

Physik I

nach H. Rudin

Revidierte Version von L. Mohler und E. Meyer

2005

Inhaltsverzeichnis

I	Mechanik	9
1	Messen und Internationales Einheitssystem (SI)	10
2	Mechanik des Massenpunktes	16
2.1	Kinematik	16
2.1.1	Geradlinige Bewegung	16
2.1.2	Krummlinige Bewegung	18
2.1.2.1	Die Bahngeschwindigkeit als Vektor $\vec{v}(t)$	18
2.1.2.2	Die Beschleunigung als Vektor $\vec{a}(t)$	18
2.1.2.3	Gleichförmige Kreisbewegung	19
2.1.2.4	Relativbewegung; Galileitransformation	20
2.2	Dynamik des Massenpunktes	21
2.2.1	Die Newton'schen Axiome	21
2.2.2	Anwendung des Aktionsprinzips auf einfache Bewegungen	22
2.2.2.1	Gleichförmig beschleunigte, geradlinige Bewegung; Freier Fall	22
2.2.2.2	Schiefer Wurf	24
2.2.2.3	Gleichförmige Kreisbewegung; Zentripetalkraft	25
2.2.2.4	Geradlinige harmonische Schwingung	26
2.3	Arbeit, kinetische Energie, potentielle Energie, Leistung	29
2.3.1	Hubarbeit	30
2.3.2	Spannarbeit	30
2.3.3	Beschleunigungsarbeit	31
2.4	Konservatives Kraftfeld und potentielle Energie	32
2.4.1	Potentialfunktion und Bewegung	34
2.5	Drehmoment, Drall und Drallsatz für einen Massenpunkt	35
3	Mechanik eines Systems von Massenpunkten	37
3.1	Innere und äussere Kräfte; Impuls-Erhaltungssatz	37
3.2	Schwerpunkt. Schwerpunktsatz	38
3.3	Stossprozesse zwischen zwei Massenpunkten	39
3.3.1	Stösse in einer Dimension	39
3.3.1.1	Elastischer Stoss	40
3.3.1.2	Vollständig inelastischer Stoss	40
3.3.2	Nicht zentraler, elastischer Stoss	42
3.4	Bewegungsgleichung der Rakete	43
4	Gravitation	44
4.1	Gravitationsfeld und Gravitationspotential eines Massen-Punktes	45
4.2	Gravitationsfeld und Gravitationspotential der homogenen Kugel	46
4.3	Planetenbewegung (Keplerproblem)	48

4.4	Zweikörperproblem und reduzierte Masse	49
5	Beschleunigte Bezugssysteme; Trägheitskräfte	52
5.1	Gleichförmig geradlinig beschleunigtes System	52
5.2	Rotierendes Bezugssystem; Zentrifugalkraft und Corioliskraft	53
6	Mechanik des starren Körpers	57
6.1	Drall und Drallsatz für ein System von Massenpunkten	58
6.2	Rotation des starren Körpers um eine raumfeste Drehachse	59
6.2.1	Berechnung von Trägheitsmomenten. Satz von Steiner	60
6.2.2	Starrer Rotator	61
6.2.3	Physikalisches Pendel	62
6.3	Energie des starren Körpers	63
6.4	Gleichgewicht starrer Körper	64
6.5	Reibungskräfte	66
6.5.1	Haftreibung	66
6.5.2	Gleitreibung	66
6.6	Rollendes Rad; momentane Drehachse	67
6.7	Trägheitsellipsoid. Freie Achsen	68
6.8	Kreisel	69
6.8.1	Kräftefreier, symmetrischer Kreisel	69
6.8.2	Kreisel unter Einwirkung eines Drehmoments	70
7	Elastizität fester Körper	72
8	Hydromechanik (Mechanik der Flüssigkeiten und Gase)	75
8.1	Hydrostatik idealer Flüssigkeiten	75
8.2	Statik realer Flüssigkeiten; Oberflächen-Spannung	79
8.3	Hydrodynamik der idealen Flüssigkeit	83
8.3.1	Die stationäre Strömung	83
8.4	Hydrodynamik der realen Flüssigkeit	86
8.4.1	Die laminare Strömung	86
8.4.2	Prandtl'sche Grenzschicht und Reynoldszahl	88
8.4.3	Die turbulente Strömung	89
8.4.4	Merkmale der Strömungsarten	90
9	Schwingungen und Wellen	91
9.1	Der gedämpfte, freie Oszillator	91
9.2	Die erzwungene Schwingung	92
9.3	Überlagerung von Schwingungen	95
9.3.1	Das Zeigerdiagramm	95
9.3.2	Superposition von zwei Schwingungen gleicher Frequenz	95
9.3.3	Superposition von zwei Schwingungen gleicher Amplitude und verschiedener Frequenz. Die Schwebung	95
9.3.4	Gekoppelte Pendel	96
9.3.5	Fourier-Analyse periodischer Vorgänge	97
9.4	Wellen	100
9.4.1	Die Seilwelle	100
9.4.2	Harmonische Wellen	101
9.4.3	Stehende harmonische Wellen	103

9.4.4 Schallwellen	103
------------------------------	-----

II Wärmelehre 107

1 Ideales Gas 109

1.1 Kinetische Theorie	109
1.2 Die Maxwell-Boltzmann'sche Energieverteilung	110

2 Temperaturmessung 113

3 Transportphänomene 114

3.1 Mittlere freie Weglänge	114
3.2 Zufallsweg	115
3.3 Diffusion; Fick'sches Gesetz	116
3.4 Wärmeleitung	116
3.5 Brown'sche Molekularbewegung	116

4 Irreversibler Prozess. Entropie 118

5 Phänomenologische Thermodynamik 120

5.1 Das thermodynamische System	120
5.2 Spezifische Wärmekapazität	121
5.3 Zustandsgrößen	121
5.4 Nullter und Erster Hauptsatz	122
5.5 Anwendung des Ersten Hauptsatzes auf das ideale Gas	122
5.5.1 Die molaren Wärmekapazitäten C_V und C_P des idealen Gases	124
5.5.2 Isotherme Expansion des idealen Gases	125
5.5.3 Adiabatische Zustandsänderung	125
5.5.4 Der Carnot-Kreisprozess mit dem idealen Gas	126
5.6 Der Zweite Hauptsatz	126
5.6.1 Der Carnot-Prozess mit einer beliebigen Substanz	127
5.6.2 Carnot-Prozess und thermodynamische Temperaturskala	127
5.6.3 Die Entropie S	128
5.7 Aggregatzustände	130
5.7.1 Koexistenz von Flüssigkeit und Dampf	130
5.7.2 Zustandsfläche	131
5.7.3 Die Van der Waals'sche Zustandsgleichung	131
5.7.4 Der Joule-Thomson-Prozess	132

Vorbemerkungen

Die Vorlesung „Einführung in die Physik“ ist zweisemestrig und wendet sich an Studierende mit Hauptfach Physik, Mathematik, Chemie, Nanowissenschaften, Erdwissenschaften oder Astronomie, sowie an Lehramtskandidaten. Sie ist in klassischer Manier aufgebaut und enthält die Kapitel:

- I. Mechanik
- II. Wärmelehre
- III. Elektrizitätslehre
- IV. Optik
- V. Einblick in die moderne Physik

Wir gehen davon aus, dass alle Hörer dieser Vorlesung naturwissenschaftlich interessiert sind. In Anbetracht der zentralen Stellung der Physik innerhalb der Naturwissenschaften ist es unser Hauptanliegen, Verständnis für die grundlegenden physikalischen Prinzipien zu wecken. Da quantitative Aussagen über Naturvorgänge gemacht werden sollen, ist es unerlässlich, die auftretenden Grössen und Begriffe exakt zu definieren und die zwischen ihnen geltenden Gesetzmässigkeiten in mathematischer Sprache zu formulieren.

Zur Mathematik als Hilfsmittel:

Es werden keine mathematischen Kenntnisse vorausgesetzt, welche über den Mittelschulstoff hinausgehen; die Differentiations- und Integrationsregeln für elementare Funktionen einer Variablen und elementare Vektorrechnung sollten geläufig sein. Gelegentlich wird es nötig sein, zur ökonomischen Behandlung physikalischer Sachverhalte weitergehende mathematische Begriffe einzuführen. Diese Begriffe werden aber immer entweder in der Vorlesung oder in den die Vorlesung begleitenden Übungen explizit erklärt.

Jene Hörer, welche mathematisch weniger interessiert sind oder sich mathematisch für weniger begabt halten, sollten nicht verzagen, denn die Mathematik ist hier lediglich ein Hilfsmittel und soll nicht im Vordergrund stehen. Das Ziel der Vorlesung besteht vielmehr darin, dem Studierenden etwas von der Faszination der Physik und der physikalischen Forschung zu vermitteln und das Verständnis für physikalische Vorgänge und Zusammenhänge zu schulen. Dieses Ziel kann auch ohne streng formale Behandlung durchaus erreicht werden.

Für Studierende der Physik oder der Mathematik im Hauptfach ist es jedoch ausserordentlich wichtig, sich früh mit den mathematischen Methoden vertraut zu machen. Diese Gruppe von Studenten wird in den Übungen zur Vorlesung zusätzlich entsprechende Anregungen finden.

Zur Vorlesung:

Der Tatsache, dass die Physik eine Erfahrungswissenschaft ist, wird diese Vorlesung dadurch gerecht, dass viele grundlegende Phänomene an Hand von Experimenten demonstriert werden. Diese

Schauversuche haben an unserem Institut eine lange Tradition und verleihen der Lehrveranstaltung ihr spezielles Gepräge; vor allem aber bieten sie dem aufmerksamen Zuschauer Gelegenheit, eine Fülle von experimentellen Techniken kennen zu lernen und den Blick für das Wesentliche zu schärfen.

Zum Selbststudium:

Der vorliegende Leitfaden beschreibt in knapper Form genau den in der Vorlesung behandelten Stoff, so dass sich der Hörer voll auf die Lektion konzentrieren kann und sich nicht viele Notizen machen muss. Für ein erfolgreiches Studium ist es jedoch unbedingt notwendig, zu Hause den aufgenommenen Stoff regelmässig zu verarbeiten und an Hand eines Lehrbuches zu vertiefen. Der Leitfaden wird zwar eine gute Hilfe sein, er ersetzt aber auf keinen Fall das Lehrbuch!

Selbstverständlich sollte der gelernte Stoff durch aktive und selbständige Teilnahme an den Übungen gefestigt werden.

Zum Selbststudium und als Ergänzung zur Vorlesung empfehlen wir folgende Lehrbücher:

P. A. Tipler: „Physik“
Spektrum Akademischer Verlag

C. Gerthsen, H. Vogel: „Physik“
Springer Verlag

W. Demtröder: „Experimentalphysik 1-3“
Springer Verlag

M. Alonso, E. J. Finn: „Physik“
Addison-Weseley

Bergman-Schäfer: „Mechanik, Akustik, Wärme“
W. de Gruyter

Zur weiteren Vertiefung des physikalischen Verständnisses empfehlen wir als reizvolle Lektüre die „Berkeley Physik Kurse“, sowie die „Feynman Lectures“.

Die Methoden der physikalischen Forschung

Physik kann als „die Lehre von den Wechselwirkungen zwischen Körpern“ bezeichnet werden. Es ist ihr Ziel, die Erscheinungsvielfalt von Vorgängen in der Natur auf möglichst wenige, gesetzmässige Beziehungen zwischen geeignet zu definierenden Grössen zurückzuführen. Die **Experimentalphysik** ruft mit ihren Versuchsapparaturen bestimmte Erscheinungen hervor und verfolgt messend deren Ablauf. Die **Theoretische Physik** konstruiert mit Hilfe von Modellvorstellungen und mathematischen Operationen ein Bild des Vorgangs und sucht die funktionellen Zusammenhänge in Form von Gleichungen darzustellen. Eine gute Theorie kann Ergebnisse neuer, noch nicht durchgeführter Experimente voraussagen. Jede Theorie ist „vorläufig“ und muss laufend im Lichte neuer experimenteller Fakten überprüft und falls nötig modifiziert oder sogar als unrichtig erkannt werden.

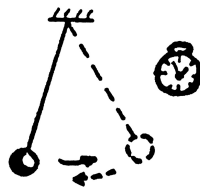
Sicher ist die Grundlage alles physikalischen Arbeitens die Beobachtung, oder eben das Experiment. Das Laborexperiment wird treffend als „gezielte Frage an die Natur“ bezeichnet, weil störende Nebenerscheinungen möglichst vermieden werden und so die wesentlichen Zusammenhänge hervortreten können. Das wichtigste Merkmal von jedem Experiment ist seine Reproduzierbarkeit innerhalb der erreichten Messgenauigkeit.

Typische Vorlesungs-Experimente

Experimente, wie sie im Laufe dieser Vorlesung gezeigt werden, sind in ihrem Charakter unterschiedlich. Wir schauen uns einige willkürlich herausgegriffene, in ihrer Art typische Beispiele an (natürlich ohne schon jetzt auf die Physik davon einzugehen).

Einfache, quantitative Messungen:

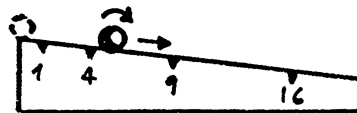
Pendelfrequenz:



Fallzeit:

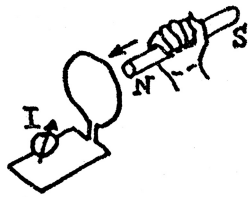


Fallrinne nach Galilei (Padua, anno 1592): geniale Messung des Fallgesetzes ohne Uhr.

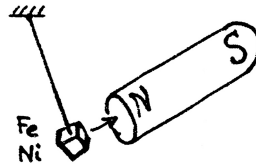


Phänomene qualitativ demonstriert:

Elektromagnetische Induktion:

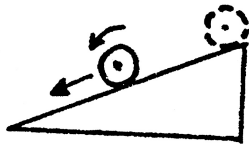


Curie Temperatur:
(magnetisch oder nicht -
eine Frage der Temperatur)



Verblüffende Erscheinungen:

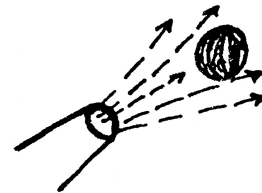
Rollende Zylinder:
gleich schwer und gross,
ungleich schnell.



Aufgehängte Kugel:
reisst der dicke oder der
dünne Faden beim Ziehen?

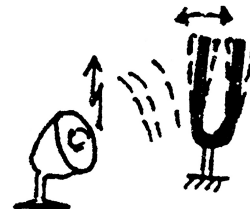


Ball in Luftstrom:
warum fällt er nicht
runter?



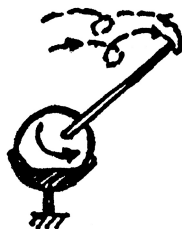
Spezielle Beobachtungsmethode:

Stimmgabel mit stroboskopischer Beleuchtung:

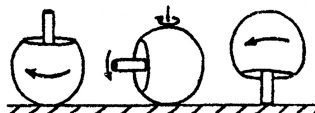


Komplizierte Bewegungen:

Kugelkreisel:

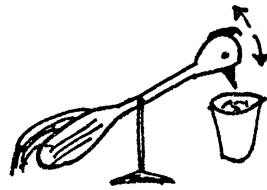


Tip-Top Kreisel:



Scheinbar verschiedene Vorgänge mit gemeinsamer Grundlage:

Nickender Vogel:



Thermobil-Motor:



Teil I
Mechanik

Kapitel 1

Messen und Internationales Einheitssystem (SI)

Grundlage für die Beschreibung von Vorgängen in der Natur ist die Grössenlehre. **Physikalische Grössen** sind aus der Erfahrung durch Abstraktion gewonnene Begriffe. Sie beschreiben messbare Eigenschaften. Jeder spezielle Wert einer Grösse kann durch das Produkt

$$\text{Grössenwert} = \text{Masszahl} \cdot \text{Einheit}$$

ausgedrückt werden. Die Masszahl gibt an, wievielfach die Einheit in der Grösse enthalten ist. Ihrem Wesen nach gibt es verschiedene Arten physikalischer Grössen, sie unterscheiden sich durch die Zahl der Angaben, welche zu ihrer eindeutigen Bestimmung notwendig sind. Wir erwähnen hier **Skalare** und **Vektoren**.

Skalare sind durch ihren **Betrag** (Masszahl und Einheit) festgelegt.

Vektoren sind durch **Betrag** und **Richtung** bestimmt.

Beispiele skalarer Grössen: Zeit, Masse, Temperatur. Beispiele vektorieller Grössen: Kraft, Geschwindigkeit.

Physikalische Grössen sind durch Definitionsgleichungen und physikalische Gesetzmässigkeiten miteinander verknüpft, so dass es genügt, eine kleine Anzahl unabhängiger **Basisgrössen** festzulegen, aus denen sich die **abgeleiteten Grössen** herleiten lassen.

Wir verwenden das Internationale Einheitensystem (SI), welches auf sieben Basisgrössen beruht:

Basisgrösse	Einheit	(Symbol)
Länge	Meter	(m)
Zeit	Sekunde	(s)
Masse	Kilogramm	(kg)
Temperatur	Kelvin	(K)
el. Stromstärke	Ampere	(A)
Stoffmenge	Mol	(mol)
Lichtstärke	Candela	(cd)

Alle anderen Grössen sind abgeleitete Grössen und setzen sich aus Basisgrössen zusammen.

Unter der **Dimension** einer Grösse versteht man den Ausdruck, der angibt, mit welcher Potenz die Basisgrössen in die Einheit der Grösse eingehen. Beispiel: die Geschwindigkeit besitzt die Dimension **Länge/Zeit**, abgekürzt $[LT^{-1}]$ (ihre Einheit ist m/s).

Der Dimensionsbegriff ist sehr nützlich zur Kontrolle der Richtigkeit physikalischer Formeln: in Summen dürfen notwendigerweise nur Summanden gleicher Dimension vorkommen (nicht „Äpfel“ und „Birnen“ addieren). Die beiden Seiten einer Gleichung müssen dimensionsgleich sein. Der Quotient von Grössen gleicher Dimension ergibt eine dimensionslose Grösse (eine reine Zahl).

In der Mechanik benötigen wir lediglich die Basiseinheiten **Länge, Zeit** und **Masse**. Diese Basiseinheiten sind im SI-System folgendermassen definiert:

Meter

Der Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum in $1/299'792'458$ Sekunden durchläuft.

Sekunde

1 Sekunde ist das $9'192'631'770$ fache der Periodendauer für einen bestimmten Übergang in ^{133}Cs (Atom-Uhr).

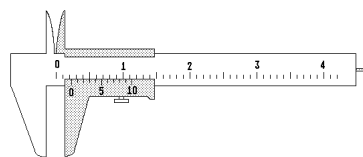
Kilogramm

Das Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogramm-Prototyps (90% Pt, 10% Ir-Zylinder, in Sèvres bei Paris aufbewahrt).

Längenmessung:

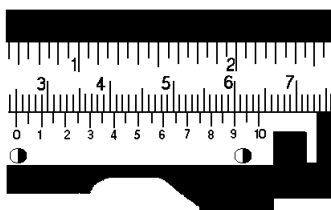
Die Messung einer Länge erfolgt häufig durch Vergleich mit einem durch Striche eingeteilten Massstab, der seinerseits mit dem Längenstandart geeicht wurde. Klassische, technische Instrumente zur Längenmessung sind

Schublehre

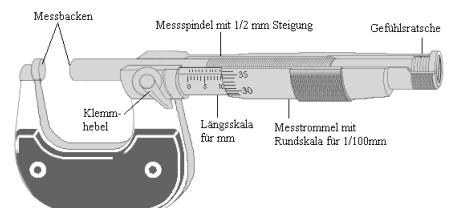


mit:
und

Nonius



Mikrometerschraube



Wesentlich höhere Messgenauigkeiten können z.B. mit Hilfe **optischer Interferenzmethoden** erreicht werden (s. Kapitel V).

Die direkte Messung durch Vergleich mit der Standardlänge ist nicht immer anwendbar, so dass indirekte Methoden verwendet werden müssen. Beispiele sind die **Triangulation** in der Geländevermessung und die Bestimmung der Entfernung von Fixsternen auf Grund ihrer **Parallaxe** (d.h. des Winkels, unter dem der Radius der Erdbahn um die Sonne vom Stern aus erscheint). Indirekte Messungen stützen sich immer auf gewisse Voraussetzungen; im Falle der Triangulation ist die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie und die geradlinige Ausbreitung des Lichtes vorausgesetzt.

Winkelmessung:

Das wichtigste Instrument zur Winkelmessung ist der **Theodolit**, im Wesentlichen ein Fernrohr in Verbindung mit einem horizontal und einem vertikal gelagerten Teilkreis.

Der **ebene Winkel** ist definiert als Verhältnis von zugehöriger Kreisbogenlänge und Kreisradius, ist also eine dimensionslose Grösse. Ihre Einheit ist der **Radian** (rad). 1 Vollwinkel = $2 \cdot \pi$ rad (= 360°)

Der **Raumwinkel** ist definiert als Quotient der von ihm aus einer Kugel herausgeschnittenen Fläche und dem Quadrat des Kugelradius. Die Einheit heisst **Steradian** (sr). 1 voller Raumwinkel misst $4 \cdot \pi$ sr

Zeitmessung:

Eine stets zugriffbereite Zeitskala wird normalerweise mit Uhren erzeugt, d.h. mit Hilfe von Geräten, die einen zeitgebenden Oszillator enthalten. Gebräuchliche Oszillatoren und zugehörige Frequenzbereiche (Frequenz = Anzahl Schwingungen pro Sekunde; Einheit ist das Hertz (Hz), $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$) sind:

Masse + Feder	2 bis 5 Hz
Schwependel	ca. 1/2 Hz
Stimmgabel	bis 360 Hz
Quarzkristal	32 kHz bis 10 MHz
Atom, Molekül	1 GHz bis 10 GHz

Für eine kommerzielle Cs-Uhr ist die Frequenzstabilität besser als $1 : 10^{13}$

Zur Messung geologischer Zeiten (z.B. Altersbestimmung von Meteoriten) bedient man sich kernphysikalischer Methoden (Kapitel VI).

Massenbestimmung:

Massebestimmungen im Bereich von 10^{-11} bis 10^{+6} werden durch Vergleichswägung mit Gebrauchsnormalen, die ein geeignetes Vielfaches des Kilogrammprototyps ausmachen, ausgeführt.

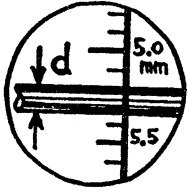
Messfehler:

Grundsätzlich ist jede Messung mit einem Fehler behaftet. Die Ursache des Fehlers kann sowohl statistischer Art (zufällig) als auch systematischer Art (z.B. falscher Skalennullpunkt) sein. Zu einem quantitativen Messergebnis muss immer eine Fehlerschranke angegeben werden. Eine Anleitung zur Fehlerrechnung wird im Praktikum für Anfänger abgegeben.

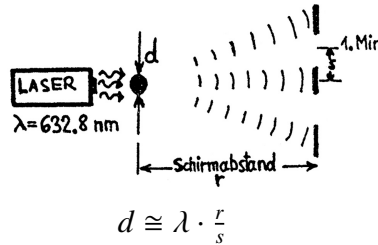
Demonstrationen:

1. Messung der Dicke eines Haares

a) Mit Mikroskop und Vergleichsmassstab

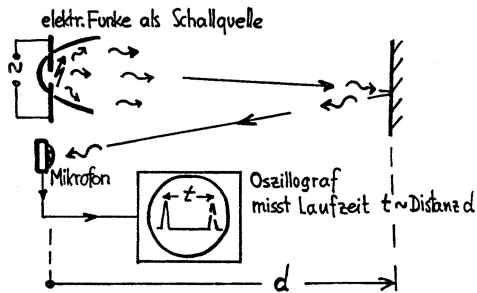


b) Durch Beugung von Licht (indirekte Methode)



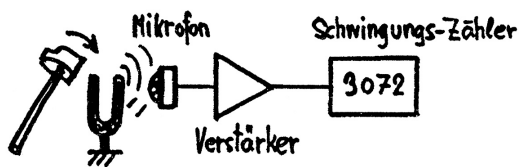
Merke: Beugungsexperimente ergeben Strukturinformation.

2. Distanzmessung mittels Echolot: Eichung mit bekannter Distanz.



3. Messung der persönlichen Reaktionszeit

4. Stimmgabel als Uhr (zwei Ereignisse als Start/Stop-Signal)



5. Zerfallsrate von ^{137}Cs (Statistische Ereignisse)

6. Gewichtssatz mit Normalkilogramm vergleichen

Größenordnungen in der Natur:

Ausdehnung (m)			Objekt	Masse (kg)	Gebiet
1 fm	10^{-15}	---	Atomkerne	10^{-27}	Kern- und Teilchenphysik
0.1 nm	10^{-10}	---	Atome	10^{-25}	Atom- und Festkörperphysik
$10 \mu\text{m}$	10^{-5}	---	Biologische Zellen	10^{-14}	Biophysik
1 m	1	---	Mensch	10^2	Klassische Physik
100 km	10^5	---	Grosslandschaft		Geophysik
	$\sim 10^7$	-	Erde	$6 \cdot 10^{24}$	
10^{11} m	10^{10}	---	Erdbahnradius Grosse Sterne	10^{30}	
10^{16} m \cong 1 LJ	10^{15}	---	Sternabstände		Astrophysik
10^{21} m \cong 10^5 LJ	10^{20}	---	Sternensysteme	10^{41}	Kosmologie
10^{26} m \cong 10^{10} LJ	10^{25}	---	Universum	10^{53}	
			↓ m		↓ kg

Längenbereich: ca. 40 Größenordnungen

Massenbereich: ca. 80 Größenordnungen

Zeitskala (s):

10^{-23} s	---	Lebensdauer der instabilen Partikel (Resonanzteilchen)
10^{-18} s	---	Lebensdauer angeregter Atomkerne
10^{-13} s	---	Periode von Molekülschwingungen
10^{-8} s	---	Lebensdauer angeregter Atome
10^{-3} s	---	z.B. Dauer chemischer Explosionen
$3 \cdot 10^2$ s ($\cong 5$ min)	---	rasche Zellteilung
$3 \cdot 10^7$ s ($\cong 1$ a)	---	Umlaufzeit der Erde um die Sonne
$3 \cdot 10^{12}$ s ($\cong 10^5$ a)	---	Alter des homo sapiens
$3 \cdot 10^{17}$ s ($\cong 10^{10}$ a)	---	Alter des Universums
		↓ s

Zeitbereich: ca. 40 Grössenordnungen

Kapitel 2

Mechanik des Massenpunktes

Der Massenpunkt ist die Abstraktion eines wirklichen Körpers, dessen Ausdehnung verschwindend klein ist, dessen Masse aber endlich ist. Seine Lage im Raum ist durch die Angabe der drei Ortskoordinaten vollständig festgelegt, er besitzt somit drei **Freiheitsgrade** (Translations-Freiheitsgrade); im Gegensatz zu wirklichen Körpern, welche zusätzlich noch Rotationsfreiheitsgrade haben.

2.1 Kinematik

Die Kinematik ist die Lehre von der Beschreibung der Bewegung eines Körpers. Sie enthält keine Naturgesetze und ist eigentlich ein Zweig der Geometrie. Wenn wir eine Bewegung beschreiben, so wollen wir dies von einem bestimmten **Bezugssystem** aus tun. Häufig ist das Labor das Bezugssystem, d.h. der im Labor ruhende Beobachter macht seine Messungen bezogen auf ein Koordinatensystem, welches mit dem Labor fest verbunden ist.

2.1.1 Geradlinige Bewegung

Wir denken uns einen Massenpunkt, der sich längs einer geraden Linie bewegt, die wir als x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems auffassen wollen. Zu jedem Zeitpunkt t befindet sich der Massenpunkt an einem bestimmten Ort x , so dass die Bewegung durch eine stetige Funktion $x(t)$ eindeutig charakterisiert wird (1-dimensionale Bewegung).

Geschwindigkeit $v(t)$:

Unter der Geschwindigkeit $v(t)$ verstehen wir den Wert der Ableitung von $x(t)$ nach der Zeit t , also

$$v(t) = dx/dt, \quad \text{Dimension: } (L/T), \quad \text{Einheit: } m/s.$$

Ist $v(t)$ konstant, handelt es sich um eine **gleichförmige, geradlinige Bewegung**. Ändert sich jedoch die Geschwindigkeit, so handelt es sich um eine **geradlinige, beschleunigte Bewegung**.

Beschleunigung $a(t)$:

Unter der Beschleunigung verstehen wir die Ableitung von der Geschwindigkeit $v(t)$ nach der Zeit, also

$$a(t) = dv/dt, \quad \text{Dimension: } (L/T^2), \quad \text{Einheit: } m/s^2.$$

und somit auch

$$a(t) = d^2x/dt^2.$$

Aus diesen Definitionen folgt, dass $v(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$ und $x(t)$ eine Stammfunktion von $v(t)$ ist. Wir können also schreiben:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t) \cdot dt \text{ und}$$

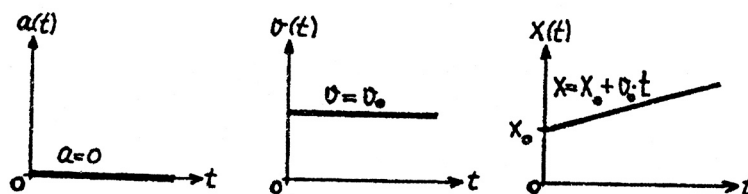
$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t) \cdot dt.$$

$v(0)$ und $x(0)$ sind die Geschwindigkeit, beziehungsweise der Ort des Massenpunktes zur Zeit $t = 0$, die so genannten **Anfangsbedingungen**. Oder anders ausgedrückt: Die bei der Integration auftretenden Integrationskonstanten werden durch die physikalischen Anfangsbedingungen festgelegt. So ergibt sich für die

Gleichförmige, geradlinige Bewegung: mit $a = 0$, Anfangsort x_0 und konstanter Geschwindigkeit v_0

$$v(t) = v_0,$$

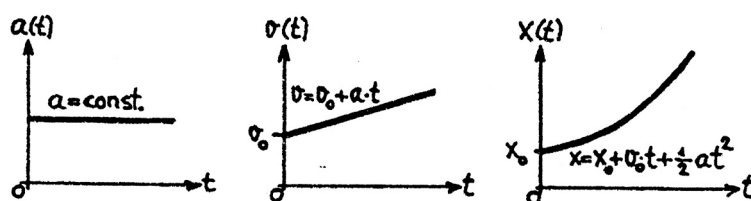
$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 \cdot dt, \text{ oder } x(t) = x_0 + v_0 \cdot t.$$



Für die **gleichförmig beschleunigte, geradlinige Bewegung:** mit konstanter Beschleunigung a , Anfangsort x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 ,

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a \cdot dt \text{ oder } \underline{(1) \quad v(t) = v_0 + a \cdot t,}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a \cdot t) \text{ oder } \underline{(2) \quad x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2.}$$



2.1.2 Krummlinige Bewegung

Betrachten wir nun einen Massenpunkt, der sich entlang einer beliebigen Linie im dreidimensionalen Raum bewegt, so müssen wir zur Beschreibung der Bewegung für jede Zeit t die drei Ortskoordinaten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ angeben. Eine ökonomische Schreibweise für die Bewegung erreichen wir mit Hilfe des Ortsvektors $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, der zu jeder Zeit den Verbindungsvektor vom Koordinatenursprung zum Massenpunkt darstellt.

2.1.2.1 Die Bahngeschwindigkeit als Vektor $\vec{v}(t)$

Zur Zeit t befindet sich der Massenpunkt am Ort $\vec{r}(t)$, zu einem um Δt späteren Zeitpunkt am Ort

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta \vec{r}$$

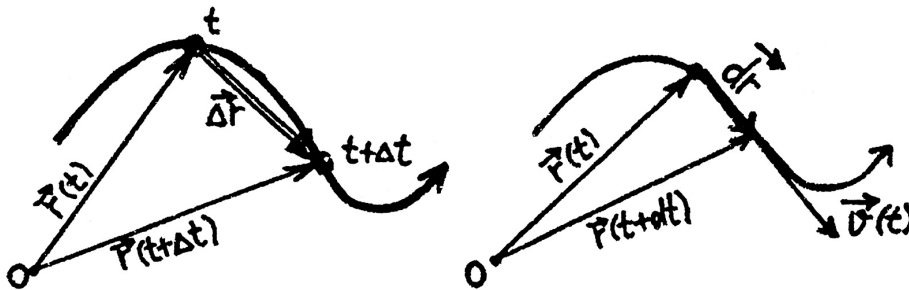
Für $\Delta t \rightarrow 0$ nimmt der Differenzvektor $\Delta \vec{r}$ die Richtung der Tangente zur Bahnkurve an der Stelle $\vec{r}(t)$ an. Der Betrag $|\Delta \vec{r}|$ ist der Wegzuwachs während der kurzen Zeit Δt , gemessen entlang der Bahnkurve. Wir definieren nun die Geschwindigkeit als den Vektor

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)) / \Delta t \quad \text{oder} \quad \vec{v}(t) = d\vec{r}/dt,$$

d.h. während der Zeit dt ändert sich der Ortsvektor um $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$. Wenn man den obigen Limes in Komponenten ausschreibt, ergibt sich sofort

$$\vec{v}(t) = (dx/dt, dy/dt, dz/dt).$$

Man erhält also die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors, indem man die Komponenten des Ortsvektors nach der Zeit ableitet.

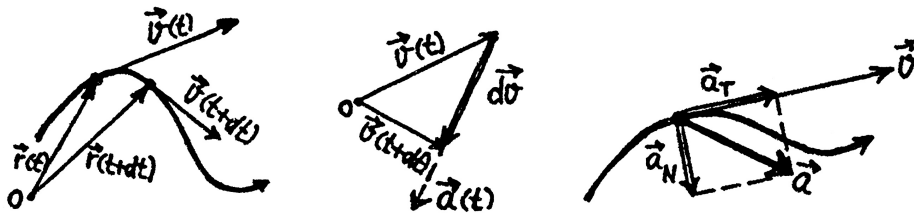


2.1.2.2 Die Beschleunigung als Vektor $\vec{a}(t)$

Durch Differentiation des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$ nach der Zeit t erhält man dann die Beschleunigung $\vec{a}(t)$, also

$$\vec{a}(t) = d\vec{v}/dt \quad \text{oder} \quad \vec{a}(t) = (d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2),$$

d.h. während der Zeit dt ändert die Geschwindigkeit um $d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt$. Wenn die Richtung der Beschleunigung \vec{a} nicht mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammenfällt, wird die Bahn gekrümmt. Die Normalkomponente von \vec{a} bezüglich \vec{v} erzeugt die Krümmung, die Parallelkomponente ruft lediglich eine Betragsänderung von \vec{v} hervor.



Ein wichtiger Spezialfall einer krummlinigen Bewegung ist die

2.1.2.3 Gleichförmige Kreisbewegung

In diesem Fall läuft der Massenpunkt mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag v auf einer Kreisbahn, so dass die Zeit T für einen vollen Umlauf

$$T = 2 \cdot \pi \cdot r / v$$

ist. Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ bildet mit der x-Achse den Winkel φ , der linear mit der Zeit anwächst (s. Figur). In Polarkoordinaten (r, φ) lautet die Bewegung

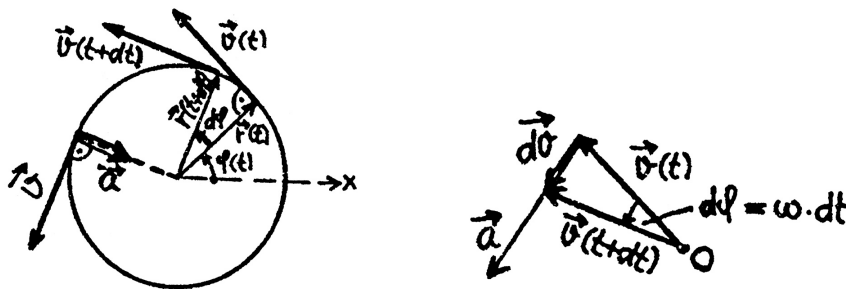
$$r = \text{const.}, \quad \varphi(t) = \omega \cdot t$$

mit Kreisfrequenz:

$$\omega = 2 \cdot \pi / T, \quad \text{oder} \quad \omega = v / r.$$

ω bedeutet den pro Zeiteinheit von \vec{r} überstrichenen Winkel.

Die gleichförmige Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung, denn lediglich der Betrag von \vec{v} ist konstant, während die Richtung ständig ändert. Aus untenstehender Figur lässt sich ablesen, dass \vec{a} immer normal zu \vec{v} steht und radial nach innen gerichtet ist.



Man nennt hier \vec{a} die **Zentripetal-Beschleunigung**.

