsbegrenzte Auflösungsvermögen des menschlichen Auges, wenn der Pupillendurchmesser 4 mm beträgt? Wieviele Rezeptoren pro mm^2 Retina müssten vorhanden sein, damit dieses Auflösungsvermögen voll ausgenutzt wird? (Abstand Linse-Retina ca. 17 mm; tatsächliche maximale Zapfendichte etwa 150 000 pro mm^2 , ist diese Dichte "vernünftig"?)

3.2.4 Abbe'sche Theorie der mikroskopischen Abbildung (Ernst Abbe, 1873)

Wenn man mit dem Mikroskop einen nicht selbstleuchtenden Gegenstand abbildet, so wird das Licht der externen Quelle an den feinen Strukturen des Objektes gebeugt. Diese Beugungserscheinungen beeinflussen die Intensitätsverteilung in der Bildebene der Objektivlinse. Zur Illustration wählen wir als Objekt ein Strichgitter, das mit Hilfe von durchfallendem Licht (in Transmission) abgebildet wird. Bevor die einzelnen, von den Gitterstrichen ausgehenden Lichtstrahlen, sich in der Bildebene wieder vereinigen, erzeugen sie in der Brennebene die verschiedenen Beugungsordnungen. Man kann also das Bild als Interferenzfigur der Beugungsordnungen auffassen. Implizit steckt die ganze Bildinformation auch in der Beugungsfigur. Abbe hat diese als das **PRIMAERE BILD** bezeichnet. Offensichtlich geht Bildinformation verloren, wenn nicht alle Beugungsordnungen zum Bild beitragen können. Setzt man in die Brennebene eine Spaltblende, die so eng ist, dass sie nur die null-

te Ordnung durchlässt, wird im Bild keine Gitterstruktur sichtbar sein, denn jede Information über die Gitterkonstante ist verloren. Je mehr Beugungsordnungen andererseits zum Bild beitragen, umso vollständiger wird die Objektstruktur wiedergegeben. Damit die Periodizität des Gitters im Bild erscheint, muss mindestens auch die erste Ordnung mitwirken können. Akzeptiert das Objektiv noch Randstrahlen, welche den Winkel α mit der optischen Hauptachse einschliessen, so erhalten wir mit (15) die minimale Gitterkonstante $D(\text{min})$, die gerade noch abgebildet werden kann. (D.h. für $D(\text{min})$ wird die erste Beugungsordnung gerade noch akzeptiert).



(23) $D(\text{min}) = \lambda / \sin \alpha$. AUFLÖSUNGSVERMÖGEN.

Bei Mikroskopobjektiven kurzer Brennweite, ist α nahezu 90° , sodass man sagen kann:

DAS AUFLÖSUNGSVERMÖGEN EINES MIKROSKOPS IST HOECHSTENS GLEICH DER WELLENLAENGE DES VERWENDETEN LICHTES.

Durch Verwendung eines Immersionsobjektivs (Zedernöl, Brechzahl $n=1,4$ zwischen Linse und Objekt) kann die Wellenlänge um den Faktor n verkleinert und damit die Auflösung verbessert werden.

$D(\text{min}) = \lambda / (n \cdot \sin \alpha)$.

Die Grösse $n \cdot \sin \alpha$ heisst die **NUMERISCHE APERTUR**.

Das hohe Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops ist in der kurzen Wellenlänge der Elektronen begründet (s. Kap. V), die typischer Weise etwa 100 000 mal kürzer ist, als jene von sichtbarem Licht.

Beachte: Diese Auflösungsvermögen sind als prinzipielle Grenzen aufzufassen. In Wirklichkeit werden sie nicht erreicht, weil noch andere Faktoren, z.B. Linsenfehler etc., eine Rolle spielen.

DEMONSTRATIONEN:

- | | |
|---|---|
| 1. REFLEXION & BRECHUNG (WASSERTROG) | 2. LICHTLEITER (Wasserstrahl, Glasfaserbündel) |
| 3. POLARISATION (Brewsterwinkel) | 4. CAMERA OBSCURA |
| 5. LINSENMODELL | 6. SCHALL-LINSEN (CO ₂ - und H ₂ -Ballon) |
| 7. ABBILDUNG (Kohlefaden) | 8. WEISSLICHT-HOLOGRAMM |
| 9. BEUGUNG VON LASERLICHT (an Spalt & Draht, d.h. Babinet-Theorem, an Loch, Strichgitter & Kreuzgitter) | |

enthalten lange, in Plastik eingebettete, parallelorientierte Kettenmoleküle und wirken im Prinzip auf Licht so, wie die im Schauer Versuch mit cm-Wellen verwendeten Gitter aus parallelen Drähten.

