3 Differentialgleichungen

3.1 Beispiele aus der Physik I Vorlesung

Die Newton'sche Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die zeitliche Entwicklung der Ortskoordinate, $t \to \vec{x}(t)$, eines Punktteilchens der Masse m:

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{v}, \vec{x}, t)$$

Sie ist von zweiter Ordnung, weil Ableitungen der Grösse $\vec{x}(t)$ bis zu maximal der 2. Ordnung vorkommen. Die Kraft $\vec{F}$ ist in diesem Problem vorgegeben und allgemein abhängig von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ (falls z.B. viskose Reibung vorliegt) von der Ortskoordinate $\vec{x}$ (meistens ein Potential wie die Gravitation), und eventuell auch explizit von der Zeit. Letzters kann vorkommen, falls das Problem nicht „abgeschlossen“ist, d.h. falls das System von „aussen“einer zeitlichen Veränderung unterworfen ist. Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, können wir uns einen Feder-Masse Oszillator vorstellen, dessen Federkonstante zeitabhängig geändert wird, oder an dem von aussen „gerüttelt“wird.
Falls die Kraft nicht explizit von der Geschwindigkeit und der Zeit abhängig ist, ist die Differenzialgleichung (DG) zeitumkehrinvariant und auch invariant unter der Translation der Zeit. Das heist, dass mit $t \to \vec{x}(t)$ auch $t \to \vec{x}(-t)$ und ebenso $t \to \vec{x}(t+\tau)$ Lösungen der DG sind. Die Zeit ist also nur ein zweckmässiger Parameter, die Physik eines solchen Problems definiert aber weder eine Zukunft noch eine Vergangenheit. Eine Zeitrichung kommt erst durch Dissipation (Reibung) zustande. Auf die Ursache können wir erst später in der Wärmelehre eingehen.

Einfache Beispiele für die Newton'sche Gleichung sind die Bewegung eines Punktteilchens im Gravitationsfeld mit konstanter Beschleunigung g (in einer Dimension):

$$m\ddot{x} = g$$

und in einem Kraftfeld $F(x)$, das proportional zur Auslenkung x der Masse aus der Gleichgewichtsposition $x = 0$ ist (d.h. $F(x) = -fx$):

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \ .$$

Hierin ist $\omega := \sqrt{f/m}$, f die Federkonstante und m die Masse. Beide Differentialgleichungen sind linear (in x, $\dot{x}$) mit konstanten Koeffizienten.

Die einfachste Differentialgleichung, die Sie bereits jetzt vollständig lösen können, ist von erster Ordnung und lautet:

$$\dot{x} = f(t) \ ,$$

wobei f eine vorgegebene Funktion ist (um keine Verwirrung aufkommen zu lassen, werden wir als Variable hier immer die Zeit t verwenden). Gegeben ist also $f()$, und gesucht ist die Funktion $x(t)$, so dass $\dot{x} = f$. Die Lösung dieser Gleichung ergibt sich durch Integration, z.B.

$$x(t) \;=\; \int_0^t f(\tau)d\tau \;+\; C$$

Hierin ist $C = x(0)$ die Integrationskonstante, die durch die „Anfangsbedingung"festgelegt ist. Bei einer Differentialgleichung 1. Ordnung gibt es eine Integrationskonstante. Es ist unschwer zu erraten, dass es dann bei einer DG 2. Ordnung *zwei* Integrationskonstanten geben wir.