Ferner zeigt das Bild oben rechts, dass $dv = v \cdot d\varphi$ ist, somit gilt auch $dv = v \cdot \omega \cdot dt$ und $dv/dt = v \cdot \omega$. Also haben wir

$$a = v \cdot \omega \quad \text{oder} \quad a = v^2 / r.$$

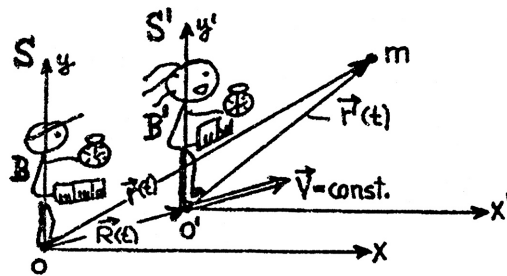
Führt man den radialen Einheitsvektor $\vec{e}_r = \vec{r} / r$ ein, kann man für die Zentripetalbeschleunigung schreiben

$$(3) \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_r \quad \text{oder} \quad \vec{a} = -r \cdot \omega^2 \cdot \vec{e}_r.$$

2.1.2.4 Relativbewegung; Galileitransformation

Ein Beobachter B ruht im Koordinatensystem S und misst zur Zeit t den Ort $\vec{r}(t)$, die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ eines Massenpunktes. Ein zweites Koordinatensystem S' ist zur Zeit $t = 0$ mit S deckungsgleich, bewegt sich jedoch relativ zu diesem mit einer konstanten Geschwindigkeit \vec{V} (gleichförmig), so dass sich von B aus gesehen der Koordinatenursprung O' an der Stelle $\vec{R}(t) = \vec{V} \cdot t$ befindet. Im gestrichenen System sitzt der Beobachter B'. Die Uhren beider Beobachter laufen synchron. B misst von seinem Standpunkt aus die kinematischen Grössen $\vec{r}'(t)$, $\vec{v}'(t)$ und $\vec{a}'(t)$. Welche Beziehungen bestehen nun zwischen ungestrichenen und gestrichenen Grössen? Offenbar gilt:

$$\begin{cases} t = t' \\ (4) \vec{r} = \vec{V} \cdot t + \vec{r}' \end{cases} \quad \text{Galileitransformation}$$



Durch differenzieren folgt:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \text{oder}$$

$$(5) \vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'$$

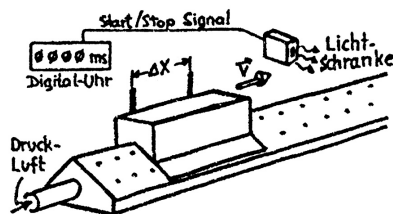
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

$$(6) \vec{a} = \vec{a}'$$

Die beiden Beobachter messen **verschiedene Geschwindigkeiten**, aber **gleiche Beschleunigungen**.

Demonstrationen:

1. Am Luftkissenbalken Messung von v und a für gleichförmige und für beschleunigte geradlinige Bewegung.



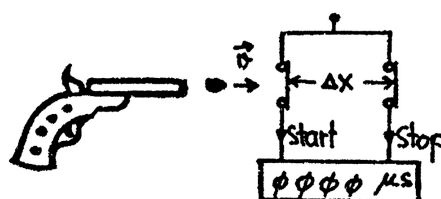
gleichförmig

$$v = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$$

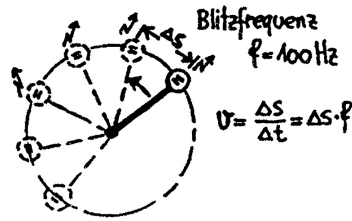
beschleunigt:

$$v = \Delta x / \Delta t, \text{ mit } \Delta t \rightarrow 0$$

2. Mündungsgeschwindigkeit von Pistolenkugel



3. Gleichförmig rotierende Glühlampe



2.2 Dynamik des Massenpunktes

Neben Ortskoordinaten, Geschwindigkeit und Beschleunigung treten in der Dynamik die physikalischen Begriffe **Kraft** und **Masse** auf.

Zum Kraftbegriff: Die Kraft ist eine Grösse, welche man an ihren charakteristischen Wirkungen erkennt. So erzeugen Kräfte einerseits Deformationen an festen Körpern und andererseits werden bewegliche Körper unter Einwirkung von Kräften beschleunigt, Gewichtskraft und Muskelkraft sind gewissermassen die Urbilder der Kraft. Am Beispiel der Gewichtskraft können wir sehen, dass sich ein dünnes Brett unter der Last eines Körpers durchbiegt. Zieht man das Brett weg, wird der Körper infolge seines Gewichtes nach unten beschleunigt. Wir können die Grösse von Kräften mit Hilfe einer Federwaage auf Grund ihrer Deformationswirkungen vergleichen. **Kräfte sind gerichtete Grössen, also Vektoren.**

Zum Begriff der Masse: Alle Körper besitzen eine Qualität, die wir mit Masse bezeichnen. Körper besitzen gleiche Massen, wenn sie gleich schwer sind. Gleich schwere Körper werden durch gleiche Kräfte gleich stark beschleunigt. Die exakte Fassung des Begriffes und die genaue Beziehung zwischen Kraft und Masse sind Gegenstand dieses Kapitels.

2.2.1 Die Newton'schen Axiome

Die Newton'schen Axiome bilden die Grundlage der klassischen Mechanik (Isaac Newton 1643-1727). In ihrer ursprünglichen Formulierung (Principia 1686) lauten sie folgendermassen:

I. Trägheitsprinzip:

Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen, geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

II. Aktionsprinzip:

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

III. Reaktionsprinzip:

Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und entgegengesetzter Richtung.

Unter Bewegung oder Bewegungsgrösse im Sinne Newtons ist der

Translations-Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

zu verstehen. Bezeichnen wir den Kraftvektor mit \vec{F} , so lauten die Newton'schen Axiome in mathematischer Schreibweise:

Newton I - Trägheitsprinzip	$\vec{v} = \text{const.},$ wenn $\vec{F} = 0$
Newton II - Aktionsprinzip	$d(m \cdot \vec{v})/dt = \vec{F}$ oder $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ (7)
Newton III - Reaktionsprinzip	$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (8)

Newton I ist in Newton II als Spezialfall ($\vec{F} = 0$) enthalten und eigentlich überflüssig. Zum Reaktionsprinzip: Erfährt ein Körper eine Kraft, so muss immer irgendwo ein zweiter Körper existieren, von dem diese Kraftwirkung ausgeht. **Kräfte treten immer paarweise auf.** \vec{F}_{12} bedeutet die Kraft von Körper 1 auf Körper 2, \vec{F}_{21} jene von Körper 2 auf Körper 1. Wir fassen das Aktionsprinzip (7) als **Definitionsgleichung für die Kraft** auf. Daraus ergeben sich Dimension und Einheit der Kraft:

$$\begin{aligned} \text{Dimension der Kraft:} & \quad \text{Masse} \cdot \text{Länge}/(\text{Zeit})^2 \\ \text{Einheit:} & \quad \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Die Krafteinheit heisst auch das Newton (N), 1 N = 1 kg · m/s².

In vielen praktischen Problemen tritt die Masse als zeitlich konstante Grösse auf (unrelativistische Mechanik). Newton II geht dann in die Form über:

$$(9) \quad \vec{F} = m \cdot d\vec{v}/dt, \quad \text{oder} \quad \vec{F} = m \cdot d^2\vec{r}/dt^2, \quad \text{oder} \quad \vec{F} = m \cdot a.$$

Inertialsystem und Galileitransformation:

Ein Bezugssystem, in welchem eine kräftefreie Masse sich geradlinig gleichförmig ($\vec{v} = \text{const.}$) bewegt, in welchem also das Trägheitsprinzip von Newton erfüllt ist, heisst **Inertialsystem**. Betrachten wir nun die Gleichung (5) für die Galileitransformation und nehmen an, S sei ein Inertialsystem, in welchem sich m mit $\vec{v} = \text{const.}$ bewegt, so ist auch $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ in S' konstant und auch S' ist ein Inertialsystem. Ist die Masse beschleunigt, so wird wegen (6) in S und S' die gleiche Beschleunigung und nach dem Aktionsprinzip die gleiche Kraft \vec{F} gemessen. Innerhalb der unrelativistischen Mechanik gilt:

Es existieren beliebig viele Inertialsysteme.
 Durch Galileitransformation geht ein Inertialsystem in einanderes über.
 Die Newton'schen Prinzipien sind **invariant** gegenüber der **Galileitransformation**.

2.2.2 Anwendung des Aktionsprinzips auf einfache Bewegungen

2.2.2.1 Gleichförmig beschleunigte, geradlinige Bewegung; Freier Fall

Die Beschleunigung \vec{a} ist konstant und nach Newton II erfordert dies eine zu \vec{a} parallele Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Der freie Fall in Erdnähe (ohne Luftwiderstand) gehört zu diesem Bewegungstypus. Die Erfahrung lehrt, dass alle Körper gleich stark beschleunigt fallen, nämlich mit der

Erdbeschleunigung \vec{g} .

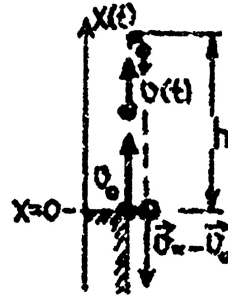
Der Betrag von \vec{g} misst etwa $9,81 \text{ m/s}^2$ und variiert je nach Ort auf der Erdoberfläche. Die treibende Kraft ist das Gewicht \vec{G} , so dass sich aus dem Aktionsprinzip für einen Körper der Masse m ergibt:

$$\text{Gewicht } \vec{G} = m \cdot \vec{g}$$

Betrachten wir den **senkrechten Wurf** mit den Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ und Anfangsgeschwindigkeit v_0 (positiv n. oben, negativ n. unten, x-Achse vertikal aufwärts gerichtet). Einsetzen von $a = -g$ in (1) und (2) ergibt:

$$v(t) = v_0 - g \cdot t \quad (10)$$

$$x(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2. \quad (11)$$



Aus (10) kann für den Wurf nach oben die Steigzeit abgelesen werden (weil dann $v(t_s) = 0$ gilt). Einsetzen von t_s in (11) liefert die

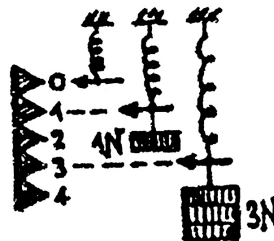
$$\text{Wurfhöhe } h = v_0^2 / (2 \cdot g).$$

Entsprechend führt Durchfallen der Höhe h aus der Ruhelage auf die Endgeschwindigkeit

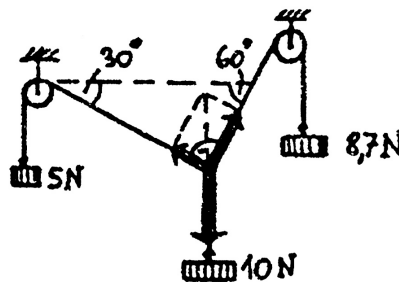
$$v_{\text{end}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Demonstrationen:

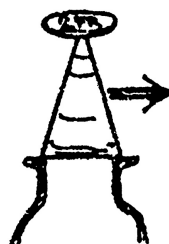
1. Federwaage
Deformation ist proportional dem angehängten Gewicht.



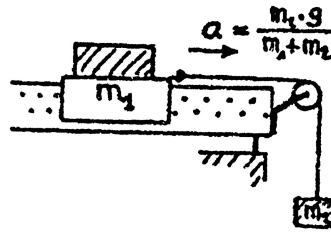
2. Vektoraddition der Kräfte



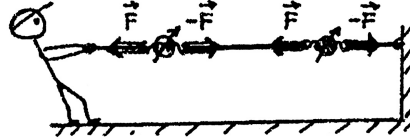
3. Trägheit
Münze fällt senkrecht runter beim schnellen Wegziehen der Stütze.



4. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$



5. Aktio = -Reaktio



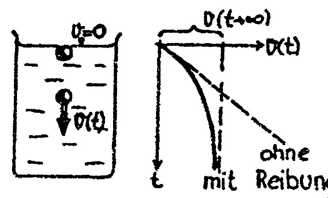
6. g-Bestimmung aus Fallzeit



7. Freier Fall im Vakuum
Flaumfeder und Bleikugel
fallen gleich schnell.



8. Fallbewegung mit Reibung
Kugel in Öl



2.2.2.2 Schiefer Wurf

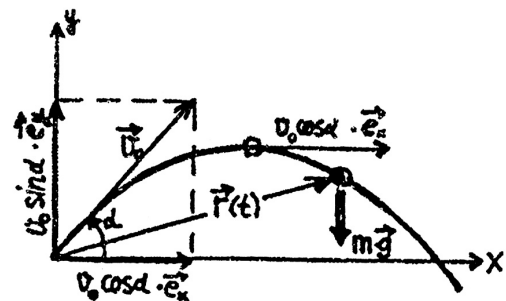
Hier bildet die Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 mit der Horizontalebene den **Elevationswinkel** α . Die y-Achse zeige senkrecht nach oben, die x-Achse liege in der von \vec{v}_0 und y-Achse aufgespannten Ebene. Die Gewichtskraft zeigt vertikal nach unten, also

$$\vec{F} = (0, -m \cdot g, 0).$$

Die Bewegungsgleichung (9), in Komponenten geschrieben, lautet dann

$$m(d^2x/dt^2, d^2y/dt^2, d^2z/dt^2) = m(0, -g, 0).$$

Die entsprechenden Komponenten von linker und rechter Seite der Gleichung müssen übereinstimmen, d.h.



$$d^2x/dt^2 = 0 \rightarrow \text{gleichförmige Bewegung in x-Richtung,}$$

$$d^2y/dt^2 = -g \rightarrow \text{gleichförmig beschleunigt nach unten,}$$

$$d^2z/dt^2 = 0 \rightarrow \text{gleichförmige Bewegung in z-Richtung.}$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$\vec{r}_0 = (0, 0, 0) \text{ und } \vec{v}_0 = v_0(\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \text{ wird}$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad v_x = v_0 \cos \alpha,$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - g \cdot t,$$

$$z(t) = 0, \quad v_z = 0.$$

Der schiefe Wurf ist eine Überlagerung einer gleichförmigen horizontalen und einer gleichförmig beschleunigten vertikalen Bewegung (die Projektion auf die y-Achse ist eine senkrechte, freie Fallbewegung). Es ist bequem, die Bewegung vektoriell zu schreiben:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t \quad \text{und} \quad \vec{r}(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{g} \cdot t^2.$$

Übungsaufgabe:

Zeige, dass die Bahn eine Parabel ist. Berechne Wurfhöhe und Wurfweite bezogen auf die x-Achse als Funktion von α und v_0 .

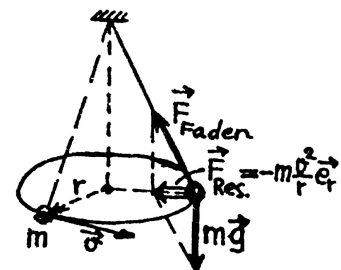
2.2.2.3 Gleichförmige Kreisbewegung; Zentripetalkraft

Damit ein Massenpunkt m eine gleichförmige Kreisbewegung ausführt, muss eine resultierende Kraft einwirken, welche die durch Gleichung (3) ausgedrückte Beschleunigung erzeugt. Anwendung des Aktionsprinzips führt auf die zentripetal gerichtete Kraft

$$\vec{F}_z = -m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_r \quad \text{oder} \quad \vec{F}_z = -m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \vec{e}_r, \quad \text{die Zentripetalkraft.}$$

Konisches Pendel:

Ein Fadenpendel wird derart angestoßen, dass der Faden die Mantelfläche eines aufrechten Kreiskegels bestreicht; d.h. die Masse bewegt sich gleichförmig auf einer horizontalen Kreisbahn. Welche Kräfte wirken **auf den Massenpunkt**? Offenbar greifen an m zwei Kräfte an, nämlich das Gewicht $m \cdot \vec{g}$ und die Fadenkraft \vec{F}_{Faden} . Andere auf m wirkende Kräfte existieren nicht. Damit die geforderte Kreisbewegung entsteht, muss die Resultierende



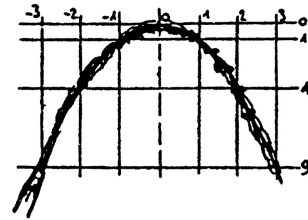
$$m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{Faden} = -m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_r \quad \text{sein.}$$

Übungsaufgabe:

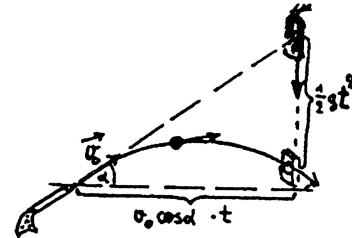
Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Öffnungswinkel α des konischen Pendels und seiner Kreisfrequenz ω ?

Demonstrationen:

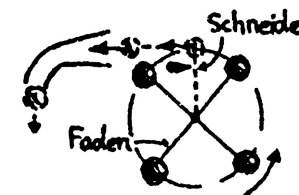
1. Wasserstrahl-Parabel
Experimenteller Nachweis der parabolischen Bahn beim schiefen Wurf.



2. Schuss auf fallendes Brett
Unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 wird das fallende Brett immer getroffen, vorausgesetzt, der Vektor \vec{v}_0 zeigt auf die Startposition des Brettes und Geschoss und Brett starten gleichzeitig. Warum?



3. Tangentielles Wegfliegen von Kugel auf Kreisbahn
Ohne Zentripetalkraft keine Bahnkrümmung.



4. Eisen schleifen



2.2.2.4 Geradlinige harmonische Schwingung

Wir denken uns einen Punkt P, der sich auf einer Kreisbahn vom Radius A mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig bewegt. Durch Normalprojektion auf einen Bahndurchmesser (mit der y -Achse zusammenfallend), erhalten wir eine geradlinige Bewegung

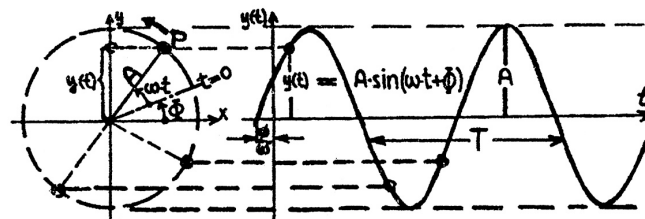
$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi).$$

Es handelt sich um einen periodischen Vorgang mit der

Periode oder Schwingungsdauer

$$T = 2 \cdot \pi / \omega,$$

denn $y(t+T) = y(t)$. Man nennt $y(t)$ die **Auslenkung** zur Zeit t , A die **Amplitude** (maximale Ausdehnung) und ϕ die **Phase** zur Zeit $t = 0$. A und ϕ sind Konstanten, welche durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden.



Durch zweimaliges differenzieren der Ortsfunktion $y(t)$ nach der Zeit erhalten wir Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$:

$$(14) \quad dy/dt \quad \text{oder} \quad \boxed{v(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi),}$$

$$(15) \quad d^2y/dt^2 \quad \text{oder} \quad \boxed{a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi).}$$

Eine wesentliche Eigenschaft der harmonischen Funktion (Sinus- oder Cosinusfunktion) ist, dass durch zweimaliges differenzieren die Funktion mit dem Minuszeichen reproduziert wird, so dass (15) lautet

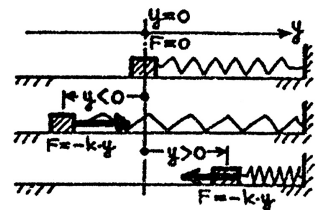
$$(16) \quad a = -\omega^2 \cdot y.$$

Um einen Massenpunkt zu veranlassen, eine harmonische Bewegung in y-Richtung auszuführen, ist somit nach Newton II eine Kraft erforderlich der Form

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot y \quad \text{oder mit} \quad m \cdot \omega^2 = k :$$

$$(17) \quad F = -ky; \quad \textbf{Kraftgesetz des harmonischen Oszillators.}$$

Dieses Kraftgesetz wird zum Beispiel durch das **Federpendel** realisiert. Wird eine Spiralfeder durch eine äussere Kraft F_a ausgezogen oder zusammengedrückt, so ist die Längenänderung ΔL proportional der wirkenden Kraft F_a (für nicht zu grosse Kräfte), also



$$F_a/\Delta L = k, \quad \textbf{Federkonstante} \quad k.$$

Nach Newton III übt somit die Feder auf die Masse m gerade die Kraft $F = -k \cdot y$ aus, welche zur harmonischen Schwingung führt. Federkonstante k und Masse m bestimmen Kreisfrequenz bzw. Schwingungsdauer:

$$\begin{array}{l} \omega = \sqrt{k/m}, \quad \textbf{Kreisfrequenz, und} \\ T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m/k}, \quad \textbf{Schwingungsdauer des Federpendel} \end{array}$$

Eine grundsätzliche Bemerkung zum Aktionsprinzip:

Im soeben behandelten Beispiel haben wir einen bestimmten Bewegungsablauf eines Massenpunktes vorgegeben, nämlich die harmonische Bewegung, und dann durch zweimalige Differentiation aus der Newton'schen Bewegungsgleichung die auf m wirkende Kraft berechnet. Ähnliche Situationen liegen im Allgemeinen im Maschinenbau vor, wo die Bewegungsabläufe von Maschinenteilen bekannt sind und die daraus resultierenden Führungskräfte mit dem Aktionsprinzip berechnet werden.

Die Fragestellung in der Physik ist häufig anders, indem das Kraftgesetz vorgegeben ist und nach der resultierenden Bewegung gefragt wird, wenn bestimmte Anfangsbedingungen vorliegen. Im Falle des Federpendels würde das heissen: Gegeben das Kraftgesetz $F(y) = -k \cdot y$; wie lautet die Gleichung $y(t)$ der Bewegung, wenn $y(t=0)$ und $v(t=0)$ vorgeschrieben sind? Das Aktionsprinzip sagt uns:

$$(18) \quad m \cdot d^2y/dt^2 = -k \cdot y(t).$$

Die Funktion $y(t)$ ist zunächst nicht bekannt, sondern nur die durch (18) ausgedrückte Beziehung zwischen der Funktion und ihrer zweiten Ableitung. Es stellt sich nun die Aufgabe, $y(t)$ derart zu finden, dass die Beziehung (18) erfüllt ist und bestimmte Anfangsbedingungen, also Werte von $y(t=0)$ und $dy/dt(t=0)$ angenommen werden. Dies ist die Fragestellung einer Differentialgleichung. Mit $k/m = \omega^2$ können wir schreiben

$$(19) \quad d^2y/dt^2 + \omega^2 \cdot y = 0. \quad \textbf{Das ist die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung,}$$

denn wie sich leicht verifizieren lässt, ist

$$(20) \quad y(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

die allgemeine Lösung von (19). Sie enthält zwei beliebige Konstanten A und ϕ . Wir können also sagen,

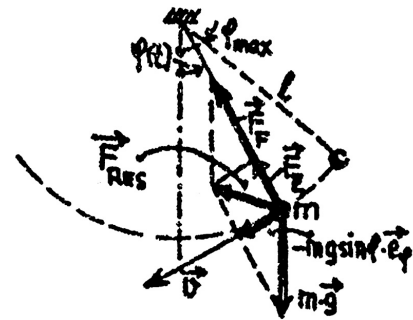
Bei gegebenem Kraftgesetz ist das II. Newton'sche Axiom eine Differentialgleichung für die Bewegung, die so genannte „**Bewegungsgleichung**“

In der Physik tritt immer wieder das Problem auf, für ein bestimmtes Kraftgesetz die Bewegungsgleichung zu lösen. Im Allgemeinen benötigt man dazu spezielle mathematische Methoden. Aber bei den Kraftgesetzen, die wir in dieser Vorlesung ins Auge fassen, kann die Lösung immer leicht erraten werden. Durch differenzieren kann die Richtigkeit einer vermuteten Lösung ohnehin immer überprüft werden.

Es ist wichtig, das Wesen der Differentialgleichung begriffen zu haben, weil viele Naturgesetze (nicht nur das Aktionsprinzip der Mechanik) bequem in Form von Differentialgleichungen formuliert werden können.

Wir wenden uns nun einem anderen System zu, welches harmonisch schwingt. Es ist dies das **mathematische Pendel**:

Man versteht darunter ein an einem gewichtslosen Faden aufgehängten Massenpunkt, der infolge der Gewichtskraft hin und her schwingt, wenn er am Anfang aus der vertikalen Gleichgewichtslage um den Winkel φ_{max} ausgelenkt und ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen worden ist. Wegen dem Faden ist die Bahn von m zwangsläufig ein Kreisbogen. In der allgemeinen Lage $\varphi(t)$ ist $v \neq 0$ und die radiale Komponente der Resultierenden von Gewicht $m \cdot \vec{g}$ und Fadenkraft \vec{F}_F ist notwendigerweise die Zentripetalkraft vom Betrag $m \cdot v^2/r$. Die tangentielle Komponente $-m \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_\varphi$ ist rüctreibend und beschleunigt in Bahnrichtung. Der Einheitsvektor \vec{e}_φ zeigt tangentiell zur Bahn in der Richtung von wachsendem φ (in der Figur im Gegenuhrzeigersinn). Wenn wir nur kleine Auslenkwinkel φ in Betracht ziehen, dürfen wir $\sin \varphi$ durch φ ersetzen und können schreiben:



$$(21) \quad F = -m \cdot g \cdot \varphi,$$

Die Bogenlänge der Bahnkurve, von der Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ aus gemessen, ist $l \cdot \varphi(t)$, die Beschleunigung $a = l \cdot d^2\varphi/dt^2$. (21) in Newton II eingesetzt ergibt dann

$$(22) \quad d^2\varphi/dt^2 + \frac{g}{l} \cdot \varphi(t) = 0.$$

Dies ist wiederum die Differentialgleichung für die harmonische Schwingung, mit der Lösung

$$(23) \quad \varphi(t) = \varphi_{max} \cdot \sin(\sqrt{g/l} \cdot t + \phi);$$

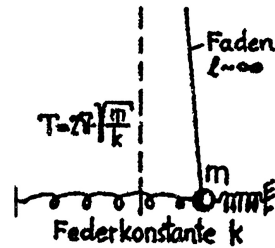
$$(24) \quad T = 2 \cdot \pi \sqrt{l/g}.$$

Die Schwingungsdauer hängt nicht von der Pendelmasse ab. Formel (24) gilt nur approximativ für kleine Amplitude. Im Allgemeinen hängt T von der Winkelamplitude φ_{max} ab.

Demonstrationen:

1. Federpendel

$T = 2 \cdot \pi \sqrt{m/k}$ quantitativ geprüft.

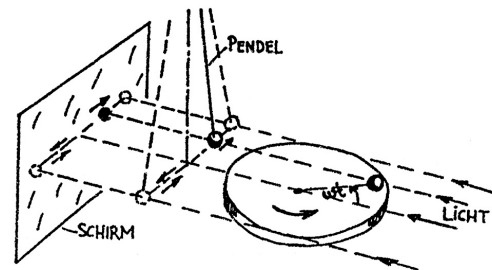


2. Sekundenpendel



3. Projektion der gleichförmigen Kreisbewegung

4. Pendelprojektion deckungsgleich mit Projektion der gleichförmigen Kreisbewegung



2.3 Arbeit, kinetische Energie, potentielle Energie, Leistung

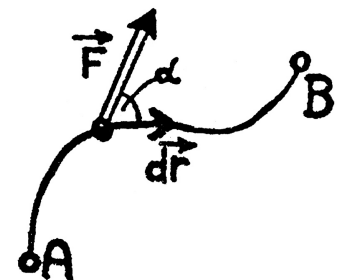
Bisher haben wir folgende physikalische Grössen kennengelernt: **Länge**, **Zeit** und **Masse** als Basisgrössen. Daraus ergaben sich die abgeleiteten, kinematischen Grössen **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung**. Das Aktionsprinzip von Newton hat uns dann auf den Begriff der **Kraft** und damit zur Dynamik geführt.

Empirisch gefundene Gesetzmässigkeiten der Mechanik drängen uns dazu, einen neuen physikalischen Begriff einzuführen, der sich als sehr fruchtbar erweisen wird, nämlich den Begriff der **Arbeit**.

Wir wollen uns vorstellen, dass eine ortsabhängige Kraft $\vec{F}(x, y, z)$ auf einen Massenpunkt m wirkt, der sich längs einer Bahnkurve von A nach B bewegt. Für jedes differentiell kleine Wegstück $d\vec{r}$ bilden wir mit der an dieser Stelle wirkenden Kraft \vec{F} das skalare Produkt

$$(25) \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{oder} \quad dW = F \cdot \cos(\alpha) dr.$$

Durch Gleichung (25) ist die von \vec{F} auf dem Wegstück $d\vec{r}$ geleistete Arbeit dW definiert. Summieren wir alle Beiträge dW von A nach B auf, so erhalten wir



$$(26) \quad W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{das Linienintegral der Kraft}$$

oder die von \vec{F} längs des Weges $A \rightarrow B$ geleistete Arbeit $W_{A \rightarrow B}$. Daraus folgt für die

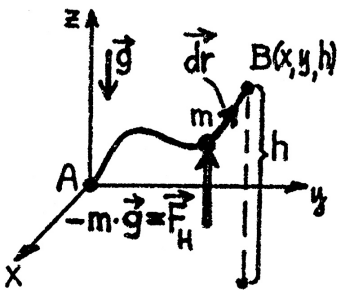
$$\begin{aligned} \text{Dimension der Arbeit:} & \quad \text{Masse} \cdot (\text{Länge}/\text{Zeit})^2 \\ \text{Einheit:} & \quad \text{N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Die Einheit der Arbeit heisst auch Joule (J): $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Drei wichtige Arten von Arbeit:

2.3.1 Hubarbeit

Welche Arbeit muss verrichtet werden, um einen Massenpunkt m von $A(0,0,0)$ einem um h höher liegenden Punkt $B(x,y,h)$ zu bringen?



Offenbar muss an jeder Stelle des Weges die nach oben gerichtete Kraft $\vec{F}_H = (0, 0, m \cdot g)$ aufgewendet werden, um das Gewicht $-m \cdot g \cdot \vec{e}_z$ zu kompensieren. Die Arbeit auf dem Wegstück $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ beträgt

$$\begin{aligned} dW &= (0, 0, m \cdot g) \cdot (dx, dy, dz), \quad \text{oder} \\ dW &= m \cdot g \cdot dz. \end{aligned}$$

Die Hubarbeit dW hängt nicht von den x- und y-Komponenten des Wegelementes $d\vec{r}$ ab, sondern nur vom Höhenunterschied dz . Dies bedeutet, dass auch die gesamte

Hubarbeit

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B m \cdot g \cdot dz \quad \text{oder} \\ (27) \quad W_{A \rightarrow B} &= m \cdot g \cdot h \end{aligned}$$

unabhängig vom Weg allein durch die Höhendifferenz h der Endpunkte bestimmt ist.

2.3.2 Spannarbeit

Um ein Federpendel (siehe S.27) aus der Ruhelage zu bringen, muss eine der Auslenkung proportionale

$$\text{Spannkraft} \quad \left| \quad F_S = k \cdot y \right.$$

aufgewendet werden, welche die Federkraft $F = -k \cdot y$ gerade kompensiert. Wird die Feder bis zur Auslenkung y_0 ausgedehnt oder zusammengedrückt, so hat die Spannkraft F_S die Arbeit

$$\int_0^{y_0} F_S \cdot dy, \quad \text{also} \quad \int_0^{y_0} k \cdot y \cdot dy = \frac{1}{2} k \cdot y_0^2$$

verrichtet. Die der Feder zugeführte Arbeit wächst quadratisch mit der Auslenkung:

$$\text{Spannarbeit} \quad \left| \quad (28) \quad W(y) = \frac{1}{2} k \cdot y^2. \right.$$

Bei der Berechnung von Hub- und Spannarbeit ist in jedem Moment Kräftegleichgewicht zwischen Hubkraft und Gewicht, bzw. Spannkraft und Federkraft vorausgesetzt. Die resultierende Kraft ist

immer beliebig klein, es entsteht keine Beschleunigung. Hub- und Spannbewegung erfolgen beliebig langsam.

2.3.3 Beschleunigungsarbeit

Wir betrachten jetzt einen Massenpunkt m , der sich unter dem Einfluss einer variablen Kraft $\vec{F} = (F, 0, 0)$ entlang der x -Achse geradlinig beschleunigt bewegt. Auf jedem Wegelement dx leistet dann F am Massenpunkt m die Arbeit $dW = F \cdot dx$. Wie wirkt sich nun die zugeführte Arbeit dW auf den Bewegungszustand von m aus? Wir finden die Antwort, indem wir das Aktionsprinzip

$$\begin{aligned} F &= m \cdot dv/dt && \text{durch multiplizieren mit } v \text{ auf die Form} \\ F \cdot v &= m \cdot v \cdot dv/dt && \text{oder} \\ F \cdot v &= d(\frac{1}{2}m \cdot v^2)/dt && \text{bringen.} \end{aligned}$$

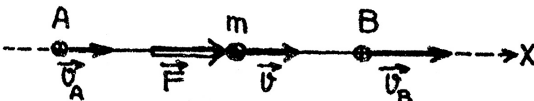
Multiplikation mit dt ergibt:

$$F \cdot v \cdot dt = d(\frac{1}{2}m \cdot v^2) \quad \text{oder} \quad F \cdot dx = d(\frac{1}{2}m \cdot v^2) \quad (29)$$

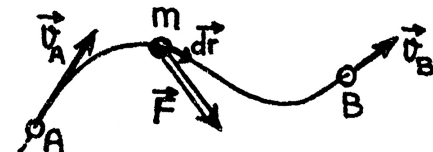
Man nennt die Grösse $\frac{1}{2}m \cdot v^2$, dimensionsmässig eine Arbeit, die

$$\text{Kinetische Energie} \quad \boxed{E_{kin} = \frac{1}{2}m \cdot v^2.}$$

Integration der Gleichung (29) von einem Anfangspunkt A zu einem Endpunkt B liefert

$$\int_A^B F \cdot dx = m \cdot v_B^2/2 - m \cdot v_A^2/2$$


Dieses Resultat lässt sich leicht auf den Fall gekrümmter Bahnen verallgemeinern, wo die Kraft mit dem Bahnelement einen beliebigen Winkel bildet (s. Übungen). Es gilt immer:

$$(30) \quad \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot v_B^2/2 - m \cdot v_A^2/2$$


Die von der resultierenden Kraft \vec{F} an der Masse m geleistete Beschleunigungsarbeit ist gleich dem Zuwachs der kinetischen Energie.

Diese Aussage ist eine Konsequenz von Newton II und **gilt unabhängig von der Natur der beteiligten Kräfte**. Bremskräfte bedeuten negatives Vorzeichen der Arbeit und vermindern die kinetische Energie.

Übungsaufgaben:

- Zeige, dass die Beziehung (30) für den freien Fall (Gleichungen (10) und (11)) erfüllt ist.
- Verifiziere am Beispiel der harmonischen Schwingung des Federpendels (s. Gleichung (20)), dass die kinetische Energie beim Nulldurchgang gleich der Arbeit ist, welche die Feder an der Masse m beim Entspannen von $y = A$ nach $y = 0$ verrichtet.
- Leite die Gleichung (30) her. Anleitung: Man schreibe das Aktionsprinzip vektoriell und multipliziere mit \vec{v} . Die Differentiationsregeln für zeitabhängige Vektoren anwenden.

Aus den Resultaten der Übungen a) und b) ist ersichtlich, dass die Hubarbeit mgh und die Spannarbeit $k \cdot A^2/2$ nicht verloren sind. Beim Durchfallen der Höhe h bzw. beim Entspannen der Feder wird die vorher aufgewendete Arbeit in Form kinetischer Energie zurückerstattet. Die auf h angehobene Masse und die gespannte Feder besitzen ein **Arbeitsvermögen** das durch die **Lage** bezüglich eines Nullpunktes charakterisiert ist. Wir nennen dieses Arbeitsvermögen die

Potentielle Energie E_{pot}

Im Abschnitt 2.4 wollen wir diesen Begriff der potentiellen Energie in einen allgemeineren Rahmen stellen.

Wird im Zeitintervall zwischen t und $t + dt$ die Arbeit dW verrichtet, so nennen wir den Quotienten dW/dt die zur Zeit t vorhandene Leistung:

$$\text{Leistung} \quad \boxed{P = dW/dt.}$$

Dimension der Leistung: Arbeit/Zeit

Einheit: J/s

Die Einheit der Leistung heisst auch das Watt (W), $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$. Die während der Zeit t aufgewendete Arbeit ergibt sich durch Integration der Leistung über die Zeit:

$$\boxed{W = \int_0^t P(t) \cdot dt.}$$

Verschiebt sich die Kraft \vec{F} mit der Geschwindigkeit \vec{v} , so wird die Leistung $dW/dt = \vec{F} \cdot \vec{dr}/dt$ gerade

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}.}$$

2.4 Konservatives Kraftfeld und potentielle Energie

Im Allgemeinen sind physikalische Grössen ortsabhängig; z.B ist die Temperaturverteilung $T(x, y, z)$ im Hörsaal oder die Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v}(x, y, z)$ der Wasserteilchen eines Flusses eine Funktion des Ortes. Im ersten Fall gehört zu jedem Raumpunkt eine skalare Grösse T , im zweiten Fall sind jedem Punkt drei Komponenten eines Vektors zugeordnet. Wir nennen $T(x, y, z)$ ein **skalares Feld**, $\vec{v}(x, y, z)$ ein **Vektorfeld**.

