1 Relevante Schulmathematik

1.1 Begriff der Funktion einer Variablen

Eine Funktion, hier abgekürzt als f, weist der reellen Zahl x aus einem vorgegebenen Mengenvorrat $\mathcal{M} \subset \mathcal{R}$ eindeutig eine reelle Zahl $y \in \mathcal{R}$ zu:

$$f: \quad x \in \mathcal{M} \to y$$

y nennt man die abhängige Variable (abhängig vom vorgegebenenWert x).

Symbolisch schreibt man $y = f(x)$ oder einfach $y(x)$. Etwas formaler ist f eine Zuordnung einer Menge $\mathcal{D}$, der Definitionsbereich der Funktion, auf die Menge $\mathcal{B}$, die Bildmenge, d.h. die Funktion f kann als Menge von Zahlenpaaren (x, y) aufgefasst werden:

$$f := \{x, y | x \in \mathcal{D} \wedge y \in \mathcal{B}\}$$

In dieser formalen Darstellung wird kein Unterschied gemacht zwischen $f : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ oder $f : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$. In der Physik wird der Zuordnung $f : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ implizit als eindeutig verstanden. In der Mathematik muss das erst definiert werden. Die Zuordnung $f : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ ist *eindeutig*, falls:

$$(x_1, y_1) \in f \quad \wedge \quad (x_1, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

Formal ist der *Definitionsbereich* definiert als:

$$\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{R} | \; \exists y \Rightarrow (x, y) \in f\}$$

Die Funktion heisst *umkehrbar eindeutig* (eineindeutig), falls:

$$(x_1, y_1) \in f \quad \wedge \quad (x_2, y_1) \in f \Rightarrow x_1 = x_2$$

In diesem Fall ist die umgekehrte Zuordnung aus dem Bildbereich der Funktion f in den Definitionsbereich eindeutig, so dass die *inverse* Funktion f^{-1} (eindeutig) existiert. Beispiel: Diskutieren Sie die Funktion $x \to x^2$. Definitionsbereich, Bildbereich, umkehrbar (inverse Funktion)?

Weiter sind folgende Begriffe für Funktionen nützlich: Symmetrie (gerade oder ungerade Funktion), Periodizität, Monotomie, Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Die letzteren beiden Begriffe werden eingehend in der Mathematik behandelt. Eine mathematisch befriedigende Darstellung würde den Rahmen dieser Ergänzung sprengen. Wir werden diese Begriffe daher nur in bildlicher (anschaulicher) Form erklären.

Die Funktion f ist *gerade*, falls $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$. Sie ist entsprechend *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathcal{D}$. Beispiele: $f(x) = x, x^2, \sqrt{|x|}, sin(x), cos(x)$, gerade oder ungerade?

Die Funktion f ist *periodisch*, falls: $\exists p \neq 0 \Rightarrow f(x+p) = f(x), \forall x$. Beispiele: Welche Funktionen kennen Sie, die periodisch sind? Wie gross ist p (die Periode) für $f(x) = sin(ax)$?

Die Funktion f ist (streng) *monoton steigend*, falls $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Entsprechend für monoton fallend. Beispiele: Schreiben Sie ein Paar Funktionen auf die monoton steigend (fallend) sind. Wie stehts mit $cosh(\sqrt{x})$ für den Definitionsbereich $x \geq 0$ und wie mit $arctan(sinh(x))$?

Wir betrachten die zwei Funktionen f und g, deren Definitionsbereiche eine nichtleere Schnittmenge $\mathcal{D}$ aufweisen. Die beiden Funktionen können addiert, multipliziert und dividiert werden:

$$\begin{aligned} f+g : x &\rightarrow f(x) + g(x) \\ f \cdot g : x &\rightarrow f(x) \cdot g(x) \\ f/g : x &\rightarrow f(x)/g(x)\ ;\ \ x \in \mathcal{D} \backslash \{x | g(x) = 0\} \end{aligned}$$

Häufig finden wir dann auch die Notationen $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ und $(f/g)(x)$.

Zwei Funktionen können *verkettet* werden, falls der Bildbereich der einen Funktion eine Untermenge des Definitionsbereichs der anderen ist. Sei $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathcal{R}$ und $g : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathcal{R}$. Falls $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$, dann ist die verkettete Funktion $f \circ g$ (zuerst g anwenden und dannach f) definiert auf $\mathcal{D}_g$:

$$f \circ g : x \rightarrow f(g(x))$$

Beispiele: 1. $f(x) = x + b$, $g(x) = ax^2$, $f \circ g = ?$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = sin(x)$, $f \circ g =?$ und $g \circ f =?$ und Definitionsbereiche?

