4 Gradient einer skalaren Funktion, Potential

4.1 1-dimensionaler Fall

Als Beispiel betrachten wir eine (skalare) Funktion in einer Dimension $x \rightarrow f(x)$, die z.B. die Höhe über Meer einer Strasse angibt, wobei x die in der Horizontalen gemessene Distanz angibt. Das Differential der Funktion haben wir bereits eingeführt:

$$df = \frac{df}{dx} dx$$

Das Differential ist als Beschreibung der Tangente g der Funktion f im Punkt x zu interpretieren:

$$g(y) = f(x) + \left(\frac{df}{dx} \right) (y - x) \tag{1}$$

Die Ableitung df/dx der Funktion bezeichnet man auch als *Gradient* der Funktion oder als die „Steigung“. Man kann sagen, dass $df := (grad\, f) dx$ der Höhengewinn ist, wenn man von x ausgehendend sich um die „kleine“ Strecke dx weiterbewegt. Die Beschreibung (1) der Funktion durch ihre Tangente an der Stelle x ist eine Näherung an die Funktion, die natürlich in der unmittelbaren Umgebung der Funktion besonders gut ist. Die Näherung kann verbessert werden, indem man höhere Ableitungen mitnimmt. Mit der zweiten Ableitung kann zusätzlich die lokale Krümmung der Kurve berücksichtigt werden. Dabei wird natürlich verlangt, dass die Funktion mindestens zweimal differenzierbar ist. Falls die Funktion beliebig oft differenzierbar ist (analytisch), dann kann f an jeder Stelle durch eine sogenante Taylorreihe dargestellt werden:

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \bigg|_x (y - x)^n$$

Man findet dann häufig auch folgende Notation:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx} \bigg|_x \Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2} \bigg|_x (\Delta x)^2 + O\left(\Delta x^3\right)$$

Der letzte Term mit der Bezeichnung $O(\Delta x^3)$ gibt an, dass die Fehler bei dieser Darstellung in der dritten Potenz der kleinen Abweichung Δx liegen.

4.2 2-dimensionaler Fall

Eine Gebirgsfläche wird durch die Funktion $h(x, y)$ beschrieben. h bezeichnet die Höhe über einem Punkt (x, y) in der horizontalen xy-Ebene ($z = 0$). Das Gelände kann, wie das auf Karten üblich ist, durch *Höhenkurven* dargestellt werden. Sie sind definiert als:

$$h(x,y) \;=\; H \;= const.$$

Wir können nun versuchen, die Funktion lokal durch ihre „Tangente“ näherungsweise zu beschreiben. Wir haben jetzt aber zwei Möglichkeiten, denn wir können uns fragen, wie die Höhe entlang der x-Richtung oder entlang der y-Richtung ändert. Im ersten Fall halten wir y konstant und betrachten x als Variable, d.h. wir betrachten die Funktion $x \to h(x,y)$ und erhlalten:

$$h(x+\Delta x, y) \;=\; h(x,y) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \Delta x + O(\Delta x^2)$$

und analog, wenn wir y als Variable ansehen:

$$h(x, y+\Delta y) \;=\; h(x,y) + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \Delta y + O(\Delta y^2)$$

Für die Ableitung wurde hier das neue Symbol ∂ eingeführt. Dieses Symbol wird bei Funktionen mehrerer Variablen dann verwendet, wenn die Ableitung nur eine der Variablen betrifft. Man bezeichnet dies als *partielle* Ableitung. $\partial h/\partial x$ heisst partielle Ableitung von $h(x,y)$ nach x und ist definiert als:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \;=\; lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x, y) - h(x,y)}{\Delta x}$$

Die vorletzten beiden Gleichungen beschreiben die Tangente in die x und y Richtung. Angenommen wir fragen uns, wie die Funktion sich näherungsweise ändert, wenn wir uns vom Punkt (x,y) um den Vektor $(\Delta x, \Delta y)$ entfernen, so liegt es auf der Hand, die beiden Änderungen zu addieren:

$$h(x+\Delta x, y+\Delta y) \;=\; h(x,y) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \Delta y + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2) \qquad (2)$$