Es soll nun eine linear polarisierte, monochromatische Welle der Form

$$E_x(z,t) = (E_0/\sqrt{2}) \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t)$$

und

$$E_y(z,t) = (E_0/\sqrt{2}) \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t)$$

senkrecht auf ein Kalkspatplättchen der Dicke D auftreffen, dessen optische Achse parallel zur x-Achse (also parallel zur Oberfläche) liegt. Im Innern des Kristalls sind die Wellenzahlen $k_1 = n_1 \cdot k$ der a.o. Welle und $k_2 = n_2 \cdot k$ der o. Welle verschieden. Die Wellenfronten bleiben parallel zur Eintrittsfläche; es findet keine Brechung statt. Nach Durchlaufen der Dicke D beträgt die Phasenverschiebung zwischen E_y und E_x :

$$(33) \quad \Delta\phi = k \cdot (n_2 - n_1) \cdot D \quad \text{oder} \quad \Delta\phi = (2 \cdot \pi \cdot D / \lambda) \cdot (n_2 - n_1).$$

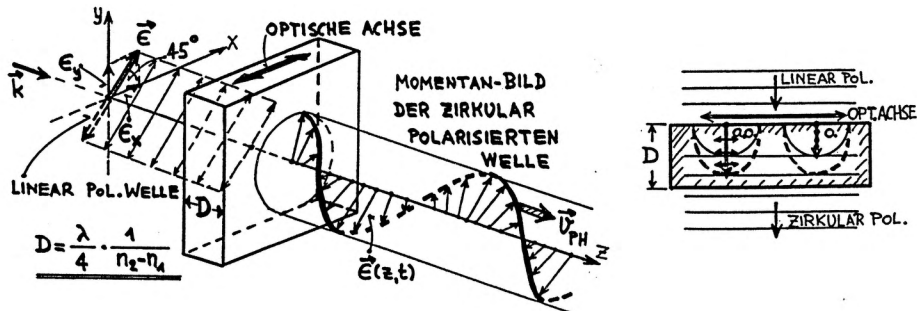
Nun wählen wir D so, dass die Phasendifferenz gerade $\pi/2$ wird. Nach (33) ist dies der Fall für

$$(34) \quad \boxed{D = \lambda / (4 \cdot (n_2 - n_1))}, \text{ DICKE D DES " } \lambda/4 \text{ "-PLÄTTCHENS.}$$

Da nun die Phase von E_y jener von E_x um $\pi/2$ vorausläuft, erhalten wir nach dem Austritt aus dem $\lambda/4$ -Plättchen die Welle

$$(35) \quad \begin{cases} E_x(z,t) = (E_0/\sqrt{2}) \cdot \cos(k \cdot z - \omega \cdot t + \varphi), \\ E_y(z,t) = (E_0/\sqrt{2}) \cdot \sin(k \cdot z - \omega \cdot t + \varphi). \end{cases}$$

φ ist eine beliebige, konstante Phase. Die Gleichungen (35) stellen eine **ZIRKULAR POLARISIERTE WELLE** dar. An jedem festen Ort z rotiert das elektrische Feld, dessen Betrag E_0 konstant ist, mit der Kreisfrequenz ω . Bei festgehaltener Zeit t bilden die Pfeilspitzen der Vektoren \vec{E} eine Schraubenlinie mit der Steigung λ . In unserem Beispiel ist es eine "Rechtsschraube", die als Funktion der Zeit links herum dreht. In einem mit der Phasengeschwindigkeit ω/k mitbewegten Bezugssystem sind alle \vec{E} -Vektoren in Ruhe.



3.7 OPTISCHE AKTIVITAET

Durchläuft eine linear polarisierte Lichtwelle eine **OPTISCH AKTIVE** Substanz, so ist sie nachher immer noch linear polarisiert, aber die **POLARISATIONSEBENE** ist um einen Winkel α **VERDREHT**. Der Drehwinkel α ist proportional der Weglänge im optisch aktiven Material. Viele anorganische Substanzen, z. B. **QUARZ**, sind optisch aktiv. Aber auch gewisse Lösungen, z.B. Zuckerlösungen, haben diese Eigenschaft. Sie ist auf eine spiralenartige Struktur der beteiligten Moleküle, eine **HELIZITAET**, zurückzuführen, die grosse Elektronenbeweglichkeit entlang einer Schraubenlinie zur Folge hat. Es gibt Substanzen, die in links- und rechtsdrehender Form existieren. In Lösungen hängt die Stärke der optischen Aktivität von der Konzentration ab. Das molare Drehvermögen r ist durch die folgende Beziehung definiert:

$$\boxed{\alpha = r \cdot L \cdot c}, \quad \text{MOLARES DREHVERMÖGEN } r \text{ (m}^{-1} \cdot \text{Liter/mol).}$$

L=Weg, c=Konzentration (mol/Liter).