Wie bereits angedeutet, folgt eine nur anschauliche Definition für die *Stetigkeit* einer Funktion. Eine Funktion ist *stetig*, falls sie keine „Sprünge“ aufweist. Genauer wird die Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 über die Eindeutigkeit des Grenzwertes $lim_{x \to x_0} f(x)$ definiert (siehe Mathematik). Um ein Bild vor Augen zu haben, betrachten wird die Funktion $\Theta(x)$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, \text{falls } x < 0 \\ 1, \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Diese Funktion weist an der Stelle $x = 0$ eine Stufe auf. Die Grenzwerte $lim_{\{x \to 0, x>0\}} \Theta(x)$ und $lim_{\{x \to 0, x<0\}} \Theta(x)$ sind offensichtlich verschieden, so dass die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ist (sie ist aber eindeutig definiert).

An dieser Stelle ein Paar wichtige Bemerkungen zur Physik. Die Naturwissenschaftler versuchen die Naturvorgänge durch stetige (und differenzierbare) Funktionen zu beschreiben, obwohl viele

Vorgänge, wenn man etwas genauer hinschaut, diskret sind. Der Massenfluss durch einen vorgegebenen Querschnitt des Rheins in Basel kann als Funktion der Zeit gemessen werden und liefert (auf dem Papier) eine stetige (und differenzierbare) Funktion. In Tat und Wahrheit besteht Wasser aus Wassermolekülen und die durch den Querschnitt geflossene Anzahl Moleküle ist eine natürliche Zahl. Bei genauerem Hinschauen ist die Funktion nicht stetig. Da unsere Messapparaturen aber oft nicht die erforderliche Genauigkeit aufweisen, ist von der Körnigkeit der Natur im Experiment nichts zu sehen. Die Messgrössen erscheinen als stetige Funktionen. Man beachte, dass die Stetigkeit und Differenzierbarkeit physikalischer Messgrössen oft eine Folge der Mittelung der Messapparatur ist (Unkenntnis). Dies gilt immer dann, wenn wir es mit einem grossen Ensemble von Grundbausteinen (wie Wassermolekülen) zu tun haben. Viele Definitionen in der Physik nehmen diesen Sachverhalt vorweg. So ist die Temperatur implizit als Mittelwert über ein (unendlich) grosses Ensemble definiert. Mit Hilfe statistischer Mittelwerte werden alle makroskopischen Messgrössen festgelegt. Die Mittelung hat zur Folge, dass die Messgrössen keine Sprünge aufweisen können, also stetige Funktionen sind.

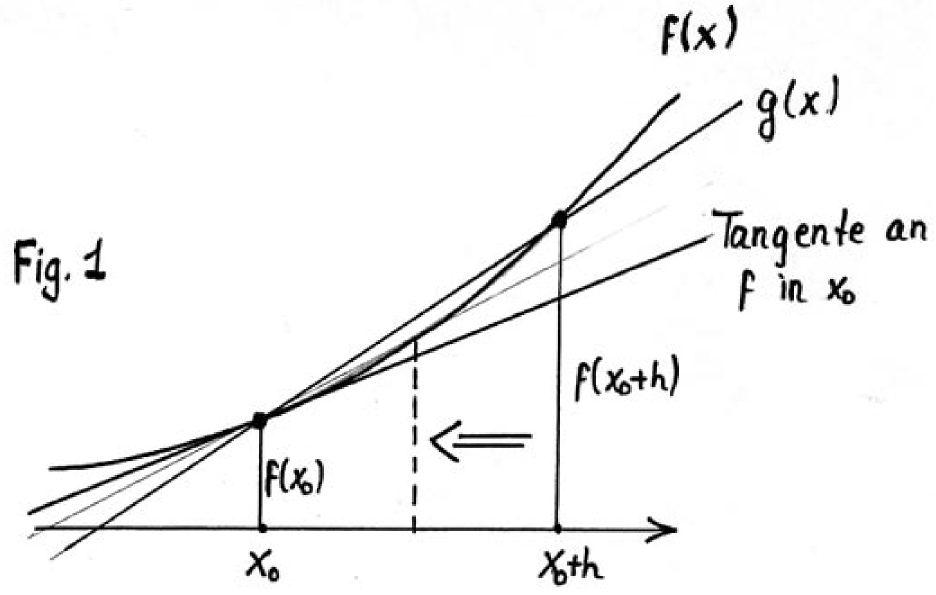
Weiter möchte ich an dieser Stelle festhalten, dass in der Physik die Variablen physikalische Grössen beschreiben, die mit einer *Dimension* behaftet sind! Es empfiehlt sich daher nach längerem Herleiten und Umformen, das Endresultate auf die Konsistenz der Dimensionen zu überprüfen. Erfahrene Naturwissenschaftler können die „richtige“ Formel aus physikalisch zu erwartenden Abhängigkeiten und Dimensionsbetrachtung gewinnen.