Lassen wir die O-Terme weg, so haben wir eine Funktion, die linear ist in den beiden Argumenten Δx und Δy. Diese Funktion beschreibt daher eine Ebene und es handelt sich um die *Tangentialebene*. Die Beschreibung einer Ebene ist eindeutig, falls die Steigung in zwei unabhängige Richtungen angegeben wird. Genau das haben wir hier durchgeführt. Angenommen die Funktion h ist die Ebene

$$h(x,y) \;=\; h_0 + ax + by \;\;,$$

dann folgt aus der Gleichung (2):

$$h(x+\Delta x, y+\Delta y) \;=\; h_0 + a(x+\Delta x) + b(x+\Delta y)\;.$$

Die Tangentialebene ist identisch der ursprünglichen Ebene.

In Vektorschreibweise können wir die lineare Änderung (die durch die Tangentialebene beschrieben wird) kompakt als Skalarprodukt wiedergeben. Wir definieren den *Gradienten* der *skalaren* Funktion h als den zweikomponentigen Vektor

$$grad\,h \;=\; \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

und schreiben für die „differentiellen" Änderungen $d\vec{r} := (dx, dy)$. Die Höhenänderung dh ist dann:

$$dh \;=\; grad\,h \cdot d\vec{r}$$

Wir fragen uns, wie sich die Funktion ausgehend vom Punkt $\vec{r}_0$ in eine allgemeine Richtung definiert durch den Einheitsvektor $\vec{e}$ ändert. In der xy-Ebene gehen wir dabei entlang des durch s parametrisierten Weges

$$s \to \vec{r}(s) \;=\; \vec{r}_0 + s\vec{e}$$

Offenbar wir die lineare Änderung beschrieben durch

$$dh \;=\; grad\,h(\vec{r}_0) \cdot \vec{e}\,ds\;, \tag{3}$$

da $(dx, dy) \;=\; \vec{e}\,ds$. Diese Gleichung zeigt uns gerade die Verallgemeinerung der Kettenregel der Differenzialrechnung. Die Höhe entlang der Geraden $\vec{r}(s)$ ist $s \;\to\; \tilde{h}(s) \;:=\; h(\vec{r}(s))$, also eine reelle Funktion in einer Variablen s. Ableiten nach s ergibt:

$$\frac{d\tilde{h}(s)}{ds} \;=\; \frac{dh(\vec{r}(s))}{ds} \;=\; grad\,h \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\;,$$

was offenbar der Gleichung (3) entspricht.

Wird der Richtungsvektor tangential zur Höhenlinie gewählt, muss $dh = 0$, woraus folgt, dass $grad\,h$ senkrecht auf den Linien konstanter Höhe steht. dh ist maximal, falls der Richtungsvektor parallel zum Gradienten gewählt wird.

Der Gradient gibt die Richtung der grössten *Zunahme* (Steigung) einer skalaren Funktion an. Die Linien konstanter Höhe stehen *senkrecht* zum Gradienten. Es ist möglich aus den Gradientenvektoren eine Schar von Kurven zu konstruieren mit der Eigenschaft, dass ihre Tangenten immer parallel zum Gradienten der Funktion h ist. Diese Kurven schneiden die Höhenlinien senkrecht. Man nennt sie die *Orthogonaltrajektorien* zu den Höhenlinien. Falls Sie beim Skifahren möglichst schnell vom Berg ins Tal gelangen wollen, d.h. den grössten Höhenunterschied auf kürzester Strecke überwinden wollen, dann wählen Sie die Fall-Linie, also eine Orthogonaltrajektorie zu den Höhenlinien (vorausgesetzt das Gelände lässt das überhaupt zu, keine Bäume...).