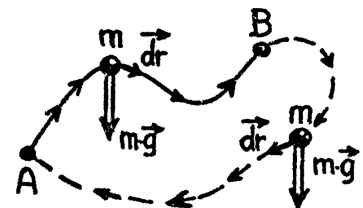
Bei der Berechnung der Hubarbeit haben wir das Feld der Gewichtskraft eines Massenpunktes kennen gelernt. Mit vertikal nach oben gerichteter z -Achse hat \vec{F} die Form

$$\vec{F} = (0, 0, -m \cdot g).$$

Es handelt sich um ein **homogenes Feld**, denn jeder Punkt ist bezüglich \vec{F} gleichwertig. Bringen wir die Masse m im Feld \vec{F} von A nach B, leisten wir die Hubarbeit

$$W_H = \int_A^B -\vec{F} \cdot \vec{dr} \quad (\text{Hubkraft } \vec{F}_H = -\vec{F})$$

und wir können bei festem Punkt A jedem Punkt B die potentielle Energie



$$E_{pot}(B) = E_{pot}(A) - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{zuordnen.}$$

Diese Zuordnung ist eindeutig, weil die Hubarbeit unabhängig vom Integrationsweg immer gleich bleibt. Führt der Weg wieder nach A zurück, wird das Linienintegral der Kraft gerade null, denn

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Die betrachtete Gewichtskraft ist ein spezielles Beispiel einer so genannten **konservativen Kraft**. Konservative Kraftfelder $\vec{F}(x, y, z)$ sind dadurch ausgezeichnet, dass das Arbeitsintegral zwischen zwei beliebigen, festen Punkten unabhängig vom Integrationsweg immer gleich gross ist. Bezogen auf einen willkürlich gewählten Nullpunkt ist jedem Punkt des Feldes eindeutig eine potentielle Energie E_{pot} zugeordnet. Für jeden beliebigen geschlossenen Weg gilt dann

$$\oint \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F} \text{ ist konservativ.}$$

Beachte, dass konservative Felder nicht von der Zeit abhängen. Auch das eindimensionale Kraftfeld $F_y = -k \cdot y$ der idealen Feder erfüllt die Beziehung (31). Die Federkraft ist konservativ.

Welche Grösse wird in dieser Klasse von Feldern konserviert?

Nehmen wir an, ein Massenpunkt m bewege sich im konservativen Kraftfeld unter dein Einfluss von $\vec{F}(x, y, z)$. Im Punkt A sei die Geschwindigkeit \vec{v}_A und die potentielle Energie $E_{pot}(A)$. Erreicht m den Bahnpunkt B, ist $E_{pot}(B)$ definitionsgemäss

$$(32) \quad E_{pot}(B) = E_{pot}(A) - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Für die Geschwindigkeit \vec{v}_B gilt wegen (30):

$$(33) \quad m \cdot v_B^2/2 = m \cdot v_A^2/2 + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Addition von (32) und (33) führt zu

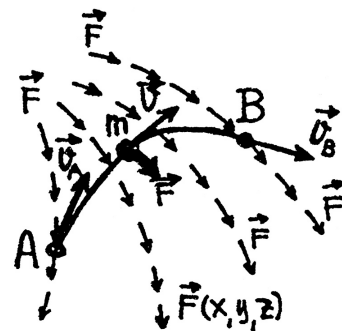
$$(34) \quad E_{pot}(B) + m \cdot v_B^2/2 = E_{pot}(A) + m \cdot v_A^2/2,$$

d.h. die Summe von potentieller und kinetischer Energie bleibt erhalten (wird konserviert).

Bewegt sich ein Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld, so gilt:

$$E_{pot} + E_{kin} = \text{const.} \quad \text{Energie-Erhaltungssatz der Mechanik.}$$

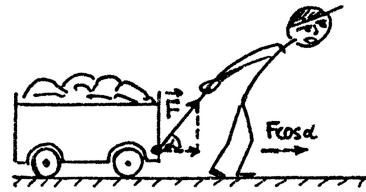
Sobald nicht konservative Kräfte beteiligt sind, (wie z.B. Reibkräfte), kann keine potentielle Energie mehr definiert werden und der Energie-Erhaltungssatz in obiger Form ist nicht anwendbar.



Demonstrationen:

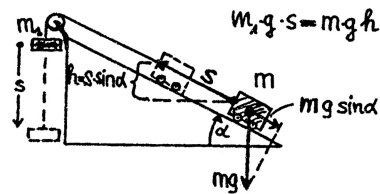
1. Wagen ziehen

Der Mann zieht den Wagen „dumm“.
Wieso?



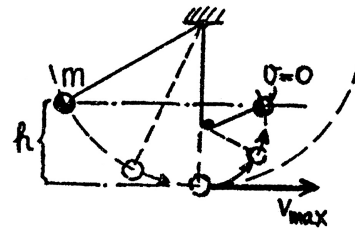
2. Schiefe Ebene als Hebvorrichtung

Gleiche Arbeit mit kleinerer Kraft, aber
größerem Weg.



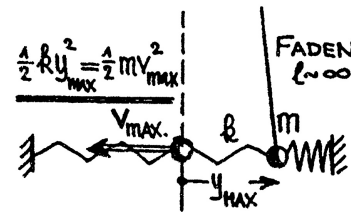
3. Pendel verschiedener Länge

Gleiche Geschwindigkeit beim Null-
durchgang ergibt gleiche maximale
Höhe des Ausschlages, unabhängig von
der Pendellänge (Gesamtenergie bleibt
erhalten).



4. Federpendel

$k \cdot y_{max}^2 / 2 = m \cdot v_{max}^2 / 2$
nachgeprüft (Energieerhaltung).

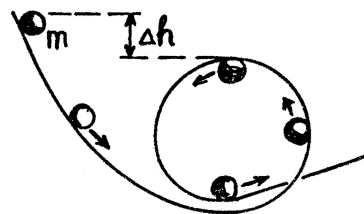


5. Deformation von Bleiplättchen durch fallende Kugel

Deformationskräfte sind nicht konservativ. Energieerhaltungssatz der
Mechanik gilt nicht. Wärmeenergie mit Thermoelement nachgewiesen.

6. Schleifenbahn

Δh muss einen gewissen Wert über-
schreiten, damit die Kugel die Schleifenbe-
wegung vollständig ausführt. Warum?



2.4.1 Potentialfunktion und Bewegung

Ohne dass die Newton'sche Bewegungsgleichung gelöst werden muss, können wesentliche Merkmale der Bewegung einer Masse m in einem konservativen Feld \vec{F} an der zugehörigen Potentialfunktion $E_{pot}(x, y, z)$, abgelesen werden, wenn man die Gesamtenergie $E = E_{kin} + E_{pot}$ vorgibt. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf eindimensionale Bewegungen; Kraft \vec{F} und Geschwindigkeit \vec{v} sollen parallel zur y -Achse liegen. Nach (32) wird dann

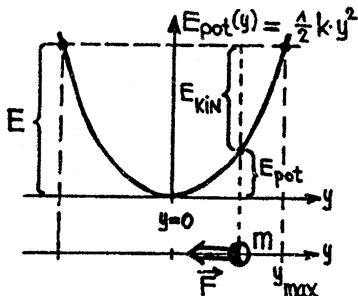
$$E_{pot}(y) = \text{const.} - \int_0^y F(y) \cdot dy \quad \text{und} \quad \boxed{F(y) = -dE_{pot}(y)/dy.} \quad (35)$$

Die Kraft ist gleich der negativen Steigung der Potentialkurve.

Nehmen wir als Beispiel unser Federpendel: Hier bewegt sich die Masse in einem parabolischen „Potentialtopf“ der Form

$$E_{pot}(y) = k \cdot y^2 / 2 \quad (E_{pot}(0) = 0 \text{ gesetzt}) \text{ und es gilt}$$

$$\text{der Energie-Erhaltungssatz } m \cdot v^2 / 2 + k \cdot y^2 / 2 = E.$$

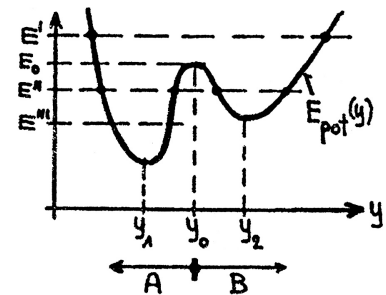


Wir können an der Potentialkurve bei gegebener Totalenergie E folgendes ablesen:

- die Umkehrpunkte $+y_{max}$ und $-y_{max}$ als Schnittpunkte der Parallelen im Abstand E zur y -Achse mit der Parabel $E_{pot}(y)$.
- $E_{kin} = E - E_{pot}$ für jede Auslenkung.
- E_{kin} ist maximal im Minimum von E_{pot} .
- $F = -dE_{pot}/dy$ zeigt überall zum Potentialminimum hin, und ist dort null.

Analog gelten diese Betrachtungen für kompliziertere Potentialfunktionen, wie etwa für den Fall eines Potentialberges zwischen zwei Gleichgewichtslagen y_1 und y_2 . Je nach Gesamtenergie E hält sich die Masse in den Gebieten A und B ($E = E'$), A oder B ($E = E''$) und nur im Gebiet A allein ($E = E'''$) auf. Die Kraft $F = -dE_{pot}/dy$ zeigt im Gebiet A immer gegen die Stelle y_1 und im Gebiet B immer gegen y_2 . Ist $E < E_0$, kann der Potentialberg nie überwunden werden.

Würde man die Masse m in den Punkten y_1 oder y_2 vollständig zur Ruhe bringen, so würde sie dort liegen bleiben (stabile Lage, Kraft rücktreibend), während im Punkt y_0 die geringste Störung zu einer nach links oder nach rechts beschleunigten Bewegung Anlass geben würde (keine rücktreibende Kraft, instabile Lage). Die potentielle Energie ist offenbar auch eine geeignete Größe zur Diskussion von Stabilitätsfragen.



2.5 Drehmoment, Drall und Drallsatz für einen Massenpunkt

Im Zusammenhang mit rotierenden Bewegungen, eine in der Natur häufig vorkommende Bewegungsform, erweist es sich als sinnvoll, die Begriffe von **Drehmoment** \vec{M} und **Drall** (oder **Drehimpuls**) \vec{L} einzuführen. Wir betrachten wieder die Bahn eines Massenpunktes m unter dem Einfluss einer Kraft \vec{F} . Das Drehmoment \vec{M} der Kraft \vec{F} bezüglich eines festen Punktes O, den wir gerade als Koordinatenursprung wählen, ist definiert durch

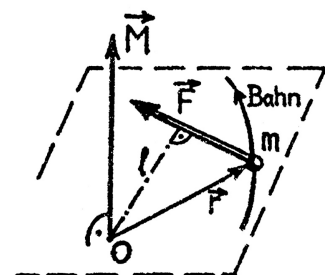
$$(36) \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \text{Drehmoment } \vec{M}.$$

Dimension des Drehmomentes: Kraft · Länge

Einheit: N · m

\vec{M} ist ein Vektor, der senkrecht auf der von \vec{r} und \vec{F} aufgespannten Ebene steht und den Betrag $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$ hat. \vec{r} , \vec{F} und \vec{M} bilden ein Rechtssystem (s. Vektorprodukt). Wenn l der Abstand des Punktes O von der Wirkungslinie der Kraft \vec{F} ist, so gilt auch

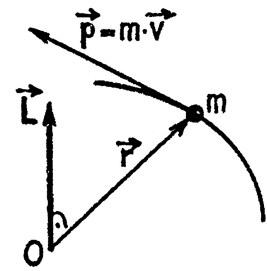
$$M = F \cdot l \quad (\text{„Kraft mal Hebelarm“}).$$



Unter dem Drall oder Drehimpuls \vec{L} des Massenpunktes m bezüglich dem Punkt O verstehen wir das Vektorprodukt von \vec{r} mit dem Impuls \vec{p} :

$$(37) \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{oder} \quad \vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}, \quad \text{Drall.}$$

Dimension des Dralls: Masse \cdot (Länge)²/Zeit
 oder: Energie \cdot Zeit
 Einheit: J \cdot s



Wichtig: Drehimpuls und Drehmoment hängen von der Lage des Bezugspunktes O ab.

Durch die Anwendung der Differentiationsregel für Produkte von Funktionen, die auch beim Vektorprodukt gültig ist, erhalten wir aus (37)

$$d\vec{L}/dt = \vec{r} \times d\vec{p}/dt + d\vec{r}/dt \times \vec{p}.$$

Der zweite Summand der rechten Seite verschwindet aber, weil $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ und \vec{p} parallele Vektoren sind, so dass

$$(38) \quad d\vec{L}/dt = \vec{r} \times d\vec{p}/dt \quad \text{ist.}$$

Multiplizieren wir die Newton'sche Bewegungsgleichung $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ auf beiden Seiten von links vektoriell mit \vec{r} , so folgt

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times d\vec{p}/dt, \quad \text{oder mit (36) und (38)}$$

$$(39) \quad \vec{M} = d\vec{L}/dt, \quad \text{Drallsatz.}$$

Das wirkende Drehmoment bezüglich eines Punktes ist gleich der zeitlichen Änderung des Dralls bezüglich diesem Punkt.

Kapitel 3

Mechanik eines Systems von Massenpunkten

Im letzten Kapitel haben wir die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes m unter dem Einfluss eines Kraftfeldes studiert, wobei das Kraftfeld seinen Ursprung in irgendwelchen andern Körpern der Umgebung hatte (z.B. Feder, Faden, Erde).

Jetzt betrachten wir ein System von N im Raum verteilten Massenpunkten m_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$). Jeder Massenpunkt m_i erfährt eine resultierende Kraft \vec{F}_i und seine Bahn wird durch einen Ortsvektor $\vec{r}_i(t)$ beschrieben. Welche allgemeinen Aussagen können wir über die dynamischen Eigenschaften unseres Systems machen?

3.1 Innere und äussere Kräfte; Impuls-Erhaltungssatz

Nach Newton III gibt es zu jeder Kraft eine Gegenkraft. Die auf ein m_i wirkende Resultierende \vec{F}_i ist im Allgemeinen aus zwei Arten von Kraftanteilen zusammengesetzt: Solche, deren Gegenkraft ausserhalb des Systems liegt und solche, deren Reaktionskraft auf andere zum System gehörende Massenpunkte wirkt. Wir unterscheiden:

Innere Kräfte:

Ihre Gegenkräfte liegen im System selbst. Ist $\vec{F}(ik)$ die Kraft von m_i auf m_k so ist $\vec{F}(ki) = -\vec{F}(ik)$ die Kraft von m_k auf m_i .

Äussere Kräfte:

Sie werden von Körpern erzeugt, die nicht zum System gehören. Ihre Gegenkräfte liegen daher nicht im System drin.

Nach dem Aktionsprinzip gilt für alle m_i :

$$\vec{F}_i = m_i \cdot d\vec{v}_i/dt.$$

Wir erhalten N solche Gleichungen ($i = 1, 2, \dots, N$). Addieren wir linke und rechte Seiten, folgt

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \cdot d\vec{v}_i/dt \quad \text{oder} \quad \sum_i \vec{F}_i = \sum_i d\vec{p}_i/dt.$$

Bei der Summation über alle \vec{F}_i heben sich aber die stets paarweise auftretenden inneren Kräfte $\vec{F}(ik)$ und $\vec{F}(ki)$ gerade auf, so dass nur die Summe aller äusseren Kräfte übrig bleibt. Die rechte Seite ist

die Summe der zeitlichen Änderungen der Einzelimpulse $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$, was das Gleiche ist, wie die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses $\vec{p}_{tot} = \sum_i \vec{p}_i$.

$$(40) \quad \sum_i \vec{F}_i(\text{äussere}) = d\vec{p}_{tot}/dt \quad \text{Impulssatz.}$$

Summe der äusseren Kräfte = zeitliche Veränderung des Totalimpulses.

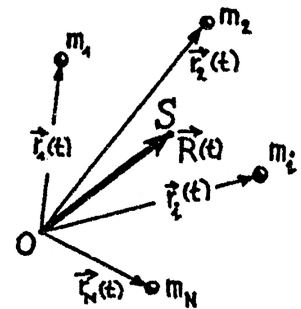
Wenn keine äusseren Kräfte auf das System einwirken, handelt es sich um ein **freies System**, wo offenbar gilt:

$$(41) \quad d\vec{p}_{tot}/dt = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{p}_{tot} = \text{const.} \quad \text{Impuls-Erhaltungssatz.}$$

In einem freien System ist der Gesamtimpuls konstant.

3.2 Schwerpunkt. Schwerpunktsatz

Aus der Verteilung unserer N Massenpunkte m_i an den Stellen $\vec{r}_i(t)$ zur Zeit t definieren wir einen Ortsvektor $\vec{R}(t)$, der die Lage vom **Schwerpunkt** oder **Massenmittelpunkt S** angibt. Es wird sich zeigen, dass die formale Einführung dieses Bezugspunktes S die Beschreibung der Dynamik unseres Systemes von vielen Massenpunkten enorm erleichtert. Wir definieren \vec{R} als Summe der mit m_i gewichteten Ortsvektoren $\vec{r}_i(t)$, dividiert durch die Gesamtmasse aller Punkte.



Definition:

$$(42) \quad \vec{R}(t) = (m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + \dots + m_N\vec{r}_N(t))/(m_1 + m_2 + \dots + m_N),$$

Ortsvektor des Schwerpunktes.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Schwerpunktes mit \vec{V} so führt differenzieren nach t von (42) und multiplizieren mit der Gesamtmasse auf

$$(43) \quad m_{tot} \cdot \vec{V} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad \text{oder} \quad m_{tot} \cdot \vec{V} = \vec{p}_{tot}.$$

Gesamtimpuls des Systems = Impuls der Gesamtmasse im Schwerpunkt.

Nochmaliges differenzieren nach der Zeit und Anwendung Impulssatzes (40) ergibt den **Schwerpunktsatz**:

$$(44) \quad m_{TOT} \cdot d\vec{V}/dt = \sum_i \vec{F}_i(\text{äussere}) \quad \text{oder} \quad m_{TOT} \cdot d^2\vec{R}/dt^2 = \sum_i \vec{F}_i(\text{äussere}).$$

Äussere Gesamtkraft = Gesamtmasse · Beschleunigung des Schwerpunktes.

Der Schwerpunktsatz (44) besagt:

Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten bewegt sich so, wie wenn die Gesamtmasse im Schwerpunkt sitzen würde und die Summe aller äusseren Kräfte dort angreifen würde.

Wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind, das System also frei ist, gelten die Aussagen

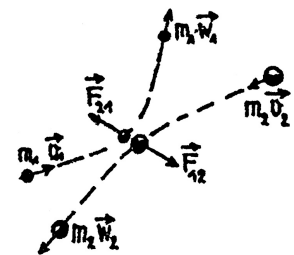
Der Schwerpunkt eines freien Systems ist entweder in Ruhe oder er bewegt sich gleichförmig geradlinig.

In einem freien System kann durch die Wirkung der inneren Kräfte der Schwerpunkt nicht verschoben werden.

3.3 Stossprozesse zwischen zwei Massenpunkten

Stossprozesse oder Streuprozesse zwischen Teilchen spielen auf allen Gebieten der Physik eine wichtige Rolle. Vor allem trifft dies für die Kern- und Elementarteilchenphysik zu, wo seit vielen Jahrzehnten wesentliche Informationen über die Wechselwirkungen dieser Bausteine der Materie aus Streuexperimenten gewonnen worden sind. Ein historisch besonders bedeutsames Experiment ist die Streuung von Alphateilchen an einer Goldfolie (Rutherford, um 1910), aus welchem die Existenz von Atomkernen zwingend abgeleitet wurde.

Das charakteristische Merkmal eines Stossprozesses besteht darin, dass sich zwei Körper, in unserem Fall zwei Massenpunkte m_1 und m_2 , zunächst frei bewegen, dann während einer kurzen Zeit Δt (kurz gegen die gesamte Beobachtungszeit) Kräfte aufeinander ausüben, um sich dann wieder kräftefrei voneinander zu entfernen. Die kurzzeitige Wechselwirkung bezeichnen wir als **Kraftstoss**. Im Zeitelement dt ändert die Masse m_1 ihren Impuls \vec{p}_1 nach Newton II um



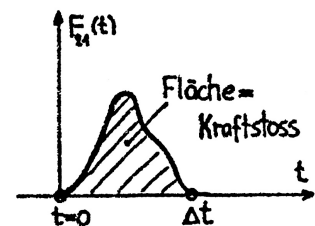
$d\vec{p}_1 = \vec{F}_{21}(t) \cdot dt$ und während des Stosses um

$$\Delta\vec{p}_1 = \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{21}(t) \cdot dt.$$

Impulsänderung = Kraftstoss.

Wichtig: Die Wirkung des Kraftstosses hängt nur vom Wert des Zeitintegrals und nicht vom detaillierten Verlauf von $\vec{F}_{21}(t)$ ab.

Analog wird $\Delta\vec{p}_2 = \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{12}(t) \cdot dt.$



Wegen $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ist $\Delta\vec{p}_2 = -\Delta\vec{p}_1$ und der Gesamtimpuls bleibt unverändert. Das muss natürlich so sein, damit der Satz von der Erhaltung des Impulses (41) nicht verletzt wird, denn auf unser System von zwei Massenpunkten wirken ja keine äusseren Kräfte.

Bei einem Stoss gilt der Impuls-Erhaltungssatz.

Wir unterscheiden zwei Arten von Stossprozessen, nämlich:

- a) **Elastischer Stoss:** Die gesamte kinetische Energie der Stosspartner bleibt erhalten.
- b) **Inelastischer Stoss:** Ein Teil der kinetischen Energie wird in andere Energieformen umgewandelt (z. B. Wärmeenergie, Deformationsenergie).

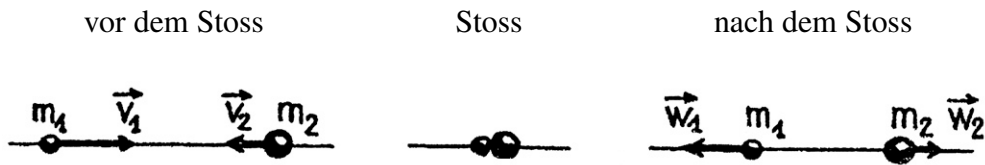
3.3.1 Stöße in einer Dimension

Die beiden Massenpunkte sollen sich vor und nach dem Stoss auf ihrer ursprünglichen Verbindungsgeraden bewegen. Konkret entspricht der zentrale Stoss zweier nicht rotierender Kugeln oder der

Stoss zweier Eisenbahnwagen dieser Situation. Vor dem Stoss seien die Geschwindigkeiten der Massenpunkte v_1 und v_2 , nach dem Stoss w_1 und w_2 (algebraische Grössen, positiv nach rechts, negativ nach links).

3.3.1.1 Elastischer Stoss

Impuls und kinetische Energie bleiben erhalten.



(i) Impulserhaltung: $m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot w_1 + m_2 \cdot w_2.$
(ii) Energieerhaltung: $(m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2)/2 = (m_1 \cdot w_1^2 + m_2 \cdot w_2^2)/2.$
oder
(i) $m_1 \cdot (v_1 - w_1) = m_2 \cdot (w_2 - v_2),$
(ii) $m_1 \cdot (v_1^2 - w_1^2) = m_2 \cdot (w_2^2 - v_2^2).$
(ii)/(i) ergibt: (iii) $v_1 - v_2 = -(w_1 - w_2).$

(iii) bedeutet: **Die Relativgeschwindigkeit ändert beim Stoss das Vorzeichen.**

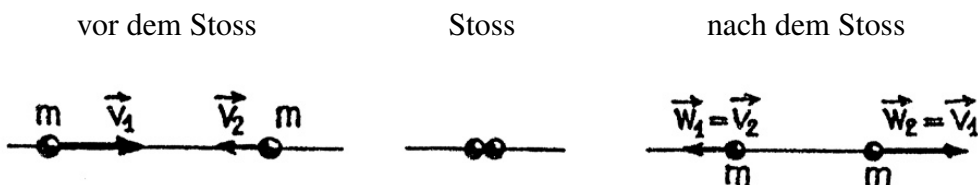
Aus (i) und (iii) errechnet man die Endgeschwindigkeiten:

$$(45) \quad \begin{cases} w_1 = v_1 \cdot (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2) + v_2 \cdot 2 \cdot m_2/(m_1 + m_2), \\ w_2 = v_1 \cdot 2 \cdot m_1/(m_1 + m_2) + v_2 \cdot (m_2 - m_1)/(m_1 + m_2). \end{cases}$$

Spezialfälle:

a) $m_1 = m_2, \rightarrow w_1 = v_2$ und $w_2 = v_1.$

Beim zentralen Stoss gleicher Massen werden die Geschwindigkeiten ausgetauscht.



b) $m_2 \rightarrow \infty, v_2 = 0$ (Stoss mit Wand) $\rightarrow w_1 = -v_1.$



m_1 wird reflektiert, der Rückstossimpuls wird von der unendlich schweren Wand aufgenommen, ohne dass sie eine merkliche Geschwindigkeit annimmt (Trägheit der Wand).

3.3.1.2 Vollständig inelastischer Stoss

Beim vollständig inelastischen Stoss tritt der grösstmögliche Verlust an kinetischer Energie auf. Wir bezeichnen die in eine andere Form umgewandelte Energie mit Q . Dieser Wert erreicht ein Maximum, wenn beide Massen nach dem Stoss zusammenkleben und somit eine gemeinsame Geschwindigkeit w besitzen.



Aus dem Impulssatz folgt sofort:

$$(46) \quad w = (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2) / (m_1 + m_2).$$

Die Grösse $Q = E_{KIN}(\text{vor}) - E_{KIN}(\text{nach})$ ergibt dann

$$(47) \quad Q = m_1 \cdot m_2 \cdot (v_1 - v_2)^2 / 2(m_1 + m_2).$$

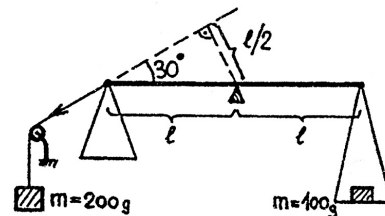
Übungsaufgabe:

Zeige, dass $Q = E_{KIN}(\text{vor}) \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$ ist, vorausgesetzt, dass m_2 vor dem Stoss ruht ($v_2 = 0$ ist).

Demonstrationen:

1. Drehmoment

„Kraft mal Hebelarm“ links und rechts entgegengesetzt gleich gross.



2. Luftkissenbalken

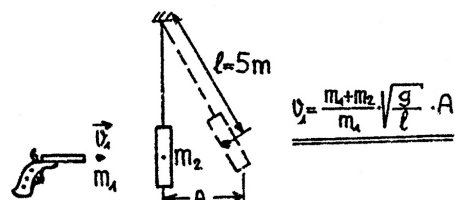
- a) Gespannte Feder zwischen zwei gleichen, ruhenden Massen. Nach Entspannen der Feder, Impuls entgegengesetzt gleich.
- b) Elastischer Stoss mit $m_1 = m_2, v_2 = 0$.
- c) mit $m_1 < m_2$ und $m_1 > m_2, v_2 = 0$.

3. Kugelreihe

Anzahl einfallende = Anzahl weglauende Kugeln (nur dann sind Energie- und Impulserhaltung möglich).



4. Geschossgeschwindigkeit und ballistisches Pendel

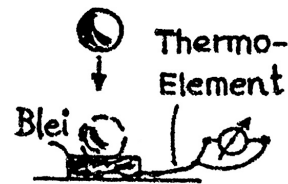


5. Luftkissenbalken

Inelastischer Stoss mit $m_1 = m_2, v_2 = 0$.

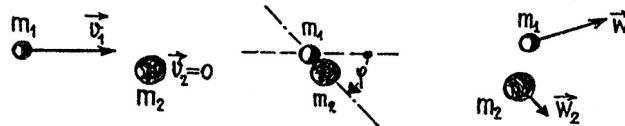
6. Wärmeenergie bei inelastischem Stoss

Temperaturerhöhung im Bleiplättchen mit Thermoelement nachgewiesen.



3.3.2 Nicht zentraler, elastischer Stoss

Wir betrachten den Stoss zweier Kugeln (die nicht rotieren), wobei die eine vor dem Stoss ruht.



Die Verbindungslinie der Kugelzentren im Moment der Berührung ist die **Stossachse**. Sie schliesst mit v_1 den Winkel φ ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$) ein. Impuls- und Energiesatz liefern

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad m_1 \vec{v}_1 &= m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2, \\ \text{(ii)} \quad m_1 v_1^2 / 2 &= m_1 w_1^2 / 2 + m_2 w_2^2 / 2. \end{aligned}$$

Wir wollen der Einfachheit halber die Diskussion auf den Spezialfall beschränken, wo die stossenden Kugeln dieselbe Masse besitzen (entspricht dem Billardspiel, unter Vernachlässigung der Rotation der Kugeln). Dann gehen (i) und (ii) über in

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \vec{v}_1 &= \vec{w}_1 + \vec{w}_2, \\ \text{(ii)} \quad v_1^2 &= w_1^2 + w_2^2. \end{aligned}$$

(i) und (ii) sagen jetzt aus, dass \vec{v}_1 , \vec{w}_1 und \vec{w}_2 ein rechtwinkliges Dreieck bilden und \vec{v}_1 die Hypotenuse ist. Somit gilt unabhängig vom Stosswinkel :

Beim elastischen Stoss gleich schwerer Massen und einem zunächst ruhenden Stosspartner, bilden die Geschwindigkeiten nach dem Stoss immer einen rechten Winkel.

Bemerkung zur Wahl des Koordinatensystems:

Die in einem Streuexperiment beobachteten Grössen beziehen sich natürlich auf das Laborsystem. Die rechnerische Behandlung des Streuproblems wird jedoch wesentlich erleichtert, wenn man sich auf das so genannte **Schwerpunktsystem** bezieht, in welchem definitionsgemäss der Systemschwerpunkt ruht. Wegen (44) ist dann der Gesamtimpuls gerade null.

Im Schwerpunktsystem ist die Summe aller Impulse gleich null.

Wenn nur zwei Massen beteiligt sind, bedeutet dies, dass sie sich sowohl vor als auch nach dem Stoss mit entgegengesetzt gleichen Impulsen bewegen. Die kinematischen Resultate der Rechnung im Schwerpunktsystem werden dann mit (5) auf Laborverhältnisse zurücktransformiert.

Übungsaufgabe:

Versuche, die auftretenden Geschwindigkeiten beim Stoss des Billardspiels im Schwerpunktsystem grafisch darzustellen. Zeichne die Endgeschwindigkeiten im Laborsystem gemäss (5) in die Figur ein.

Der Zwischenwinkel ergibt sich dann als Peripheriewinkel in einem Thaleskreis.

Wir wollen nochmals den vollständig inelastischen, zentralen Stoss, für den im Laborsystem die Gleichungen (46) und (47) gelten, aus der Sicht des Schwerpunktsystems betrachten. Die Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem sind:

$$v'_1 = v_1 - V \quad \text{und} \quad v'_2 = v_2 - V.$$

(Wieder schreiben wir die Komponenten der in Richtung Stossachse liegenden Geschwindigkeiten, also algebraische Zahlen). Mit $V = (m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2) / (m_1 + m_2)$ erhält man die kinetische Gesamtenergie im Schwerpunktsystem,

$$m_1 \cdot v_1'^2 / 2 + m_2 v_2'^2 / 2 = m_1 \cdot m_2 \cdot (v_1 - v_2)^2 / 2(m_1 + m_2).$$

Aus dem Vergleich mit (47) folgt

$$E_{KIN}(\text{Schwerpunktsystem}) = Q.$$


Die maximale umwandelbare Menge an kinetischer Energie ist gleich der gesamten kinetischen Energie im S.P.-System.

3.4 Bewegungsgleichung der Rakete

Der Raketenmotor funktioniert nach dem Prinzip der Impulserhaltung im von äusseren Kräften freien System, wobei das System aus Rakete inklusive Treibstoff im Zeitpunkt des Startes besteht. Wir nehmen an, dass keine äusseren Kräfte wirken, der Gesamtimpuls für den ruhenden Beobachter ("Laborsystem") daher immer null bleibt. Ferner sei die Ausstossrate $\alpha = -dm/dt$ des Treibstoffes und die Ausstosseschwindigkeit \vec{u}_0 relativ zur Rakete konstant, dann ist

$$m(t) = m_{Start} - \alpha \cdot t$$

die beschleunigte und **zeitabhängige** Raketenmasse (inklusive Treibstoffrest). Zur Zeit t sei die Raketengeschwindigkeit $\vec{v}(t)$. Im Zeitelement dt wird eine Treibstoffmasse $-dm = \alpha \cdot dt$ ausgestossen. Die Geschwindigkeit \vec{u} dieses Massenelementes beträgt im Laborsystem

$$\vec{u} = \vec{v}(t) + \vec{u}_0$$


Der Gesamtimpuls ändert sich während der Zeit dt nicht, es ist

$$\begin{aligned} (-dm/dt) \cdot (\vec{v}(t) + \vec{u}_0) + d(m(t) \cdot \vec{v}(t))/dt &= 0, \text{ somit} \\ -dm \cdot \vec{v}(t) - dm \cdot \vec{u}_0 + dm \cdot \vec{v}(t) + m(t) \cdot d\vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

Trennung der Variablen liefert: $d\vec{v} = \vec{u}_0 \cdot dm/m(t)$ und

$$\int_0^{V_{end}} d\vec{v} = \vec{u}_0 \cdot \int_{m_{Start}}^{m_{leer}} dm/m(t) \quad \text{oder} \quad \boxed{\vec{v}_{end} = -\vec{u}_0 \cdot \ln(m_{Start}/m_{leer})}.$$

Das Verhältnis von End- zu Ausstosseschwindigkeit ist durch das Verhältnis von Startgewicht zu Leergewicht bestimmt.

Frage: Was ist der Sinn mehrstufiger Raketenbauweise?

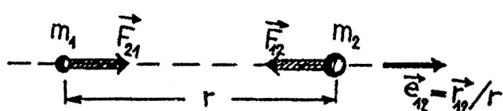
Kapitel 4

Gravitation

Im Abschnitt 2.2 haben wir festgestellt, dass Kräfte ein Ausdruck der „Wechselwirkung“ zwischen Körpern sind. Was wissen wir nun über die Natur dieser Wechselwirkungen? Die Beobachtung hat ergeben, dass vier fundamentale Arten von Wechselwirkungen (oder Kräften) existieren:

	Relative Stärke
a) Gravitationswechselwirkung	10^{-40}
b) Elektromagnetische Wechselwirkung	10^{-2}
c) Starke Wechselwirkung	1
d) Schwache Wechselwirkung	10^{-12}

Die Kräfte der starken und schwachen Wechselwirkungen wirken nur auf Distanzen von 10^{-15} m, bzw. 10^{-18} m. Sie treten in Atomkernen und zwischen Elementarteilchen auf. Die elektromagnetischen Kräfte haben eine unbegrenzte Reichweite, sie sind für atomare, chemische und biologische Vorgänge verantwortlich. Gravitationskräfte haben ebenfalls unbegrenzte Reichweite, wirken zwar zwischen allen Körpern, sind aber relativ schwach, haben grosse Bedeutung in der Astronomie und natürlich als Gewichtskraft im täglichen Leben. Der geniale Newton hat als erster erkannt (etwa 1683), dass die Gewichtskraft und die Kräfte zwischen Himmelskörpern denselben Ursprung haben. Auf Grund der etwa 70 Jahre früher empirisch gefundenen Gesetze der Planetenbewegung (Kepler, 1609 und 1615) ist es ihm gelungen, das fundamentale **Gravitationsgesetz** zu formulieren. Wir fassen es hier zunächst als Kraftgesetz auf, das für zwei **Massenpunkte** gilt. Es lautet:

$$(48) \quad \vec{F}_{12} = -\vec{e}_{12} \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2.$$


Zwischen zwei Massenpunkten wirkt eine anziehende Kraft, die dem Produkt der Massen proportional und dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional ist. Die Wirkungslinie der Kräfte liegt auf der Verbindungsgeraden der Massenpunkte.

Die fundamentale Naturkonstante G heisst **Gravitationskonstante**. Sie wurde zum ersten mal von Henry Cavendish (1798) im Laborversuch ermittelt (Cavendish-Drehwaage). Moderne Messungen ergeben den Wert

$$G = (6.6726 + 0.0005) \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}.$$

Isaac Newton kannte den Wert von G noch nicht. Beachte, dass (48) nur auf Paare von Massenpunkten anwendbar ist. Die Erfahrung hat uns aber gelehrt, dass das **Superpositionsprinzip** gilt. Dies bedeutet, dass bei Systemen von vielen Massenpunkten auf eine herausgegriffene Masse alle andern einzeln nach Massgabe von (48) additiv wirken. Um die Anziehungskraft beliebiger Körper zu berechnen,

muss man diese in infinitesimale Massenelemente aufteilen und die Einzelkräfte aufintegrieren. (Im Allgemeinen ist es falsch, für die Rechnung die Gesamtmasse von jedem Körper in seinen Schwerpunkt zu setzen). Hingegen ist es richtig, bei zwei kugelsymmetrischen Massenverteilungen für den Abstand r in (48) die Distanz der Kugelzentren und für m_1 und m_2 die Kugelmassen zu nehmen.