Beispiel: Für eine monochromatische Welle besteht eine Relation zwischen der Wellenlänge λ, $[\lambda] = m$, der Frequenz ν, $[\nu] = s^{-1}$, und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c, $[c] = m/s$. Wie lautet diese?
Ein Auto fährt mit konstanter Geschwindigkeit von 10 m/s um eine Kurve mit einem Radius von 10 m. Wie gross ist die Zentrifugalbeschleunigung (keine Formel nachschauen, eine Beschleunigung hat die Dimension m^2/s).

1.2 Begriff der Ableitung einer Funktion

Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x entspricht geometrisch der Steigung der Tangente an die „Kurve“ $x \to (x, f(x))$. Dies wird in der Figur 1 veranschaulicht. Um die Tangente von f an der Stelle x_0 zu bestimmen, betrachten wir zuerst eine Näherung, nämlich die Gerade, die durch die beiden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$ geht. Diese Gerade wird beschrieben durch:

$$g : x \to f(x_0) + \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \cdot (x_0 - x)$$



g ist eine lineare Funktion und man kann sich leicht vergwissern, dass $g(x)$ durch die beiden Punkte geht. Der in der Definition vorkommende Quotient ist nur definiert, falls $h \neq 0$. Man kann sich aber überlegen, was passiert, wenn man h kontinuierlich gegen Null streben lässt: $h \to 0$. Da dabei (wenigsten bei einer „anständigen“ Funktion) der Zähler ebenfalls gegen Null strebt, ist zu erwarten, dass der Grenzwert des Quotienten existiert. Ausgehend von der Figur 1 ist anschaulich klar, dass der Grenzwert existiert und der Tangente an der Stelle x_0 entspricht. Man nennt den Grenzwert die *Ableitung* der Funktion f und schreibt:

$$f' : x \to lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

Folgende Abkürzungen werden oft verwendet:

$$f' = \frac{df}{dx} \text{ oder sogar: } \frac{dy}{dx}$$

Folglich kann die Tangente g durch die Funktion f an der Stelle x_0 beschrieben werden durch:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Den zweiten Teil kürzt nennt man auch das *Differential* der Funktion f, was abgekürzt geschrieben wird als: $df = f'dx$.

Seien f und g zwei differenzierbare Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich. Es gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ (f/g)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \end{aligned}$$

Wir betrachten nun noch die Kettenregel für $g \circ f$ (der Bildbereich von f soll Teilmenge des Definitionsbereichs von g sein). Es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Mit der Kettenregel können wir illustrieren, was Physiker häufig tun. Sie schreiben $y = g(f(x))$ und führen die Abkürzung $z := f(x)$ ein. Dann schreiben sie einfach

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

d.h. sie multiplizieren Zähler und Nenner jeweils mit dz, was zur richtigen Formel führt. Die Methoden mit Differentialen gewöhnliche Arithmetik zu treiben, ist sehr gebräuchlich (manchmal aber gefährlich). Eine anderes sehr nützliches Verfahren, soll hier nur kurz an einem Beispiel illustriert werden. Angenommen Sie müssen die Ableitung der Funktion $y := f(x) := 1/x$ bestimmen und haben die Quotientenregel vergessen. Der Physiker schreibt dann die Definitionsgleichung in der Form $y \cdot x = 1$ und bildet die Ableitung auf der linken und rechten Seite. Häufig schreibt man das gleich als Differential. Mit der Produktregel (die man noch wissen muss) folgt: $dy \cdot x + y \cdot dx = 0$. Kurze Umstellung ergibt: $dy/dx = -(y/x) = -1/x^2$, da $y(x) := 1/x$ ist.

Nachfolgend eine kurze Tabelle der Ableitung einiger Funktionen:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$sin(x)$	$cos(x)$
$tan(x)$	$1/cos^2(x)$
e^x	e^x
$ln(x)$	$1/x$
$arcsin(x)$	$(1-x^2)^{-1/2}$
$sinh(x)$	$cosh(x)$

Beispiel: Bestimmen Sie die Ableitung von $y = arccos(x)$ ohne in einer Tabelle nachzuschauen. Gehen Sie von der Kettenregel aus und zeigen Sie zuerst, dass:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