3.2 Trennung der Variablen

Hier ein einfaches Konzept für eine DG 1. Ordung der folgenden Form (gesucht ist $t \to x(t)$):

$$\dot{x}(t)\, g(x) \;=\; f(t)$$

Die beiden Funktionen g und f sind vorgegeben (und integrierbar). Sei $G = \int g$ und $F = \int f$. Wir integrieren die Differentialgleichung über die Zeit:

$$\int_{t_0}^{t_1} g(x)\dot{x}dt \;=\; \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$$

In der linken Gleichung ersetzen wir $\dot{x}dt$ durch das Differential dx, d.h. wir führen eine Variablensubstitution durch:

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \;=\; \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$$

Beachten Sie, dass die Grenzen x_0 und x_1 im Integral links den korrespondierenden Zeiten rechts entsprechen. Mit den Stammfunktionen F und G:

$$G(x) \;=\; F(t) + C$$

C bezeichnet wiederum die Integrationskonstante. Im letzten Schritt müssen wir nach x auflösen. Formal lautet das Endresultat:

$$x(t) \;=\; G^{-1}(F(t) + C) \tag{1}$$

Beachten Sie bitte, dass die Integrationskonstante im allgemeinen nicht mehr als additive Konstante erscheint.

Beispiel: Radioaktiver Zerfall. Sei N die mittlere Anzahl radioaktiver Nuklide. Die Anzahl Zerfälle in einem Zeitintervall ist proportional zum Zeitintervall und natürlich proportional zu N. Die Differentialgleichung lautet daher:

$$\dot{N} = -\lambda N$$

Die Funktionen g und f lauten: $g(N) = 1/N$ und $f(t) = -\lambda$. Somit erhalten wir $G(N) = ln(N)$ und $F(t) = -\lambda t$ und für die Lösung:

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}$$

Die Integrationskonstante wurde so gewählt, dass bei der Zeit $t = 0$ die Anzahl der radioaktiven Nuklide gleich N_0 ist. Verifizieren Sie durch Einsetzen, dass dieses Resultat in der Tat Lösung der DG ist. Wiederholen Sie die Schritte, die zur Herleitung der Gleichung 1 verwendet wurden, direkt an diesem konkreten Problem.

3.3 Lineare DG 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Differentialgleichungen dieser Art kommen sehr häufig vor. Oft werden die Probleme so vereinfacht, dass man eine DG dieser Art als Näherung erhält, weil diese Gleichungen geschlossen lösbar sind. Die Gleichung lautet:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = g(t)$$

Vorgehen: Man löst zuerst die sog. *homogene* DG, d.h. die DG mit denselben Koeffizienten a und b aber für $g(t) = 0, \forall t$. Diese Lösung erhält man mittels des Ansatzes: $x(t) := A \, exp(pt)$ (mit A und p Konstanten). Einsetzen und Ausklammern des Exponentialterms ergibt eine quadratische Gleichung für p (manchmal auch charakteristisches Polynom genannt):

$$p^2 + ap + b = 0$$

Diese Gleichung hat immer zwei Lösungen (wenigstens dann, wenn man komplex rechnen kann, worauf wir etwas später noch eingehen werden). Diese beiden Lösungen nennen wir p_1 und p_2, die entsprechenden Konstanten A sind frei wählbar. Es handelt sich hierbei um die beiden Integrationskonstanten. Die Lösung der homogenen Gleichung hat daher die Gestalt:

$$x_{\mathrm{H}}(t) = A_1 \, e^{p_1 t} + A_2 \, e^{p_2 t}$$

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen DG zu erhalten, ist es nun hinreichend, eine spezielle (natürlich möglichst einfache) Lösung der gesamten Differentialgleichung zu finden. Wir nennen diese Lösung $x_{\mathrm{I}}(t)$. Wegen der Linearität ist die allgemeine Lösung die Summe:

$$x(t) = x_{\mathrm{H}}(t) + x_{\mathrm{I}}(t)$$

Zunächst erscheint es schwierig, eine spezielle Lösung zu finden, die physikalische Problemstellung gibt einem aber meistens den „richtigen“Ansatz vor, wie wir später noch sehen werden. Mittels der sogenanten Laplacetransformation kann formal immer eine Lösung gefunden werden (dies ist ein Leckerbissen für später).
Beispiel: Die charakteristische Gleichung für den harmonischen Oszillator mit Frequenz $\omega = 1$ lautet $p^2 + 1 = 0$ und hat die Nullstellen $p_{1,2} = \pm i$. Die (komplexe) Lösung der Differentialgleichung ist daher formal

$$x(t) \;=\; A_1\, e^{it} \;+\; A_2\, e^{-it}$$

3.4 Zurückführen einer DG n-ter auf eine 1. Ordnung

Wir betrachten gleich ein Beispiel, nämlich die DG des harmonischen Oszillators. Dabei skalieren wir die Zeitachse so um, dass $\omega = 1$.