Setzt man für die Erde Kugelsymmetrie voraus, so lässt sich durch Gleichsetzen des Gewichtes $m \cdot g$ einer Masse m und der Gravitationsanziehung bei Kenntnis der Gravitationskonstanten G und des Erdradius R die Masse m_E der Erde ermitteln. Aus

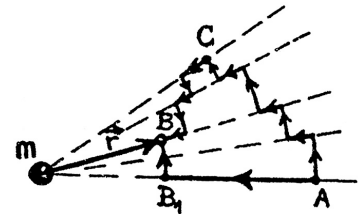
$$m \cdot g = G \cdot m_E \cdot m/R^2 \quad \text{folgt} \quad \boxed{m_E = g \cdot R^2/G.}$$

4.1 Gravitationsfeld und Gravitationspotential eines Massen-Punktes

Nach dem Gravitationsgesetz erfährt die Einheitsmasse 1 kg im Abstand r von einem Massenpunkt m die Kraft $-G \cdot m/r^2 \cdot \vec{e}_r$ N/kg. Wir bezeichnen diese Kraft pro Masseneinheit als

$$\text{Gravitations-Feldstärke } \vec{f}: \quad \boxed{(49) \quad \vec{f} = -G \cdot m/r^2 \cdot \vec{e}_r.}$$

Wir sagen: Der Massenpunkt m ist vom Gravitationsfeld $\vec{f}(\vec{r})$ umgeben. Vektorfelder können durch ihre **Feldlinien** dargestellt werden. Definitionsgemäss haben Feldlinien die Eigenschaft, dass der Feldvektor in jedem ihrer Punkte tangentiell gerichtet ist. Diese tangentiellen Feldvektoren geben die Richtung der Feldlinie an. Das Gravitationsfeld von m ist durch radial nach innen gerichtete Feldlinien, die aus dem Unendlichem kommen, gekennzeichnet. Bilden wir jetzt das Linienintegral von \vec{f} zwischen den Punkten A und B, so sehen wir sofort, dass dieses nicht vom Integrationsweg abhängt, denn wir können jede Linie in beliebig feine Elemente zerlegen, die entweder radial gerichtet sind oder in einer zu m konzentrischen Kugelfläche liegen. Nur die radialen Wegstücke tragen zum Integral bei, so dass



$$\int_A^B \vec{f} \cdot \vec{dr} = \int_A^{B_1} \vec{f} \cdot \vec{dr} \quad \text{ist.}$$

| **Das Gravitationsfeld ist konservativ.**

Die potentielle Energie der Einheitsmasse an der Stelle \vec{r} nennen wir das **Potential** $V(\vec{r})$.

| **Kugelflächen $r = \text{const.}$ sind Äquipotentialflächen.**

Zur Berechnung von $V(r)$ ist es sinnvoll, den Nullpunkt am Rand des Kraftfeldes zu wählen, d.h. in diesem Fall im Unendlichen. Nach (32) wird dann

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{f}(\vec{r}) \cdot \vec{dr} \quad \text{oder} \quad V(\vec{r}) = G \cdot m \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{e}_r \cdot \vec{dr}/r^2.$$

Integration längs einer radialen Feldlinie ($\vec{e}_r \cdot \vec{dr} = dr$) ergibt:

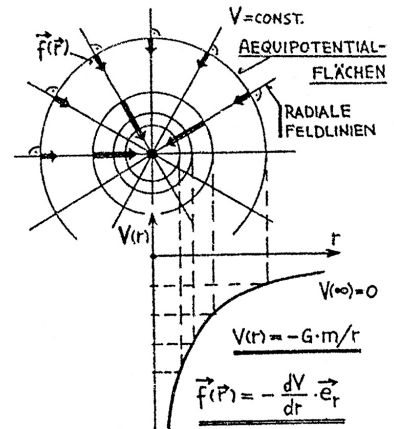
$$V(r) = G \cdot m \cdot \int_{\infty}^r dr/r^2, \text{ also}$$

$$(49) \quad V(r) = -G \cdot m/r,$$

Gravitationspotential des Massenpunktes.

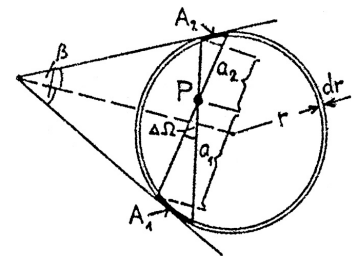
Dimension: Arbeit/Masse, Einheit: J/kg

Das Potential $V(r)$ ist gleich der Arbeit, die man aufwenden muss, um die Masse 1 kg vom Unendlichen in den Abstand r zu bringen (hier negativ, weil die Gravitationskraft anziehend ist).



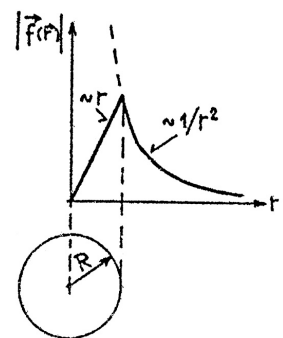
4.2 Gravitationsfeld und Gravitationspotential der homogenen Kugel

Ausserhalb einer homogenen Kugel herrscht das gleiche Feld \vec{f} wie wenn die gesamte Masse im Kugelmittelpunkt sitzen würde. (Den Beweis dafür werden wir in der Elektrizitätslehre an Hand des Coulombfeldes führen). Hier stellen wir die Frage nach dem Feld im Innern der Kugel. Nehmen wir vorerst eine dünnwandige Kugelschale mit Radius r und Wandstärke dr . In einen beliebigen inneren Punkt P legen wir die Spitze eines Doppelkegels mit dem Öffnungswinkel $\Delta\Omega(\text{sr})$, der die Flächenstücke A_1 und A_2 aus der Kugelschale ausschneidet. Aus nebenstehender Figur kann man ablesen: $A_1 = \Delta\Omega \cdot a_1^2 / \cos\beta$ und $A_2 = \Delta\Omega \cdot a_2^2 / \cos\beta$. Die zu den Flächenelementen gehörenden Massen sind somit proportional den Quadraten ihrer Abstände von P , so dass ihre Feldbeiträge in P sich nach dem Gravitationsgesetz gerade kompensieren. Auf diese Weise lässt sich die ganze Kugelschale aus Massenelementen zusammensetzen, deren Feldstärken im beliebigen inneren Punkt P sich paarweise aufheben. Wir haben damit bewiesen:



Eine Kugelschale erzeugt kein Gravitationsfeld im Innern.

Nun betrachten wir den inneren Punkt P an der Stelle \vec{r} einer homogenen Kugel mit dem Radius R und der Masse m . Dort trägt nur die innere Teilkugel der Masse $m' = m \cdot (r/R)^3$ zum Feld bei. Die Hohlkugel mit Innenradius r und Aussenradius R gibt keinen Beitrag, denn wir können sie auffassen als Summe von Kugelschalen. Im Bereich $0 \leq r < R$ erhalten wir für das Gravitationsfeld:



$$\vec{f}(\vec{r}) = -G \cdot m \cdot (1/R)^3 \cdot r \cdot \vec{e}_r, \text{ und für } r \geq R :$$

$$\vec{f}(\vec{r}) = -G \cdot m/r^2 \cdot \vec{e}_r.$$

Das Potential $V(r)$ ausserhalb der Kugel entspricht natürlich jenem der punktförmigen Masse m , d.h. für $r \geq R$ ist

$$V(r) = -G \cdot m/r.$$

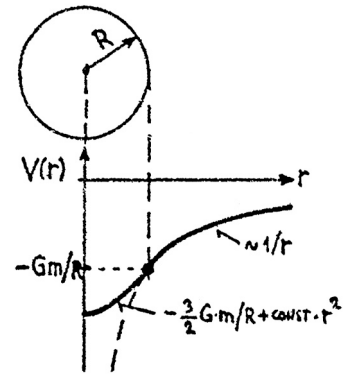
Gemäss (32) erhalten wir $V(r)$ im Innern aus dem Feld $f(r)$:

$$V(r) = V(R) - \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \text{ oder}$$

$$V(r) = -G \cdot m/R + G \cdot m \cdot (1/R)^3 \int_R^r r \cdot dr,$$

und somit

$$V(r) = -(3/2) \cdot G \cdot m/R + G \cdot m/(2R^3) \cdot r^2.$$

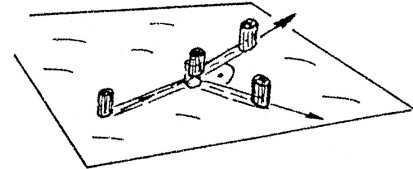


Das Potential der homogenen Kugel steigt parabolisch an bis zum Kugelradius R ; $V(r)$ und $-dV/dr$ (d.h. die Feldstärke) sind an der Kugeloberfläche stetig.

Demonstrationen:

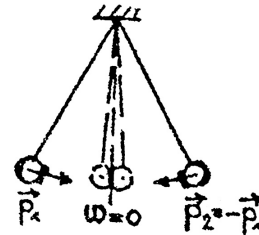
1. Elastischer Stoss gleicher Massen

Rechter Winkel zwischen Endgeschwindigkeiten.



2. Inelastischer Stoss im Schwerpunktsystem

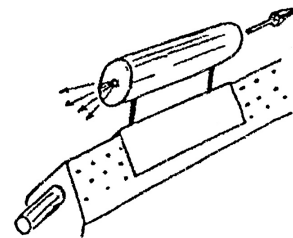
Nach dem Stoss: $E(kin) = 0$.



3. Knallgaskanone (Rückstoss)

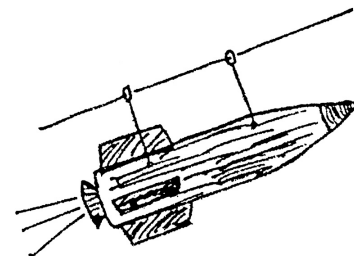
4. Raketenwagen auf LKB

Dampfdruckstoss.

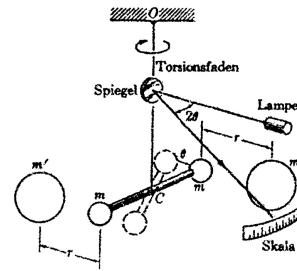


5. Rakete

6 bar Wasserdruck.



6. Cavendish Drehwaage



4.3 Planetenbewegung (Keplerproblem)

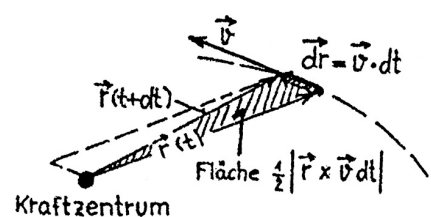
Für die Bewegung der Planeten um die Sonne hat Johannes Kepler (1571-1630) auf Grund des Beobachtungsmaterials von Tycho Brahe (1546-1601) seine drei Gesetze formuliert:

- I. Der Planet beschreibt eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- II. Der Radiusvektor von der Sonne nach dem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- III. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Ellipsenachsen.

Isaac Newton ist es gelungen, diese drei Gesetze auf ein einziges, nämlich das Gravitationsgesetz (48), zurückzuführen. Eine vollständige Herleitung der Keplergesetze durch Lösen der Bewegungsgleichung (9) mit dem Kraftgesetz (48) würde zu weit führen. Wir beschränken uns darauf, einige Folgerungen aus Energie- und Drehimpulssatz zu ziehen. Die Sonnenmasse m_s soll im Vergleich zur Planetenmasse m beliebig gross sein, so dass der ruhende Schwerpunkt mit dem Sonnenmittelpunkt zusammenfällt. Somit zeigt die auf den Planeten wirkende Kraft immer auf den raumfesten Sonnenmittelpunkt. Ein Kraftfeld, dessen Feldvektoren alle auf einen festen Punkt zeigen, nennt man ein **zentrales Kraftfeld** und die daraus resultierende Bewegung eine **Zentralbewegung**. Die Planetenbewegung gehört zur Klasse der Zentralbewegungen. Das Drehmoment der Zentralkraft bezogen auf das Kraftzentrum (hier der Sonnenschwerpunkt) ist nach (36) gleich null und nach dem Drallsatz (39) ist dann der Drall konstant.

Bei Zentralbewegungen ist der Drall bezogen auf das Kraftzentrum konstant.

Konstante Richtung des Drallvektors \vec{L} bedeutet, dass die Planetenbahn in einer **Ebene** verläuft (in der Normalebene zu \vec{L}). Nun durchläuft der Planet im Zeitelement dt das Wegelement $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$ und der Betrag des Vektorproduktes $\vec{r} \times \vec{v} \cdot dt$ ist die von \vec{r} und $d\vec{r}$ aufgespannte Fläche oder das doppelte der vom Fahrstrahl \vec{r} in der Zeit dt überstrichenen Fläche. Weil aber $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$ konstant ist, wird in gleichen Zeitelementen dt von \vec{r} immer die gleiche Fläche bestrichen. Das II. Keplergesetz ist eine Konsequenz des Drallsatzes.



Bei Zentralbewegungen gilt der Flächensatz.

Die Planetenbahn hängt von zwei **Konstanten der Bewegung**, nämlich der **Gesamtenergie E** und dem **Drehimpuls \vec{L}** ab:

$$(50) \quad E = m \cdot v^2/2 - G \cdot m_s \cdot m/r \quad \text{und} \quad \vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}.$$

Bezeichnen wir die Komponente von \vec{v} in Richtung des Fahrstrahls \vec{r} mit v_r und jene senkrecht dazu

(in Richtung von φ) mit v_φ so ist

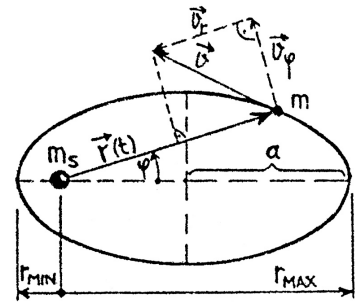
$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 \quad \text{und} \quad L = m \cdot r \cdot v_\varphi$$

Die kinetische Energie lässt sich jetzt schreiben als

$$m \cdot v^2/2 = m \cdot (v_r^2 + (L/mr)^2)/2,$$

dies eingesetzt in (50) ergibt für die Gesamtenergie E:

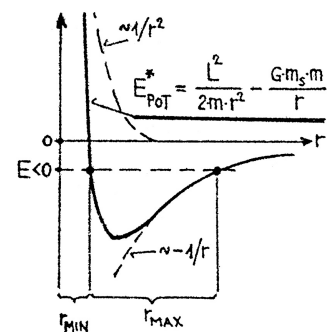
$$(51) \quad m \cdot v_r^2/2 + L^2/(2mr^2) - G \cdot m_s \cdot m/r = E.$$



Gleichung (51) würde man auch erhalten für eine Masse m , die sich in einem eindimensionalen Kraftfeld mit der potentiellen Energie

$$E_{POT}^* = L^2/(2mr^2) - G \cdot m_s \cdot m/r$$

(auf der r -Achse) bewegt. Die Lösung $r(t)$ stellt genau das zeitliche Verhalten der Länge des Radiusvektors \vec{r} bei der wirklichen Planetenbewegung dar. Wir können aus nebenstehender Darstellung von $E_{POT}^*(r)$ ablesen, dass ein **gebundener Zustand** eine **negative Gesamtenergie E** hat; der Abstand r von der Sonne liegt dann zwischen r_{MIN} und r_{MAX} . Die Summe dieser extremen Abstände ist gerade die grosse Achse der Bahnellipse. Eine vollständige Behandlung des Keplerproblems führt zum Resultat, dass die Bahnen immer **Kegelschnitte** sind:



- $E < 0$, Ellipse
- $E = 0$, Parabel ($v = 0$ im Unendlichen)
- $E > 0$, Hyperbel ($v > 0$ im Unendlichen)

Jene Geschwindigkeit, welche an einem Ort \vec{r} die Gesamtenergie E zu null macht, heisst die **Fluchtgeschwindigkeit**. Sie ist die Geschwindigkeit, die man an der betreffenden Stelle einer Masse erteilen muss, damit sie das Gravitationsfeld der Sonne verlassen kann. Anstatt der analytischen Lösung der Bewegungsgleichung zeigen wir als Schauversuch, wie mit der Methode „kleiner Schritte“ die Planetenbahn mit dem Computer numerisch leicht berechnet werden kann.

Übungsaufgabe:

- a) Zeige für den Spezialfall der kreisförmigen Planetenbewegung, dass das dritte Keplergesetz gilt.
- b) Berechne r_{MIN} und r_{MAX} für gegebenes E und zeige, dass $E = -G \cdot m_s \cdot m/(2a)$ ist (d.h.: die Gesamtenergie ist negativ und hängt nur von der grossen Ellipsenachse ab).

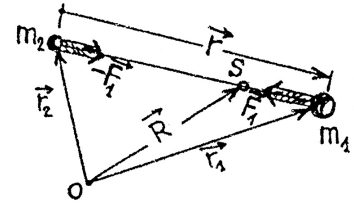
4.4 Zweikörperproblem und reduzierte Masse

Die Bewegungen von Sonne und Planet, von Proton und Elektron im Wasserstoffatom oder von einem zweiatomigen Molekül, sind wichtige Beispiele von Zweikörperproblemen. Die Systeme aus zwei Massen m_1 und m_2 deren Bewegung durch $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$ beschrieben wird. Wir wollen voraussetzen, dass nur innere Kräfte wirken und dass der Schwerpunkt in unserem Koordinatensystem ruht. Auf m_1

wirke die Kraft \vec{F}_1 und auf m_2 die Kraft $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ (Reaktionsprinzip). Diese inneren Kräfte werden nur von der relativen Lage $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ abhängen. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$(52) \quad m_1 \cdot d^2\vec{r}_1/dt^2 = \vec{F}_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{und} \quad m_2 \cdot d^2\vec{r}_2/dt^2 = -\vec{F}_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Die beiden Gleichungen sind **gekoppelt** weil \vec{F}_1 von der Position beider Teilchen abhängt. Wir führen nun die **Relativkoordinate** \vec{r} ein und leiten zweimal nach der Zeit ab:



$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t), \quad d^2\vec{r}/dt^2 = d^2\vec{r}_1/dt^2 - d^2\vec{r}_2/dt^2.}$$

Eliminieren wir mit Hilfe von (52) $d^2\vec{r}_1/dt^2$ und $d^2\vec{r}_2/dt^2$, folgt

$$(53) \quad d^2\vec{r}/dt^2 = (1/m_1 + 1/m_2)\vec{F}_1(\vec{r})$$

Definition der **reduzierte Masse** μ , durch $1/m_1 + 1/m_2 = 1/\mu$ führt zu

$$\boxed{(54) \quad \mu \cdot d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}_1(\vec{r}).}$$

Damit ist das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem zurückgeführt, nämlich auf die Bewegung der reduzierten Masse μ im Kraftfeld $\vec{F}_1(\vec{r})$. Die Lösung $\vec{r}(t)$ ergibt die Relativbewegung der Massen m_1 und m_2 . Aus $\vec{r}(t)$ bekommt man durch Rücktransformation $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{R} + \vec{r}(t) \cdot m_2/(m_1 + m_2) \quad \text{und} \quad \vec{r}_2(t) = \vec{R} - \vec{r}(t) \cdot m_1/(m_1 + m_2).$$

Die beiden Teilchen beschreiben eine Zentralbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt.

Für den Fall $m_2 \gg m_1$, wie wir dies beim Keplerproblem angenommen haben, wird $\vec{r}_2 = \vec{R}$, so dass m_2 im Schwerpunkt liegt. Die Bewegung der Sonne um den Schwerpunkt ist vernachlässigbar, die reduzierte Masse ist dann gleich m_1 (Planetenmasse).

Übungsaufgabe:

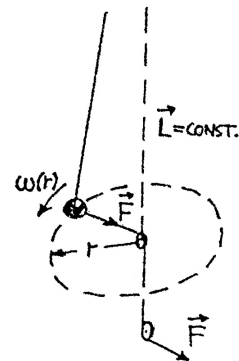
Zwei gleich grosse Massen m sind durch eine Feder mit der Federkonstanten k gekoppelt. Mit welcher Frequenz schwingt dieses System entlang der Verbindungsgeraden?

Demonstrationen:

1. Zentralbewegung

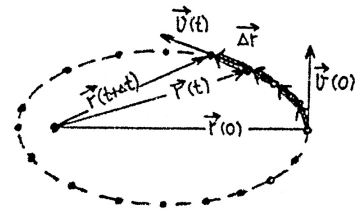
Der Drehimpuls $L = m \cdot \omega \cdot r^2$ bleibt erhalten.

$$\omega(r) = L/(m \cdot r^2).$$



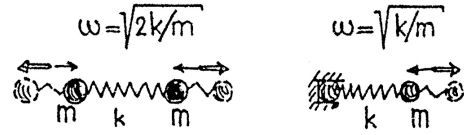
2. Numerische Bahnberechnung mit dem Computer

Ausgehend von den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0)$ und $\vec{v}(0)$ wird die Bahn in kleinen Schritten approximiert.



3. Reduzierte Masse

Das freie System schwingt mit grösserer Frequenz, als wenn die eine Masse festgehalten wird.



Kapitel 5

Beschleunigte Bezugssysteme; Trägheitskräfte

In einem Inertialsystem S bewegt sich ein Massenpunkt m (zeitunabhängige Masse) definitionsgemäss derart, dass die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m \cdot d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}$$

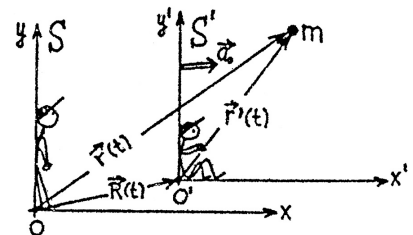
erfüllt ist. Wenn sich ein anderes Bezugssystem S' relativ zum Inertialsystem S **beschleunigt** bewegt, so gelten die Newton'schen Axiome in S' nicht.

| **Beschleunigte Systeme sind keine Inertialsysteme.**

Nachfolgend wollen wir nun untersuchen, welche Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt in einem beschleunigten System korrekt ist.

5.1 Gleichförmig geradlinig beschleunigtes System

Der Massenpunkt m beschreibe im Inertialsystem S unter dem Einfluss eines Kraftfeldes \vec{F} (z.B. eines Gravitationsfeldes) die Bewegung $\vec{r}(t)$. Ein zweites System S' bewege sich relativ zu S translatorisch mit der konstanten Beschleunigung \vec{a}_0 . Es sei $\vec{R}(t)$ der Ortsvektor des beschleunigten Koordinatenursprungs O', also



$$d^2\vec{R}/dt^2 = \vec{a}_0.$$

Der in S' ruhende, relativ zum Inertialsystem mit \vec{a}_0 beschleunigte Beobachter, misst zur Zeit t die Position $\vec{r}'(t)$. Offenbar gilt jederzeit die Beziehung

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t) \quad \text{und somit auch} \quad d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{a}_0 + d^2\vec{r}'/dt^2.$$

In S' wird dann

$$(55) \quad m \cdot d^2\vec{r}'/dt^2 = m \cdot d^2\vec{r}/dt^2 - m \cdot \vec{a}_0 \quad \text{oder} \quad m \cdot d^2\vec{r}'/dt^2 = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_0.$$

Im beschleunigten System tritt in der Bewegungsgleichung neben der „echten“, durch physikalische Wechselwirkung erzeugten Kraft \vec{F} , noch eine so genannte „Scheinkraft“ auf, nämlich

$$(56) \quad \vec{F}_{\text{Trägheit}} = -m \cdot \vec{a}_0, \quad \text{Trägheitskraft.}$$

Dass die Trägheitskraft (56) nicht eine Kraft im Sinne der Newton'schen Axiome sein kann, erkennt man unter anderem daran, dass es dazu keine Gegenkraft gibt.

Wichtig: Trägheitskräfte treten nur in beschleunigten Bezugssystemen auf.

Beispiele:

a) Anfahrender Personenlift

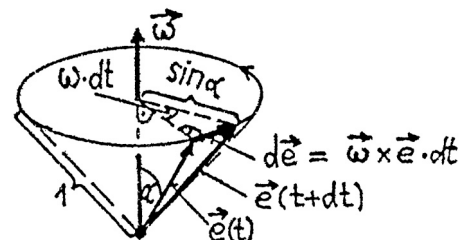
Das „Gewicht“ eines Menschen im mit \vec{a} beschleunigten Lift ist $m(\vec{g} - \vec{a})$, d.h. eine Personenwaage im Lift zeigt höhere Werte beim Anfahren nach oben und tiefere Werte beim Anfahren nach unten, als dem wahren Gewicht entspricht. Reisst das Zugseil des Liftes, zeigt die Waage null (Schwerelosigkeit des Astronauten im frei fallenden Raumfahrzeug).

b) Gefäß mit Flüssigkeit, auf schiefer Ebene gleitend

Eine mit Flüssigkeit gefüllte Küvette gleitet auf dem geneigten Luftkissenbalken nach unten. Das mitbewegte System, in welchem die Flüssigkeit ruht, ist mit $a = g \cdot \sin \alpha$ entlang der schiefen Ebene abwärts beschleunigt. Jedes Flüssigkeitsteilchen erfährt die Erdanziehungskraft $m \cdot g$ senkrecht nach unten und die Trägheitskraft vom Betrag $g \cdot \sin \alpha$, die entlang der schiefen Ebene nach oben gerichtet ist. Die resultierende Kraft steht gerade normal zur schiefen Ebene, so dass sich die Flüssigkeitsoberfläche parallel zu dieser einstellt (siehe Demonstration).

5.2 Rotierendes Bezugssystem; Zentrifugalkraft und Corioliskraft

Wir betrachten den Einheitsvektor \vec{e} , der um eine raumfeste Drehachse mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, so dass er die Mantelfläche eines Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel 2α überstreicht. Zur Beschreibung dieser Drehbewegung führen wir den **axialen Vektor** $\vec{\omega}$ ein, der in der Drehachse liegt, dessen Betrag gleich der Kreisfrequenz ist und dessen Richtung gleich der Bewegungsrichtung einer mitdrehenden Rechtsschraube ist. Anhand nebenstehender Figur lesen wir ab, dass die zeitlichen Ableitungen $d\vec{e}/dt \equiv \dot{\vec{e}}$ und $d^2\vec{e}/dt^2 \equiv \ddot{\vec{e}}$ des Einheitsvektors gerade



$$(57) \quad \dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e} \quad \text{und} \quad \ddot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}) \quad \text{sind.}$$

Nun soll ein Koordinatensystem S' , dessen Ursprung mit jenem eines Inertialsystems S zusammenfällt, durch das orthogonale Dreibein der Einheitsvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 und \vec{e}_3 aufgespannt sein und mit konstantem $\vec{\omega}$ um eine im Inertialsystem ruhende, durch den Ursprung gehende Achse rotieren. Jetzt stellen wir den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes m durch die Komponenten x'_1, x'_2 und x'_3 des rotierenden Systems S' dar:

$$\vec{r}(t) = x_1'(t) \cdot \vec{e}_1(t) + x_2'(t) \cdot \vec{e}_2(t) + x_3'(t) \cdot \vec{e}_3(t).$$

Differenzieren nach t ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i' \cdot \vec{e}_i + x_i' \cdot \dot{\vec{e}}_i) \quad \text{und} \\ \ddot{\vec{r}} &= \sum_{i=1}^3 (\ddot{x}_i' \cdot \vec{e}_i + 2 \cdot \dot{x}_i' \cdot \dot{\vec{e}}_i + x_i' \cdot \ddot{\vec{e}}_i). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (57) schreiben wir

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 (\ddot{x}_i' \cdot \vec{e}_i + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{e}_i \cdot \dot{x}_i' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{e}_i \cdot x_i')),$$

was dasselbe ist, wie

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}').$$

$\ddot{\vec{r}}'$, \vec{v}' und \vec{r}' bedeuten Beschleunigung, Geschwindigkeit und Ortsvektor, wie sie ein im rotierenden Bezugssystem sitzender Beobachter misst. Die Beschleunigung im Inertialsystem ist $\ddot{\vec{r}}$ und $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$ somit die „echte“ wirkende Kraft. Wir bringen das obige Resultat in die Form

$$(58) \quad m \cdot \ddot{\vec{r}}' = \vec{F} + m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) + 2 \cdot m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}.$$

Die Gleichung (58) besagt, dass in einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem neben der echten Kraft \vec{F} im Allgemeinen noch zwei Trägheitskräfte auftreten, nämlich

$$\begin{array}{ll} \vec{F}_Z = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}), & \text{die Zentrifugalkraft und} \\ \vec{F}_C = 2 \cdot m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}, & \text{die Corioliskraft.} \end{array}$$

Zentrifugalkraft:

Die Bedeutung des zweiten Summanden in (58), also der Zentrifugalkraft, machen wir uns am speziellen Beispiel der gleichförmigen Kreisbewegung (siehe S.19) klar.

Ein **Beobachter im Inertialsystem S** stellt fest: Die Masse m bewegt sich mit konstanter Kreisfrequenz ω auf einer Kreisbahn. Für die Bahnkrümmung ist eine Zentripetalkraft (z.B. eine Fadenkraft) $\vec{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}$ verantwortlich.

Ein **Beobachter im mitrotierenden System S'** sagt: Die Masse m ist in Ruhe ($\vec{v}' = 0$, $\ddot{\vec{r}}' = 0$). Nach (58) ist also $\vec{F} + m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) = 0$.

Die zu \vec{F} addierte Zentrifugalkraft ist radial nach aussen gerichtet und hat den Betrag $m \cdot \omega^2 \cdot r'$. Folglich muss die Fadenkraft $\vec{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}'$ sein.

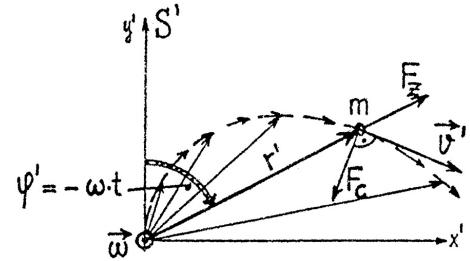
Beide Beobachter stellen die gleiche „echte“ Kraft fest. (Es gilt immer $\vec{r} = \vec{r}'$, wenn S und S' gemeinsamen Ursprung haben).

Übungsaufgabe:

Die Erdbeschleunigung am Nordpol beträgt 9.83 m/s^2 . Wie gross ist sie in 45° Breite und am Äquator, wenn man die Erde als homogene Kugel mit dem Radius $R = 6370 \text{ km}$ betrachtet?

Corioliskraft:

Zur Illustration der Corioliskraft nehmen wir an, eine Masse m bewege sich im Inertialsystem S gleichförmig, d.h. kräftefrei, mit $\vec{r}(t) = (0, v_0 \cdot t, 0)$ in y -Richtung. Rotiert nun S' mit konstantem $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ um die z -Achse, so bildet die y' -Achse zur Zeit t mit dem Ortsvektor $\vec{r}(t)$ den Winkel $\varphi = \omega \cdot t$. Vom rotierenden Beobachter in S' aus gesehen bedeutet dies, dass $\vec{r}'(t)$ durch die Polarkoordinaten



$$r' = v_0 \cdot t \quad \text{und} \quad \varphi' = -\omega \cdot t$$

gegeben ist was einer spiralenartigen Bahn entspricht. Die Ursache der Bahnkrümmung im rotierenden System ist die Corioliskraft. Sie tritt nur auf, wenn sich ein Körper relativ zu S' bewegt und steht immer senkrecht auf \vec{v}' . Dagegen ist die Zentrifugalkraft in S immer vorhanden (auch in diesem Beispiel, zusätzlich zur Corioliskraft). Analog zum soeben behandelten Fall treten auf der nördlichen Halbkugel der Erde bei allen Horizontalbewegungen nach rechts gerichtete Corioliskräfte auf, auf der südlichen Hemisphäre nach links gerichtete.

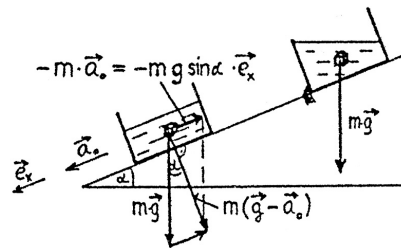
Übungsaufgabe:

Wie gross ist das Verhältnis von Corioliskraft zu Körpergewicht bei einem Sprinter, der in Basel (Breite $\phi = 47.5^\circ$) mit $v' = 10 \text{ m/s}$ läuft?

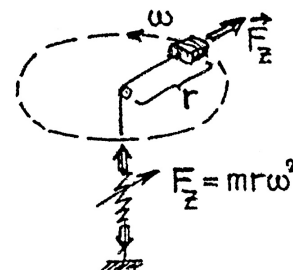
Demonstrationen:

1. Beschleunigte Kuvette mit Flüssigkeit

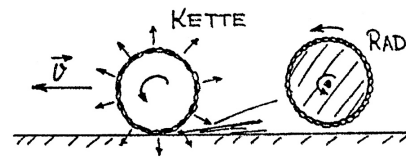
Die Flüssigkeitsoberfläche stellt sich parallel zur schiefen Ebene ein.



2. Messung der Zentrifugalkraft

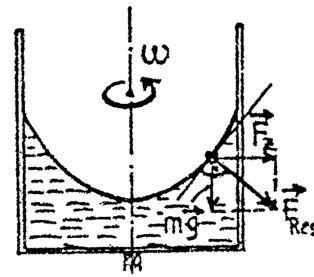


3. Rotierende Kette



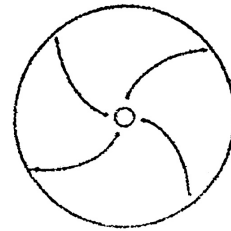
4. Rotierende Flüssigkeit

Parabolische Oberfläche wegen der Zentrifugalkraft.



5. Corioliskraft

Wassertropfen auf rotierender Scheibe.



Kapitel 6

Mechanik des starren Körpers

Ein starrer Körper ist dadurch gekennzeichnet, dass er seine Form unter dem Einfluss äusserer Kräfte nicht ändert.

Wir denken uns den Körper aus kleinen Massenelementen Δm_i zusammengesetzt. Für alle Paare Δm_i und Δm_k ist der Abstand

$$|\vec{r}_k - \vec{r}_i| = \text{konstant.}$$

Schwerpunkt: Der starre Körper ist ein Spezialfall eines Systems von Massenpunkten. Nach (42) ist die Schwerpunktskoordinate gegeben durch

$$\vec{R} = (\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{r}_i) / m, \quad \text{wobei} \quad m = \sum_i \Delta m_i.$$

Wenn wir den Übergang zu differentiell kleinen Massenelementen dm machen, geht die obige Summe in ein Volumenintegral über:

$$(59) \quad \vec{R} = (1/m) \iiint_{Vol} \vec{r} \cdot dm, \quad \iiint_{Vol} dm = m.$$

Wenn die Massenverteilung eines Körpers durch die ortsabhängige Dichte $\rho(\vec{r}) \text{ kg/m}^3$ gegeben ist, wird die Lage des Schwerpunktes folgendermassen berechnet:

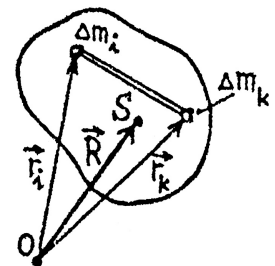
$$(60) \quad \vec{R} = (1/m) \cdot \iiint_{Vol} \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \cdot dV, \quad (\rho(\vec{r}) \cdot dV = dm)$$

Das Volumenelement dV ist in kartesischen Koordinaten $dV = dx \cdot dy \cdot dz$.

Um die Lage eines starren Körpers im Raum eindeutig festzulegen, benötigen wir die Angabe von sechs Koordinaten. Wir markieren einen Punkt des Körpers, z.B. den Schwerpunkt S, und fixieren dessen Position durch drei Koordinaten, wir haben

| 3 Freiheitsgrade der Translation.

Bei festgehaltenem Punkt S kann jeder andere Punkt sich auf einer Kugelfläche bewegen („kreiseln“). Mit zwei Koordinaten können wir die Position einer dieser Punkte auf der Kugel festlegen (analog Länge und Breite auf der Erdkugel). Diese beiden festen Punkte definieren eine Achse, um die sich der Körper drehen lässt, so dass noch eine Winkelangabe erforderlich ist. Somit besitzt der starre Körper



3 Freiheitsgrade der Rotation.

Betrachten wir eine bestimmte Anfangslage A eines starren Körpers, der in eine beliebige Endlage B gebracht werden soll, so kann dies immer in zwei Schritten erreicht werden.

- Durch eine reine Translation, wobei der Schwerpunkt um den Translationsvektor $\vec{T} = \vec{R}(B) - \vec{R}(A)$ verschoben wird. Jeder andere Punkt wird um denselben Vektor \vec{T} verschoben.
- Durch eine reine Rotationsbewegung um den Schwerpunkt.

Der starre Körper besitzt 6 Freiheitsgrade.