<u>Beispiele</u>:
1. Die Funktion $h(x,y) = (x^2 + y^2)/2$ beschreibt ein Paraboloid, siehe Figur 1. Die Linien konstanter Höhe sind Kreise. Sei H eine vorgegebene Höhe, dann ist der Radius r des Kreises gleich $r = \sqrt{2H}$. Falls wir also die Höhenlinien so wählen, dass der Unterschied benachbarter Linien jeweils konstant ist, dann liegen sie umso dichter, je grösser die lokale Steigung ist, denn Δh ist in „erster Ordnung“ gleich dem Produkt von $|grad\, h|$ und dem (senkrechten) Abstand benachbarter Höhenlinien. Diese ist eine sehr wichtige Eigengenschaft! Für unser Beispiel ist der Gradient $grad\, h = (x,y)$, zeigt also radial nach aussen und ist betragsmässig gleich dem Abstand vom Ursprung. Die Orthogonaltrajektorien („Feldlinien“) sind radial nach aussen gerichtete Geraden.

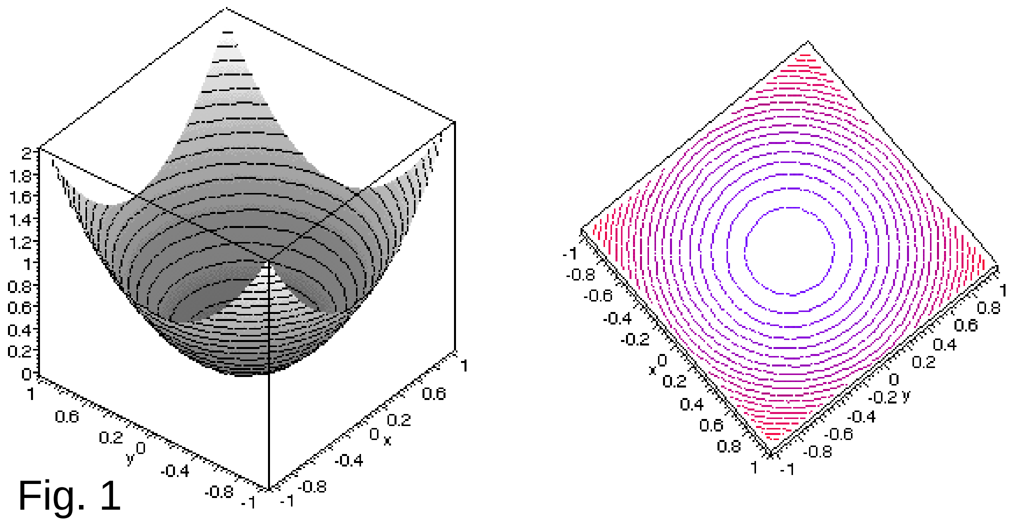

Fig. 1

2. Die Figur 2 zeigt eine etwas komplizierte Funktion, nämlich $h(x,y) = x^4 - x^2 - y^2$. Um das Verhalten einer allgemeinen Funktion zu diskutieren, sucht man zunächst die sog. Extremalstellen. Das sind Orte mit horizontaler Tangentialebene, d.h. Orte, wo sich die Höhe in erster Ordnung nicht ändert. Es gilt somit für Extremalstellen: $grad\, h = 0$. Für unser Problem erhalten wir drei solche Punkte: $(0,0)$ und $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$. Im nächsten Schritt überlegt man sich, ob es sich bei diesen Punkten um lokale Minima, Maxima oder „Sattelpunkte “ handelt. Dazu muss man die zweiten Ableitungen der Funktion an den Extremalstellen zu Rate ziehen. Für eine Funktion mit zwei Varaibalen gibt es davon vier, nämlich:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\ ,\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\ ,\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\ \text{und}\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$$

Da die letzten beiden identisch sind (Mathematik), gibt es nur deren drei. Eine allgemeine Regel kann mittels Methoden der linearen Algebra angegeben werden. Dies sprengt aber den Rahmen dieser Ergänzungen. Für unser Beispiel ist die Situation aber besonders einfach, da die

„gemischten“ zweiten Ableitungen gleich Null sind. Im Nullpunkt sind die beiden zweiten Ableitungen (nach x und nach y) negativ, so dass es sich also um ein lokales Maximum handeln muss, siehe Figur 2. An den beiden anderen Stellen ist die zweite Ableitung nach y negativ und die nach x positiv. Es handelt sich somit um Sattelpunkte, was schön in der Darstellung der Höhenlinien ersichtlich wird (Schnittpunkt).