Erinnere: Als Demonstration des Prinzips wurde gezeigt, dass eine Schachtel, gefüllt mit rechtssinnigen Spiralfedern, die Polarisationsebene von hindurchlaufenden cm-Wellen im Rechtssinn verdreht.

DEMONSTRATIONEN:

1. FRESNEL'sche ZONENPLATTE (Mit cm-Wellen)
2. SCHLIERENOPTIK
3. SPEKTRUM VON WEISSEM LICHT (Prisma)
4. DISPERSIONSKURVE (Kombination von Gitter und Prisma)
5. TRANSMISSION, REFLEXION, ABSORPTION (Wasser, Milch, Tusche)
6. INTERFERENZEN AN GLIMMER MIT Hg-LAMPE
7. INTERFERENZFARBEN AN SEIFENLAMELLEN
8. ABSORPTIONS- & REFLEXIONSBEREICH EINES FILTERS
9. DIFFRAKTIONSAPPARAT NACH ABBE
10. SONNENUNTERGANG (Streuung von Blaulicht, ω^4 -Gesetz)
11. DOPPELBRUCH AN KALKSPAT
12. OPTISCHE AKTIVITAET (Zuckersäule)

V. EINBLICK IN DIE MODERNE PHYSIK

Bis jetzt haben wir Begriffe und Gesetze im Rahmen der "KLASSISCHEN PHYSIK" behandelt. Diese konnte gegen Ende des letzten Jahrhunderts als abgeschlossen betrachtet werden. Nach ihren beträchtlichen Erfolgen mehrten sich gleichzeitig die Anzeichen, dass auf mikroskopischer Ebene die klassische Physik versagte. Unter dem Druck einer Reihe von experimentellen Fakten, ist im ersten Viertel unseres Jahrhunderts, schrittweise und mit enormen Anstrengungen vieler grosser Physiker, die "QUANTENPHYSIK" entwickelt worden. Am Schluss dieses Kapitels sind Schlüssel-experimente und Marksteine dieser Periode aufgelistet.

Es ist aber nicht etwa so, dass klassische Physik und Quantenmechanik zueinander im Widerspruch stehen. Vielmehr ist die klassische Physik als Grenzfall in der Q.M. enthalten. Die Q.M. gibt genaue Kriterien über den Gültigkeitsbereich der klassischen Physik.

Es kann in diesem kurzen Kapitel nur darum gehen, dem Anfänger einen ersten Einblick in die "Spielregeln" dieser QUANTENMECHANIK zu vermitteln. Eine eigentliche Einführung in die Q.M. bietet die Vorlesung "Physik III" im Wintersemester.

Wir erwähnen zunächst drei Phänomene (es gibt noch andere), welche entscheidend zur Formulierung einer "neuen" Physik beigetragen haben.

1. QUANTISIERUNG DER ENERGIE

1.1 STRAHLUNGSGESETZ UND PLANCK'sche KONSTANTE h

Die Erfahrung zeigt, dass heisse Körper elektromagnetische Strahlung emittieren (z.B. Wärmestrahlung und Licht), wobei das Frequenzspektrum temperaturabhängig ist. Es besteht ein THERMODYNAMISCHES GLEICHGEWICHT, zwischen MATERIE und ELEKTROMAGNETISCHER STRAHLUNG, welches die klassische Physik nicht richtig berechnen kann. Max Planck konnte 1900 Experiment und Theorie in Einklang bringen, indem er die Atome als strahlende, harmonische Oszillatoren auffasste und und gleichzeitig forderte:

$$(1) \quad \Delta E = h \cdot \nu, \quad h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \text{ PLANCK'sche KONSTANTE.}$$

DIE ENERGIE DES HARMONISCHEN OSZILLATORS IST QUANTISIERT.
 IST SEINE EIGENFREQUENZ ν , KANN ER SEINE ENERGIE NUR UM
 GANZZAHLIGE VIELFACHE VON $h \cdot \nu$ AENDERN.

1.2 PHOTOEFFEKT (LICHELEKTRISCHER EFFEKT)

Wird eine Metalloberfläche A mit hinreichend kurzwelligem Licht bestrahlt, treten Elektronen mit einer gewissen kinetischen Energie aus dem Metall aus. Legt man an die benachbarte Elektrode B die gegenüber A negative Spannung $-U$, die so gross ist, dass gerade kein Elektronenstrom mehr fliessen kann, so beträgt die maximale Austrittsenergie der Elektronen nach dem Energieerhaltungssatz:

$E(\text{kin}) = e \cdot U$, kinetische Energie der Elektronen, beim Verlassen der Metalloberfläche.