6.1 Drall und Drallsatz für ein System von Massenpunkten

Im Abschnitt 2.5 haben wir für einen Massenpunkt die Begriffe Drehmoment und Drall bezogen auf einen festen Drehpunkt eingeführt. Besteht ein System aus vielen Massenpunkten Δm_i , so addieren sich deren Drehimpulse $\vec{L}_i = \Delta m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i$ zum Gesamtdrall

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i, \quad \text{und es wird} \quad d\vec{L}/dt = \sum_i d\vec{L}_i/dt.$$

Nach dem Drallsatz (39) für einen Massenpunkt ist aber

$$d\vec{L}_i/dt = \vec{M}_i, \quad \text{mit dem Drehmoment} \quad \vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

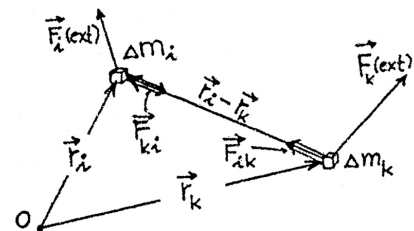
\vec{F}_i bedeutet die Summe aller Kräfte (innere und äussere), welche an Δm_i angreifen. Die zeitliche Änderung des Gesamtdralls ist jetzt

$$d\vec{L}/dt = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Beim Summieren heben sich jedoch die Momente der inneren Kräfte paarweise auf. Um dies einzusehen genügt es, die Momente $\vec{M}(int)$ der inneren Kräfte zweier Elemente Δm_i und Δm_k zu betrachten:

$$\begin{aligned} \vec{M}(int) &= \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki} + \vec{r}_k \times \vec{F}_{ik}, \quad \text{und wegen} \quad \vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik} \quad \text{gilt auch} \\ \vec{M}(int) &= (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ki}. \end{aligned}$$

Dieses letzte Vektorprodukt verschwindet aber, weil wir voraussetzen, dass \vec{F}_{ki} auf der Verbindungsgeraden der beiden Massenelemente liegt, also parallel zu $\vec{r}_i - \vec{r}_k$ ist. Wir erhalten damit den Drallsatz.



$$(61) \quad d\vec{L}/dt = \vec{M}(ext), \quad \text{Drallsatz.}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdralls ist gleich dem resultierenden Drehmoment, der am System angreifenden äusseren Kräfte, bezogen auf denselben raumfesten Drehpunkt.

Der Drallsatz (61) gilt ganz allgemein für jedes System, nicht nur für starre Körper. Wirken keine Drehmomente äusserer Kräfte auf das System, ist $d\vec{L}/dt = 0$ und der Drall ist eine Konstante der Bewegung. Es gilt dann der **Satz von der Erhaltung des Drehimpulses**:

| **Der Gesamtdrall eines freien Systems bleibt nach Grösse und Richtung konstant.**

Bemerkung: Wie oben gezeigt wurde, ist der Drallsatz im Rahmen der Punktmechanik und unter Voraussetzung von Zentralkräften zwischen Punktepaaren eine Konsequenz der Newtonschen Axiome. Diese Voraussetzungen sind in der Natur nicht unbedingt erfüllt, so dass wir den Drallsatz lieber als zusätzliches und in der Erfahrung begründetes Axiom der Mechanik auffassen wollen.

6.2 Rotation des starren Körpers um eine raumfeste Drehachse

Wir legen durch einen starren Körper die raumfeste Drehachse A. Es bleibt jetzt nur noch der Drehwinkel φ als Freiheitsgrad. Alle Massenelemente bewegen sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ auf Kreisbahnen. Für das Massenelement Δm_i ist der Betrag der Geschwindigkeit

$$(62) \quad v_i = \omega \cdot \vec{r}_i \cdot \sin \alpha_i \quad \text{oder} \quad v_i = \omega \cdot r_{iA},$$

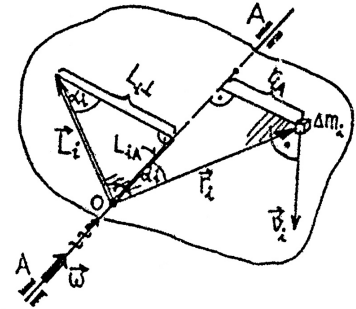
wenn r_{iA} den Abstand von der Drehachse A bedeutet. Für den Vektor \vec{v}_i können wir schreiben

$$(63) \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i.$$

Nun betrachten wir den Drall \vec{L}_i von Δm_i bezüglich des auf der Drehachse liegenden Ursprungs O. Gemäss(37) ist

$$\vec{L}_i = \Delta m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad \text{und} \quad L_i = \Delta m_i \cdot r_i \cdot v_i,$$

weil \vec{r}_i und \vec{v}_i wegen (63) normal zueinander stehen.



Wichtig:

\vec{L}_i ist **nicht parallel** zu $\vec{\omega}$, sondern schliesst den Winkel $\pi/2 - \alpha_i$ mit der Drehachse ein.

Die Komponente L_{iA} von \vec{L}_i auf die Drehachse wird

$$L_{iA} = \Delta m_i \cdot r_i \cdot v_i \cdot \sin \alpha_i \quad \text{oder} \quad L_{iA} = \omega \cdot \Delta m_i \cdot r_{iA}^2.$$

Durch Summation aller Beiträge L_{iA} erhalten wir nun die Komponente L_A des Gesamtdralls \vec{L} auf die Achse A:

$$L_A = \omega \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot r_{iA}^2.$$

Die hier auftretende Summe, deren Wert durch die Massenverteilung relativ zur Drehachse A bestimmt ist, bezeichnen wir als **Trägheitsmoment** bezüglich A.

$$(64) \quad I_A = \sum_i r_{iA}^2 \cdot \Delta m_i \quad \text{oder} \quad I_A = \int r_A^2 \cdot dm, \quad \text{Trägheitsmoment.}$$

Damit wird die Drallkomponente auf die Drehachse A

$$(65) \quad L_A = I_A \cdot \omega.$$

Wenn die Komponente L_{\perp} von \vec{L} senkrecht zur Drehachse bei der Summation verschwindet, nennen wir A eine **Hauptträgheitsachse**. Dies ist z.B. der Fall, wenn A eine Symmetrieachse unseres Körpers

ist, wo zu jedem Δm_i symmetrisch liegende Elemente Δm_k existieren. Dann sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ parallel. Es gilt:

$$(66) \quad \vec{L} = I_A \cdot \vec{\omega} \quad \text{für Hauptträgheitsachsen.}$$

Man kann allgemein zeigen, dass jeder beliebig geformte Körper **mindestens drei Hauptträgheitsachsen** besitzt, die orthogonal zueinander stehen. Symmetrieachsen sind Hauptachsen, aber nicht jede Hauptachse ist Symmetrieachse.

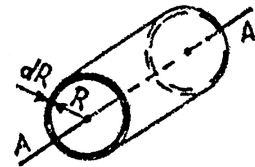
6.2.1 Berechnung von Trägheitsmomenten. Satz von Steiner

Zur Berechnung der Trägheitsmomente, bezogen auf eine Symmetrieachse homogener Körper (konstante Dichte), geben wir drei einfache Beispiele.

1. Dünnwandiger Hohlzylinder

Alle Massenelemente haben von der Zylinderachse denselben Abstand R . Somit ist

$$I_A = \int r_A^2 \cdot dm \quad \text{gerade} \quad \underline{I_A = m \cdot R^2.}$$



2. Vollzylinder

Wir zerlegen den Zylinder in konzentrische Hohlzylinder der Wandstärke dr . Die Masse eines solchen Hohlzylinders ist

$$dm = 2 \cdot \pi \cdot \varrho \cdot r \cdot l \cdot dr \quad (\text{Dichte } \varrho)$$

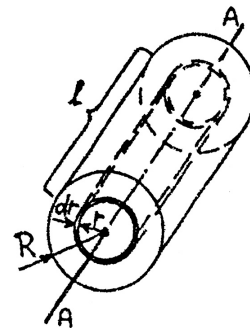
$$\text{und sein Trägheitsmoment } dI_A = 2 \cdot \pi \cdot \varrho \cdot l \cdot r^3 \cdot dr.$$

Integration über alle Hohlzylinder ergibt

$$I_A = 2 \cdot \pi \cdot \varrho \cdot l \cdot \int_0^R r^3 \cdot dr \quad \text{oder} \quad I_A = 2 \cdot \pi \cdot \varrho \cdot l \cdot R^4 / 4.$$

Mit der Gesamtmasse $m = \varrho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot l$ führt dies auf

$$\underline{I_A = m \cdot R^2 / 2.}$$



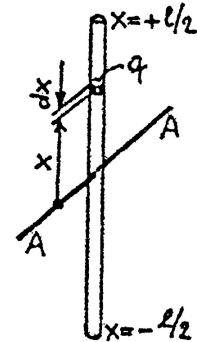
3. Langer, dünner Stab

Das Massenelement $dm = \varrho \cdot q \cdot dx$ (Querschnitt q) an der Stelle x liefert den Beitrag dI_A zum Trägheitsmoment

$$dI_A = \varrho \cdot q \cdot x^2 \cdot dx \quad \text{und Integration ergibt}$$

$$I_A = \varrho \cdot q \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 \cdot dx, \quad I_A = \varrho \cdot q \cdot 2 \cdot (l/2)^3/3.$$

$$\text{Mit } m = \varrho \cdot q \cdot l \quad \text{folgt: } \underline{I_A = m \cdot l^2/12.}$$



Übungsaufgabe:

Berechne I_A bezogen auf den Durchmesser einer dünnen Kreisscheibe.

Zur Berechnung von Trägheitsmomenten bezüglich Achsen, die nicht Symmetrieachsen sind, ist der **Satz von Steiner** oft sehr nützlich. Er lautet: Das Trägheitsmoment I_A einer um A aus dem Schwerpunkt parallel verschobenen Achse ist gleich der Summe aus dem Trägheitsmoment I_S für die Schwerpunktsachse und $m \cdot a^2$.

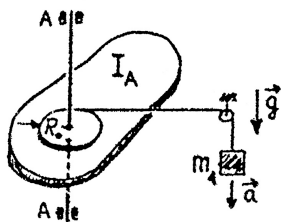
$$\boxed{I_A = I_S + m \cdot a^2.}$$

Übungsaufgabe:

Beweise den Steiner'schen Satz für den Spezialfall einer dünnen, beliebig geformten Scheibe und senkrecht darauf stehenden Achsen,

6.2.2 Starrer Rotator

Ein starrer Körper, der um eine raumfeste Achse A drehbar gelagert ist, soll unter der Wirkung eines achsenparallelen äusseren Drehmomentes $M_A(ext)$ eine Winkelbeschleunigung $d\omega/dt$ erfahren. Wir interessieren uns für den Drehwinkel $\varphi(t)$, wenn der Rotator am Anfang ruht. Aus dem Drallsatz (61) folgt für die Komponente L_A des Drehimpulses:



$$dL_A/dt = M_A(ext).$$

Mit $L_A = I_A \cdot \omega$ folgt die Bewegungsgleichung

$$(70) \quad d\omega/dt = M_A(ext)/I_A \quad \text{oder} \quad \underline{d^2\varphi/dt^2 = M_A(ext)/I_A.}$$

Wenn das Drehmoment $M_A(ext)$ durch das Gewicht $m_1 \cdot \vec{g}$ erzeugt wird, müssen wir beachten, dass nicht nur der Rotator, sondern auch m_1 selbst beschleunigt wird. Da m_1 dieselbe Beschleunigung erfährt, wie ein Punkt auf dem Radius R_0 kann man sich m_1 auf dem Kreisradius R_0 gleichmässig verteilt denken, so dass das Trägheitsmoment I_A des Rotators scheinbar um $m_1 \cdot R_0^2$ vermehrt wird. Durch Integration von (70) erhalten wir dann:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varphi/dt = (m_1 \cdot g \cdot R_0 / (I_A + m_1 R_0^2)) \cdot t \quad \text{und} \\ \varphi(t) = (m_1 \cdot g \cdot R_0 / 2(I_A + m_1 R_0^2)) \cdot t^2. \end{array} \right.$$

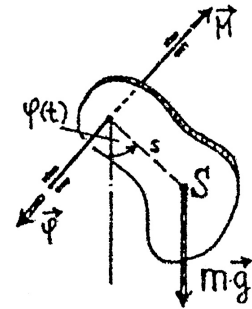
Die Beschleunigung von m_1 nach unten ist dann $a = R_0 \cdot d\omega/dt$, also

$$a = g \cdot m_1 \cdot R_0^2 / (I_A + m_1 R_0^2),$$

was offensichtlich im Grenzfall $I_A = 0$ richtig ist ($a = g$).

6.2.3 Physikalisches Pendel

Das physikalische Pendel ist ein starrer Körper, der unter dem Einfluss der Schwerkraft um eine feste, horizontale Achse schwingt. Es sei s der Abstand des Schwerpunktes S von der Drehachse A . Die Lage ist durch den Winkel $\varphi(t)$ zwischen s und dem Lot durch die Drehachse festgelegt. Die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$ lautet nach (70) für kleine Auslenkwinkel φ ($\sin \varphi = \varphi$):



$$\left. \begin{aligned} d^2\varphi/dt^2 &= -m \cdot g \cdot s \cdot \varphi / I_A \quad \text{oder} \\ (71) \quad d^2\varphi/dt^2 + (m \cdot g \cdot s / I_A) \cdot \varphi(t) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Dies ist nach (19) gerade die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung mit der Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \phi), \quad \text{wobei } \omega^2 = m \cdot g \cdot s / I_A \text{ ist.}$$

Für die Schwingungsdauer T des physikalischen Pendels erhalten wir damit

$$\boxed{T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{I_A / (m \cdot g \cdot s)}}.$$

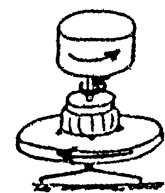
Die Länge

$$l_{RED} = I_A / (m \cdot s), \quad \text{reduzierte Pendellänge}$$

entspricht der Länge eines mathematischen Pendels, welches dieselbe Frequenz besitzt wie das vorliegende physikalische Pendel.

Demonstrationen:

1. 6 Freiheitsgrade des starren Körpers (CaCO₃-Modell)



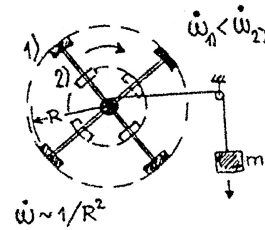
2. Drallerhaltung auf dem Drehschemel

3. Drall \vec{L} nicht parallel zu $\vec{\omega}$



4. Satz von Steiner mit exzentrischer Scheibe

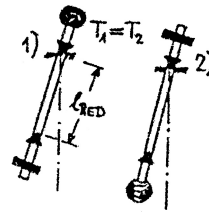
5. Speichenrad



6. Physikalische Pendel („Schinkenblech“)



7. Reduzierte Pendellänge



8. Reversionspendel

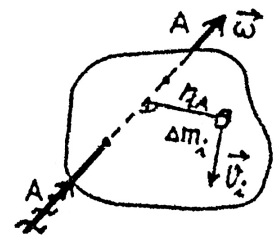
6.3 Energie des starren Körpers

Rotiert der starre Körper mit $\vec{\omega}$ um die Achse A, so beträgt die kinetische Energie eines einzelnen Massenelementes

$$\Delta m_i \cdot v_i^2 / 2 = \Delta m_i \cdot \omega^2 \cdot r_{iA}^2 / 2$$

Die gesamte kinetische Energie der Rotationsbewegung ist dann

$$\begin{aligned} E(\text{rot}) &= \omega^2 / 2 \cdot \sum_i \Delta m_i \cdot r_{iA}^2 \quad \text{oder} \\ (72) \quad E(\text{rot}) &= I_A \cdot \omega^2 / 2, \quad \text{Rotationsenergie.} \end{aligned}$$



Um dem Körper diese Rotationsenergie zu erteilen, muss eine entsprechende Arbeit durch das bei der Winkelbeschleunigung wirkende Drehmoment \vec{M} aufgewendet werden. Wir wollen annehmen, dass eine in der Normalebene zur Drehachse liegende Kraft \vec{F} im Punkt \vec{r} angreift, so dass sie das Drehmoment

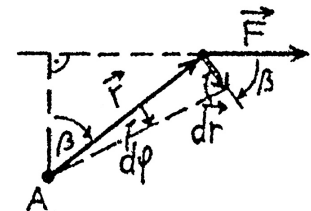
$$M_A = F \cdot r \cdot \cos \beta \quad \text{erzeugt.}$$

Bei der infinitesimalen Drehung um den Winkel $d\varphi$ wird \vec{F} längs des Weges $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ verschoben und leistet die Arbeit

$$dW = F \cdot r \cdot \cos \beta \cdot d\varphi \quad \text{oder} \quad dW = M_A \cdot d\varphi.$$

In vektorieller Schreibweise gilt somit

$$(72) \quad dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}, \quad \text{Drehtarbeit.}$$



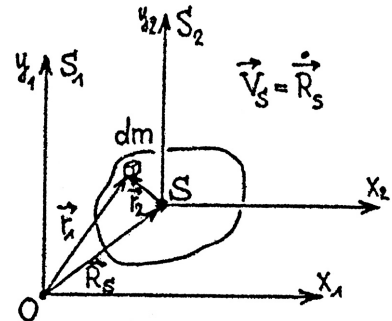
Führt der starre Körper eine allgemeine Bewegung aus, so können wir diese immer als Überlagerung einer Translationsbewegung des Schwerpunktes mit einer Rotationsbewegung um eine Drehachse

durch den Schwerpunkt auffassen. Wir heften ein Koordinatensystem S_2 an den bewegten Schwerpunkt S, wobei die Achsen von S_2 immer parallel zu den Achsen eines Inertialsystems S_1 stehen sollen. Die kinetische Energie $E(kin)$ im Inertialsystem ist

$$E(kin) = (1/2) \int dm \cdot \dot{\vec{r}}_1^2, \quad \text{oder mit } \dot{\vec{r}}_1 = (\dot{\vec{R}}_S + \dot{\vec{r}}_2) :$$

$$E(kin) = (1/2) \int dm \cdot \dot{\vec{R}}_S^2 + (1/2) \cdot \int dm \cdot \dot{\vec{r}}_2^2 + (1/2) \cdot 2 \cdot \dot{\vec{R}}_S \cdot \int dm \cdot \dot{\vec{r}}_2.$$

Nun verschwindet aber das letzte Integral, weil im Schwerpunktsystem $d/dt \cdot \int dm \cdot \dot{\vec{r}}_2$ gerade null ist. Das zweite Integral stellt die kinetische Energie im Schwerpunktsystem dar, welche aber beim starren Körper eine reine Rotationsenergie um eine Schwerpunktsachse ist. Das erste Integral bedeutet die Translationsenergie $m \cdot V_S^2/2$ der im Schwerpunkt S konzentriert gedachten Gesamtmasse m . Ist ein äusseres, konservatives Kraftfeld vorhanden, können wir dem Körper noch eine potentielle Energie zuordnen. Wir wollen nur den Spezialfall des homogenen Gravitationsfeldes \vec{g} betrachten. Hier gilt:



$$E(pot) = -\vec{g} \cdot \int dm \cdot \vec{r}_1 \quad \text{oder} \quad E(pot) = -\vec{g} \cdot \int dm (\vec{R}_S + \vec{r}_2).$$

$-\vec{g} \cdot \int dm \cdot \vec{R}_S = m \cdot g \cdot h_S$ ist die potentielle Energie der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse. Das Integral $-\vec{g} \cdot \int dm \cdot \vec{r}_2$ verschwindet wiederum, d.h. im homogenen äusseren Kraftfeld ändert eine Drehung des Körpers um den Schwerpunkt die potentielle Energie nicht oder anders ausgedrückt: das Drehmoment des homogenen äusseren Feldes bezogen auf den Schwerpunkt ist null. Mit h_S als Höhe des Schwerpunktes und I_S als Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt erhalten wir schliesslich für die Gesamtenergie E im homogenen äusseren Kraftfeld

$$(73) \quad E = m \cdot g \cdot h_S + m \cdot V_S^2/2 + I_S \cdot \omega^2/2.$$

Die Gesamtenergie ist gleich der Summe von potentieller und kinetischer Energie der im Schwerpunkt konzentrierten Gesamtmasse und der Rotationsenergie um die Drehachse durch den Schwerpunkt. Zwischen den physikalischen Grössen für Drehbewegungen und jenen für Translationsbewegungen besteht offensichtlich eine Analogie, die eine nützliche Gedächtnisstütze darstellt:

Translation:		Rotation:	
Ort	\vec{r}	Drehwinkel	φ
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$
Masse	m	Trägheitsmoment	I_A
Kraft	\vec{F}	Drehmoment	\vec{M}
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls (Drall)	$\vec{L} = I_A \cdot \vec{\omega}$
E(kin)	$m \cdot v^2/2$	E(rot)	$I_A \cdot \omega^2/2$
Arbeit	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Drehtarbeit	$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$
Impulssatz	$d\vec{p}/dt = \vec{F}$	Drallsatz	$d(I_A \cdot \vec{\omega})/dt = \vec{M}$

6.4 Gleichgewicht starrer Körper

Wir verzichten hier auf eine ausführliche Behandlung der Statik, wollen aber einige grundsätzliche Dinge festhalten. Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn er weder eine Translations- noch eine Win-

kelbeschleunigung durch äussere Kräfte erfährt. Aus dem Schwerpunktsatz (44) und dem Drallsatz (61) ergeben sich dann die **Gleichgewichtsbedingungen**

$$(74) \quad \sum \vec{F}(ext) = 0 \quad \text{und} \quad \sum \vec{M}(ext) = 0.$$

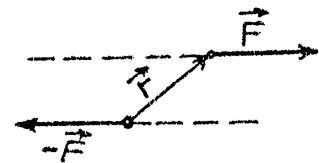
Die Resultierende der äusseren Kräfte und die Summe der Drehmomente dieser Kräfte bezogen auf einen beliebigen Punkt müssen verschwinden.

Begriff des Kräftepaars:

Zwei gleich grosse, entgegengesetzt gerichtete Kräfte mit verschiedenen Wirkungslinien bilden ein **Kräftepaar**, dessen Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ nicht vom Bezugspunkt abhängt.

Übungsaufgabe:

Zeige, dass das Drehmoment eines Kräftepaars unabhängig vom gewählten Drehpunkt immer gleich gross ist.



Reduktion von Kräftegruppen:

Greifen Einzelkräfte \vec{F}_i an den Punkten \vec{r}_i an, so können sie immer ersetzt werden durch eine im Ursprung angreifende resultierende Kraft $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ und ein Kräftepaar, dessen Drehmoment $\vec{M} = \sum(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$ ist.

Statisch bestimmtes System:

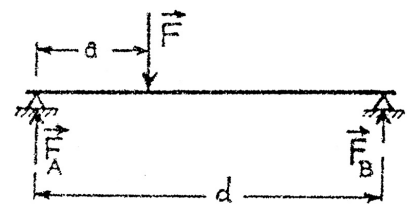
Ein System heisst statisch bestimmt, wenn sich aus den eingepägten äusseren Kräften die zum Gleichgewicht führenden Reaktionskräfte (Auflagekräfte) eindeutig bestimmen lassen,

Beispiel: Auflagekräfte des gewichtslosen, mit \vec{F} belasteten Balkens.

$$a) \quad \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = 0$$

$$b) \quad F_B \cdot d - F \cdot a = 0$$

$$\text{Lösung: } F_A = F \cdot (d - a)/d; \quad F_B = F \cdot a/d.$$



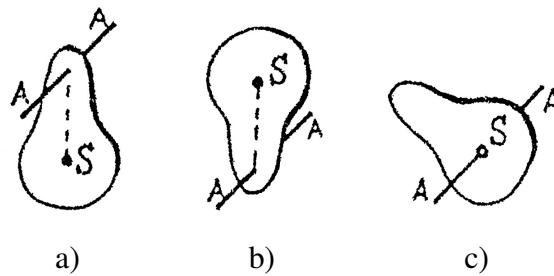
Gleichgewichtsarten:

Wir betrachten als Beispiel ein physikalisches Pendel in drei verschiedenen Situationen:

a) Der Schwerpunkt liegt senkrecht unter der Drehachse. Das Gleichgewicht ist **stabil**. Eine kleine Verrückung führt zu Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Die potentielle Energie ist minimal.

b) Der Schwerpunkt liegt senkrecht über der Drehachse. Das Gleichgewicht ist **labil**. Eine kleine Verrückung führt zum Umkippen. Die potentielle Energie ist maximal.

c) Der Schwerpunkt liegt auf der Drehachse. Jede Drehung führt in eine neue, benachbarte Gleichgewichtslage. Das Gleichgewicht ist **indifferent**. Die potentielle Energie ändert sich nicht beim Drehen.



6.5 Reibungskräfte

Die bisher formulierten Gesetze der Mechanik, insbesondere die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls sind im realen Fall nur richtig, wenn man von energieverzehrenden Kräften abstrahiert, welche in Wirklichkeit fast immer vorhanden sind. Man fasst diese Begleiterscheinungen unter dem Begriff **Reibung** zusammen. Die Reibung kann durch eine die Bewegung hemmende Kraft charakterisiert werden, wobei wir „innere“ und „äussere“ Reibung unterscheiden.

Innere Reibung: Verlust an mechanischer Energie durch Bewegung der Atome oder Moleküle eines Stoffes gegeneinander (s. Kapitel Hydromechanik).

Äussere Reibung: Energieverlust an den Grenzflächen verschiedener Körper, die sich relativ zueinander bewegen.

Wir betrachten hier die äussere Reibung zwischen zwei festen Körpern.

6.5.1 Haftreibung

Wenn zwei Körper eine gemeinsame Berührungsfläche haben und mit der Normalkraft F_N zusammengepresst werden, so verstehen wir unter der **Haftreibungskraft** F_H jene maximale Kraft parallel zur Berührungsfläche, die gerade **noch nicht ausreicht**, um den einen Körper gegen den andern zu verschieben. Zwischen F_H und F_N gilt die Beziehung

$$(75) \quad F_H = \mu_H \cdot F_N, \quad \mu_H = \text{Haftreibungszahl.}$$

Die Haftreibungszahl ist durch die Rauigkeit und die Stoffarten der reibenden Oberflächen bestimmt. Die Haftreibungskraft F_H hängt nicht von der Grösse der Berührungsfläche ab. Beachte, dass die Haftreibung oft eine willkommene Erscheinung ist (z.B. zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen).

6.5.2 Gleitreibung

Unter der **Gleitreibungskraft** F_{GL} verstehen wir die Kraft parallel zur Berührungsfläche, welche erforderlich ist, um eine konstante relative Gleitgeschwindigkeit der beiden Körper aufrechtzuerhalten. Analog zur Haftreibung gilt hier

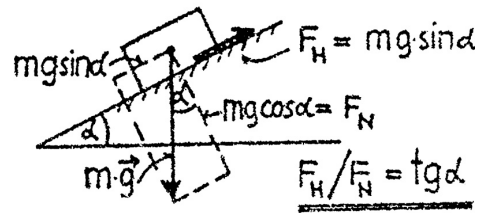
$$(76) \quad F_{GL} = \mu_{GL} \cdot F_N, \quad \mu_{GL} = \text{Gleitreibungszahl.}$$

Die Gleitreibungszahl ist in guter Näherung unabhängig von der Gleitgeschwindigkeit und hängt nicht von der Grösse der Berührungsfläche ab. Bei gleichen Stoffpaaren ist μ_{GL} stets kleiner als μ_H ,

Die Reibungszahlen μ_H und μ_{GL} können bequem an der schiefen Ebene bestimmt werden. Beginnt der Körper beim Neigungswinkel α gerade zu gleiten und bleibt die Geschwindigkeit für α' gerade konstant, so ist

$$\mu_H = \tan \alpha \quad \text{und} \quad \mu_{GL} = \tan \alpha',$$

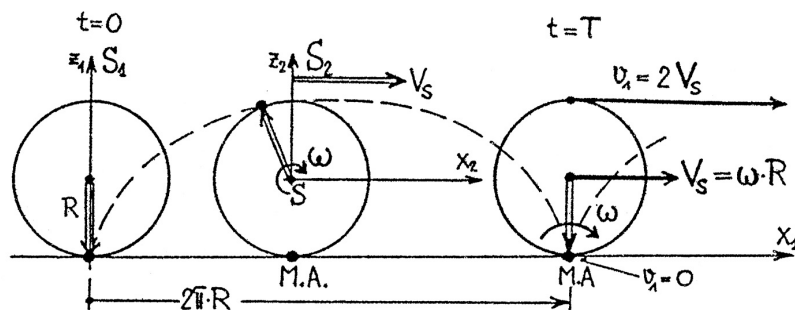
mit $\alpha' < \alpha$



6.6 Rollendes Rad; momentane Drehachse

Auf der x_1y_1 -Ebene eines Koordinatensystems S_1 soll ein Rad entlang der x_1 -Achse abrollen. Die y_2 -Achse eines Systems S_2 fällt mit der Radachse zusammen und bewegt sich mit der Geschwindigkeit des Radschwerpunktes $V_S = \omega \cdot R$ relativ zu S_1 . In S_2 führen alle Punkte des Radumfangs eine gleichförmige Kreisbewegung mit $v_2 = \omega \cdot R$ aus. Im Laborsystem S_1 , gilt für diese Punkte nach (5): $\vec{v}_1 = \vec{V}_S + \vec{v}_2$, so dass auf der Berührungslinie $\vec{v}_1 = 0$ wird (kein Gleiten), während die diametral gegenüberliegenden Punkte sich mit $\vec{v}_1 = 2\vec{V}_S$ in x -Richtung bewegen. Die Bahn jedes Radpunktes ist in S_1 eine **Zykloide**, welche durch Superposition von gleichförmiger Translation mit \vec{V}_S und gleichförmiger Rotation mit $\vec{\omega}$ um die Schwerpunktsachse entsteht. Nach (73) ist dann die kinetische Energie des Rades

$$(77) \quad \begin{aligned} E(kin) &= m \cdot V_S^2/2 + I_S \cdot \omega^2/2 \quad \text{oder mit } V_S = \omega \cdot R : \\ E(kin) &= (m \cdot R^2 + I_S) \cdot \omega^2/2. \end{aligned}$$



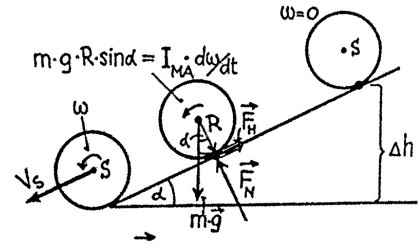
Die Berührungslinie des Rades mit der Unterlage ist eine **momentane Drehachse**. Allgemein wird die momentane Drehachse durch jene Punkte eines rotierenden Körpers gebildet, welche im betreffenden Augenblick gerade ruhen. Sie wird immer von neuem durch andere Massenpunkte gebildet und **ist nicht raumfest**. Wir können die Rollbewegung in jedem Zeitpunkt als reine Rotationsbewegung um die momentane Drehachse M.A. auffassen. Die zugehörige Winkelgeschwindigkeit ist $\omega = V_S/R$, also gleich gross wie jene in S_2 um die Achse durch den Schwerpunkt. Mit Hilfe des Satzes von Steiner ist das Trägheitsmoment bezogen auf die momentane Drehachse

$$I_{M.A.} = m \cdot R^2 + I_S,$$

so dass die Rotationsenergie $I_{M.A.} \cdot \omega^2/2$ mit (77) übereinstimmt (was natürlich so sein muss). Wir fragen nun nach der Beschleunigung dV_S/dt des Schwerpunktes eines Rades, welches eine schiefe Ebene hinunterrollt. Es sei genügend Haftreibung vorhanden, damit das Rad nicht gleitet und die

Rollreibung sei vernachlässigbar klein. Auf das Rad wirken dann drei äussere Kräfte:

- Die am Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft $m \cdot \vec{g}$.
- Die normal zur schiefen Ebene nach oben gerichtete, an der momentanen Drehachse angreifende Kraft $F_N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$.
- Die parallel zur schiefen Ebene nach oben zeigende Haftreibungskraft \vec{F}_H . Ihre Wirkungslinie geht ebenfalls durch die momentane Drehachse.



Nur die Gewichtskraft trägt zum Drehmoment $M_{M.A.}$ bezogen auf die momentane Drehachse bei. Mit $M_{M.A.} = m \cdot g \cdot R \cdot \sin \alpha$ und dem Drallsatz (61) erhalten wir

$$(78) \quad \left. \begin{aligned} d\omega/dt &= m \cdot g \cdot R \cdot \sin \alpha / I_{M.A.} & \text{und mit} & \quad dV_S/dt = R \cdot d\omega/dt \quad \text{folgt:} \\ dV_S/dt &= m \cdot R^2 \cdot g \cdot \sin \alpha / I_{M.A.} & \text{oder} & \quad dV_S/dt = g \cdot \sin \alpha / (1 + I_S / mR^2). \end{aligned} \right\}$$

Beachte, dass der rollende Körper eine geringere translatorische Beschleunigung erfährt, als ein reibungsfrei gleitender Körper, weil ein Teil der kinetischen Energie in der Rotationsbewegung steckt.

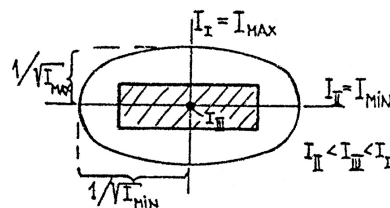
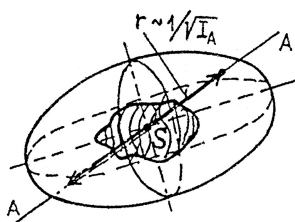
Übungsaufgabe:

Leite die Beziehung (78) mit dem Energiesatz her.

6.7 Trägheitsellipsoid. Freie Achsen

Für das Verständnis allgemeiner Drehbewegungen erweist sich die Darstellung der Trägheitsmomente für verschiedene Drehachsen durch das „Trägheitsellipsoid“ (geometrische Darstellung des Trägheitstensors) als äusserst hilfreich.

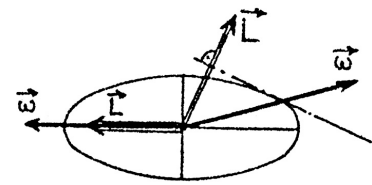
Wir denken uns einen beliebigen Körper, dessen Schwerpunkt S im Koordinatenursprung liegt. Für jede Achse A durch S berechnen wir das Trägheitsmoment I_A und tragen in Achsenrichtung den Ortsvektor \vec{r} auf, dessen Betrag gerade $1/\sqrt{I_A}$ ist. Es stellt sich heraus, dass die Endpunkte aller Vektoren \vec{r} die Fläche eines Ellipsoides bilden. Dies gilt auch, wenn S ein beliebiger Punkt ist. Die drei Hauptachsen des Ellipsoides sind gerade die drei orthogonalen **Hauptträgheitsachsen** des Körpers. Betrachten wir als Beispiel einen homogenen Quader, so fallen die drei Symmetrieachsen mit den Ellipsoid- Hauptachsen zusammen. Allgemein sind Symmetrieachsen homogener Körper Hauptträgheitsachsen. Sind zwei Symmetrieachsen gleichwertig, ergibt sich ein Rotationsellipsoid. Sind drei Symmetrieachsen gleichwertig, wie z.B. beim homogenen Würfel, so entartet das Ellipsoid zu einer Kugel. Daraus folgt, dass jede Schwerpunktsachse eines Würfels das gleiche Trägheitsmoment besitzt.



Im Abschnitt 6.2 haben wir festgestellt, dass der Drall \vec{L} und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ im Allgemeinen nicht parallel gerichtet sind, so dass in der Gleichung

$$\vec{L} = I_A \cdot \vec{\omega} \text{ die Grösse } I_A \text{ ein Tensor ist.}$$

Mit Hilfe des Trägheitsellipsoids können wir bei gegebenem $\vec{\omega}$ die Richtung von \vec{L} geometrisch finden: Wir errichten im Durchstosspunkt von $\vec{\omega}$ durch die Ellipsoidfläche die Flächennormale. Die Richtung von \vec{L} ist dazu parallel. Fällt die Drehachse mit einer Hauptachse zusammen, haben \vec{L} und $\vec{\omega}$ gleiche Richtung;



| **Ellipsoid-Hauptachse = Hauptträgheitsachse.**

Um eine Hauptträgheitsachse kann sich der Körper drehen, ohne dass Achsenlager notwendig sind (vom Gewicht abgesehen wirken keine Lagerkräfte).

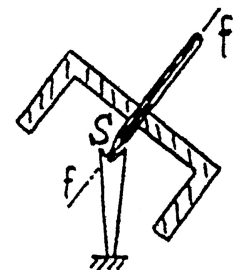
| **Hauptträgheitsachsen sind freie Achsen.**

Die beiden Hauptträgheitsachsen I und II mit maximalem und minimalem Trägheitsmoment sind **stabil**, eine freie Drehung um die Hauptträgheitsachse III, mit $I_{II} < I_{III} < I_I$ ist **labil**; die geringste Störung führt zum Umschlagen in eine Drehung um Achse I oder II.