$$\ddot{x} \;=\; -x$$

Wir definieren jetzt einen 2-dimensionalen Vektor mit den Komponenten (x_1, x_2), wobei $x_1(t) := x(t)$ und $x_2(t) = \dot{x}(t)$ ist. Die Differentialgleichung kann nun wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Wenn wir die 2×2-Matrix mit M abkürzen, können wir in Vektorschreibweise diese Gleichung kompakter angeben:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) \;=\; M\vec{x}$$

Das heisst, wir haben die DG 2. Ordnung auf eine 1. Ordnung zurückgeführt, mussten aber dafür eine zusätzliche *Komponente* einführen, hier die Geschwindigkeit. Da eine Differentialgleichung 1. Ordnung für jede Komponente eine Integrationskonstante aufweist ist klar, dass die DG n-ter Ordnung genau n Integrationskonstanten hat. Falls die Matrix M konstant ist (so wie in unserm Beispiel), kann die DG sofort mit zur Hilfenahme von Methoden der Linearen Algebra gelöst werden (siehe Mathematik).

Physikalische nennen wir Systeme, die auf eine DG erster Ordnung zurückgeführt werden können, *deterministisch*, falls die Funktion f auf der rechten Seite der DG stetig in allen Argumenten ist. Allgemein wird ein deterministisches System beschrieben durch:

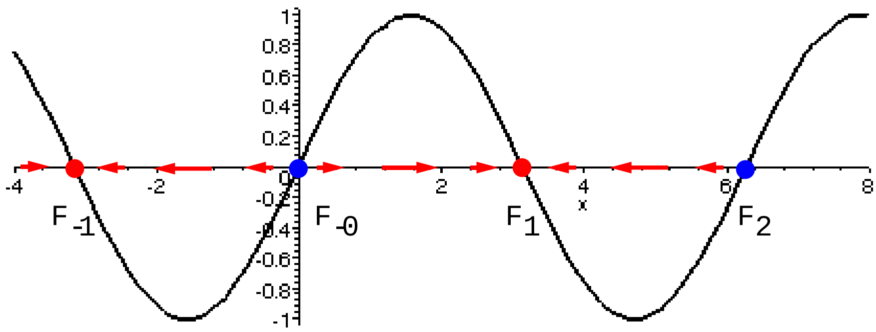
$$\frac{d}{dt}x_i(t) \;=\; f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\;;\;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind eindeutig, d.h. ist der Zustand zu einer bestimmten Zeit bekannt, also $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{x}_0$ zur Zeit t_0, dann gibt es nur genau eine Funktion $t \to \vec{x}(t)$ mit der Eigenschaft, dass $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$. Wir bezeichnen den n-dimensionalen Raum der Komponenten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ den *Phasenraum* des Systems. Jede Lösung $t \to \vec{x}(t)$ der DG beschreibt eine Bahnkurve im Phasenraum. Die Eindeutigkeit der Lösung besagt nun, dass sich Bahnkurven *nicht schneiden* können.