Das Experiment liefert folgende wesentliche Ergebnisse:

a) $E(\text{kin})$ der Elektronen hängt nicht von der Intensität des einfallenden Lichtes ab (P. LENARD, 1902), wie dies nach der klassischen Wellentheorie des Lichts zu erwarten wäre.

b) Die kinetische Energie der Elektronen gehorcht der Beziehung

$$(2) \quad E(\text{kin}) = h \cdot \nu - E_0, \quad h = \text{PLANCK'sche KONSTANTE,} \\ E_0 = \text{ABLOESEARBEIT.}$$

Die Ablösearbeit E_0 muss aufgewendet werden, um ein Elektron aus dem Metall zu entfernen und ist materialspezifisch. EINSTEIN hat schon 1905 postuliert, dass Licht Partikelcharakter hat und aus Energiequanten der Energie $h \cdot \nu$, den PHOTONEN, besteht. Das Ergebnis (2) ist schon damals von ihm vorausgesagt und 1914 durch MILLIKAN experimentell exakt bestätigt worden. Beim Photoeffekt verschwindet ein Photon und überträgt seine ganze Energie $h \cdot \nu$ auf das Elektron. (2) drückt die Energiebilanz aus.

1.3 LINIENSPEKTREN

Im Gegensatz zu heissen Körpern, die e.m. Wellen mit kontinuierlichem Frequenzspektrum abstrahlen, emittieren z.B. elektrisch angeregte Atome einer Gasentladung diskrete Linienspektren. Es wird also nur Licht bestimmter Frequenzen abgegeben, sodass in einem Spektroskop (s. Bild auf Seite 85) diskrete Spaltbilder ("Linien") entstehen. Im Rahmen der klassischen Strahlungstheorie können diese Spektren nicht erklärt werden.

Einen fundamentalen Beitrag zur Physik der Atomspektren, der sich als ausserordentlich fruchtbar erweisen sollte, hat der Basler Mathematiklehrer Johann Jakob BALMER (1854-1919) im Jahre 1885 geleistet, indem er auf rein empirischer Grundlage fand, dass die beobachteten Frequenzen im H-Spektrum sehr exakt folgende Beziehung erfüllen:

$$(3) \quad \nu = \text{const} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \text{BALMERFORMEL.} \\ n, m \text{ positiv und ganz, } m > n.$$

Niels BOHR (1885-1962) hat 1913 postuliert, dass das Atom ein nicht klassisches System ist, das nur bestimmte Energiezustände E_n einnehmen kann und dass ein Uebergang von einem energetisch höheren Zustand E_m zu einem tieferen E_n , mit der Emission eines Lichtquants verbunden ist. Im tiefsten Zustand, seinem GRUNDZUSTAND, kann es nicht strahlen. Es gilt

$$(4) \quad h \cdot \nu = E_m - E_n.$$

(4) steht im Einklang mit der Balmerformel (3), wenn die Energiezustände des Wasserstoffatoms von der Form sind;

$$(5) \quad E_n = - \text{const} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad \text{QUANTISIERTE ENERGIEZUSTAENDE} \\ \text{DES WASSERSTOFF-ATOMS.} \\ \text{Quantenzahl } n = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

2. WELLENMECHANIK; SCHROEDINGERGLEICHUNG

Wir skizzieren nun eine mögliche Darstellung der Quantenphysik, die 1926 von Erwin SCHROEDINGER (1887-1961) formuliert wurde. Es kann hier nur darum gehen, die "Spielregeln" an einfachsten Beispielen zur Kenntnis zu nehmen; von tiefsinnigen Begründungen und philosophischen Implikationen sprechen wir bewusst nicht.

Ein Teilchen der Masse m soll in einem skalaren Potentialfeld die potentielle Energie $V(x)$ besitzen. Die Newton'sche Mechanik ist nicht mehr gültig. An Stelle der klassischen Bewegungsgleichung gehen wir aus von der "Schrödingergleichung", sie ist eine lineare Differentialgleichung für eine "Wellenfunktion" $\psi(x,t)$. Die ψ -Funktion beschreibt das physikalische Verhalten unserer Masse m im Potential $V(x)$. Als Charakteristikum der Quantenphysik tritt in unserer Differentialgleichung, neben m und $V(x)$, noch die PLANCK'sche KONSTANTE h auf.