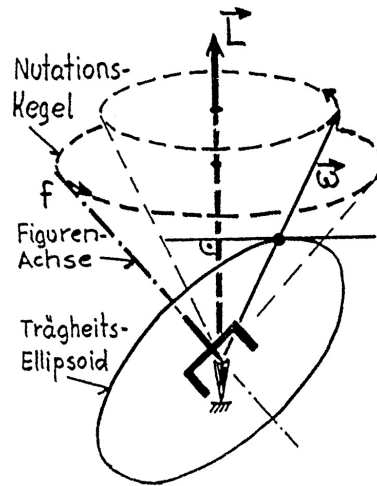
6.8 Kreisel

6.8.1 Kräftefreier, symmetrischer Kreisel

Definitionsgemäss besitzt ein symmetrischer Kreisel eine Symmetrieachse, wir nennen sie die **Figurenachse**. Das Trägheitsellipsoid eines symmetrischen Kreisels ist daher ein Rotationsellipsoid bezüglich der **Figurenachse** f . Ist der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt, so wirken keine äusseren Drehmomente und sein Drall \vec{L} ist nach (61) raumfest. Die Figurenachse f ist eine Hauptträgheitsachse. Wenn die Anfangsbedingungen so sind, dass gerade $\vec{\omega}$ mit f zusammenfällt, dann liegt auch \vec{L} in f und wegen $\vec{L} = \text{konstant}$ ist auch die Figurenachse raumfest.

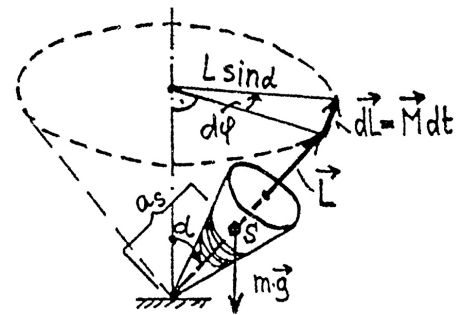


Wird nun durch einen seitlichen Kraftstoss der Drall \vec{L} aus der Figurenachse f herausgestossen, ergibt sich eine neue Situation: die Figurenachse f und die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ bewegen sich je auf einem Kreiskegel um die raumfeste Drallachse. \vec{L} , f und $\vec{\omega}$ liegen immer in einer Ebene. Man bezeichnet die Bewegung der Figurenachse um die raumfeste Drallachse als **Nutation**. Nutation tritt immer auf, wenn der Drall nicht in der Figurenachse liegt.



6.8.2 Kreisel unter Einwirkung eines Drehmoments

Als Beispiel betrachten wir einen Kinderkreisel, der unter dem Einfluss seines Gewichtes ein Drehmoment bezogen auf die Kreisel Spitze von $M = m \cdot g \cdot a_S \cdot \sin \alpha$ erfährt. a_S ist der Abstand des Schwerpunktes von der Spitze und der Neigungswinkel gegen die Vertikale. Die Dralländerung $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$ steht jederzeit senkrecht auf Figuren Achse und Drallachse, so dass die Vertikalkomponente von \vec{L} und der Betrag L konstant bleiben (und damit auch α). Der Vektor \vec{L} führt somit eine Drehbewegung um die Vertikale aus, die man als **Präzession** bezeichnet. Aus $d\varphi = M \cdot dt / (L \cdot \sin \alpha)$ folgt mit $M = m \cdot g \cdot a_S \cdot \sin \alpha$



$$(79) \quad d\varphi/dt = m \cdot g \cdot a_S / L, \quad \text{Präzession.}$$

Die Präzessionsfrequenz des Kinderkreisels hängt nicht ab vom Neigungswinkel α . Allgemein kann man sagen, dass ein Kreisel infolge eines wirkenden Drehmomentes nicht kippt, sondern senkrecht zur vorhandenen Kraft ausweicht. Eine wichtige technische Anwendung des Kreisels ist der Kreiselkompass.

Demonstrationen:

1. Gleichgewicht



stabil, labil, indifferent

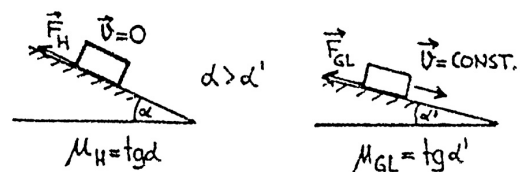
2. Unentschlüssener Becher

Aufstehen oder Liegen?



3. Reibkräfte

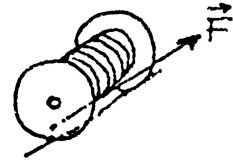
Haftreibung und Gleitreibung



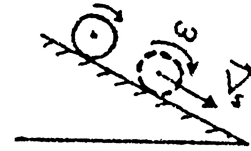
4. Zykloide des Velopedals



5. Die folgsame und die unfolgsame Fadenspule



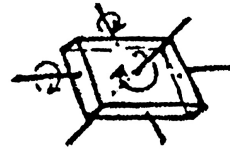
6. Rollende Zylinder



7. Jo-Jo



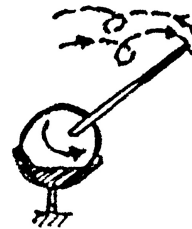
8. Freie Achsen



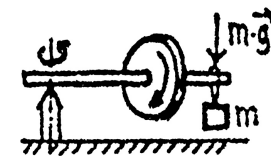
9. Momentane Drehachse des Kreisel



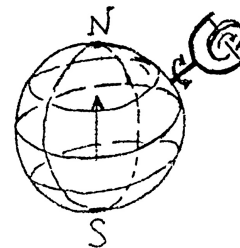
10. Nutation



11. Präzession



12. Kreiselkompass



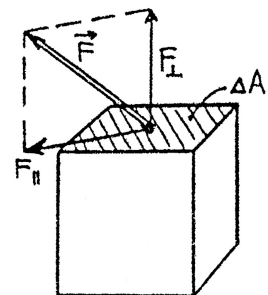
Kapitel 7

Elastizität fester Körper

Im festen Aggregatzustand hat jeder Körper ein bestimmtes Volumen und eine bestimmte Gestalt, die beide einer Veränderung grosse Kräfte entgegensetzen. Die im letzten Kapitel vorausgesetzte Starrheit ist nicht streng erfüllt, so dass wir nun die Deformation eines festen Körpers unter dem Einfluss äusserer Kräfte untersuchen wollen. Falls die Deformation nach Entfernen der Kräfte wieder verschwindet, spricht man von vollständiger **elastischer Deformation**, bleiben die Formänderungen zurück, handelt es sich um vollständig **plastische Verformung**. Im Folgenden fragen wir nach dem Zusammenhang zwischen Kräften und erzeugter Deformation im **elastischen** Bereich.

Normalspannung und Schubspannung:

Wir denken uns aus einem festen Körper ein würfelförmiges Volumenelement herausgeschnitten. Auf die Grenzflächen dieses Elementes üben die benachbarten Atome oder Moleküle des Körpers Kräfte aus. Es handelt sich um so genannte **Flächenkräfte**, im Gegensatz zu **Volumenkräften**, wie z.B. der Schwerkraft. Die Flächenkraft auf ein Oberflächenelement ΔA wird im Allgemeinen eine zur Fläche normal stehende Komponente F_{\perp} und eine in der Fläche liegende Komponente F_{\parallel} aufweisen. Wir bezeichnen die Quotienten



$F_{\perp}/\Delta A = \sigma$	und	$F_{\parallel}/\Delta A = \tau$	als
Normalspannung	bzw.	Schubspannung.	
($\sigma > 0$ für Zug, $\sigma < 0$ für Druck)		(Tangentialspannung)	

Dimension: Kraft/Fläche

Einheit: N/m^2 ; $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$ (Pascal)

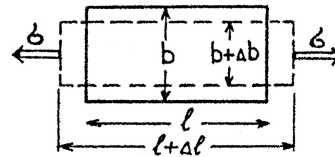
Für nicht zu grosse Kräfte gilt das **Gesetz von Hooke: Die Verzerrungen sind proportional den Spannungen.**

Normalspannungen und Elastizitätsmodul E:

Unter dem Einfluss einer Zugspannung σ wird sich ein Körper der ursprünglichen Länge l um Δl verlängern. Das Verhältnis $\Delta l/l$ heisst die **Dehnung**. Das Hooke'sche Gesetz sagt, dass

$$(80) \quad \Delta l/l = \sigma/E \quad \text{ist.}$$

Die Dehnung ist proportional zur Spannung.



E ist eine **Materialkonstante** der **Elastizitätsmodul** (Einheit: Pa). Mit der Längenänderung Δl geht eine Verminderung der Querdimension b auf $b + \Delta b$ einher ($\Delta b < 0$ bei Zug). Für die so genannte **Querkontraktion** $\Delta b/b$ gilt:

$$(81) \quad \Delta b/b = -\mu \cdot \Delta l/l, \quad \mu = \text{Poisson'sche Zahl.}$$

Durch die Materialkonstanten E und μ ist das elastische Verhalten isotroper Körper im Proportionalitätsbereich eindeutig festgelegt.

Volumenelastizität und Kompressionsmodul K :

Wirkt auf eine Körperoberfläche allseitig der Druck $p = -\sigma$, so stellt sich eine relative Volumenänderung $\Delta V/V$ ein, welche dem Druck p proportional ist. Das Gesetz von Hooke nimmt die Form

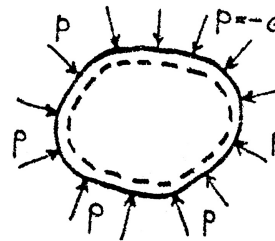
$$(82) \quad \Delta V/V = \sigma/K \quad \text{oder} \quad -\Delta V/V = \chi \cdot p.$$

$$\mathbf{K = Kompressionsmodul} \qquad \chi = \text{Kompressibilität} (\chi = 1/K)$$

an.

E , μ und K sind nicht unabhängig, sondern durch die Beziehung

$$(83) \quad K = E/(3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu))$$

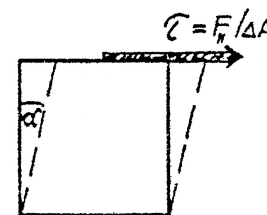


verknüpft. (Beweis in den Übungen). Ein völlig inkompressibler Körper besitzt die Kompressibilität $\chi = 0$, also ein unendlich grosses K . Nach (83) muss folglich die Poissonzahl im Intervall $0 < \mu < 0.5$ liegen.

Schubspannung und Schubmodul G :

Wird die Unterseite eines Würfels festgehalten, während die Oberseite einer reinen Schubspannung τ entsprechend nebenstehender Figur unterworfen ist, so deformieren sich zwei Seitenflächen zu Parallelogrammen. Wiederum gilt das Hooke'sche Gesetz, nach welchem der Winkel α proportional zur Schubspannung ist.

$$(84) \quad \alpha = \tau/G, \quad G = \text{Schubmodul.}$$



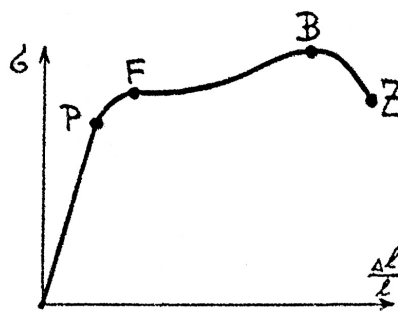
Auch der Schubmodul G kann durch E und μ ausgedrückt werden.

$$(85) \quad G = E / (2 \cdot (1 + \mu)).$$

Die Grössen E und G lassen sich experimentell leicht bestimmen. Mit Hilfe der Beziehungen (83) und (85) können dann die elastischen Konstanten μ berechnet werden.

Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Festkörpers:

Die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung ist nur in einem kleinen Bereich linear (Gültigkeitsbereich des Hooke'schen Gesetzes bis zur Proportionalitätsgrenze P im Diagramm). Nach P wächst die Dehnung stärker. F ist die Streck- oder Fließgrenze, von der weg das Material wie eine zähe Flüssigkeit zu fließen beginnt (es treten irreversible Veränderungen der kristallinen Struktur auf). Wird die Maximalspannung im Punkt B (Zerreiss- oder Bruchspannung) überschritten, tritt eine starke Verminderung des Querschnittes auf, die schliesslich zum Bruch bei Z führt.



Kapitel 8

Hydromechanik (Mechanik der Flüssigkeiten und Gase)

Flüssigkeiten unterscheiden sich von festen Körpern dadurch, dass ihre Moleküle nicht an eine raumfeste Gleichgewichtslage gebunden sind, sondern sich relativ frei gegeneinander verschieben können. Es sind aber anziehende Kräfte zwischen den Molekülen oder Atomen vorhanden, die zu einer gewissen Nahordnung führen und zu einer Dichte, die im Allgemeinen nur um wenige Procente geringer ist, als jene des gleichen Stoffes im festen Aggregatzustand. Im Schwerfeld nimmt eine Flüssigkeit die Gestalt ihres Behälters an.

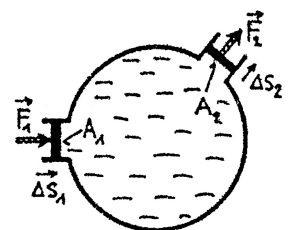
Bei Gasen ist der mittlere Abstand zwischen den Molekülen gross im Vergleich zu ihrem Durchmesser, so dass Kräfte im Wesentlichen nur bei Stößen auftreten. Jedes zur Verfügung stehende Volumen wird vollständig ausgefüllt.

8.1 Hydrostatik idealer Flüssigkeiten

Wir nennen eine Flüssigkeit **ideal**, wenn sie **inkompressibel** und **reibunglos** ist. Keine Reibung bedeutet, dass in Grenzflächen zwischen Flüssigkeitsteilen verschiedener Geschwindigkeit keine Reibkräfte und somit auch **keine Schubspannungen** auftreten können. Jedes Flächenelement, das wir uns im Innern einer Flüssigkeit durch einen Punkt gelegt denken, steht unter einer Normalspannung, dem **Druck p**.

Der Stempeldruck:

Ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäss sei an zwei beliebigen Stellen je mit einem Stempel der Fläche A_1 bzw. A_2 verschlossen. Wird nun eine auf den ersten Stempel wirkende Kraft F_1 um Δs_1 verschoben, so wird wegen dem Energieerhaltungssatz die an der Flüssigkeit geleistete Arbeit $F_1 \cdot \Delta s_1$ durch den zweiten Stempel wieder nach aussen abgegeben, indem die nach aussen wirkende Kraft F_2 um Δs_2 verschoben wird.



$$F_1 \cdot \Delta s_1 = F_2 \cdot \Delta s_2$$

Wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit müssen die Volumina $A_1 \cdot \Delta s_1$ und $A_2 \cdot \Delta s_2$ gleich sein. Infolgedessen gilt auch

$$F_1/A_1 = F_2/A_2.$$

Der von der Flüssigkeit auf die Stempel ausgeübte Druck ist an beiden Stellen gleich gross. Was für den zweiten Stempel gilt, gilt auch für jedes Flächenelement der Gefässwand und für jedes Oberflächenelement eines in die Flüssigkeit gebrachten Körpers. Es gilt daher der Satz:

Ein auf eine Flüssigkeit ausgeübter Stempeldruck verteilt sich durch die ganze Flüssigkeit nach allen Seiten mit gleicher Stärke.

Technische Anwendungen dieses Sachverhalts sind zum Beispiel die hydraulische Presse oder die Kraftübertragung vom Bremspedal auf die Bremsklötze bei der hydraulischen Bremse.

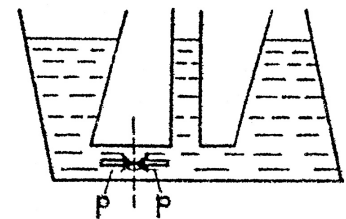
Der Schweredruck:

Befindet sich eine Flüssigkeit in einem äusseren Kraftfeld und besitzt sie eine freie Oberfläche, so steht diese stets senkrecht zur wirkenden Kraft, weil jede tangentielle Kraft zu einer Bewegung der Flüssigkeitsteilchen führen würde (siehe Demonstration 4 auf S.56). Im Schwerfeld steht daher jede freie Flüssigkeitsoberfläche horizontal.

Infolge seines Gewichtes übt jedes Flüssigkeitselement eine nach unten gerichtete Kraft aus. In der Tiefe h unter der Oberfläche herrscht zusätzlich zum Stempeldruck p_0 (eventuell der atmosphärische Druck) ein hydrostatischer Druck $\rho \cdot g \cdot h$, welcher dem Gewicht der Flüssigkeitssäule der Höhe h , mit der Dichte ρ und mit dem Einheitsquerschnitt entspricht. Der Gesamtdruck in der Tiefe h wird dann

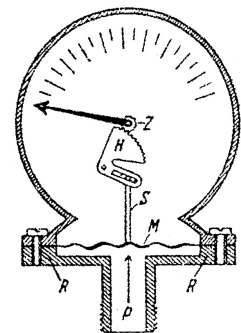
$$(86) \quad p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h, \quad \text{Schweredruck } \rho \cdot g \cdot h.$$

Unter dem Bodendruck versteht man den von der Flüssigkeit auf den Gefässboden ausgeübten Druck, welcher nach (86) nur von der Flüssigkeitshöhe h und nicht von der Gestalt des Gefässes abhängt (hydrostatisches Paradoxon). Aus dem gleichen Grund ist die Höhe der Flüssigkeit in kommunizierenden Gefässen überall gleich gross.

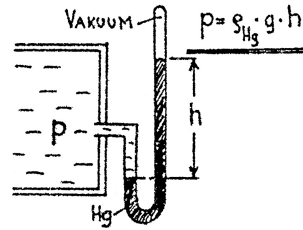
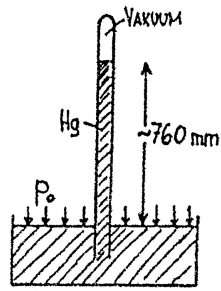


Druckmessung:

Ein oft verwendetes Messinstrument ist das **Membranmanometer**. Hier biegt der zu messende Druck eine wellenförmige Stahlmembran durch. Diese Durchbiegung wird mit Hilfe einer mechanischen Übersetzung in eine Drehbewegung des Zeigers umgewandelt, so dass der Druck auf einer geeichten Skala abgelesen werden kann.



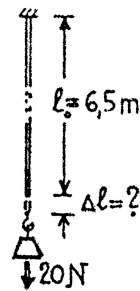
Im Labor findet häufig das **Quecksilbermanometer** Verwendung. Es besteht aus einem mit Quecksilber gefüllten U-Rohr, dessen einer Schenkel luftleer und abgeschlossen ist. Das andere Ende wird mit dem Druckgefäss verbunden, so dass der Niveau-Unterschied h des Quecksilbers den Druck p in mmHg angibt. Zur Messung kleinerer Drücke kann das Quecksilber durch eine leichtere Messflüssigkeit ersetzt werden.



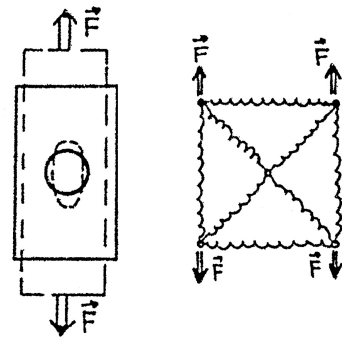
In analoger Weise misst das **Quecksilber-Barometer** den atmosphärischen Luftdruck.

Demonstrationen:

1. Elastizitätsmodul E von Stahl
Hooke'sches Gesetz bei Zugbelastung,
Drahtquerschnitt 1 mm².

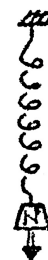


2. Querkontraktion
Modelle: a) Gummiband
b) Federmodell

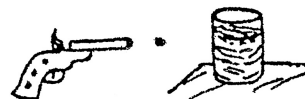


3. Dehnungsmess-Streifen
Nachweis von Verlängerung und Querkontraktion
eines Aluminiumbandes unter Zugbelastung.

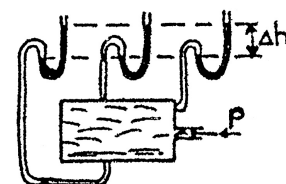
4. Plastische Deformation
„Bleifeder“



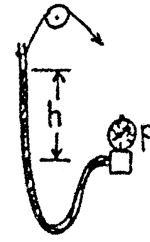
5. Schuss in Wasserbecher
Geringe Kompressibilität von Wasser.



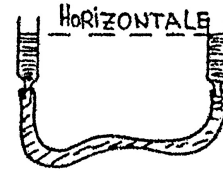
6. Stempeldruck
Gleichmässige Verteilung.



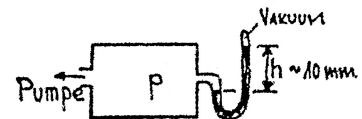
7. Hydrostatischer Druck
5 m langer Wasserschlauch an Manometer.



8. Gartenschlauch als Wasserwaage

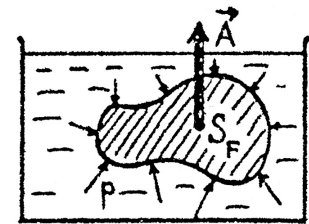


9. Quecksilber-Manometer
Druckmessung an Vakuumpumpe.



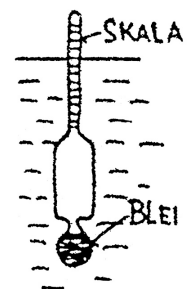
Der Auftrieb:

Taucht ein Körper in eine Flüssigkeit ein, so erzeugt der hydrostatische Druck der umgebenden Flüssigkeit auf die Körperoberfläche eine resultierende Kraft, welche nach oben gerichtet und gleich dem Gewicht der vom Körper verdrängten Flüssigkeit ist (Archimedes 250 v. Chr.). Der Angriffspunkt dieser **Auftriebskraft** \vec{A} liegt im Schwerpunkt S_F des verdrängten Flüssigkeitsvolumens (nicht notwendigerweise im Schwerpunkt S_K des Körpers). Um dies einzusehen, denke man sich den Körper aus dem Material der Flüssigkeit selbst aufgebaut. Dies ändert einerseits nichts an den Auftriebskräften und andererseits kompensieren diese genau das Körpergewicht. Damit ein Körper schwimmt, muss somit seine mittlere Dichte geringer als jene der Flüssigkeit sein.



Das Archimedische Prinzip erlaubt die präzise Bestimmung des Volumens unregelmässiger Körper aus einer Auftriebsmessung in einer Flüssigkeit bekannter Dichte.

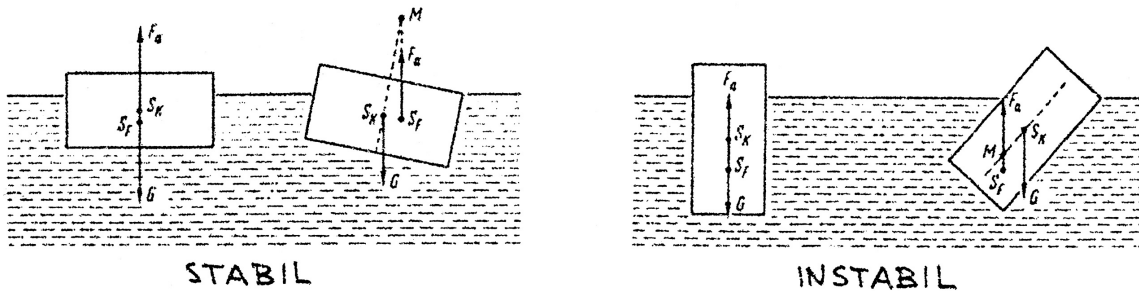
Beachte, dass bei Präzisionswägungen der Luftauftrieb berücksichtigt werden muss (Luftdichte = 1.293 Milligramm pro cm^3)



Da die von einem Körper verdrängte Flüssigkeitsmenge genau so viel wiegt wie der Körper, wird dieser um so tiefer eintauchen, je geringer deren Dichte ist. Darauf beruht das Prinzip des **Aräometers**. Im Handel gibt es Aräometer, deren Skala für einen bestimmten Stoff geeicht ist, dessen Gehalt in der Flüssigkeit man untersuchen will (Alkoholometer, Säuremesser etc.).

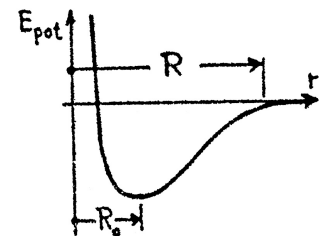
Wenn ein Körper nicht homogen ist oder nicht vollständig in die Flüssigkeit eintaucht (schwimmender Körper), fallen die Angriffspunkte von Gewicht und Auftrieb nicht zusammen, so dass sie ein Kräftepaar bilden, welches den Körper so lange zu drehen versucht, bis die Wirkungslinien zusammenfallen. Am Beispiel eines quaderförmigen Holzklotzes sehen wir, dass er in „flacher“ Lage stabil schwimmt, „hochkant“ aber umkippt. In beiden Fällen liegt der Angriffspunkt der Auftriebskraft unter dem Körperschwerpunkt. Entscheidend für die Stabilität ist die Lage des Kräftepaares, die bei einer

kleinen Verdrehung des Körpers aus der Schwimmlage entsteht. Ziehen wir in der Schwimmlage eine Gerade durch die beiden Angriffspunkte (sie ist eine Symmetrieachse des Körpers), so wird diese bei der Kippung des Körpers von der Wirkungslinie des Auftriebs im Punkt M geschnitten. M ist das **Metazentrum** des Körpers. Nur wenn das Metazentrum über dem Schwerpunkt des Körpers liegt, ist die Schwimmlage stabil.

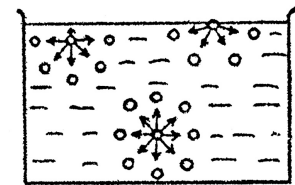


8.2 Statik realer Flüssigkeiten; Oberflächen-Spannung

Zwischen den Molekülen realer Flüssigkeiten wirken Kräfte, die für Abstände $r < R_0$ abstossend und für $r > R_0$ anziehend sind. R_0 ist der Gleichgewichtsabstand. Die Reichweite R dieser **Kohäsionskräfte** beträgt typischerweise etwa 10 Å (1 nm). Für die geringe Kompressibilität der Flüssigkeiten ist die stark ansteigende Flanke des Potentials für kleine r verantwortlich (für Wasser bei 0° C ist $\chi = 5.1 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$).



Im Innern der Flüssigkeit wirken die Kohäsionskräfte auf ein herausgegriffenes Molekül isotrop nach allen Seiten, d.h. die resultierende Kraft ist null. Ist jedoch die Distanz eines Moleküls von der Oberfläche kleiner als die Reichweite R der Kohäsionskräfte, so überwiegt die Wirkung der ins Innere ziehenden Kräfte. Um ein Molekül an die Oberfläche zu bringen, muss Arbeit aufgewendet werden. Anders ausgedrückt: An der Oberfläche ist die mittlere potentielle Energie eines Moleküls grösser als im Innern; je grösser die Oberfläche, desto grösser die gesamte potentielle Energie der Flüssigkeit. Man bezeichnet die Arbeit, welche erforderlich ist, um die Oberfläche um die Flächeneinheit zu vergrössern, als



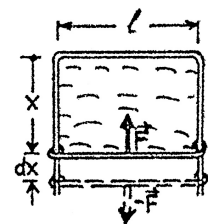
Oberflächenspannung σ .

Dimension: Arbeit/Fläche oder Kraft/Länge

Einheit: J/m^2 oder N/m

σ als Kraft pro Länge der Oberflächenberandung:

Eine Flüssigkeitslamelle, welche einen rechteckigen Drahtrahmen bespannt, zieht den unteren, beweglich gestalteten Bügel wegen der Oberflächenspannung nach oben. Ausziehen des Bügels um dx vergrössert die Oberfläche um $2 \cdot l \cdot dx$, wozu die Arbeit $F \cdot dx = \sigma \cdot 2 \cdot l \cdot dx$ erforderlich ist. Somit gilt

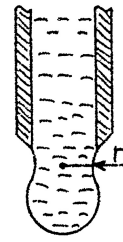


$$\sigma = F/(2 \cdot l) \text{ N/m, Kraft/Berandungslänge.}$$

Tropfenbildung:

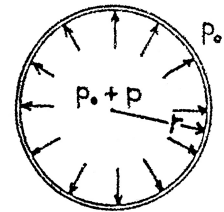
Beim Austropfen einer Flüssigkeit aus einer Rohröffnung reisst der Tropfen dann ab, wenn sein Gewicht G die Bedingung $G = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sigma$ erfüllt.

Aus Messung von G und dem Einschnürradius r kann σ bestimmt werden.



Überdruck in einer Seifenblase:

Eine Seifenblase reduziert ihren Radius nach der Entstehung so lange, bis der innen dadurch entstehende Überdruck den Oberflächenkräften das Gleichgewicht hält. Die Oberfläche ist $A = 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$ und somit $dA/dr = 16 \cdot \pi \cdot r$. Bei Vergrößerung des Gleichgewichtsradius um dr muss die vom inneren Überdruck geleistete Arbeit $p \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$ gleich der Zunahme $\sigma \cdot 16 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$ der Oberflächenenergie sein. Folglich ist



$$p = 4 \cdot \sigma / r,$$

der Überdruck der Seifenblase.

Mit zunehmender Grösse nimmt der Innendruck ab, grosse Seifenblasen sind weicher als kleine.

Entsprechend wird im Innern eines kugelförmigen Tropfens durch die Oberflächenspannung ein Druck

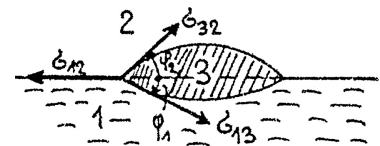
$$p = 2 \cdot \sigma / r$$

erzeugt. (Gegenüber der Seifenblase um den Faktor 2 kleiner, weil nur eine Kugelfläche vorhanden ist).

Übungsaufgabe:

Die Oberflächenspannung von Quecksilber beträgt 0.484 N/m . Wie gross ist der Druck in einem Hg-Kügelchen von 0.1 mm Radius?

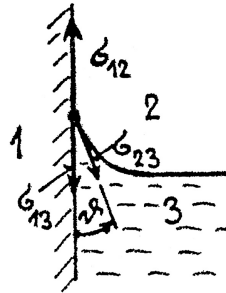
Molekularkräfte wirken auch zwischen Molekülen verschiedener Körper. Man nennt sie darum **Adhäsionskräfte**. Sie geben Anlass zur **Grenzflächen-Spannung**. Betrachten wir z.B. einen Fetttropfen auf Wasser, und bezeichnen wir die Medien Wasser, Luft und Fett mit 1, 2 und 3, so sind die drei Grenzflächenspannungen σ_{12} , σ_{32} und σ_{13} massgebend für die Entstehung eines bestimmten Gleichgewichtszustandes. Die Kräfte auf den Tropfenrand ziehen in Richtung der entsprechenden Grenzflächen, deren Winkel φ_1 und φ_2 sich so einstellen, dass das Kräftedreieck sich schliesst. Dies ist nur möglich, wenn jede Grenzflächenspannung kleiner ist, als die Summe der beiden andern. Diese Bedingung ist für einen Öltropfen auf Wasser nicht erfüllt, weil die Grenzflächenspannungen von Öl gegen Wasser und gegen Luft zu klein sind, um jene von Wasser gegen Luft zu kompensieren. Öl breitet sich auf Wasser in einer zusammenhängenden, monomolekularen Schicht aus.



Auf analoge Weise entsteht der Randwinkel ϑ einer Flüssigkeit (3), die an einen festen Körper (1) und an Luft (2) grenzt (siehe Abbildung unten links). Am Flüssigkeitsrand greifen pro Längeneinheit die Kräfte σ_{12} , σ_{13} und σ_{23} an. Im Gleichgewicht muss gelten:

$$\sigma_{13} + \sigma_{23} \cdot \cos \vartheta = \sigma_{12}, \quad \text{also} \quad \cos \vartheta = (\sigma_{12} - \sigma_{13}) / \sigma_{23}.$$

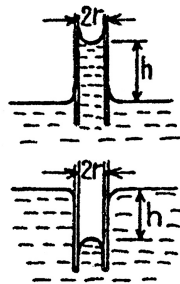
Es muss immer $\sigma_{23} > 0$ sein, weil sonst die Flüssigkeit laufend verdampfen würde. Man nennt $\sigma_{12} - \sigma_{13}$ die **Haftspannung**. Ist diese negativ, so wird $\vartheta > 90^\circ$ (z.B. 138° für Glas-Hg). Wenn die Haftspannung Werte $> \sigma_{23}$ annimmt, erhalten wir die Situation **vollständiger Benetzung** (hochkriechen der Flüssigkeit).



Kapillarität:

Taucht man eine enge Glasröhre (Kapillarrohr) vertikal in Wasser, so steigt dieses in die Kapillare empor. Der Höhenunterschied gegenüber dem Wasserspiegel des Gefäßes ist umso grösser, je enger die Kapillare. Tut man dasselbe mit Quecksilber, so liegt das Niveau in der Kapillare tiefer als im Gefäss (Depression). In beiden Fällen wird die Flüssigkeit im engen Rohr durch einen **Meniskus** begrenzt, benetzend beim Wasser, nicht benetzend beim Quecksilber (siehe Abbildung oben rechts). Nehmen wir der Einfachheit halber an, die Flächen der Menisken seien halbkugelförmig, so erzeugt die Oberflächenspannung den Druck

$$p = 2 \cdot \sigma / r.$$

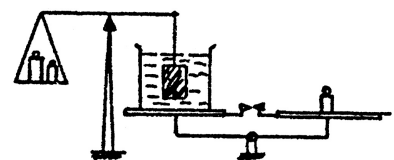


Ist die Flüssigkeit benetzend, ergibt sich eine Zugspannung nach oben, benetzt sie nicht, eine Druckspannung nach unten. Die Flüssigkeitssäule wirkt wie ein Manometer, welches die Druckdifferenz zwischen konkaver und konvexer Meniskusseite misst. Daraus ergibt sich der Höhenunterschied

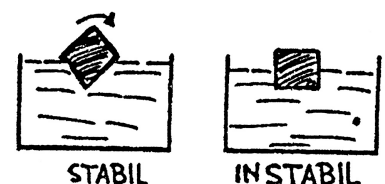
$$h = 2 \cdot \sigma / (r \cdot \rho \cdot g).$$

Demonstrationen:

1. Messung des Auftriebs



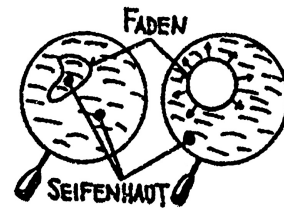
2. Schwimmender Holzwürfel



3. Bügel mit Gewicht an der Seifenlamelle



4. Faden auf Seidenhaut
Nach Zerstören der Seifenhaut im Innern
der Fadenschleife wird diese zum Kreis.



5. Minimalflächen
Bei gegebener Randgeometrie bildet die
Seifenhaut eine Minimalfläche

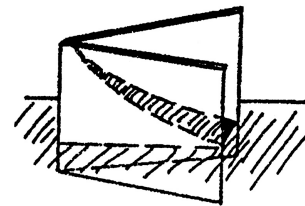
6. Tropfenbildung

7. Seifenblasen

8. Fettsäuretropfen auf Wasser

9. Kapillarwirkung auf Wasser und auf Quecksilber

10. Hyperbolische Steighöhe eines Flüssigkeitskeils



Kompressibilität von Gasen:

Gase unterscheiden sich von Flüssigkeiten hauptsächlich durch ihre hohe Kompressibilität. Mit den idealen Flüssigkeiten teilen sie die Eigenschaft, dass auftretende Schubspannungen oft vernachlässigbar klein sind.

Wir wollen hier nach der Kompressibilität χ eines idealen Gases bei konstanter Temperatur fragen, für welches das **Boyle-Mariotte'sche Gesetz** gilt. Dieses besagt, dass für eine feste Gasmenge das Produkt aus Druck p und Volumen V konstant ist (siehe Kap. III, Wärmelehre), also

$$(87) \quad p \cdot V = \text{const.}, \quad \text{Boyle-Mariotte'sches Gesetz.}$$

Dafür kann auch $d(p \cdot V) = 0$ oder $p \cdot dV + V \cdot dp = 0$ und somit $dp/p = -dV/V$ geschrieben werden. Ersetzen wir nun in der Definitionsgleichung für die Kompressibilität (82) den dortigen Druck p durch unseren Druckanstieg dp , so erhalten wir

$$(88) \quad \chi = 1/p, \quad \text{Kompressibilität des idealen Gases.}$$

Barometerformel:

Die Gleichung (86) für den Schweredruck ist auf ein Gas nicht anwendbar, weil die Voraussetzung der Inkompressibilität ja nicht erfüllt ist. Von besonderem Interesse ist die Frage nach dem Schweredruck $p(h)$ der Erdatmosphäre als Funktion der Höhe h . Unter der Annahme einer konstanten Erdbeschleunigung g und einer höhenunabhängigen Lufttemperatur (nur grobe Näherung zur Realität), berechnet sich die gesuchte Funktion $p(h)$ folgendermassen:

Nach (87) ist der Druck p einer Gasmenge dem Volumen V umgekehrt proportional. Das gleiche gilt für die Dichte $\rho = m/V$. Das Verhältnis $\rho(h)/p(h)$ ist deshalb eine Konstante. Bezeichnen wir Dichte und Luftdruck an der Erdoberfläche mit $\rho(0)$ und $p(0)$, bekommen wir

$$(88) \quad \rho(h) = (\rho(0)/p(0)) \cdot p(h).$$

Vergrössert man die Höhe an der Stelle h um dh , so ändert der Druck gerade um $dp = -\rho(h) \cdot g \cdot dh$, d.h. er nimmt um das Gewicht des Luftpaketes der Höhe dh und dem Einheits-Querschnitt ab. Mit (88) schreiben wir

$$dp = -(\rho(0)/p(0)) \cdot p(h) \cdot g \cdot dh \quad \text{und} \quad dp/p(h) = -(\rho(0)/p(0)) \cdot g \cdot dh.$$

Integrieren liefert:

$$(89) \quad \left. \begin{array}{l} \ln(p(h)/p(0)) = -(\rho(0)/p(0)) \cdot g \cdot h \quad \text{oder} \\ p(h) = p(0) \cdot \exp(-(\rho(0)/p(0)) \cdot g \cdot h), \quad \text{Barometer-Formel.} \end{array} \right\}$$

Übungsaufgabe:

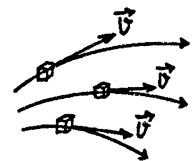
Berechne aus Luftdruck und Luftdichte bei Normalbedingungen die charakteristische Höhe, bei welcher die Exponentialfunktion in der Barometerformel auf den e-ten Teil abfällt.