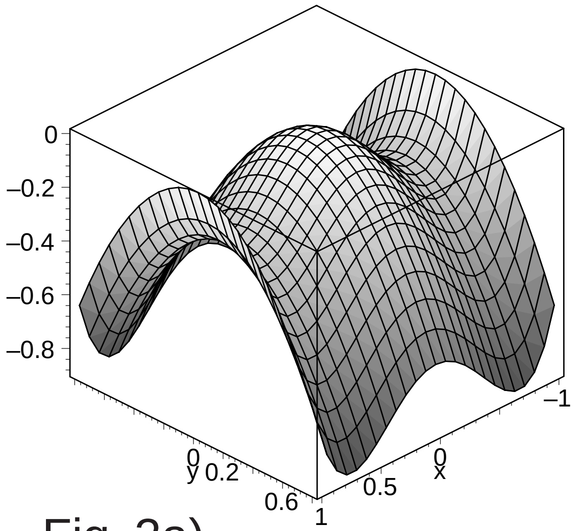

Fig. 2a)

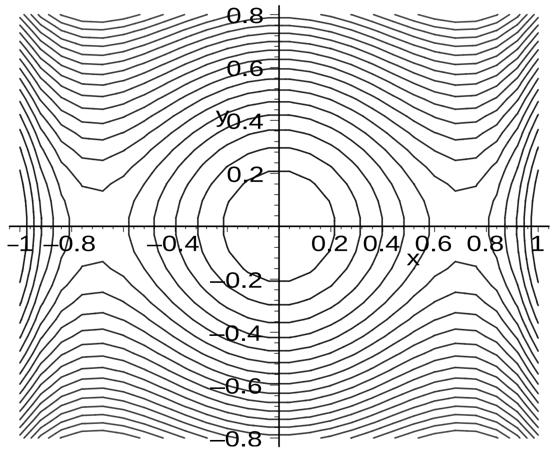

Fig. 2b)

4.3 Nablaoperator, Wegintegral, Potential

Der Nablaoperator $\vec{\nabla}$ ist ein vektorieller Differenzialoperator, der in kartesischen Koordinaten formal definiert ist als:

$$\vec{\nabla} \;:=\; \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Sei $\vec{x} \to \Phi(\vec{x})$ ein *skalares* Feld (z.B. die Höhe von vorhin oder das elektrische Potential). Die Anwendung des Operators $\vec{\nabla}$ auf Φ ergibt den Gradienten:

$$\vec{\nabla}\Phi \;=\; grad\,\Phi$$

Dabei wird ein *Skalarfeld* auf ein *Vektorfeld* abgebildet. Nennen wir das Vektorfeld $\vec{G}$. Da dieses Feld durch Differenzieren der Funktion Φ entsteht, liegt es nahe, dass Φ umgekehrt aus $\vec{G}$ durch Integration gewonnen werden kann. Das ist in der Tat so. Dazu benötigen wir den Begriff des *Wegintegrals*, der in der Vorlesung bereits eingeführt wurde. Sei $\vec{y}$ ein beliebiger Referenzpunkt und γ ein Weg von $\vec{y}$ nach $\vec{x}$. Wir definieren:

$$\Psi(\vec{x}) \;:=\; \int_\gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}$$