Beispiel 1:
Zuerst die DG 1. Ordnung in einer Dimension, also:

$$\dot{x} = f(x) \ ,$$

wobei f stetig. Angenommen die Funktion f habe in x_0 eine Nullstelle, dann ist $t \to x(t) = x_0 =$ konstant eine *stationäre* Lösung zur Anfangsbedingung x_0. Wegen der Eindeutigkeit ist dies die einzige Lösung, die dieser Anfangsbedingung genügt. Diese spezielle Lösungen nennt man *Fixpunkte* der DG. Man unterscheidet zwei Arten von Fixpunkten: stabile und instabile. Ein Fixpunkt ist instabil, falls die zeitliche Entwicklung der Lösung der DG mit einer „leicht“verschobenen Anfangsbedingung sich „weit“von x_0 entfernt. Diese qualitative Definition kann am besten an einem Beispiel diskutiert werden. In der Figur 1 ist der Phasenraum der DG aufgezeichnet, hier einfach die x-Achse. Zusätzlich ist die Funktion $f(x)$ skizziert (so was wie eine Sinusfunktion). Der Wert von $f(x)$ an der Stelle x gibt die momentane Geschwindigkeit an dieser Stelle an. Dieser Wert wurde (skaliert) als Vektor auf die x-Achse übertragen. Es



sind vier Fixpunkte F_{-1}, $F_0 = 0$, F_1 und F_2 markiert. Angenommen der Anfangswert zur Zeit $t = 0$ liege im Intervall $0 < x < F_1$. Gemäss der eingezeichneten Pfeile muss $x(t)$ monoton zunehmen, um nach hinreichend langer Zeit in F_1 zu enden. Derselbe Fixpunkt wird asymptotisch erreicht für die Anfangsbedingung $F_1 < x < F_2$. F_1 ist ein *stabiler* Fixpunkt, weil die Lösungen in den Fixpunkt einlaufen und sich nicht von diesem wegbewegen. Der Fixpunkt $F_0 = 0$ ist ein Beispiel für einen *instabilen* Fixpunkt. Ist der Anfangswert nicht genau exakt gleich Null, bewegt sich $x(t)$ von F_0 weg und läuft entweder auf F_{-1} oder F_1 zu, die beide stabil sind. Dieses Beispiel zeigt auch klar, dass alle Lösungen der DG entweder streng monoton steigend oder fallend sind, oder aber Fixpunkte sind. Im Intervall $F_0 < x < F_1$ sind die Lösungen zum Beispiel alle streng monoton zunehmend.

Beispiel 2: Nochmals der harmonische Oszillator.
Wir starten von der in der Zeit skalierten Differentialgleichung $\ddot{x} + x = 0$ und nennen v die momentane Geschwindigkeit. Die DG ist äquivalent den beiden gekoppelten Gleichungen $\dot{v} = -x$ und $\dot{x} = v$. Wir definieren den folgenden Vektor $\vec{\xi}$ in einem dreidimensionalen Euklidischen Raum:

$$\vec{\xi} = (x, v, 0)$$

Die Ableitung von $\vec{\xi}$ nach der Zeit ist der Vektor $\dot{\vec{\xi}} = (v, -x, 0)$, den wir auch mittels des Vektorproduktes schreiben können als:

$$\dot{\vec{\xi}} = \vec{\xi} \times \vec{e}_z$$

Aus dieser Gleichung sehen wir, dass die Bahnkurve $t \to \vec{\xi}(t)$ einen Kreis in der Ebene $z = 0$ beschreibt, denn der Geschwindigkeitvektor $\dot{\vec{\xi}}$ liegt in dieser Ebene und steht senkrecht zu $\vec{\xi}$ selbst. Aus letzterem folgt, dass die Länge von ξ konstant sein muss. Das sieht man so ein: Ableiten von $\vec{\xi} \cdot \vec{\xi}$ nach der Zeit ergibt $2\,\dot{\vec{\xi}} \cdot \vec{\xi} = 0$, so dass $x^2 + v^2$ konstant ist (ein Kreis). Der Phasenraum ist nun zweidimensional mit den Koordinaten (x, v). Eine Lösung ist eindeutig durch Angabe der „Anfangsbedingung“festgelegt, d.h. durch Angabe eines Punktes im Raum. Die Fixpunkte findet man, in dem man die linke Seite, die die erste Ableitung der Komponenten enthält, Null setzt. Daraus folgt für diese Gleichung: $x = 0$ und $v = 0$. Es gibt also nur genau einen Fixpunkt, der Ursprung des Koordinatensystems. Bahnkurven sind Kreise, die um den Fixpunkt herumlaufen (periodische Lösungen), siehe Figure 2. Falls zusätzlich Dämpfung