8.3 Hydrodynamik der idealen Flüssigkeit

In der idealen Flüssigkeit existieren **keine Schubspannungen**, ferner ist sie **inkompressibel**. Die wirksamen Kräfte werden durch den Druck oder durch die Schwerkraft erzeugt.

8.3.1 Die stationäre Strömung

Eine Strömung heisst stationär, wenn das zugehörige Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x, y, z)$ nicht von der Zeit abhängt. Im Allgemeinen unterscheidet man in einer Strömung Bahnlinien und Stromlinien. Die **Bahnlinie** ist eine Linie, die ein bestimmtes Flüssigkeitselement im Laufe der Zeit überstreicht. Als **Stromlinie** bezeichnet man eine Kurve, deren Tangenten mit den Geschwindigkeiten zusammenfallen, welche in einem festen Zeitpunkt entlang der Kurve vorhanden sind (es sind also die Feldlinien des momentan vorhandenen Geschwindigkeitsfeldes).



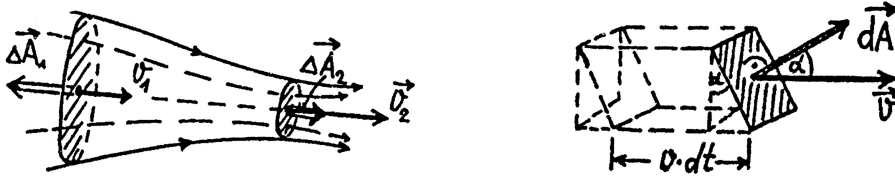
Für die stationäre Strömung gilt: Das Stromlinienbild ist zeitlich konstant. Bahnlinien und Stromlinien sind identisch

Die Kontinuitätsgleichung:

Zieht man durch den Rand eines Flächenelementes in einer stationären Strömung alle Stromlinien, so grenzen diese eine **Stromröhre** ab. Durch den Rand einer Stromröhre dringt keine Flüssigkeit. Die

Flüssigkeit in der Stromröhre heisst **Stromfaden**. Legen wir das Flächenelement $d\vec{A}$ in die Strömung $\vec{v}(x, y, z)$, wobei der Vektor $d\vec{A}$ normal zur Fläche dA stehen soll, so tritt pro Zeiteinheit gerade das Flüssigkeitsvolumen $dV = \vec{v} \cdot d\vec{A}$ hindurch.

$$\boxed{dV/dt = \vec{v} \cdot d\vec{A}, \quad \text{Fluss von } \vec{v} \text{ durch } d\vec{A}.}$$



Wenn wir in einem Stromfaden durch zwei Querschnittsflächen ΔA_1 und ΔA_2 ein Volumen abgrenzen, so enthält dieses zu jeder Zeit dieselbe Flüssigkeitsmenge, denn wegen der Inkompressibilität ist ja die Dichte konstant. Es muss folglich der Fluss durch jede Querschnittsfläche gleich gross sein.

$$\Delta \vec{A} \cdot \vec{v} = \text{const.}$$

Wir treffen die Konvention, dass die Vektoren $\Delta \vec{A}$ der Flächenelemente, welche ein Volumen abgrenzen, immer nach aussen gerichtet sind. Dann können wir schreiben:

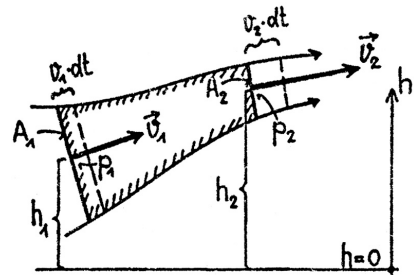
$$\boxed{(90) \quad \Delta \vec{A}_1 \cdot \vec{v}_1 + \Delta \vec{A}_2 \cdot \vec{v}_2 = 0, \quad \text{Kontinuitätsgleichung für Stromfaden.}}$$

Das Gesetz von Bernoulli (Daniel Bernoulli, 1700-1782):

Aus einem Stromfaden greifen wir jetzt ein Flüssigkeitsvolumen heraus, welches durch die differentiell kleinen, zur Geschwindigkeit \vec{v} normal stehenden Querschnittsflächen A_1 und A_2 begrenzt wird. Um wie viel wird der Energieinhalt dieses Volumens während der Zeit dt ändern? A_1 und A_2 werden sich um $v_1 \cdot dt$, respektive $v_2 \cdot dt$ entlang den Stromlinien verschieben. Dabei wird durch den Druck p_1 die Arbeit $p_1 \cdot A_1 \cdot v_1 \cdot dt$ am Flüssigkeitselement geleistet, und gleichzeitig gibt dieses die Arbeit $p_2 \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot dt$ nach aussen ab. Die Energieänderung beträgt also

$$(91) \quad dE = (p_1 \cdot A_1 \cdot v_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot v_2) \cdot dt.$$

Weil es sich um eine stationäre Strömung handelt, können wir die Energieänderung auch folgendermassen interpretieren: gegenüber dem Anfangszustand fehlt das Massenelement $dm_1 = \rho \cdot A_1 \cdot v_1 \cdot dt$, dafür gehört das Element $dm_2 = \rho \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot dt$ zum neuen Zustand. Unter Berücksichtigung von kinetischer und potentieller Energie dieser Massenelemente können wir auch sagen:



$$(92) \quad dE = dm_2 \cdot v_2^2/2 + dm_2 \cdot g \cdot h_2 - dm_1 \cdot v_1^2/2 - dm_1 \cdot g \cdot h_1.$$

Gleichsetzen von (91) und (92), sowie Division durch das Volumenelement $A_1 \cdot v_1 \cdot dt = A_2 \cdot v_2 \cdot dt$ (Kontinuitätsgleichung) ergibt schliesslich

$$p_1 + \rho \cdot v_1^2/2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \rho \cdot v_2^2/2 + \rho \cdot g \cdot h_2 \quad \text{oder}$$

$$\boxed{(93) \quad p + \rho \cdot v^2/2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{const.} \quad \text{Bernoulli'sches Gesetz.}}$$

Die Bernoulli'sche Gleichung besagt, dass **längs einer Stromlinie** der

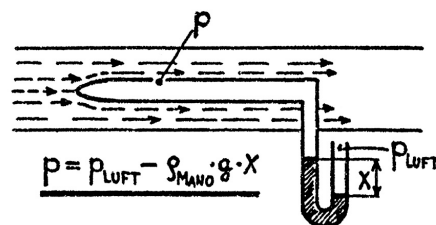
statische Druck p , der
 dynamische Druck oder Staudruck $\rho \cdot v^2/2$ und die
 potentielle Energie pro Volumeneinheit $\rho \cdot g \cdot h$

aufsummiert einen konstanten Wert ergeben. Im Allgemeinen ist die Konstante für verschiedene Stromlinien einer Strömung verschieden. Der statische Druck p ist der Druck, den ein mit der Flüssigkeit mitbewegter Beobachter mit einem Manometer messen würde. Ist die Strömung horizontal ($h = \text{const.}$), so ist

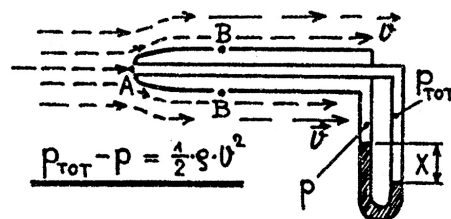
$$p + \rho \cdot v^2/2 = p_{TOT}, \quad \text{mit konstantem Gesamtdruck } p_{TOT}.$$

Der statische Druck p ist umso geringer, je grösser die Geschwindigkeit der Strömung, d.h. je kleiner der Querschnitt der Stromröhre ist, oder je mehr die Stromlinien zusammengedrängt werden.

Zur Messung des statischen Druckes im Innern einer Strömung dient die **Drucksonde**. Sie wird parallel zu den Stromlinien eingebracht und mit einem Manometer verbunden.



Der dynamische Druck $\rho \cdot v^2/2$ kann mit dem **Prandtl'schen Staurohr** festgestellt werden:



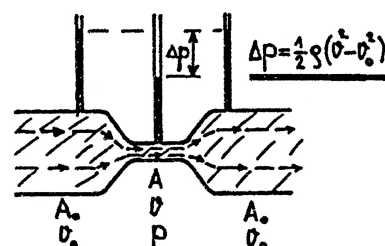
An der Messstelle A liegt der **Staupunkt** (bei A ist $v = 0$), wo der Gesamtdruck p_{TOT} gemessen wird. Im Punkt B, welcher zur gleichen Stromlinie gehört wie A, herrscht der statische Druck p . Aus $p_{TOT} - p = \rho \cdot v^2/2$ folgt:

$$\rho \cdot v^2/2 = \rho_{MANO} \cdot g \cdot x$$

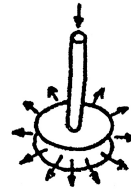
In der Flugtechnik dient das Prandtl'sche Staurohr zur Messung der Relativgeschwindigkeit zwischen Flugzeug und Luft.

Demonstrationen:

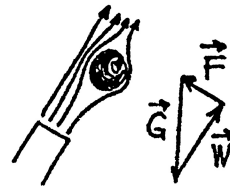
1. Venturi-Rohr



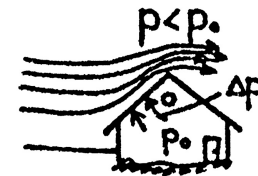
2. Hydrodynamisches Paradoxon



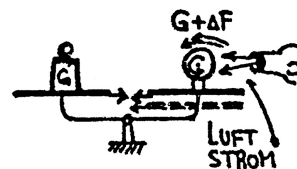
3. Ping-Pong-Ball im Luftstrom



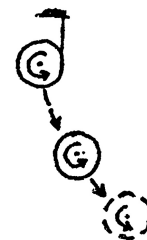
4. Hausdach im Sturm



5. Flettner-Rotor



6. Fallender, rotierender Zylinder



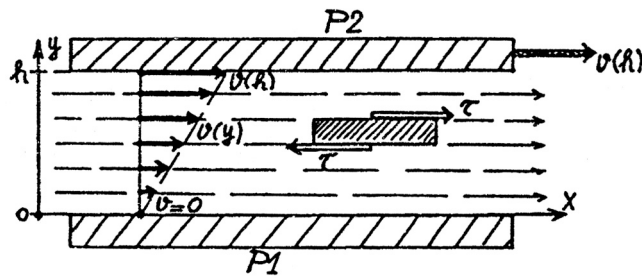
8.4 Hydrodynamik der realen Flüssigkeit

In der realen Flüssigkeit existieren **Schubspannungen**, ferner ist sie **kompressibel**. Die Kompressibilität hat in den meisten Fällen wenig Einfluss auf den Strömungszustand, hingegen kann die innere Reibung und die damit verbundene Schubspannung die Strömungsart entscheidend bestimmen.

8.4.1 Die laminare Strömung

Wird eine Strömung durch die **Reibkräfte dominiert**, bezeichnet man sie als **laminar**. Als einfaches Beispiel betrachten wir folgende Situation: zwischen zwei parallelen, ebenen Platten P_1 und P_2 im Abstand h , befindet sich eine Flüssigkeit. Während P_1 ruht, wird P_2 mit konstanter Geschwindigkeit $v(h)$ nach rechts (x -Richtung) bewegt. Weil eine dünne Grenzschicht der Flüssigkeit an den Platten haftet, stellt sich ein stationäres Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = (v(y), 0, 0)$ ein, wobei

$$v(y) = v(h) \cdot y/h \quad \text{und} \quad dv/dy = v(h)/h \quad \text{ist.}$$



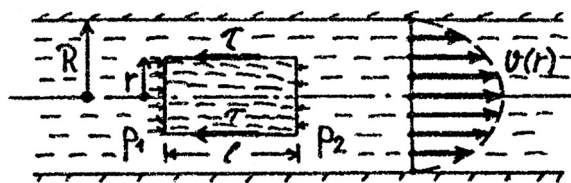
Jede zu den Platten parallele Schicht der Flüssigkeit erfährt infolge der Reibung mit den benachbarten Schichten Kräfte, welche an der Oberseite (schnellere Schicht) nach rechts, an der Unterseite (langsamere Schicht) nach links ziehen. Die Beträge beider Kräfte sind gleich, denn der Schwerpunkt der Schicht wird im stationären Zustand nicht beschleunigt. Es herrscht also in jeder Ebene parallel zu den Platten eine **Schubspannung** τ , welche umso grösser ist, je grösser die Reibung und je grösser der Unterschied der Geschwindigkeiten benachbarter Schichten ist. Die innere Reibung wird mikroskopisch durch zwischenmolekulare Kräfte verursacht. Makroskopisch charakterisiert man sie durch die **Viskosität** η (eine Materialkonstante). Sie ist als Proportionalitätskonstante zwischen Schubspannung τ und Geschwindigkeitsgefälle dv/dy definiert:

$$(94) \quad \tau = \eta \cdot dv/dy, \quad \text{Viskosität } \eta.$$

Dimension von η : Spannung · Zeit
 Einheit: Pa · s

Nun wollen wir mit Hilfe von (94) die laminare Strömung durch ein gerades Rohr mit kreisförmigem Querschnitt studieren. Welches Geschwindigkeitsprofil wird sich in diesem Fall einstellen? Welche Grössen bestimmen die Durchflussmenge pro Zeiteinheit? Wir betrachten in einem bestimmten Moment die Flüssigkeit, die sich innerhalb eines Zylinders der Länge l und dem Radius r befindet, der Röhrenradius sei R . Damit trotz den vorhandenen Reibkräften eine stationäre Strömung aufrechterhalten wird, muss eine Druckdifferenz $p_1 - p_2$ zwischen den Stirnflächen des Zylinders vorhanden sein. Auf die betrachtete Flüssigkeit wirken jetzt als äussere Kräfte die Druckkraft $(p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2$ und die Reibkraft $2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \tau(r)$. Die Schubspannung $\tau(r)$ in der Mantelfläche des Zylinders ist nach Gleichung (94)

$$\tau(r) = \eta \cdot dv/dr, \quad \text{mit negativem } dv/dr, \text{ da } v(R) = 0 \text{ sein muss.}$$



Im stationären Strömungszustand muss die Summe dieser Kräfte

$$(p_1 - p_2) \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \eta \cdot dv/dr = 0 \quad \text{sein.}$$

Aus $dv/dr = -(p_1 - p_2)/(2 \cdot l \cdot \eta) \cdot r$

folgt dann mit der Randbedingung $v(R) = 0$ das parabolische Geschwindigkeitsprofil

$$(95) \quad v(r) = (p_1 - p_2)/(4 \cdot \eta \cdot l) \cdot (R^2 - r^2).$$

Mit (95) lässt sich das pro Zeiteinheit durch den Rohrquerschnitt fließende Flüssigkeitsvolumen sofort berechnen, denn der Fluss durch einen Kreisring der Breite dr und dem Radius r beträgt:

$$v(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr = \pi \cdot (p_1 - p_2) / (2 \cdot \eta \cdot l) \cdot (R^2 - r^2) \cdot r \cdot dr.$$

Integration über den ganzen Querschnitt ergibt dann

$$(96) \quad dV/dt = \pi \cdot (p_1 - p_2) / (8 \cdot \eta \cdot l) \cdot R^4, \quad \text{Hagen-Poiseuille'sches Gesetz.}$$

Übungsaufgabe:

Welche bedeutungsvolle Konsequenz hat das Hagen-Poiseuille'sche Gesetz für den Blutkreislauf?

Der Strömungswiderstand W:

Der Gesamtfluss dV/dt kann auch durch die mittlere Teilchengeschwindigkeit \bar{v} ausgedrückt werden, es ist

$$dV/dt = \pi \cdot R^2 \cdot \bar{v}, \quad \text{so dass (96) in der Form}$$

$$\pi \cdot R^2(p_1 - p_2) = 8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot l \cdot \bar{v} \quad \text{geschrieben werden kann.}$$

Die linke Seite ist die durch den Druck erzeugte Kraft, welche dem Betrage nach gerade gleich der hemmenden Reibkraft W ist. Man kann sagen: Wenn die Strömung durch ein Rohr der Länge l die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} hat, so erzeugt die Reibung eine Widerstandskraft

$$(97) \quad W = 8 \cdot \pi \cdot l \cdot \eta \cdot \bar{v}. \quad \text{Strömungswiderstand der Röhre.}$$

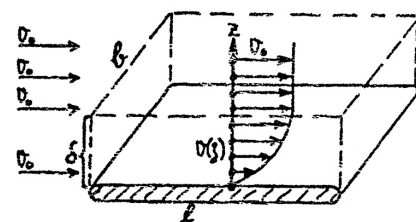
Ein anderes wichtiges Beispiel für den Reibungswiderstand durch eine viskose Strömung ist die **Stoke'sche Reibung**. Wenn sich eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v bewegt, setzt die Flüssigkeit der Bewegung eine Reibkraft W entgegen.

$$(98) \quad W = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v, \quad \text{Stoke'sche Reibung.}$$

Die mathematische Herleitung von (98) übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. Beachte jedoch die Ähnlichkeit mit (97) (erinnere auch den Schauversuch auf S.24).

8.4.2 Prandtl'sche Grenzschicht und Reynoldszahl

Auf Grund der Beziehung (94), $\tau = \eta \cdot dv/dy$, könnte man zunächst meinen, dass Medien mit geringer Viskosität (z.B. Luft) als reibungsfrei betrachtet werden dürfen. Dies trifft aber nicht zu in Gebieten mit grossen Gradienten dv/dy der Geschwindigkeit. Betrachten wir etwa eine homogene Strömung \vec{v}_0 in der x-Richtung und legen wir nun eine Platte der Breite b und der Länge l in die xy-Ebene. An der Plattenoberfläche werden die anströmenden Teilchen vollständig abgebremst (sie haften), so dass Trägheitskräfte wirksam werden, die proportional der Grösse $\rho \cdot v^2/2$ sind (dieselben Kräfte sind in (93) für den Staudruck verantwortlich). Es wird sich ein Profil $v(z)$ der Geschwindigkeit einstellen, das innerhalb einer Schichtdicke δ von $v = 0$ auf $v = v_0$ monoton anwächst. Da der Zustand stationär ist, müssen die Schubkräfte in dieser Schicht den Trägheitskräften das Gleichgewicht halten. Näherungsweise nehmen wir an, dv/dz sei konstant, also



Es wird sich ein Profil $v(z)$ der Geschwindigkeit einstellen, das innerhalb einer Schichtdicke δ von $v = 0$ auf $v = v_0$ monoton anwächst. Da der Zustand stationär ist, müssen die Schubkräfte in dieser Schicht den Trägheitskräften das Gleichgewicht halten. Näherungsweise nehmen wir an, dv/dz sei konstant, also

$$dv/dz = v_0/\delta \quad \text{und somit} \quad \tau = \eta \cdot v_0/\delta \quad \text{für } 0 < z < \delta.$$

Wir setzen nun die auf den Schichtquerschnitt $b \cdot \delta$ wirkende Trägheitskraft $b \cdot \delta \cdot \rho \cdot v_0^2 / 2$ der Schubkraft $b \cdot l \cdot \eta \cdot v_0 / \delta$ gleich und erhalten aus

$$b \cdot \delta \cdot \rho \cdot v_0^2 / 2 = b \cdot l \cdot \eta \cdot v_0 / \delta \quad \text{für } \delta \text{ den approximativen Wert}$$

$$\delta \approx \sqrt{2 \cdot l / \sqrt{(\rho \cdot v_0 \cdot l / \eta)}} \quad \text{oder} \quad \delta \approx \sqrt{2 \cdot l / \sqrt{Re}} \quad \text{mit}$$

$$(99) \quad Re = \rho \cdot v \cdot l / \eta, \quad \text{Reynoldszahl.}$$

Die Reynoldszahl ist eine dimensionslose Grösse und spielt eine entscheidende Rolle in der Theorie der Strömungen. In viskosen Strömungen ist $Re \leq 1$, die Reibkräfte überwiegen, während bei grossen Reynoldszahlen die Trägheitskräfte dominieren. Insbesondere gilt für ideale Flüssigkeiten $Re \rightarrow \infty$ die Grenzschichten sind dann beliebig dünn.

Untersucht man im Windkanal Strömungen um Hindernisse, werden oft verkleinerte Modelle verwendet (z.B. im Flugzeugbau). Dann muss das **Ähnlichkeitsgesetz** beachtet werden:

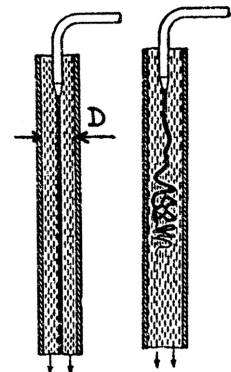
Die Strömungen an geometrisch ähnlichen Hindernissen sind gleich, wenn die Reynoldszahlen gleich sind. D.h. je kleiner das Modell, desto grösser muss die Windgeschwindigkeit im Kanal gewählt werden, damit das Produkt $v \cdot l$ in Re nicht ändert.

8.4.3 Die turbulente Strömung

Im Gegensatz zur Umströmung einer Kugel, wie beim Stoke'schen Fall, sind die Trägheitskräfte bei einer Strömung in einem geraden Rohr gering (geradlinige Stromlinien), so dass bei relativ hohen Reynoldszahlen $Re = \rho \cdot D \cdot v / \eta$ immer noch laminare Strömung möglich ist. Die Erfahrung zeigt, dass in einem Rohr die laminare Strömung plötzlich in eine turbulente umschlägt, wenn gilt:

$$Re > 1200, \quad \text{kritische Reynoldszahl.}$$

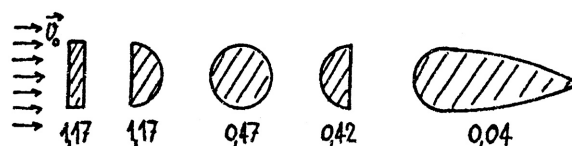
Der kritische Wert von Re kann wesentlich überschritten werden und hängt stark von den Einlaufbedingungen, der Wandrauigkeit, usw. ab. Die **turbulente Strömung** $v(x, y, z, t)$ ist **zeitabhängig**. An einem festen Ort ändert \vec{v} die Richtung ständig. Die Bahnlinie eines Teilchens ist nicht mehr voraus sagbar.



Bewegt sich ein Körper in einer idealen Flüssigkeit, so erfährt er keinen Widerstand, ist sie laminar, so gilt das Stoke'sche Reibungsgesetz. Für grosse Geschwindigkeiten entstehen auf der Rückseite des Körpers Wirbel, die Strömung wird turbulent, weil sich die Grenzschicht vom Körper ablöst. Der Fahrwiderstand ist dann von der Form

$$W = c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2 / 2, \quad c_w = \text{Widerstandszahl.}$$

A bedeutet die angeströmte Fläche. Der Wert von c_w ist von der Gestalt des Körpers abhängig. Im Folgenden sind Werte für ebene Platte, Halbkugel, Kugel und Stromlinienkörper angegeben.



8.4.4 Merkmale der Strömungsarten

Ideale Strömung:

Keine innere Reibung vorhanden und inkompressibel. Sie ist in vielen Fällen eine **Potentialströmung**, d.h. darstellbar durch $\vec{v} = \text{grad } \phi$, mit skalarem Potential ϕ .

Viskose Strömung:

Reibkräfte dominieren. Ist oft stationär. Ist keine Potentialströmung.

Turbulente Strömung:

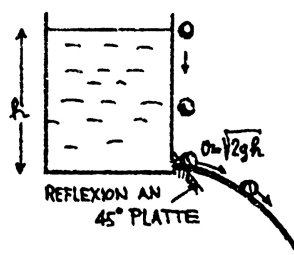
Ist nicht stationär. Keine Potentialströmung.

Demonstrationen:

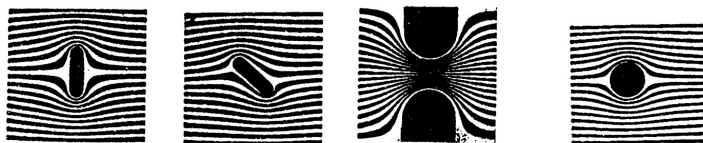
1. Gesetz von Torricelli

Die Ausflussgeschwindigkeit der reibungslosen Flüssigkeit ist gleich der Endgeschwindigkeit des Körpers, der die Höhe h frei durchfällt:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$



2. Laminare Stromlinien



3. Geschwindigkeitsprofil $v(r)$ im Rohr



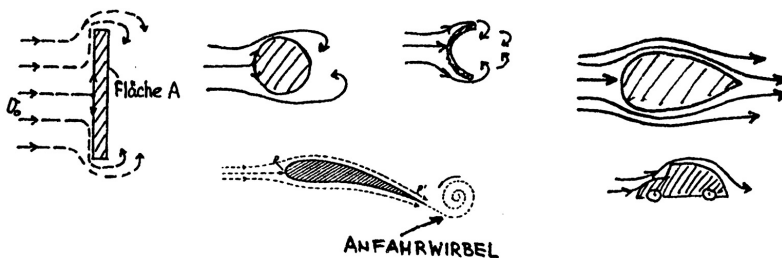
parabolisch (laminar)



grosser Fluss (turbulent)

4. Übergang von laminarer in turbulente Strömung bei kritischer Reynoldszahl (siehe Bild S.89).

5. Stromlinien-Apparat



Kapitel 9

Schwingungen und Wellen

9.1 Der gedämpfte, freie Oszillator

Wir haben im Abschnitt 2.2 gesehen, dass ein Massenpunkt eine harmonische Schwingung ausführt, wenn er dem Kraftgesetz $F = -k \cdot x$ unterworfen ist. In Wirklichkeit sind Reibkräfte unvermeidlich. Sie entziehen dem Oszillator laufend mechanische Energie, so dass eine **gedämpfte Schwingung** entsteht, d.h. die Amplitude der Schwingung nimmt als Funktion der Zeit ständig ab.

Häufig ist die Reibkraft R der momentanen Geschwindigkeit \dot{x} proportional (und dieser entgegengesetzt gerichtet), wie etwa im Falle der Stoke'schen Reibung. Wir können also schreiben

$$R = -\alpha \cdot \dot{x}, \quad \text{Reibungskoeffizient } \alpha.$$

Die Newton'sche Bewegungsgleichung lautet dann

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x - \alpha \cdot \dot{x} \quad \text{oder} \quad m \cdot \ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0.$$

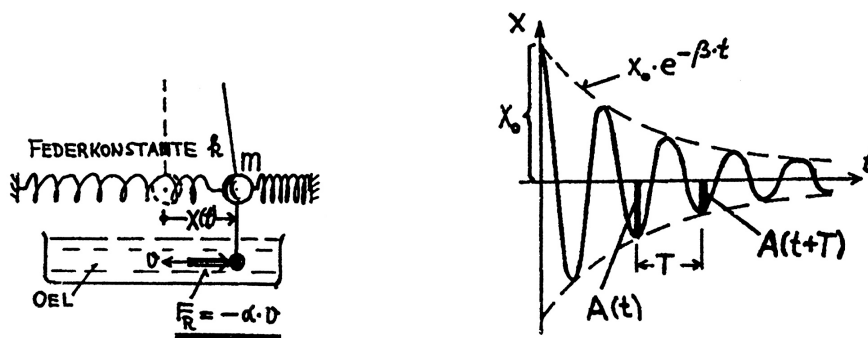
mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ des ungedämpften Oszillators und der **Dämpfungskonstanten** $\beta = \alpha/2m$ ergibt sich

$$(100) \quad \ddot{x} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0, \quad \text{die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators.}$$

Wir setzen zunächst voraus, dass $\beta < \omega_0$, die Dämpfung also nicht zu gross sei. Dann lautet die allgemeine Lösung dieser homogenen, linearen Differentialgleichung:

$$(101) \quad x(t) = x_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t) \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi).$$

Hier sind x_0 und φ Integrationskonstanten. Durch Einsetzen kann die Richtigkeit der Lösung verifiziert werden. (In den Übungen für Physiker werden die mathematischen Aspekte des Problems diskutiert). Beachte, dass die Amplitude $x_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t)$ der Schwingung exponentiell mit der Zeitkonstanten $1/\beta$, zerfällt und dass die Eigenfrequenz gegenüber der ungedämpften Schwingung nach unten verschoben ist. Wir überzeugen uns von der Richtigkeit von (101) durch Beobachtung eines Federpendels, welches mit Stoke'scher Reibung gedämpft ist.



Kennzeichnend für den exponentiellen Zerfall der Schwingung ist das konstante Verhältnis zweier aufeinander folgenden Amplituden:

$$A(t)/A(t+T) = \exp(\beta \cdot T). \quad \text{Der natürliche Logarithmus davon ist}$$

$$\Lambda = \beta \cdot T, \quad \text{das logarithmische Dekrement.}$$

Der Q-Wert:

Die im Oszillator zur Zeit t gespeicherte Energie ist proportional zu $A^2(t)$. Wir wollen nun annehmen, dass die Dämpfung klein ist, also

$$\beta \cdot T \ll 1 \quad \text{und damit auch} \quad 2 \cdot \pi/T \simeq \omega_0.$$

Jetzt bilden wir das Verhältnis von gespeicherter Energie zum Energieverlust pro Periode T :

$$A^2(t)/(A^2(t) - A^2(t+T)) = 1/(1 - \exp(-2 \cdot \beta \cdot T)).$$

Für $\beta T \ll 1$ ist die gerade $1/(2 \cdot \beta \cdot T)$.

Das 2π -fache davon, $Q = 2\pi/(2 \cdot \beta \cdot T)$ oder

$$(102) \quad Q = \omega_0/2\beta \quad \text{heisst: } \mathbf{Q\text{-Wert des Oszillators.}}$$

Der Gütefaktor Q ist umso grösser, je kleiner die Dämpfung ist. Beim ungedämpften Oszillator ist der Q-Wert unendlich gross.

Aperiodische Dämpfung:

Voraussetzung für die Lösung (101) ist die Bedingung $\beta < \omega_0$. Ist die Dämpfung grösser, so findet keine Schwingung mehr statt. Startet die Bewegung zur Zeit $t = 0$ mit der Amplitude x_0 , so strebt die Auslenkung monoton der Gleichgewichtslage zu. Im Fall $\beta = \omega_0$ liegt der **aperiodische Grenzfall** vor, wo die Dämpfung so gross ist, dass gerade kein Überschwingen der Gleichgewichtslage mehr möglich ist.

9.2 Die erzwungene Schwingung

Wir wenden uns jetzt dem Fall zu, wo ein gedämpfter Oszillator durch eine periodische äussere **Störkraft** $F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ angeregt wird. Die Störfrequenz ω ist beliebig und fällt im Allgemeinen nicht mit der Eigenfrequenz des gestörten Oszillators zusammen. Die Bewegungsgleichung lautet dann:

$$(103) \quad m \cdot \ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{oder mit } f_0 = F_0/m$$

$$(103) \quad \ddot{x} + 2 \cdot \beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = f_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad \text{Bewegungsgleichung für die erzwungene Schwingung.}$$

Wir fragen zuerst noch nicht nach der allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichung, welche zwei Integrationskonstanten enthalten muss. Wir nehmen vielmehr an, dass die periodische Störung schon sehr lange wirksam sei, so dass sich das System in einem stationären Schwingungszustand befindet. Die Frequenz dieses Zustandes muss mit der Störfrequenz übereinstimmen, seine Schwingungsphase wird aber gegenüber der Phase der Störung verschoben sein. Diese partikuläre Lösung wird von der Form sein:

$$(104) \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \quad \text{stationäre Lösung.}$$

Die Amplitude A und die Phase ϕ sind hier nicht Integrationskonstanten, sondern durch die Störfrequenz ω , die Dämpfungskonstante β und die Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ bestimmte Parameter. Man gewinnt A und ϕ durch Einsetzen von (104) in die linke Seite von (103). Anwendung des trigonometrischen Additionstheorems auf $\sin(\omega \cdot t + \phi)$ und $\cos(\omega \cdot t + \phi)$ führt auf die Gleichung

$$((\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos \phi - 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \sin \phi) \cdot \cos(\omega \cdot t) -$$

$$((\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \sin \phi + 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \cos \phi) \cdot \sin(\omega \cdot t) = (f_0/A) \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$(i) \quad (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \sin \phi + 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \cos \phi = 0 \quad \text{und}$$

$$(ii) \quad (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos \phi + 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \sin \phi = f_0/A \quad \text{ist.}$$

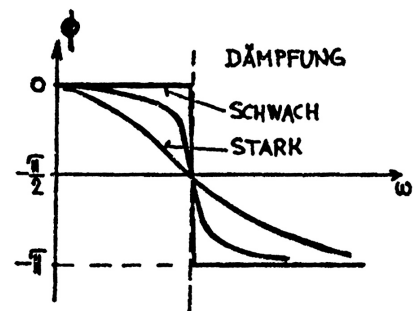
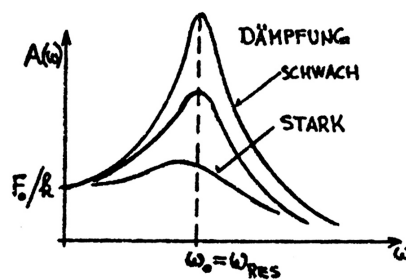
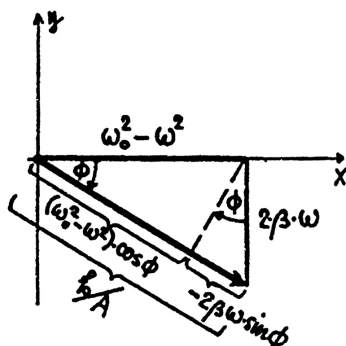
Aus (i) ergibt sich

$$(105) \quad \phi = -\arctg(2 \cdot \beta \cdot \omega / (\omega_0^2 - \omega^2)), \quad \text{Phasenverschiebung der Schwingung gegenüber der Störung.}$$

(i) und (ii) lassen sich durch untenstehendes Zeigerdiagramm darstellen (beachte, dass darin ϕ negativ ist), aus welchem für A folgt:

$$(106) \quad A(\omega) = f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \omega)^2}, \quad \text{Resonanzkurve.}$$

Für $\omega \rightarrow 0$ sind Störung und Schwingung in Phase ($\phi \rightarrow 0$); die Amplitude wird dann $A = f_0/\omega_0^2$ oder $A = F_0/k$, d.h. Störkraft und Federkraft stehen im Gleichgewicht (quasi-statisch).



Resonanz:

Als Resonanzfrequenz ω_{RES} bezeichnen wir jene Frequenz, für welche die **Phasendifferenz** der Schwingung gegenüber der Störung gerade $-\pi/2$ ist. Dies ist der Fall für $\omega = \omega_0$.

$$\left| \begin{array}{l} \omega_{RES} = \omega_0, \\ \phi(\omega_{RES}) = -\pi/2. \end{array} \right.$$

Die Bedeutung der Phasendifferenz $\phi = -\pi/2$ liegt darin, dass $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$ übergeht in $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$. Dann ist nämlich $v(t) = \omega_0 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ gerade mit der Störung $F_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$ in Phase, d.h. die mittlere Leistungsaufnahme des Oszillators $\bar{P} = \overline{F_0 \cdot v}$ (siehe S.32) ist an der Resonanzstelle maximal.

Das Amplitudenmaximum liegt bei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, fällt also nur bei kleiner Dämpfung ($\beta \ll \omega_0$) approximativ mit der Leistungsresonanzstelle zusammen.

Bei Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ schwingt das System in Gegenphase zur Störung ($\phi \rightarrow -\pi$), es wird im Zeitmittel keine Leistung aufgenommen.

Für kleine Dämpfung lesen wir aus (106) bei Resonanz die Amplitude

$$\begin{aligned} A(max) &= f_0 / (2 \cdot \beta \cdot \omega_0) \quad \text{ab, oder mit (102)} \\ A(max) &= Q \cdot f_0 / \omega_0^2, \quad \text{Resonanzüberhöhung.} \end{aligned}$$

Diese Amplitude ist das Q -fache der Amplitude bei $\omega \rightarrow 0$. Der Gütefaktor Q bestimmt die maximal erzielbare Resonanzüberhöhung.