Die Funktion Ψ hängt vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, sowie im allgemeinen von der Wahl des speziellen Weges ab (es gibt viele Wege, die von $\vec{x}$ nach $\vec{y}$ führen). Um konkret ein Wegintegral zu berechnen, benötigt man eine Parametrisierung des Weges. Für die kinematischen Bewegungen von Punktmassen in der Newton'schen Mechanik gibt die Zeit eine natürliche Parametrisierung vor. Im allgemeinen kann aber jeder beliebige Weg gewählt werden. Sei s eine konkrete Parametrisierung des Weges γ:

$$s \in [0,1] \;\rightarrow\; \vec{r}(s) \in \mathcal{R}^3 \;\text{ mit }\; \vec{r}(0) = \vec{x}\,,\; \vec{r}(1) = \vec{y}$$

Um das Wegintegral zu berechnen, benötigen wir jetzt nur noch die „Wegänderung“ $d\vec{r}$. Sie lautet:

$$d\vec{r} \;=\; \left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\, ds$$

Damit ist das Problem auf ein gewöhnliches Integral einer Funktion einer Variablen (s) zurückgeführt (siehe Übungen Physik I).

Kommen wir zurück zur ursprünglichen Fragestellung. Als Integrand haben wir $\vec{G} \cdot d\vec{r}$ oder $grad\Phi \cdot d\vec{r}$. Der letzteren Form entnehmen wir, dass der Integrand der differentiellen Änderung von Φ (in Wegrichtung) entspricht. Die Summe aller Änderungen (also das Integral) ergibt demnach:

$$\Psi(\vec{x}) \;=\; \Phi(\vec{x}) - \Phi(\vec{y})$$

Damit haben wir in der Tat die Funktion Φ als Linienintegral aus $\vec{G}$ gewonnen:

$$\Phi(\vec{x}) \;=\; \Phi(\vec{y}) + \int_\gamma \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \tag{4}$$

Weiter zeigt diese „Herleitung“ auch, dass das Linienintegral nicht vom speziell gewählten Weg abhängt, sondern *nur* vom Anfangs- und Endpunkt. Für jeden geschlossenen Weg γ_c ist der Endpunkt gleich dem Anfangspunkt und mit (4):

$$\oint_{\gamma_c} \vec{G} \cdot d\vec{r} \;=\; \oint_{\gamma_c} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \;=\; 0$$

Jedes Wegintegral eines Vektorfeld, das als Gradienten eines Skalarfeldes dargestellt werden kann, hängen nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Alle Integrale über geschlossene Wege verschwinden identisch.

Es gilt auch das Umgekehrte: Sei $\vec{F}$ ein „beliebiges“ Vektorfeld mit der Eigenschaft, dass alle Wegintegral von $\vec{F}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen. Dann existiert ein Skalarfeld Φ mit der Eigenschaft $\vec{\nabla}\Phi = \vec{F}$. Φ wird wie oben angegeben als Linienintegral definiert. Die Funktion ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Vektorfelder mit dieser Eigenschaft nennen wir *konservativ*. In der (klassischen) Physik werden alle grundlegenden Wechselwirkungen durch konservative Kraftfelder beschrieben. Das dazugehörende Skalarfeld ist die potentielle Energie E_{pot} definiert als:

$$E_{\mathrm{pot}}(\vec{x}) \;=\; E_{\mathrm{pot}}(\vec{y}) \;-\; \int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{5}$$

Das Minuszeichen ist reine Konvention. Es gilt daher:

$$\vec{F} \;=\; -\vec{\nabla} E_{\mathrm{pot}}$$

Für eine Feder mit Federkonstante k gilt das Kraftgesetz $F = -kx$, so dass $E = kx^2/2$. Die potentielle Energie ist minimal im Gleichgewichtszustand $x = 0$. Angenommen die Feder würde von $x = 0$ (in Ruhe) auf eine Länge x gestreckt und wäre danach wiederum in Ruhe, dann ist dabei die potentielle Energie grösser geworden. Diese Zunahme entspricht genau der Arbeit, die von aussen dem System zugeführt wurde.