2.1 DIE SCHROEDINGERGLEICHUNG

Die gesuchte Wellenfunktion $\psi(x,t)$ gehorcht der Differentialgleichung

$$(6) \quad \left[-(\hbar^2 / (2 \cdot m)) \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \cdot \psi(x,t) = i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right],$$

ZEITABHÄNGIGE SCHROEDINGERGLEICHUNG, ($\hbar = h / (2 \cdot \pi)$).

Die Gesamtenergie des Teilchens sei $E = E(\text{kin}) + V$. Auch hier erscheint nun eine Frequenz (wie schon bei den Photonen), welche durch $E = h \cdot \nu$ mit der Energie verknüpft ist. Wir setzen

$$(7) \quad \left[\psi = \psi(x) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) \right], \quad \omega = E / \hbar.$$

Einsetzen von (7) in (6) ergibt

$$\left(-(\hbar^2 / (2 \cdot m)) \cdot \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \cdot \psi(x) \right) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t) = \hbar \cdot \omega \cdot \psi(x) \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot t).$$

und

$$(8) \quad \left[-(\hbar^2 / (2 \cdot m)) \cdot \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x) \right],$$

ZEIT-UNABHÄNGIGE SCHROEDINGERGLEICHUNG.

Wenn ein System von einer Wellenfunktion der Form (7) beschrieben wird, spricht man von einem STATIONÄREN ZUSTAND der ENERGIE E . $\psi(x)$ heisst die "Wellenfunktion des stationären Zustandes".

Wir wollen jetzt die Schrödingergleichung auf zwei konkrete Beispiele anwenden und dabei lernen, wie man die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ interpretiert und aus ihr experimentell beobachtbare Grössen berechnet.

2.2 WELLENFUNKTION DES FREIEN TEILCHENS

Das kräftefreie Teilchen ist dadurch gekennzeichnet, dass $V(x)$ konstant ist, also gleich null gesetzt werden darf. Es liegt lediglich kinetische Energie vor: $E = E(\text{kin})$. Nach (8) muss die stationäre Wellenfunktion $\psi(x)$ die Schrödingergleichung

mit $V(x) = 0$ erfüllen, nämlich

$$(9) \quad \left[-(\hbar^2 / (2 \cdot m)) \cdot \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \cdot \psi(x) \right], \quad \text{SCHROEDINGERGLEICHUNG DES FREIEN TEILCHENS.}$$

Wir setzen $2 \cdot m \cdot E / \hbar^2 = k^2$ und schreiben (9) als

$$(10) \quad \left[\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \cdot \psi(x) = 0 \right].$$

Diese Differentialgleichung ist uns längst bekannt (s. harmonische Schwingung), ihre allgemeine, komplexe Lösung lautet:

$$(11) \quad \left[\psi(x) = A \cdot \exp(i \cdot k \cdot x) + B \cdot \exp(-i \cdot k \cdot x) \right].$$

Setzen wir z.B. die Integrationskonstante $B = 0$, so erhalten wir mit (7) die vollständige Wellenfunktion $\psi(x,t)$ der Form

$$(12) \quad \left[\psi(x,t) = A \cdot \exp(i \cdot (k \cdot x - \omega \cdot t)) \right], \quad k = (1/\hbar) \cdot \sqrt{2 \cdot m \cdot E}.$$

$\psi(x,t)$ ist in diesem Fall eine in positiver x -Richtung laufende WELLE. Sie beschreibt ein mit $E(\text{kin}) = E$ nach RECHTS LAUFENDES TEILCHEN der Masse m .

Klassisch ist $E(\text{kin}) = p^2 / (2 \cdot m)$, wenn p den Impuls bedeutet, während hier $E(\text{kin}) = \hbar \cdot k^2 / (2 \cdot m)$ gilt. $\hbar \cdot k = h / \lambda$ unseres Wellenbildes entspricht offenbar dem Impuls p des Partikelbildes.

EINEM TEILCHEN MIT DER ENERGIE E UND DEM IMPULS p IST EINE WELLE DER FREQUENZ $\nu = \omega / (2 \cdot \pi)$ UND DER WELLENZAHL $k = 2 \cdot \pi / \lambda$ ZUGEORDNET. ES IST

$$\left[\omega = E / \hbar \right] \quad \text{und} \quad \left[k = p / \hbar \right].$$

Die letzte Gleichung ist identisch mit der Beziehung $\lambda = h/p$, welche Louis de BROGLIE schon 1924 formuliert hat.

Dass Korpuskel tatsächlich Welleneigenschaften im Einklang mit der de Broglie-Beziehung besitzen, wurde 1927 am Phänomen der ELEKTRONENBEUGUNG von C.J. DAVISSON und L.H. GERMER experimentell gezeigt.

ÜBUNG:

Man berechne die Wellenlänge von Elektronen, wenn ihre kinetische Energie 10 keV beträgt.