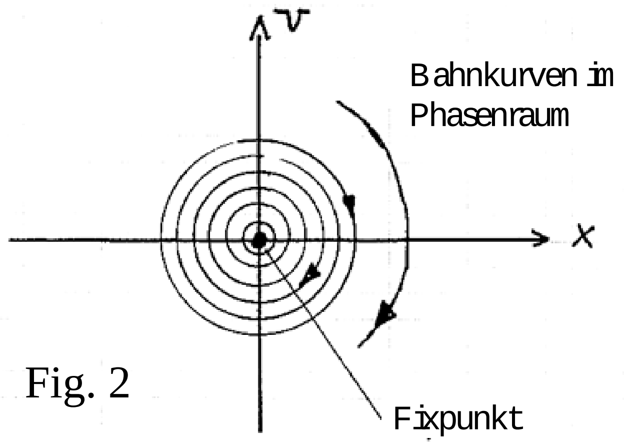


Fig. 2

(Reibung) eingeführt wird, werden aus den Kreisen Spiralen, die in den (stabilen) Fixpunkt einlaufen.

Beispiel 3: Das mathematische Pendel.
Die Differentailgleichung lautet: $\ddot{x} + sin(x) = 0$, wobei wir hier x für den Winkel geschrieben

haben (siehe Vorlesung Physik 1). Sie ist äquivalent zu den beiden gekoppeleten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -sin(x_1) \end{aligned}$$

Um die Bahnkurven qualitativ diskutieren zu können, ist es nützlich zuerst die Fixpunkte und dann die Geschwindigkeitsvektoren $(\dot{x_1}, \dot{x_2})$ als Pfeile in den Phasenraum einzutragen. Die Fixpunkte erhalten wir aus $x_2 = 0$ und $sin(x_1) = 0$. Es sind also die Punkte $(n\pi, 0)$, $n \in \mathcal{Z}$. Die Figure 3 gibt ein qualitatives Bild der Bahnkurven. Es ist leicht einzusehen, dass die Fixpunkte $(2n\pi, 0)$ stabil und $((2n+1)\pi, 0)$ instabil sind. Wegen der Periodizität von 2π gibt es eigentlich nur zwei Fixpunkte. Der stabile entspricht der Pendelstellung nach „unten“, während im instabilen Fixpunkt das Pendel senkrecht nach oben zeigt. Beim Betrachten der Bahnkurven in der unmittelbaren Umgebung des „oberen “Fixpunktes sollte klar sein (mathematisch und physikalisch), dass dieser Fixpunkt instabil ist.