In der Konvention, dass Arbeit ΔW, die von aussen einem System zugeführt wird, positiv gerechnet wird, gilt:

$$\Delta E \;=\Delta W$$

Das ist der Inhalt des Energiesatzes (im quasistatischen Fall). Mit Bewegung, muss die kinetische Energie zur totalen Energie dazugezählt werden.

Beipiel:
Das Potential sei gegeben als:

$$E(\vec{x}) \;=\; C\frac{1}{|\vec{x}|}$$

Gesucht ist das Kraftfeld $\vec{F} := -\vec{\nabla}E$. Zunächst diskutieren wir die skalare Funktion E. Sie hängt nur vom Betrag des Abstandes zum Ursprung ab, ist also isotrop. Die „Höhenlinien“, die wegen der zusätzlichen Dimension nun Flächen sind, nennen wir die *Äquipotentialflächen*. Es handelt sich offenbar um konzentrische Kugelschalen. Die *Feldlinien* (die Orthogonaltrajektorien) sind radial aus- oder einlaufende Geraden. Die Kraft ist somit proportional zu $\vec{e}_r$. Da das Problem isotrop (richtungsunabhängig) ist, gilt:

$$\vec{F} \;=\; f(r)\vec{e}_r$$

Offensichtlich ist $f(r) = -\frac{d}{dr}Cr^{-1}$, also gleich C/r^2:

$$\vec{F}(\vec{r}) \;=\; C\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_r$$

Als Übungsaufgabe sollten Sie unbedingt den Gradienten in kartesischen Komponenten einmal berechnen. Dazu schreiben Sie die potentielle Energie als:

$$E_{\rm pot}(\vec{x}) \;=\; \frac{C}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

Berechnen Sie jetzt die einzelnen Komponenten von $-\vec{\nabla} E_{\rm pot}$, also $-\partial E_{\rm pot}/\partial x$ usw.

4.4 Die Rotation eines Vektorfeldes

Da wir oben den Nablaoperator eingeführt haben und früher das Vektorprodukt, streife ich hier noch kurz einen weiteren Differenzialoperator, der in der Physik II zur Anwendung kommt, die sog. Rotation eines Vektorfeldes. Wir verwenden Indizes für die Komponenten des Vektorfeldes $\vec{F}$ und dem Nablaoperator $\vec{\nabla}$ (im kartesischen Koordinatensystem) F_i und $\partial_j := \partial/\partial x_j$. Die Rotation von $\vec{F}$ ist definiert als:

$$rot\,\vec{F} \;=\; \vec{\nabla}\times\vec{F}$$

In Komponentenschreibweise unter Verwendung des ϵ-Tensors:

$$(rot\,\vec{F})_i \;=\; \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\,\partial_j F_k$$

Wir nehmen nun an, dass das Vektorfeld konservativ ist. Dann existiert ein Skalarfeld E (das Potential) mit der Eigenschaft, dass $\vec{F} = -\vec{\nabla}E$. Einsetzen ergibt:

$$(rot\,\vec{F})_i \;=\; -\sum_{jk} \epsilon_{ijk}\,\frac{\partial^2 E}{\partial x_j \partial x_k}$$

Der Term mit der zweiten Ableitung in der Summe ist symmetrisch in den beiden Indizes j und k (d.h. ändert sein Vorzeichen beim Vertauschen nicht), während der ϵ-Tensor antisymmetrisch ist. Aus diesem Grund verschwindet die Summe. Wir erhalten also den wichtigen Satz:
Die Rotation eines konservativen Vektorfeld verschwindet identisch:

$$rot\,\vec{F} \;=\; 0$$

Konservative Kraftfelder sind *wirbelfrei*, wie man sagt. Es stellt sich natürlich sofort die Frage, ob die letzte Aussage auch umkehrbar ist. Folgt aus $rot\vec{F} = 0$, dass $\vec{F}$ konservativ ist? Die Antwort ist „jein“. Gilt $rot\vec{F} = 0$, dann existiert *lokal* ein Potential Φ mit der Eigenschaft $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$. Das Vektorfeld muss aber nicht notwendigerweise *global* konservativ sein!