Die kurze Wellenlänge von Elektronen ($\lambda < 1$ Angström) führt dazu, dass die Kristallgitter zu gut sichtbaren Beugungseffekten Anlass geben. Aus den beobachteten Beugungsmustern der Intensitätsverteilung der Elektronen, die wiederum durch phasengerechte Addition von Huygens'schen Elementarwellen zustande kommen, kann umgekehrt die räumliche Anordnung der Materie-Atome berechnet werden.

Zur Aufklärung ATOMARER STRUKTUREN in Festkörperphysik und Biologie spielen neben der Röntgendiffraktion die ELEKTRONENBEUGUNG und die NEUTRONENBEUGUNG eine wesentliche Rolle.

Beide Methoden beruhen auf der Richtigkeit der Schrödinger'schen Wellenmechanik.

2.2.1 Wellenfunktion und Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Am Beispiel des kräftefreien Teilchens hat sich herausgestellt, dass $\psi(x,t)$ im allgemeinen eine komplexe Funktion ist. Sie enthält Information über dynamische Variablen des Systems, wie Impuls p und Energie E (messbare, physikalische Grössen). Die Wellenfunktion (12) sagt uns, dass $E = \hbar \cdot \omega$ und $p = \hbar \cdot k$ ist. E und p sind experimentell überprüfbar, in der Quantentheorie nennt man solche Grössen **OBSERVABLE**. Die Wellenfunktion selbst ist keine Observable. Hingegen hat das Quadrat ihres Betrages die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsdichte. D.h. es ist

(13) $d w = |\psi(x,t)|^2 \cdot dx$, DIE WAHRSCHEINLICHKEIT $d w$, DAS TEILCHEN ZUR ZEIT t AN DER STELLE x IM INTERVALL DER BREITE dx ZU FINDEN.

Aus der Lösung (12) lesen wir ab, dass für das freie Teilchen der scharfen Energie E , die Wahrscheinlichkeitsdichte weder von x , noch von t abhängt, denn es wird

(14) $|\psi|^2 = |A \cdot \exp(i(k \cdot x - \omega \cdot t))|^2 = |A|^2 = \text{const.}$

Das Teilchen ist überall gleich häufig anzutreffen, es gibt keinen bevorzugten Aufenthaltsort.

Die wellenmechanische Behandlung des kräftefreien Teilchens führt also auf folgendes Ergebnis: wenn die Energiemessung den exakten Wert E liefert (das haben wir hier vorausgesetzt), so ist

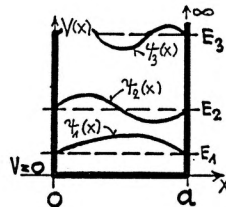
1. der IMPULS ebenfalls BESTIMMT durch $p = \hbar \cdot k = \sqrt{2 \cdot m \cdot E}$.
2. der ORT des Teilchens vollständig UNBESTIMMT.

2.3 TEILCHEN IM UNENDLICH TIEFEN POTENTIALTOPF

Jetzt wollen wir ein Teilchen in einen rechteckigen Potentialtopf der Breite a einsperren, dessen "Wände" unendlich hoch sind. Es sei

$V(x) = 0$, für $0 < x < a$

$V(x) = \infty$, für $x \leq 0$ und $x \geq a$.



Im Innern des Kastens ist m kräftefrei, bei $x = 0$ und $x = a$ wirken unendlich grosse, ins Innere gerichtete Kräfte. Nun interessieren wir uns für die Energien E , welche das Teilchen besitzen kann. Klassisch würden beliebige Energien E zulässig sein, die Masse würde durch elastische Stösse an den Wänden hin und her reflektiert.

Die stationäre Wellenfunktion im Innern muss wiederum der zeitunabhängigen Schrödingergleichung (9) genügen, denn es ist ja dort $V(x) = 0$. Also wird die Lösung wieder die Form haben

(15) $\psi(x) = A \cdot \exp(i \cdot k \cdot x) + B \cdot \exp(-i \cdot k \cdot x)$.

Im Unterschied zum freien Teilchen muss aber $\psi(x)$ ausserhalb des Kastens null und zudem stetig in $x = 0$ und $x = a$ sein. (Wir verzichten auf den Beweis, halten aber fest, dass ψ an den Potentialwänden nur null wird, wenn diese unendlich hoch sind, andernfalls tritt der "Tunneleffekt" auf, d.h. die Aufenthaltswahrscheinlichkeit hat auch im klassisch verbotenen Gebiet einen endlichen Wert).