1.3 Begriff des Integrals einer Funktion

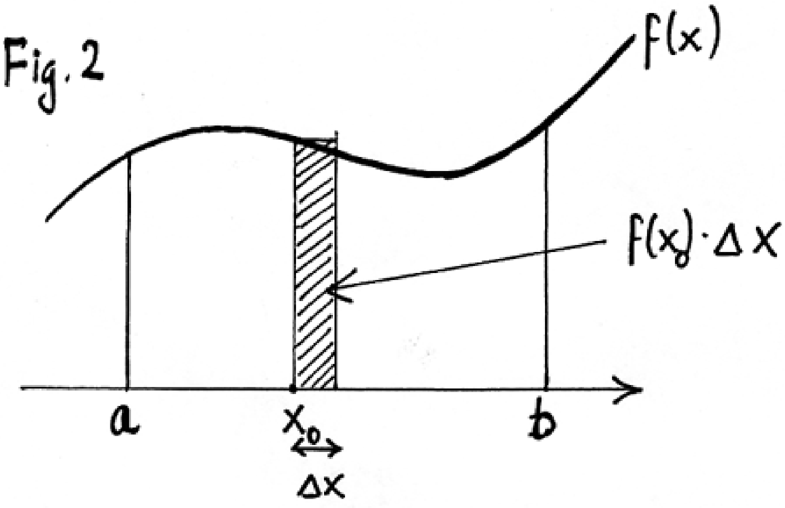
Die Integration ist die „Umkehrung“ der Ableitung einer Funktion. Formal ist das Integral F der Funktion f definiert über: $F'(x) = f(x)$. Dies ist das erste Beispiel einer sogenanten Differenzialgleichung. Die Funktion f ist geggeben und gesucht wird eine Funktion F, deren Ableitung gleich f ist. Diese Funktion nennen wir das unbestimmte Integral (oder eine Stammfunktion) der Funktion f, was abgekürzt geschrieben wird als:

$$F'(x) = f(x) \quad \leftrightarrow \quad F() = \int f(x)dx$$

Es ist offensichtlich, dass mit $F(x)$ auch $F(x) + Konstante$ eine Stammfunktion ist. Das unbestimmte Integral ist nur bis auf eine Konstante definiert (daher unbestimmt genannt).

Das sogenannte bestimmte Integral hat eine geometrische Interpretation. Dabei wollen wir wie ein Physiker vorgehen. Um eine einfache Vorstellung zu kriegen, nehmen wir an, dass die Funktion f die Dimension einer Länge hat. Analog sei x eine Länge. Zeichnen wir nun den Graphen der Funktion f auf ein Papier (x wird horizontal eingetragen und $y = f(x)$ vertikal), dann erhalten wir eine geometrische Kurve im 2-dimensionalen Ortsraum, die wir als Kurve „über“ der horizontalen Achse betrachten können. Anstelle von $F'(x) = f(x)$ schreiben wir jetzt das Differential $dF = f(x)dx$. Aus der Dimensionsbetrachtung schliessen wir, dass F eine Fläche sein muss. Häufig istes nützlich (z.B. bei numerischen Betrachtungen) das Differential durch Differenzen zu approximieren. Dabei unterteilt man die x-Achse in äquidistante kleine Abschnitte der Länge Δx. Wir erhalten dann $\Delta F = f(x)\Delta x$. Die Figur 2 zeigt nun, dass ΔF den Flächeninhalt

Fig. 2



eines Rechtecks amgibt mit der Höhe $f(x)$ und der Breite Δx. Diese Fläche ist eine Näherung zur Fläche unter der „Kurve“ $f(x)$ im Intervall Δx. Das Integral zwischen den Grenzen a und b ist dann formal:

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{\Delta x \to 0} \sum f(x)\Delta x$$

und entspricht der Fläche unter der „Kurve“ $f(x)$ im Intervall $[a, b]$.

Eine wichtige Darstellung für die Stammfunktion von f ist:

$$G(x) \;=\; \int_a^x f(t)dt$$

Beachten sie bitte, dass die Variable x nur als obere Integrationsgrenze vorkommt und im Integranden ein neues Symbol für die Variable eingeführt wurde. Aus der Definition des Integrals als Grenzwert einer Summe:

$$G(x+\Delta x) - G(x) \;=\; \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \approx f(x)\Delta x$$

Nun wird klar, dass $dG/dx = f$ ist. G ist also eine Stammfunktion von f. Sei F eine andere Stammfunktion, d.h. $F = G + C$, wobei C eine Konstante ist. Es folgt:

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

da $G(a) = 0$. Nachfolgend eine kurze Tabelle einiger Stammfunktionen:

$f(x)$	$\int f dx$
a	ax
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$sin(x)$	$-cos(x)$
e^x	e^x
$1/x$	$ln\|x\|$
$sinh(x)$	$cosh(x)$

Beipiel: Bestimmen sie Stammfunktionen für $sin(kx)$, $1/\sqrt{x^2+1}$ und $tan(ax)$.