Beispiele:
1. Sei $\vec{F} := -a\vec{r}$ ein Vektorfeld im dreidimensionalen Raum. Zeigen Sie , dass $rot\,\vec{F} = 0$, und bestimmen Sie das Potential.

2. Wir betrachten das Geschwindigkeitsfeld, das sich aus der Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ergibt: $\vec{v} := \vec{\omega} \times \vec{r}$. Dies ist ein Wirbelfeld, denn die Rotation ist überall verschieden von null. Zeigen Sie, dass $rot\ \vec{v} = 2\vec{\omega}$.

3. In der Vorlesung haben wir ein spezielles Zirkulationsfeld in 2-Dimensionen betrachtet, nämlich das Vektorfeld $\vec{F} := \vec{e}_z \times \vec{r}\,\frac{1}{r^2}$. Hierbei ist der Ortsvektor $\vec{r} := (x, y, 0)$, die z-Komponente gleich null. $\vec{F}$ ist wirbelfrei in der Ebene, d.h. $rot\ \vec{F} = 0,\ (r \neq 0$ und $z = 0)$. Versuchen Sie dies nachzuweisen. Betrachten Sie die Figure 3. Das Wegintegral von $\vec{F}$ entlang einer Geraden (z.B. γ_1), die radial nach aussen läuft (aber nicht durch den Nullpunkt) verschwindet offenbar, da die Wegrichtung senkrecht zum Feld steht. Diese Linien sind also die „Höhenlinien“ (Linien konstanten Potentials). Die Orthogonaltrajektorien sind Kreise mit konstantem Radius. Das Wegintegral auf einem solchen Kreis entlang γ_2 entspricht der Zunahme des polaren Winkels $\Delta\phi$. Offenbar haben wir das Skalarfeld gefunden, dass die gewünschte Eigenschaft aufweist. Das einzige Problem von ϕ ist, dass nach einmaligem Umlaufen des Ursprungs ein Winkel von 2π akkumuliert wird, so dass der Wert des Wegintegrals über solch einen *geschlossenen* Weg *nicht* null ist! Das Vektorfeld ist daher *global* auf $\mathcal{R}^2$ nicht konservativ. Unterbindet man aber die Möglichkeit geschlossener Wege einmal oder mehrmals um den Ursprung herum, in dem man die Ebene „aufschneidet“, ist das Feld konservativ.

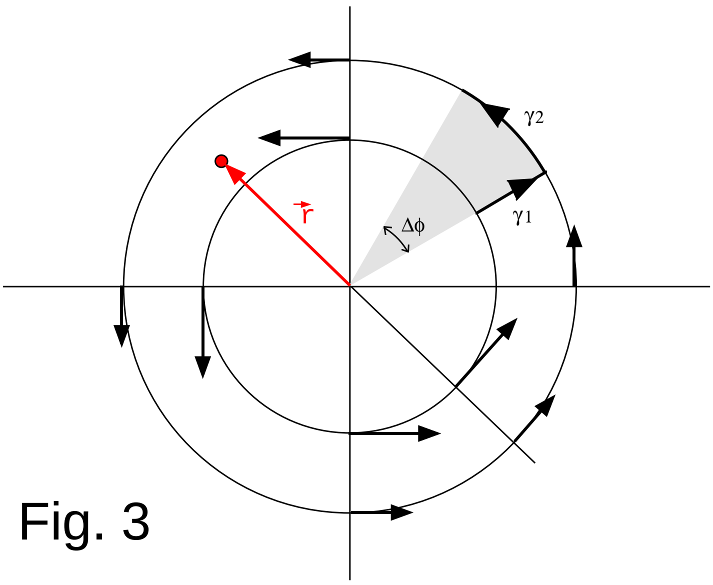

Fig. 3