Die Randbedingung $\psi(0) = 0$ führt auf $B = -A$ und

$\psi(x) = A \cdot (\exp(i \cdot k \cdot x) - \exp(-i \cdot k \cdot x))$ oder $\psi(x) = C \cdot \sin(k \cdot x)$.

Die Randbedingung $\psi(a) = 0$ fordert: $k \cdot a = n \cdot \pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Nur ganz bestimmte Wellenzahlen k und damit auch ganz bestimmte Energien E sind zulässig (in (9) ist $E = \hbar^2 \cdot k^2 / (2 \cdot m)$). Mit $k = n \cdot \pi / a$ erhalten wir

(16) $\psi_n(x) = C \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot x / a)$, EIGENFUNKTIONEN $\psi_n(x)$ und

(17) $E_n = n^2 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^2 / (2 \cdot m \cdot a^2)$, ENERGIE-EIGENWERTE E_n ,

QUANTENZAHL $n = 1, 2, 3 \dots$.

Beachte die Analogie zum Frequenzspektrum der eingespannten Saite. Die Randbedingungen erlauben nur diskrete stationäre Zustände. Im Unterschied zum freien Teilchen sind hier die Wellenfunktionen $\psi(x)$ normierbar. Da sich das Teilchen mit Gewissheit im Intervall $0 < x < a$ befindet, verlangen wir mit (13)

(18) $\int_0^a |\psi(x)|^2 \cdot dx = 1$, NORMIERUNGS-INTEGRAL.

Einsetzen von (16) ergibt für C den Wert $\sqrt{2/a}$. Es sind

(19) $\psi_n(x) = \sqrt{2/a} \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot x / a)$, NORMIERTE EIGENFUNKTIONEN.

Die Energieeigenwerte wachsen mit n^2 . Der tiefste mögliche Zustand besitzt NICHT die Energie $E = 0$, wie man dies klassisch erwarten würde. Sondern es ist

(20) $E_1 = \pi^2 \cdot \hbar^2 / (2 \cdot m \cdot a^2)$ die NULLPUNKTS-ENERGIE.

2.3.1 Die Unschärferelation

Am Beispiel des Teilchens im tiefen Kastenpotential lässt sich das Wesen der Unschärferelation der Quantentheorie illustrieren. Diese besagt:

Es ist unmöglich, ORT x und IMPULS p eines Teilchens GLEICHZEITIG genau zu messen. Es bestehen immer Unschärfen Δx und Δp , für die gilt

(21) $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim \hbar$, UNSCHAERFE-RELATION .

Eine präzise Impulsmessung kann nur auf Kosten einer grossen Unsicherheit bezüglich des Aufenthaltsortes x des Teilchens durchgeführt werden, und umgekehrt.

Wie steht es nun mit den Unschärfen von Ort und Impuls in unserem Beispiel? Das Teilchen ist im Intervall $0 < x < a$ lokalisiert, also haben wir

$$\Delta x = a$$

Vom Impuls kennen wir zwar den Betrag $\hbar \cdot k = n\pi\hbar/a$, das Vorzeichen kann aber positiv und negativ sein, sodass die Unsicherheit

$$\Delta p = 2 \cdot \hbar \cdot n \cdot \pi / a \text{ ist.}$$

Das Produkt der Unschärfen wird

$$\Delta x \cdot \Delta p = n \cdot 2 \cdot \pi \cdot \hbar \quad \text{oder} \quad \Delta x \cdot \Delta p = n \cdot h$$

Das Minimum des Produktes ergibt sich im Grundzustand mit $\Delta x \cdot \Delta p = h$, im Einklang mit (21). Man kann die Nullpunktenergie auffassen als die kleinst mögliche Energie, welche durch die Unschärferelation noch zugelassen wird. Je kleiner die Breite a des Potentialkastens ist, also je besser das Teilchen lokalisiert ist, desto höher liegt der Grundzustand, was durch (20) ausgedrückt wird.

2.4 ENERGIE-EIGENWERTE DES WASSERSTOFFATOMS

Um die Energie-Eigenwerte des H-Atoms zu erhalten, muss die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein Elektron gelöst werden, das sich im Coulombpotential eines Protons befindet. Sie lautet

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2 \cdot m}\right) \cdot \Delta \psi(x,y,z) - \left(1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)\right) \cdot (e^2/r) \cdot \psi(x,y,z) = E \cdot \psi(x,y,z)$$

Die Lösung dieses Problems verschieben wir auf die "Physik III". Man erhält Eigenfunktionen ψ_{nlm} , welche von drei Quantenzahlen n, l und m abhängen. $|\psi_{nlm}|^2$ gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im betreffenden stationären Zustand. Die Quantenzahlen können folgende Werte annehmen:

HAUPT-QUANTENZAHL	$n = 1, 2, 3, \dots$
DREHIMPULS-QUANTENZAHL	$l = 0, 1, 2, \dots (n-1)$
MAGNETISCHE QUANTENZAHL	$m = -l, (-l+1), \dots, -1, 0, 1, \dots (l-1), l$

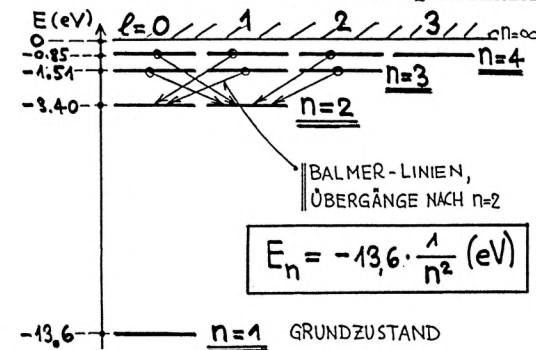
Die Energie-Eigenwerte hängen nur von der Hauptquantenzahl n ab. Das Ergebnis der Rechnung ist

$$(22) \quad E_n = -Ry \cdot 1/n^2 \quad \text{ENERGIE-EIGENWERTE DES H-ATOMS.}$$

Rydbergkonstante $Ry = (1/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0)^2) \cdot m \cdot e^4 / (2 \cdot \hbar^2)$.
 m = Elektronenmasse, e = Elementarladung, Zahlenwert: $Ry = 13,6 \text{ eV}$.

(22) ist identisch mit (5) und liefert quantitativ genau das Balmerpektrum des Wasserstoffatoms. Die Rydbergkonstante entspricht der Energie, die notwendig ist, um ein H-Atom im Grundzustand zu ionisieren. Zwei Bemerkungen: a) Der Spin (Eigendrehimpuls) des Elektrons wurde nicht berücksichtigt, er führt zu einer zusätzlichen "Feinstruktur" im Energiespektrum. b) Die "Orbitalen" der Chemiker sind Linearkombinationen der ψ_{nlm} .

ENERGIE-NIVEAUX DES H-ATOMS UND QUANTENZAHLEN



DEMONSTRATIONEN:

- | | |
|---|---|
| 1. LINIENSPEKTREN VON Fe & Cu | 2. Na-D-LINIEN (In Emission & Absorption) |
| 3. Hg-SPEKTRUM | 4. FRANCK-HERTZ-VERSUCH |
| 5. FLUORESZENZ | 6. CHEMO-LUMINISZENZ |
| 7. LICHT "EINFRIEREN" | 8. MOSELEY-GERADE (Charakt. Röntgenstrahlung v. Cu, Mo, Ba, Tb) |
| 9. ELEKTRONENBEUGUNG | 10. h-BESTIMMUNG |
| 11. FELDELEKTRONENMIKROSKOP | 12. ALPHA-GAMMA-EISEN (Phasenumwandlung) |
| 13. PIEZO-EFFEKT | 14. ALPHA-, BETA- & GAMMASTRAHLEN (Nachweis, Abschirmung etc.) |
| 15. T(d,n) He4-REAKTION (Moderator, Ag-Aktivierung & Halbwertszeit) | 16. RADIOAKTIVITÄT VON K-40 |

MARKSTEINE ZUR ENTWICKLUNG DER Q.M. (Unvollständig)

1895	Röntgenstrahlen	Wilhelm ROENTGEN	(1845-1923)
1896	Becquerel-Strahlen (Radioaktivität)	Henry BECQUEREL	(1852-1908)
		Marie CURIE	(1867-1934)
		Pierre CURIE	(1859-1906)
1897	Freies Elektron	Joseph J. THOMSON	(1856-1940)
1900	Energiequanten, $E=h \cdot \nu$	Max PLANCK	(1858-1947)
1905	Photoelektr. Effekt, spez. Rel. Theorie	Albert EINSTEIN	(1879-1955)
1911	Atomkern	Ernest RUTHERFORD	(1871-1937)
1913	Moseley-Gesetz	Jeffrey MOSELEY	(1884-1915)
1913	Bohr'sches Atommodell	Niels BOHR	(1885-1962)
1923	Comptoneffekt	Arthur COMPTON	(1892-1962)
1923	Materie-Wellen	Louis V. DE BROGLIE	(1892-1976)
1925	Quantenmechanik	Werner HEISENBERG	(1901-1976)
1925	Pauliprinzip	Wolfgang PAULI	(1900-1958)
1926	Schrödingergleichung	Erwin SCHROEDINGER	(1887-1961)
1927	Elektronenbeugung	Clinton J. DAVISSON	(1881-1958)
		Lester H. GERMER	(1896-)