5 Integralsätze am Beispiel der Gravitation

5.1 Integralsatz von Stokes

Im letzten Kapitel haben wir die Rotation eines Vektorfeldes eingeführt und Linienintegrale betrachtet. Dies legt nahe, den Integralsatz von Stokes hier kurz zu betrachten (weiteres in Physik II). Sei γ ein einfach zusammenhängender Weg (siehe Mathematik) und $\vec{F}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiter sei $A(\gamma)$ eine Fläche, die durch γ berandet ist, dann lautet der Integralsatz von Stokes

$$\iint_{A(\gamma)} rot\vec{F} \cdot d\vec{A} = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} \tag{1}$$

Das linke Integral ist eine Flächenintegral, wobei das Flächenelement $d\vec{A}$ senkrecht auf der Fläche $A(\gamma)$ steht, d.h. $d\vec{A} = \vec{n}dA$ mit $\vec{n}$ dem Einheitsvektor normal zur Fläche an der entsprechenden Stelle. Die Richtung des Normalenvektors ist rechtshändig zum Umlaufsinn von γ gewählt.

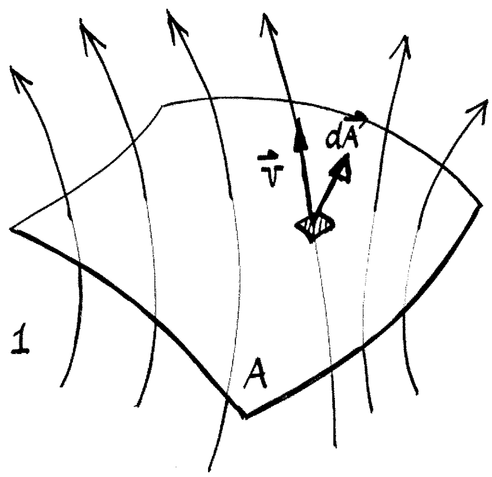


Fig. 1

Flächenintegrale beschreiben in der Physik in der Regel „Flüsse“oder „Ströme“. Sei $\vec{v}$ zum Beispiel das ortsabhängige Geschwindigkeitsfeld eines Flusses, der Wasser mit der Dichte ρ transportiert (siehe Figure 1). Dann ist die gesamte Masse, die pro Zeiteinheit durch einen fest gewählten Querschnitt A fliesst gegeben durch:

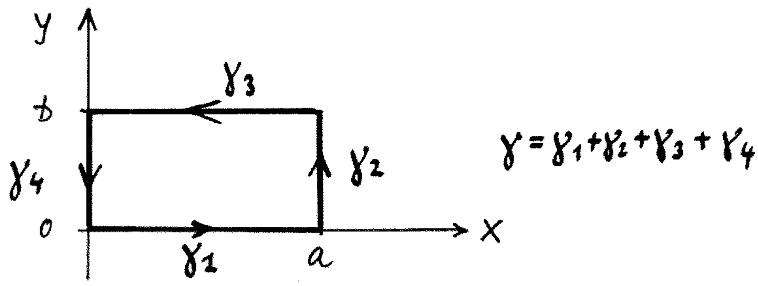
$$\dot{m}(A) = \iint_{A} \rho\vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Im Integranden steht das Skalarprodukt des nach aussen und normal zur Fläche gerichteten Flächenelementes mit dem Geschwindigkeitvektor. Das Produkt berücksichtigt den Sachverhalt, dass die Strömung durch die Fläche geringer ist, wenn die Strömung schief durch die Fläche erfolgt. Ist sie an einer Stelle parallel, dann ist der Beitrag zum Integral dort null.

Zurück zur Stokeschen Gleichung (1). Angenommen das Vektorfeld $\vec{F}$ ist konservativ (jedes geschlossene Wegintegral der Kraft verschwindet), dann ist offensichtlich $rot\,\vec{F} = 0$. Es gilt auch das Umgekehrte: Falls $rot\,\vec{F} = 0$, dann ist $\vec{F}$ konservativ. Diese Aussage ist nicht im Widerspruch zum letzten Kapitel, da wir uns hier auf einfach zusammenhängende Wege beschränken ($\rightarrow$ Mathematik).

Wir illustrieren die Richtigkeit des Stokeschen Satzes nur für ein einfaches Besipiel. Wir betrachten einen geschlossenen Weg in der $x - y$-Ebene gemäss der Abbildung 2. Als Fläche

Fg. 2



wählen wir das ebene ($z = 0$) Rechteck, das durch γ begrenzt wird. Im Flächenintegral erscheint dann nur die z-Komonente der Rotation:

$$\left(rot\,\vec{F}\right)_z = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

und wir erhalten durch partielles Integrieren:

$$\begin{aligned}
\iint_{A(\gamma)} \left(rot\,\vec{F}\right)_z dxdy &= \int_0^b dy \int_0^a \frac{\partial F_2}{\partial x} dx - \int_0^a dx \int_0^b \frac{\partial F_1}{\partial y} dy \\
&= \int_0^b (F_2(a,y) - F_2(0,y))dy \; - \int_0^a (F_1(x,b) - F_1(x,0))dx \\
&= \sum_i \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{s} \\
&= \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}
\end{aligned}$$