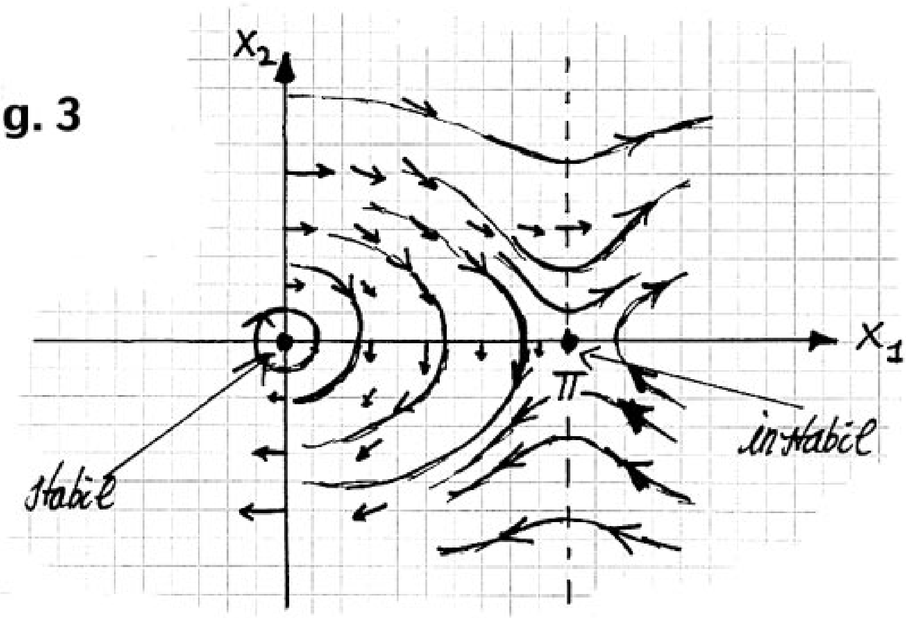


Fig. 3

3.5 Numerische Lösung

Für die numerische Lösung wird die kontinuierliche Zeitachse in diskrete Zeitschritte der Länge $h := \Delta t$ unterteilt und die Differentialgleichung in eine Differenzengleichung überführt. Es geht hier nur um das Prinzip. Um einen möglichst „stabilen“Algorithmus zu erhalten, muss man sich weitergehende Gedanken über die Fortpflanzung von Fehlern machen. Wir betrachten eine einfache Differentialgleichung 1. Ordnung der Form:

$$\dot{x}(t) \;=\; f(t,x)$$

mit der Anfangsbedingung x_0 zur Zeit $t_0 := 0$. Ausgehend vom Anfangswert ist

$$t_1 \;=\; t_0 + h \;, \text{ und } \; x_1 \;=\; x_0 + h\, f(t_0, x_0)$$

eine Näherung für die Lösung nach dem Zeitschritt h (Verfaheren von Euler). Man fährt nun so rekursiv weiter, d.h. also

$$t_2 \;=\; t_1 + h \;, \text{ und } \; x_2 \;=\; x_1 + h\, f(t_1, x_1)$$

Beispiel: Sei $\dot{x} \;=\; kx$. Die Rekursionsformel lautet nun: $x_{n+1} \;=\; x_n + hkx_n \;=\; x_n(1 + hk)$, womit wir als Lösung (anstelle der Exponentialfunktion) erhalten: $x_n \;=\; x_0(1 + hk)^n$.

Natürlich kann auch eine zweite Ableitung durch ein Differenzenschema angenähert werden:

$$\ddot{x}_n \;:=\; \frac{\dot{x}_{n+1} - \dot{x}_n}{h}$$

Einsetzten von

$$\dot{x}_n \;:=\; \frac{x_{n+1} - x_n}{h}$$

ergibt dann:

$$\ddot{x}_n \;=\; \frac{1}{h^2}\left\{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n\right\}$$

Ein interessantes Beispiel, das einen wesentlichen Unterschied zwischen einem diskreten und einem kontinuierlichen System aufzeigt, ist ein Modell für die Populationsdynamik. Sei N die zeitabhängige Anzahl einer Spezie, sagen wir Mäuse. Ihre Vermehrungsrate ist proportional zu ihrer Anzahl (es gibt dann mehr Paare und mehr Nachkommen werden pro Zeit gezeugt). Die Differentialgleichung ist also von der Form $\dot{N} \;=\; aN$, wobei a eine Konstante ist. Da die Ressourcen aber beschränkt sind, werden sich die Mäuse bei grosser Population vornehmlich der Nahrungssuche widmen müssen oder verhungern sogar. Das kann man in der DG mit einem zusätzlichen Faktor berücksichtigen:

$$\dot{N} \;=\; aN\left(1 - \frac{N}{N_s}\right) \;=\; f(N)$$

Diese Differentialgleichung können Sie mit Ihren jetzt erworbenen Wissen diskutieren. Nehmen Sie an, dass zur Zeit $t = 0$ eine bestimmte Anzahl Mäuse $N_0 < N_s$ vorhanden ist. Es ist leicht zu sehen, dass $N(t)$ streng monoton wächst und asymptotisch dem Sättigungswert N_s zustrebt.