Eine interessante Anwendung ist die „Planimetrie“. Das ist die Bestimmung des Flächeninhaltes allein aus der Kenntnis der Randkurve, die die Fläche umschliesst. Wir nehmen an, dass die zu bestimmende Fläche eben ist und in der $x - y$-Ebene liegt. Wir definieren das Vektorfeld als $\vec{F} := (-y, x, 0)$. Dieses Feld entspricht der Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, ist also ein Wirbelfeld. Die Rotation ist $rot\,\vec{F} = (0, 0, 2)$, so dass

$$\iint_A rot\vec{F} \cdot d\vec{A} = 2\,A$$

A auf der rechten Seite der Gleichung ist der Flächeninhalt. Mit dem Satz von Stokes:

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (xdy - ydx)$$

Beispiel: Berechnen Sie die Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und b. Verwenden Sie als Parametrisierung $x = a\,cos(t)$ und $y = b\,sin(t)$, wobei $t = 0..2\pi$. Das Resultat lautet $A = \pi ab$.

Für die Gravitation ist der Integralsatz von Stokes weiter nicht wichtig. Das einzige was Sie sich merken sollten ist, dass die Gravitation konservativ ist, und daher die Rotation des Feldes verschwindet. In der Physik II werden Sie sehen, dass dasselbe auch für das (statische) elektrische Feld $\vec{E}$ gilt, nicht aber für das magnetische Feld. Letzteres ist ein typisches Wirbelfeld.

5.2 Integralsatz von Gauss

Der Integralsatz von Stokes kann als eine Art Erweiterung des partiellen Integrierens aufgefasst werden, analog zu

$$\int_a^b \frac{dF}{dx}\, dx = F(b) - F(a)$$

Dabei wurde ein Integral über einen geschlossenen Weg als Flächenintegral dargestellt. Im Satz von Gauss wir nun in analoger Weise ein Integral über eine geschlossenen *Fläche* auf ein Integral über das eingeschlossene *Volumen* zurückgeführt. Wir wollen folgende Konvention verwenden: K bezeichne den dreidimensionalen Körper (zum Beispiel eine Kugel) und ∂K dessen Berandung (Kugelfläche). Diese Fläche ist geschlossen, d.h. $\partial(\partial K) = 0$. Wiederum bezeichne $d\vec{A}$ das nach aussen gerichtete Flächenelement und dV ein Volumenelement. Der Satz von Gauss lautet:

$$\iint_{\partial K} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_K \left(div\, \vec{F} \right) dV \qquad (2)$$

In dieser Gleichung erscheint ein neuer Differentialoperator, die *Divergenz* des Vektorfeldes:

$$div\, \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Mit dem Nablaoperator können wir die Divergenz auch als Skalarprodukt schreiben: $div\, \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$. Beachten Sie bitte, dass die Divergenz ein Vektorfeld auf ein Skalarfeld abbildet.

Zuerst ein Paar Worte zur Bedeutung der Divergenz. Dazu betrachten wir ein Strömung in einer Dimension (x), z.B. durch eine gerade Röhre mit konstantem Querschnitt A. Wir schneiden in Gedanken ein Stück der Röhre aus. Das Stück zwischen x und $x + \Delta x$. An der Stelle $x + \Delta x$

fliesst die Masse $\rho v(x+\Delta x)A$ pro Zeiteinheit hinaus und am linken Ende x fliesst $\rho v(x)A$ ein. Der Unterschied ist gerade gleich dem Oberflächenintegral $\iint\ \vec{v}\cdot d\vec{A}$. In unserm Fall gleich:

$$\rho A\left\{v(x+\Delta x)-v(x)\right\}\ =\ \rho\int_x^{\Delta x}\frac{dv}{dx}\,(Adx)\ =\ \iiint div(\vec{v})dV$$

Falls immer (unabhängig von der Wahl von x und Δx) gleichviel hinein wie hinausströmt ist offenbar die Divergenz gleich null. Man sagt daher auch, dass die Divergenz ein Mass für die Quellenstärke darstellt. Falls die Divergenz an einer Stelle grösser null ist, nimmt dort der Fluss zu (Quelle). Ist die Divergenz hingegen negativ, dann nimmt der Fluss ab (Senke). Ist die Divergenz gleich null, dann ist der Fluss erhalten, oder wie man sagt *quellenfrei*.

Betrachten wir nochmals den Satz von Stokes, die Gleichung (1). Wir können uns die Fläche als Seifenlamelle vosrtellen, die mittels eines geschlossenen Drahtes gehalten wird. Dieser Draht ist die Berandung der Seifenlamelle. Wir können die Berandung zusammenziehen und erhalten schlussendlich eine geschlossene Seifenblase. Dann ist die Randkurve $\gamma\ =\ 0$ und somit ist die Integration der Rotation eines Vektorfeldes über *jede* geschlossene Fläche gleich null. Mit dem Integralsatz von Gauss:

$$\iint_{\partial K} rot(\vec{F})\cdot d\vec{A}\ =\ \iiint_K div\,rot(\vec{F})\,dV\ =\ 0$$

für alle K. Daraus schliesst man, dass die Rotation eines Vektorfeldes immer quellenfrei ist:

$$div\,rot(\vec{F})\ =\ 0$$

Beispiel: Leiten Sie das her, indem Sie die Definition der Rotation im kartesischen Koordinatensystem verwenden.