Nun betrachten wir den diskreten Fall. Wir führen die Abkürzung $x := N/N_s$ und $b := a\Delta t$ ein, wobei Δt der Zeitschritt sein soll. Mit dem Euler'schen Verfahren erhalten wir:

$$x_{k+1} = x_k + bx_k(1 - x_k)$$

Zunächst ist klar, dass wie bei der kontinuierlichen Gleichung $x = 0$ und $x = 1$ Fixpunkte sind (durch Einsetzen überprüfen). Es stellt sich die Frage, ob diese stabil sind. Dazu schreiben wir die Gleichung in die folgende Form um:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) \\ f(x) &= bx\left(\frac{1+b}{b} - x\right) \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich diskutieren, in dem man die beiden Funktionen, die rechts und links von der Gleichung stehen, in einem Graphen aufzeichnet, also die Funktionen $x \to x$ und $x \to f(x)$. Es handelt sich also um die Gerade mit Steigung 1 und um eine nach unten geöffnete Parabel. Da die Steigung der Parabel im Nullpunkt gleich $1 + b > 1$ ist, schneiden sich die Gerade und die Parabel in zwei Punkten, den Fixpunkten bei 0 und bei 1. Figure 4a zeigt die Situation für den Fall, dass b „relativ“ klein ist. Man kann ausgehend von einem Anfanswert $0 < x < 1$ graphisch (wie in der Figur gezeigt) nachvollziehen, dass der Punkt $x = 1$ stabiler Fixpunkt ist. Im Grenzfall $b \to 0$ erhalten wir dasselbe Resultat wie im kontinuierlichen Fall, was auch so sein muss, da $b \propto \Delta t$. Nehmen wir jetzt an, dass der Zeitschritt (vorgegeben durch die Natur) gross wäre. Es ist dann möglich, dass die Lösungen in der Umgebung des Fixpunktes $x = 1$ ein sonderbares Verhalten aufweisen können (Übergang zum chaotischen Verhalten). Dies ist schematisch in der Figur 4b dargestellt. Dies findet dann statt, wenn die Steigung der Funktion f an der Stelle $x = 1$ kleiner als -1 wird. Da $f'(x) = 1 + b - 2bx$ wird diese Bedingung erfüllt, falls $b > 2$. Die wichtige Schlussfolgerung ist die, dass diskrete Gleichungen ein anders Verhalten als kontinuierliche deterministische Systeme aufweisen können.

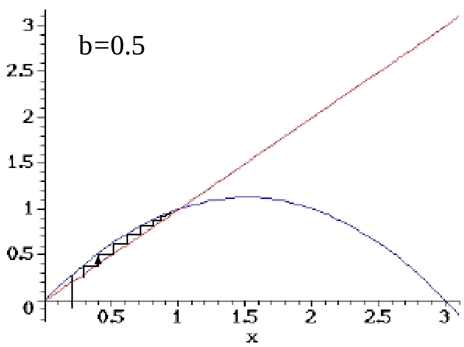


Fig. 4a

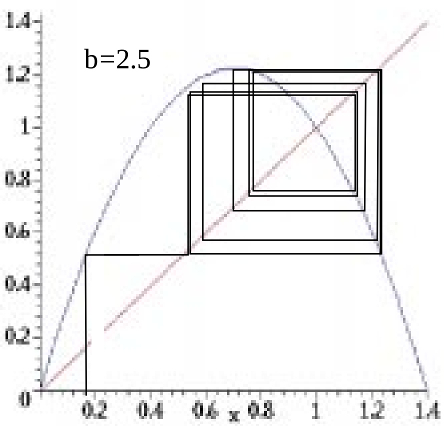


Fig. 4b