5.3 Anwenden auf die Gravitation

Das Gravitationsfeld $\vec{g}$ für einen Massenpunkt m im Ursprung des Koordinatensystems wurde in der Vorlesung behandelt und lautet:

$$\vec{g}\ =\ -Gm\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Zunächst gilt $rot\,\vec{g}\ =\ 0$, aber es gilt auch $div\,\vec{g}\ =\ 0$, falls $|\vec{x}|\neq 0$. Ersteres haben wir bereits nachgewiesen, indem wir gezeigt haben, dass ein Potential $V(\vec{x})$ existiert mit der Eigenschaft $\vec{g}=-grad(V)$. Dass $div(\vec{g})=0$ ist, sollten Sie selbst versuchen nachzuweisen.

Sei K eine Kugel um den Ursprung mit Radius r. Wir berechnen das Oberflächenintegral des Feldes $\vec{g}$ über ∂K:

$$\iint_{\partial K}\vec{g}\cdot d\vec{A}\ =\ -4\pi Gm$$

Interessanterweise ist dieses Integral von null verschieden, obwohl $div(\vec{g}) = 0$ und mit dem Satz von Gauss:

$$\iiint_K \vec{\nabla} \cdot \vec{g}\, dV = -4\pi G m$$

Offenbar liegt dies an der Singularität des Feldes im Nullpunkt. Das Volumenintegral gibt keinen Beitrag, da die Divergenz von $\vec{g}$ gleich null ist, ausser im Nullpunkt. Es ist die Punktmasse am Koordinatenursprung, die als Quelle des Feldes betrachtet werden kann. Das Gewicht der Singularität ist gerade so, dass das Volumenintegral über die Singularität einen endlichen Wert ergibt, der proportional zur Masse ist. Für die Divergenz von $\vec{g}$ können wir auch schreiben:

$$div(\vec{g}) = -4\pi G m \delta^3(\vec{x})$$

Die neue Funktion $\delta^3(\vec{x})$ ist überall gleich null ausser im Ursprung. Dort ist sie singulär mit einem Gewicht, so dass:

$$\iiint_V \delta^3(\vec{x}) dV = 1$$

falls der Nullpunkt in V liegt. Die *Deltafunktion* $\delta^3(\,)$ hat die Dimension Volumen^{-1}, so dass wir $m\delta^3(\vec{x})$ als die Massendichte der Punktmasse ansehen können. Nun ist auch klar, wie wir diese Lösung auf ein System von Massenpunkten zu verallgemeinern haben. Sei m_i die i-te Masse, die an der Stelle $\vec{x}_i$ liegt. Die Gesamtmassendichte ist dann:

$$\rho(\vec{x}) = \sum_i m_i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

Da sich das Gesamtfeld als Superposition der Teilfelder ergibt, gilt auch:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = div(\vec{g}) = -4\pi G \rho(\vec{x})}$$

Diese letzte Gleichung zusammen mit

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{g} = rot(\vec{g}) = 0}$$

können als die fundamentalen Feldgleichungen der (klassischen) Gravitation angesehen werden. Sie sagen in Worten folgendes aus:
Das Gravitationsfeld ist *wirbelfrei*, und die Massendichte ist die *Quelle* des Feldes. Im freien Raum (also ausserhalb eines Körpers) ist das Feld quellenfrei.

Die beiden letzten Gleichungen sind absolut identisch zu den Gleichungen der *Elektrostatik*, die zur Beschreibung zeitunabhängiger elektrischer Felder Gültigkeit haben: Das elektrische

Feld ist wirbelfrei und ihre Quellen sind die Ladungsdichten. Der einzige Unterschied besteht darin, dass Ladungen mit beiden Vorzeichen vorkommen können, während für die Gravitation die Masse $m \geq 0$.

Da das Gravitationsfeld wirbelfrei ist, existiert ein Potential V, so dass $\vec{g} = -grad(V)$. Und daraus:

$$4\pi G\rho = -div(\vec{g}) = div\, grad(V) = \Delta V$$

Hierbei ist Δ der Laplaceoperator: $\Delta := \vec{\nabla}^2$:

$$\Delta V = \vec{\nabla}^2 V = \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$$

Daraus ergibt sich die sogenante Poissonsche Gleichung:

$$\Delta V(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x})$$

<u>Beispiel</u>: Die Massendichte sei nur eine Funktion von x, und zwar $\rho(x) = \rho_0$ für $|x| \leq a$. Wie sieht das Gravitationspotential und wie das Feld aus?
Bestimmen Sie das Gravitationsfeld für einen unendlichen langen zylindrischen Stab.