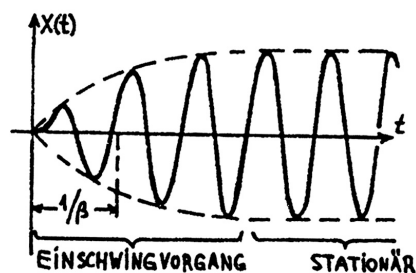
Mit zunehmender Dämpfung, bzw. abnehmender Güte Q , verbreitert sich die Resonanzkurve und $A(max)$ nimmt ab.

Einschwingvorgang:

Die allgemeine Lösung von (103) erhält man durch Superposition von (101) und (104):

$$(107) \quad x(t) = x_0 \cdot \exp(-\beta \cdot t) \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi) + A(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi(\omega)).$$

Der erste Summand trägt dem Einschwingvorgang Rechnung und enthält die Integrationskonstanten x_0 und φ , welche durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden; er nimmt exponentiell mit der Zeitkonstanten $1/\beta$ ab, so dass schliesslich für $t \gg 1/\beta$ der stationäre Schwingungszustand (die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (103) erreicht wird.



Übungsaufgabe:

Berechne die Lösung $x(t)$, wenn ein gedämpfter Oszillator aus dem Ruhezustand zur Zeit $t = 0$ mit seiner Resonanzfrequenz ω_0 angeregt wird (die Lösung entspricht der obigen Darstellung).

9.3 Überlagerung von Schwingungen

Häufig erfahren physikalische Grössen zeitliche Änderungen, welche durch Superposition harmonischer Schwingungen zustande kommen. In der Mechanik etwa im Fall gekoppelter Pendel (siehe Abschnitt 9.3.4). Wir betrachten im Folgenden Bewegungen der Form

$$x(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + a_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2).$$

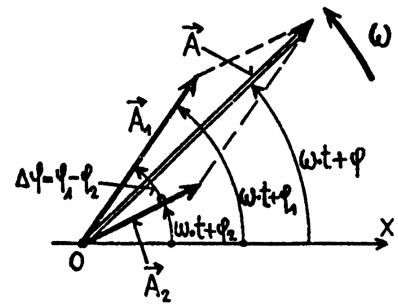
9.3.1 Das Zeigerdiagramm

Es erweist sich als äusserst nützlich, die harmonische Schwingung $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ als die x-Komponente eines Zeigers der Länge A aufzufassen, der im Koordinatenursprung angeheftet ist und mit der x-Achse den Phasenwinkel $\omega \cdot t + \varphi$ einschliesst, also mit der Kreisfrequenz ω rotiert. Die Summe mehrerer harmonischer Schwingungen ist dann gleich der x-Komponente der momentanen Vektorsumme der einzelnen Zeiger.

Eine andere Möglichkeit ist die Beschreibung von harmonischen Schwingungen mittels **komplexer Zahlen**, also durch Vektoren in der Gauss'schen Zahlenebene. Diese Darstellung ist äquivalent zum Zeigerdiagramm (s. Übungen).

9.3.2 Superposition von zwei Schwingungen gleicher Frequenz

Zwei Schwingungen $x_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1)$ und $x_2(t) = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2)$ werden durch die Zeiger \vec{A}_1 und \vec{A}_2 repräsentiert, die beide mit ω rotieren und die konstante Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ haben. Zur resultierenden Schwingung gehört der Zeiger $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ dessen Betrag A und Anfangsphase φ wir im Zeigerdiagramm ablesen. Es entsteht somit eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz ω , deren Amplitude A im Intervall $|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$ liegt. A wird maximal, wenn $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ist, minimal für $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ (Gegenphase). Zwei Schwingungen gleicher Amplitude und Frequenz heben sich auf, wenn sie in Gegenphase schwingen.



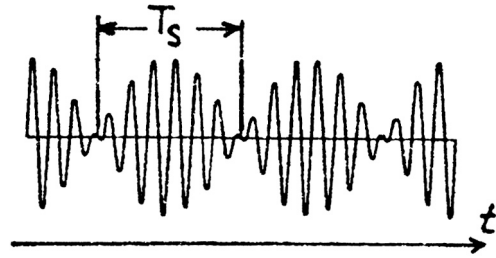
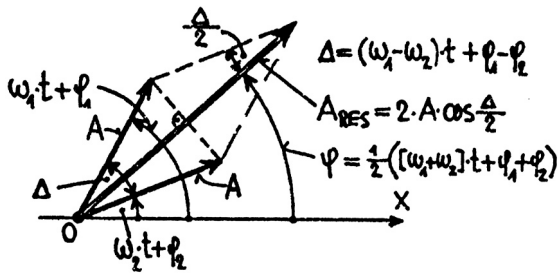
9.3.3 Superposition von zwei Schwingungen gleicher Amplitude und verschiedener Frequenz. Die Schwebung

Nun überlagern wir zwei Schwingungen $x_1(t) = A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)$ und $x_2(t) = A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$, welche gleiche Amplituden A , aber verschiedene Frequenzen und Anfangsphasen haben. Aus dem Zeigerdiagramm lesen wir für die Summe $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ab:

$$\begin{aligned} \varphi &= (\omega_1 + \omega_2) \cdot t/2 + (\varphi_1 + \varphi_2)/2, & \text{resultierende Phase} \\ A_{RES} &= 2 \cdot A \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t/2 + (\varphi_1 - \varphi_2)/2), & \text{resultierende Amplitude.} \end{aligned}$$

Die Bewegung $x(t)$ hat dann die Form

$$(108) \quad x(t) = 2 \cdot A \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2)t/2 + (\varphi_1 - \varphi_2)/2) \cdot \cos((\omega_1 + \omega_2)t/2 + (\varphi_1 + \varphi_2)/2).$$

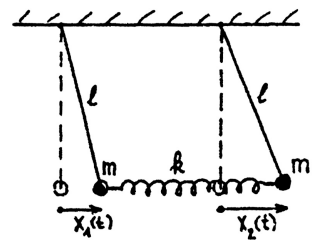


Im Allgemeinen ist diese Bewegung nicht mehr periodisch (ausser wenn ω_1 und ω_2 kommensurabel sind, d.h. ihr Verhältnis durch den Quotient ganzer Zahlen darstellbar ist). Ein interessanter Fall tritt auf, wenn $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ nahe bei ω_1 liegt, also $\Delta\omega \ll \omega_1$ ist. Dann können wir nämlich (108) als harmonische Schwingung der Kreisfrequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$ auffassen, deren Amplitude sich mit der halben Differenzfrequenz periodisch ändert. Es entsteht eine **Schwebung**. Die Frequenz $1/T_S$, mit welcher maximale Amplituden auftreten, ist gerade

$$(110) \quad (\omega_1 - \omega_2)/(2 \cdot \pi), \quad \text{die Schwebungsfrequenz.}$$

9.3.4 Gekoppelte Pendel

Zwei identische mathematische Pendel sind durch eine Feder gekoppelt („sympathische Pendel“). Die Länge der entspannten Feder ist gerade gleich dem Abstand der Aufhängepunkte der Pendel. Die Auslenkungen der beiden Massen seien $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$; es handelt sich um ein System mit zwei Freiheitsgraden. Die Feder ist durch die Federkonstante k charakterisiert, die Pendel durch $K = m \cdot g/l$. Die Bewegungsgleichungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ lauten dann:



$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{x}_1 &= -K \cdot x_1 - k \cdot (x_1 - x_2) \\ m \cdot \ddot{x}_2 &= -K \cdot x_2 + k \cdot (x_1 - x_2), \end{aligned}$$

gekoppelte Differenzgleichungen.

Summe und Differenz der Gleichungen ergeben

$$(111) \quad \begin{aligned} m \cdot (\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -K \cdot (x_1 + x_2) \\ m \cdot (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -K \cdot (x_1 - x_2) - 2 \cdot k \cdot (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Jetzt führen wir die so genannten **Normalkoordinaten** q_1 und q_2 ein:

$$(112) \quad q_1 = x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad q_2 = x_1 - x_2.$$

Die Gleichungen (111) gehen über in

$$(113) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -(K/m) \cdot q_1 \\ \ddot{q}_2 &= -((K + 2 \cdot k)/m) \cdot q_2. \end{aligned}$$

Durch Einführung der Normalkoordinaten q_1 und q_2 sind aus den gekoppelten Differentialgleichungen zwei ungekoppelte Schwingungsgleichungen entstanden. Deren Lösungen sind die so genannten **Normalschwingungen**:

$$(114) \quad \begin{array}{ll} q_1(t) = q_{10} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) & \text{und} \quad q_2(t) = q_{20} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2), \\ \text{mit} \quad \omega_1 = \sqrt{K/m} & \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{(K + 2k)/m}. \end{array}$$

Aus (112) folgt dann für x_1 und x_2 :

$$x_1 = (q_1 + q_2)/2 \quad \text{und} \quad x_2 = (q_1 - q_2)/2, \quad \text{also}$$

$$(115) \quad \begin{array}{l} x_1(t) = (q_{10}/2) \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + (q_{20}/2) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \\ x_2(t) = (q_{10}/2) \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) - (q_{20}/2) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \end{array}$$

Für schwache Kopplung zwischen den Pendeln, $k \ll K$, haben die Normalschwingungen (114) nur wenig verschiedene Frequenz, so dass die Gleichungen (115) Schwebungen darstellen. Anschaulich heisst das, dass die Pendelamplituden in Gegenphase zunehmen und abnehmen, die Energie abwechselnd mehr im einen, dann wieder im andern Pendel steckt.

Bedeutung der Normalschwingungen:

Setzen wir in (115) $q_{20} = 0$, so werden x_1 und x_2 identisch, nämlich

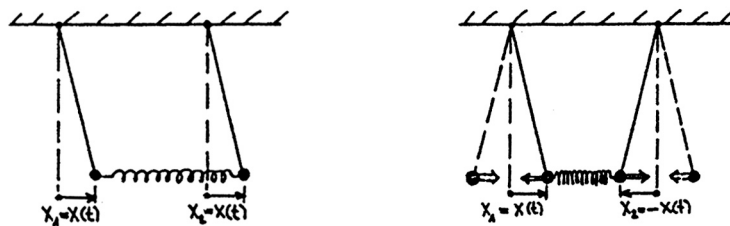
$$x_1 = x_2 = (q_{10}/2) \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1).$$

Setzen wir $q_{10} = 0$, schwingen die Pendel mit gleicher Amplitude in Gegenphase:

$$\begin{array}{l} x_1(t) = (q_{20}/2) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2), \\ x_2(t) = -(q_{20}/2) \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2). \end{array}$$

Diese beiden Normalschwingungen sind untenstehend dargestellt. Man kann sagen:

Jeder beliebige Schwingungszustand der gekoppelten Pendel kann als Superposition von Normalschwingungen dargestellt werden.



9.3.5 Fourier-Analyse periodischer Vorgänge

Eine Bewegung $x(t)$ sei die Summe von harmonischen Schwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz ω sind:

$$(116) \quad x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)).$$

Dann ist $x(t)$ sicher periodisch, also $x(t) = x(t + T)$, mit der Periode

$$T = 2 \cdot \pi / \omega,$$

denn wenn wir in (116) t durch $t + T$ ersetzen, ändern sich alle Argumente der harmonischen Funktionen um $n \cdot 2 \cdot \pi$, d.h. ihre Werte bleiben unverändert. Nach **Fourier** gilt auch das Umgekehrte (hier

ohne Beweis):

Jeder periodische physikalische Vorgang $x(t) = x(t + T)$ kann als Summe (116) harmonischer Schwingungen dargestellt werden, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache von $\omega = 2 \cdot \pi/T$ sind.

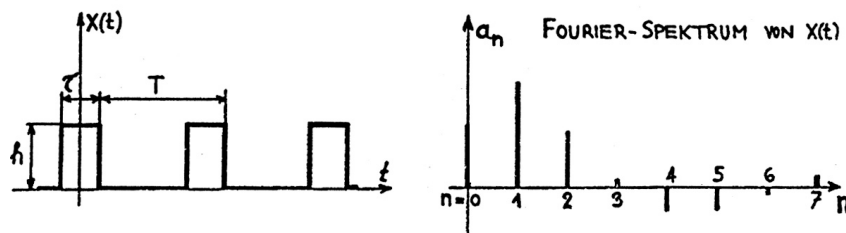
Die in (116) auftretenden Koeffizienten a_0 , a_n und b_n bilden das **Fourier-Spektrum** der periodischen Funktion $x(t)$. Aus der vorgegebenen Funktion $x(t) = x(t+T)$ werden sie folgendermassen gewonnen:

$$(117) \quad \begin{aligned} a_0 &= (1/T) \cdot \int_0^T x(t) \cdot dt \\ a_n &= (2/T) \cdot \int_0^T x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \\ b_n &= (2/T) \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \end{aligned}$$

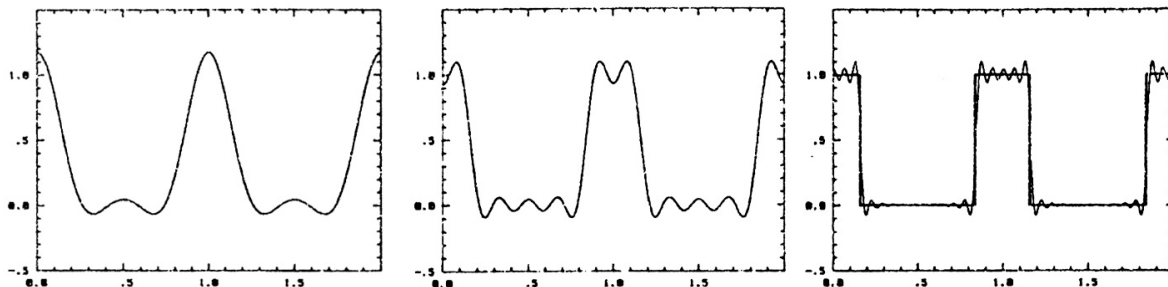
Der Koeffizient a_0 ist gerade der zeitliche Mittelwert von $x(t)$.

Als Beispiel betrachten wir die periodische Rechteckfunktion der Breite τ und der Höhe h . Weil es sich um eine gerade Funktion handelt, $x(t) = x(-t)$, verschwinden alle Fourierkoeffizienten b_n . Die Integrale (117) ergeben

$$a_0 = h \cdot \tau/T \quad \text{und} \quad a_n = 2 \cdot h/\pi \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot \tau/T)/n.$$



Die Grösse der Fourierkoeffizienten a_n nimmt mit zunehmendem n ab. Je mehr Glieder der Fourierreihe berücksichtigt werden, umso besser wird die Funktion $x(t)$ approximiert. Unten sind die Werte der Fourierreihe für $N = 3$, $N = 5$ und $N = 15$ berücksichtigte Glieder aufgetragen.



Demonstrationen:

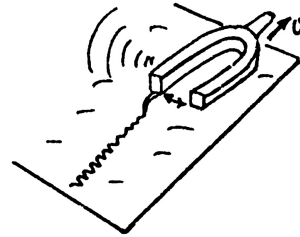
1. Federpendel mit Stokes-Reibung

2. Schwingende Lamelle
(Beobachtung mit K.O.)



3. Galvanometerschwingungen
Exponentieller Amplitudenzerfall

4. Stimmgabelschwingung auf Russplatte

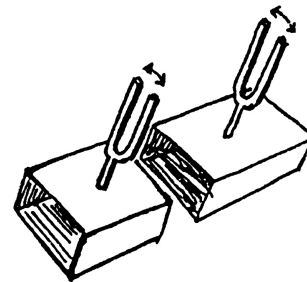


5. Resonanz mit Federpendel



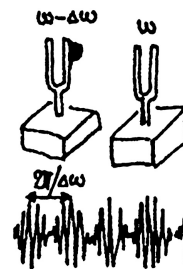
6. Resonanzmodell mit Pendelreihe

7. Resonanz mit Stimmgabeln

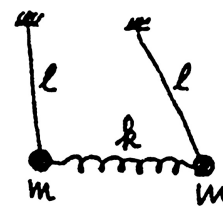


8. Schwebung mit Orgelpfeifen

9. Schwebung mit zwei Stimmgabeln



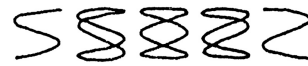
10. Sympathische Pendel



11. Lissajoufiguren mit Stimmgabeln

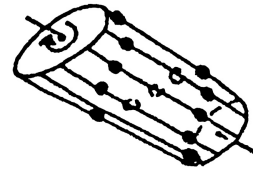


12. Lissajoufiguren mit K.O.



13. Fourierspektrum des Knalls

14. Wellenmodell



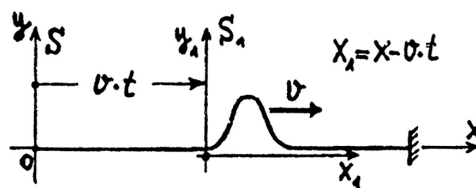
9.4 Wellen

Wellen treten in allen Gebieten der Physik auf. Wir beschäftigen uns an dieser Stelle mit mechanischen Wellen, inklusive Schallwellen. Allgemein entstehen Wellen dadurch, dass ein Teil eines elastischen Mediums durch eine Störung aus seiner Gleichgewichtslage gebracht wird. Wegen der elastischen Kopplung an die benachbarten Teile breitet sich die Störung räumlich aus. Mit diesem Vorgang ist ein **Energietransport** durch das Medium über grosse Distanzen verbunden, wobei sich die beteiligten Teilchen nur sehr wenig von ihrer Gleichgewichtslage entfernen, d.h. um dieselbe schwingen. Fällt die Auslenkung der Teilchen von ihrer Gleichgewichtslage mit der Ausbreitungsrichtung der Welle zusammen, spricht man von **Longitudinalwellen**, (z.B. Schallwellen in Luft), steht sie senkrecht dazu, von **Transversalwellen** (z.B. eine Seilwelle).

9.4.1 Die Seilwelle

Ein horizontales Seil ist rechtsseitig eingespannt und steht unter der Zugspannung σ . Jede links erzeugte vertikale Störung pflanzt sich mit einer Geschwindigkeit v nach rechts fort. Im mit v mitbewegten Koordinatensystem S_1 habe die Störung die Form $y = f(x_1)$. Im Laborsystem S beobachten wir wegen $x_1 = x - v \cdot t$ die von Ort und Zeit abhängige Störung

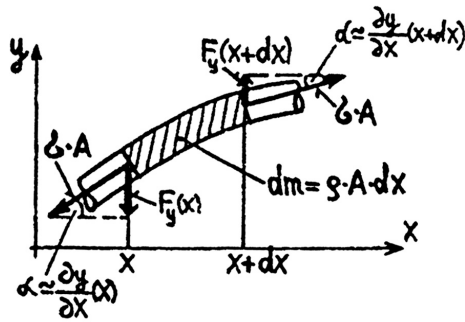
$$(118) \quad y(x, t) = f(x - v \cdot t). \quad \text{Die Störung läuft mit der Phasengeschwindigkeit } v \text{ nach rechts.}$$



Eine nach links laufende Störung würde durch $y(x, t) = f(x + v \cdot t)$ ausgedrückt.

Die Bewegungsgleichung:

Anhand nebenstehender Figur leiten wir die Newton'sche Bewegungsgleichung für ein Seil mit Querschnitt A und Dichte ρ her, wenn es unter der Zugspannung σ steht. Die Auslenkungen $y(x, t)$ sollen klein sein, ebenso die Steigungen $\partial y / \partial x$ (partielle Ableitung nach x , d.h. Differentiation nach x , mit $t = \text{const.}$). Auf das herausgegriffene Massenelement $dm = \rho \cdot A \cdot dx$ wirkt in y -Richtung die resultierende Kraft



$$F_y = F_y(x + dx) + F_y(x), \quad \text{also} \quad F_y = \sigma \cdot A \cdot (\partial y(x + dx)/\partial x - \partial y(x)/\partial x).$$

Mit Newton II ist $F_y = dm \cdot \partial^2 y / \partial t^2$, d.h.

$$\begin{aligned} \sigma \cdot A \cdot (\partial y(x + dx)/\partial x - \partial y(x)/\partial x) &= \rho \cdot A \cdot dx \cdot \partial^2 y / \partial t^2 \quad \text{oder} \\ (\partial y(x + dx)/\partial x - \partial y(x)/\partial x) / dx &= (\rho / \sigma) \cdot \partial^2 y / \partial t^2. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist gerade $\partial^2 y / \partial x^2$. Wir erhalten

$$\boxed{(119) \quad \partial^2 y / \partial t^2 = (\sigma / \rho) \cdot \partial^2 y / \partial x^2, \quad \text{Differentialgleichung der Seilwelle.}}$$

Wir können uns leicht überzeugen, dass (118), $y(x, t) = f(x - v \cdot t)$, die Wellengleichung (119) erfüllt, wobei die Phasengeschwindigkeit v durch die Seilspannung σ und die Seildichte ρ bestimmt wird.

$$\boxed{(120) \quad v = \sqrt{\sigma / \rho}, \quad \text{Phasengeschwindigkeit der Seilwelle.}}$$

Allgemein können wir sagen:

In einem Medium können sich Wellen ausbreiten, wenn eine Differentialgleichung gültig ist von der Form

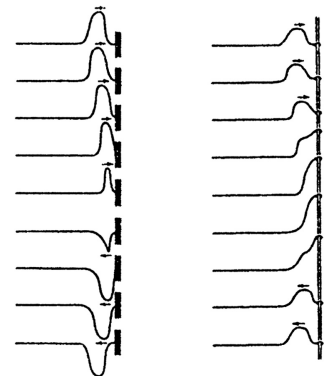
$$\boxed{(121) \quad \partial^2 y / \partial t^2 = v^2 \cdot \partial^2 y / \partial x^2, \quad \text{Wellengleichung.}}$$

Reflexion und Randbedingung:

Wenn das Seil rechtsseitig eingespannt ist, übt die Halterung beim Eintreffen des Störpulses $f(x - v \cdot t)$ eine solche Kraft auf das Seil aus, dass dort ein gleich grosser, aber negativer Puls $-f(x + v \cdot t)$ erzeugt wird, der nach links läuft.

Die Randbedingung $y = 0$ am festen Ende führt zur Reflexion des Pulses mit negativem Vorzeichen (Phasensprung π).

Ist das rechte Ende frei, erfolgt die Reflexion ohne Phasensprung, d.h. $f(x - v \cdot t)$ wird als $f(x + v \cdot t)$ reflektiert.

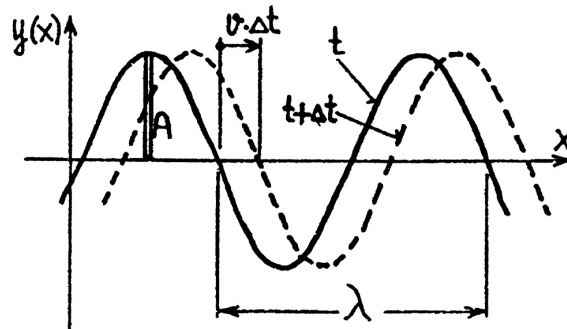


9.4.2 Harmonische Wellen

Eine harmonische Welle ist eine räumlich periodische Störung der Form

$$(122) \quad y(x, t) = A \cdot \cos((2 \cdot \pi/\lambda) \cdot (x \mp v \cdot t)), \quad \text{harmonische Welle.}$$

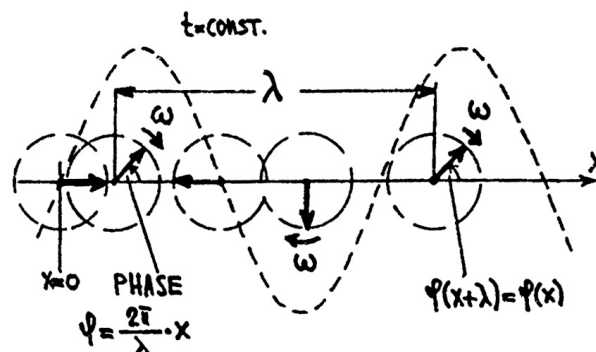
Aus (122) lesen wir ab, dass zu einer festen Zeit t (Momentanbild) Auslenkungen $y(x)$ von den Ruhelagen eine harmonische Funktion der räumlichen Periode oder Wellenlänge λ bilden.



Als Funktion der Zeit verschiebt sich das Momentanbild mit der Phasengeschwindigkeit v nach links oder nach rechts. Halten wir die Ortskoordinate x fest, so stellt (122) eine harmonische Schwingung der Kreisfrequenz $\omega = (2 \cdot \pi/\lambda) \cdot v$ dar. Mit $\omega = 2 \cdot \pi \cdot v$ folgt

$$(123) \quad v = \nu \cdot \lambda.$$

Wenn wir im Sinne von 9.3.1 die Schwingungen der Teilchen um ihre Ruhelage x durch einen Zeiger darstellen, welcher Amplitude und Phase der Schwingung an der betreffenden Stelle ausdrückt, so ergibt sich das folgende Momentanbild:



Die Zeiger geben die relative Phasenverschiebung wieder, welche durch Änderung des Ortes zustande kommen. Mit fortschreitender Zeit drehen sich alle Zeiger wie Uhrzeiger mit der Kreisfrequenz ω , behalten also ihre relativen Phasenunterschiede bei. Die Wellenlänge λ ist der kürzeste Abstand zwischen zwei Zeigern in gleicher Phasenlage. Es ist üblich, die **Wellenzahl** $k = 2 \cdot \pi/\lambda$ einzuführen und (122) in der Form zu schreiben

$$(124) \quad y(x, t) = A \cdot \cos(k \cdot x \mp \omega \cdot t).$$

Am Ort x ist zur Zeit t die Phase $\phi = k \cdot x - \omega \cdot t$. Betrachten wir zur Zeit $t + dt$ den benachbarten Ort $x + dx$, so hat sich die Phase um $d\phi = k \cdot dx - \omega \cdot dt$ geändert. Diese Änderung ist null für $dx = (\omega/k) \cdot dt$, d.h. die Orte konstanter Phase ϕ verschieben sich mit der „Phasengeschwindigkeit“

$$(125) \quad v = \omega/k, \quad \text{Phasengeschwindigkeit,}$$

was wiederum mit (123), $v = \nu \cdot \lambda$, übereinstimmt.

9.4.3 Stehende harmonische Wellen

Läuft eine harmonische Seilwelle $y(x, t) = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$ von links her auf das bei $x = 0$ eingespannte rechte Seilende zu, so wird die in Gegenphase reflektierte Welle $y_R(x, t) = -A \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t)$ der einfallenden Welle überlagert. Die resultierende Welle ist dann

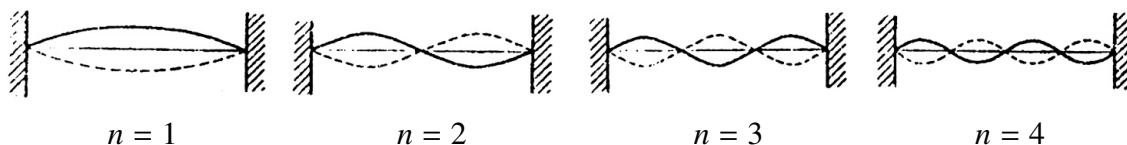
$$y(x, t) = A \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) - A \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t).$$

Mit dem Additionstheorem folgt

$$y(x, t) = A \cdot (\cos(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \sin(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t) - \cos(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \sin(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t)) \quad \text{oder}$$

$$(126) \quad y(x, t) = 2 \cdot A \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t), \quad \text{stehende Welle.}$$

Die stehende Welle ist durch raumfeste Knoten im Abstand $\lambda/2$ gekennzeichnet. Zwischen den Knoten schwingen die Teilchen in Phase, mit maximaler Amplitude in der Mitte (Schwingungsbäuche). Es findet kein Energietransport entlang der x-Achse statt. Es handelt sich genau um den Schwingungsmodus einer **eingespannte Saite**. Ist die Saitenlänge L , so muss die Wellenlänge die Bedingung $L = n \cdot (\lambda/2)$ erfüllen, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ ist.



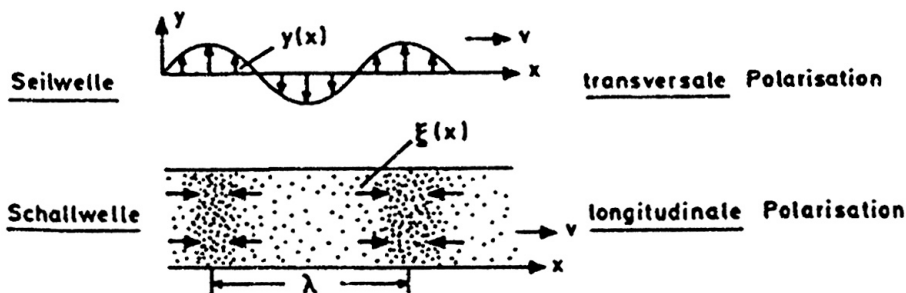
Die möglichen Frequenzen ergeben sich dann aus (120) und (123):

$$(127) \quad \nu = (n/(2 \cdot L)) \cdot \sqrt{\sigma/\rho}, \quad \text{Eigenfrequenz der Saite.}$$

Die kleinstmögliche Eigenfrequenz ist die **Grundfrequenz** ($n = 1$). Je nach Anregungsart sind an einer Saitenschwingung auch **Oberschwingungen** ($n = 2, 3, \dots$) beteiligt.

9.4.4 Schallwellen

Bei der Schallwelle schwingen die Teilchen des Mediums in Ausbreitungsrichtung, es handelt sich um **Longitudinalwellen**. Sie können in allen elastischen Medien auftreten (z.B. in Wasser oder festen Körpern). Wir betrachten hier Schallwellen in Gasen. In einer Gassäule soll ein Gleichgewichtsdruck p_0 und die zugehörige Dichte ρ_0 herrschen, wenn sich alle Gasatome an ihrer Gleichgewichtslage befinden. Entfernen sich an einer Stelle x die Teilchen um $\xi(x, t)$ infolge einer äusseren Störung von ihrer Gleichgewichtslage, so werden sich Dichteschwankungen $\Delta\rho(x, t)$ und Druckschwankungen $\Delta p(x, t)$ ausbreiten. Periodische Druckschwankungen in der Luft nehmen wir als Töne wahr.

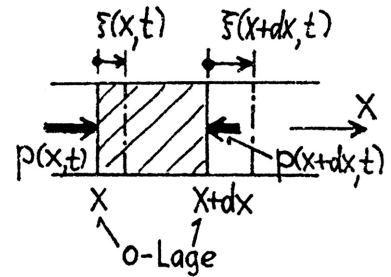


Wir fragen nun nach der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen in Gasen, d.h. wir versuchen die Wellengleichung in ähnlicher Weise herzuleiten, wie wir dies im Falle der Seilwellen getan haben.

Auf ein herausgegriffenes Gasvolumen vom Querschnitt A und der Länge dx wirkt von links der Druck $p_0 + \Delta p(x, t)$ und von rechts $p_0 + \Delta p(x + dx, t)$. Mit den Auslenkungen $\xi(x, t)$ aus der Gleichgewichtslage ist nach (82) die relative Volumenänderung

$$(i) \quad (\xi(x + dx, t) - \xi(x, t))/dx = -\chi \cdot \Delta p(x, t).$$

χ ist die Kompressibilität des Gases. Andererseits gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung



$$(ii) \quad A \cdot (\Delta p(x, t) - \Delta p(x + dx, t)) = \rho_0 \cdot A \cdot dx \cdot \partial^2 \xi(x, t) / \partial t^2, \quad \text{oder} \\ \partial / \partial x \cdot (\Delta p(x, t)) = -\rho_0 \cdot \partial^2 \cdot \xi(x, t) / \partial t^2.$$

Mit $\Delta p(x, t)$ aus (i) folgt

$$(128) \quad \partial^2 \xi / \partial t^2 = (1/\chi \cdot \rho_0) \cdot \partial^2 \xi / \partial x^2, \quad \text{Wellengleichung der Schallwelle.}$$

Der Klammerausdruck rechts ist gerade das Quadrat Schallgeschwindigkeit v .

$$(129) \quad v_s = \sqrt{1/(\chi \cdot \rho_0)}, \quad \text{Schallgeschwindigkeit im Gas.}$$

Kompressibilität:

Wir haben im Abschnitt 8.2 (siehe S.82) gezeigt, dass die Kompressibilität des idealen Gases bei konstant gehaltener Temperatur $\chi = 1/p$ ist. Die Druckänderungen bei Schallwellen erfolgen jedoch so schnell, dass die lokale Kompressionswärme nicht abgeführt werden kann. Wir werden in der Wärmelehre zeigen, dass unter diesen Umständen die Kompressibilität den Wert annimmt

$$\chi = 1/((C_p/C_V) \cdot p_0), \quad \text{Adiabatische Kompressibilität.}$$

C_p/C_V ist das Verhältnis der molaren spezifischen Wärmen bei konstantem Druck, bzw. konstantem Volumen. Für Luft ist dieser Quotient 1.40. Ferner wird sich zeigen, dass zwischen der Dichte ρ_0 und dem Druck p_0 die Beziehung gilt

$$p_0/\rho_0 = R \cdot T/M, \quad R = \text{molare Gaskonstante, } T = \text{absolute Temperatur} \\ \text{und } M = \text{relative Molekülmasse.}$$

Setzen wir diese Beziehung in (129) ein so erhalten wir

$$(130) \quad v_s = \sqrt{(C_p/C_V) \cdot R \cdot T/M}, \quad \text{Schallgeschwindigkeit.}$$

Beachte, dass die Schallgeschwindigkeit im Gas nur von der Temperatur und nicht vom Druck abhängt, weil Druck und Dichte einander proportional sind.

Übungsaufgabe:

Berechne mit (130) die Schallgeschwindigkeit in Luft bei Zimmertemperatur.

Ton, Klang und Geräusch:

Man unterscheidet im Sprachgebrauch zwischen verschiedenen Arten von Schall:

Ein **Ton** ist eine reine harmonische Störung einer bestimmten Frequenz.

Ein **Klang** ist eine periodische Störung, die durch Superposition verschiedener Töne zustande kommt.

Ein **Geräusch** ist eine Störung, die vollkommen unperiodisch ist, d.h. die darin enthaltenen Frequenzen und Amplituden ändern statistisch.

Schalldruck-Pegel:

Unter Schallintensität I versteht man den Energiefluss (W/m^2) einer Schallwelle, welcher dem Quadrat der Amplitude der Druckschwankungen proportional ist. Bei einer Schallfrequenz von 1'000 Hz liegt die menschliche Hörschwelle bei $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$, was einem Effektivwert der Druckschwankungen von $\Delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ entspricht. Die Schmerzgrenze liegt bei 10 W/m^2 . Als **Schalldruck-Pegel** L , gemessen in dB (dezibel), bezeichnet man

$$(131) \quad \begin{array}{l} L = 10 \cdot \log_{10}(I/I_0) \quad \text{oder} \\ L = 20 \cdot \log_{10}(\Delta p/\Delta p_0) \text{ dB,} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Schalldruck-Pegel.} \\ \text{(mit } \Delta p_0 = 20\mu \text{ Pa).} \end{array}$$

Bei einer Frequenz von 1'000 Hz liegt also die Hörschwelle bei 0 dB und die Schmerzgrenze bei etwa 130 dB.

Dopplereffekt:

Unter dem Dopplereffekt in der Akustik versteht man die Tatsache, dass die von einem Beobachter festgestellte Schallfrequenz davon abhängt, mit welcher Geschwindigkeit sich Schallquelle und Beobachter relativ zum elastischen Medium bewegen. Eine relativ zur Luft ruhende Schallquelle Q sende Schallwellen der Frequenz ν_0 und somit der Wellenlänge $\lambda_0 = c/\nu_0$ in der x-Richtung aus. Wenn sich Q nun mit der Geschwindigkeit v_Q in x-Richtung bewegt, so verkleinert sich die Wellenlänge auf

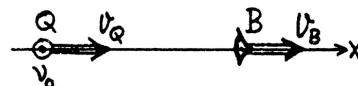
$$\lambda = (c - v_Q)/\nu_0,$$

wobei sich die Wellenzüge nach wie vor mit c ausbreiten. Ein auf der x-Achse ruhender Beobachter wird dann die Frequenz

$$\nu = c/\lambda \quad \text{oder} \quad \nu = \nu_0 \cdot c/(c - v_Q) \quad \text{messen.}$$

Bewegt sich auch der Beobachter mit v_B in x-Richtung so hört er die Frequenz

$$(132) \quad \nu = \nu_0 \cdot (c - v_B)/(c - v_Q).$$

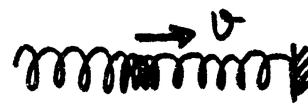


Demonstrationen:

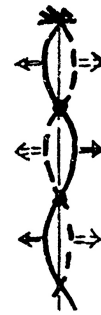
1. Seilwelle



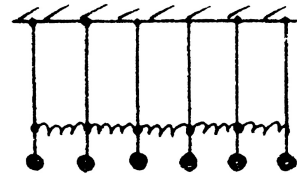
2. Welle in Spiralfeder



3. Störung auf gespanntem Gummiseil

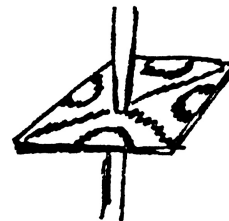


4. Reihe gekoppelter Pendel

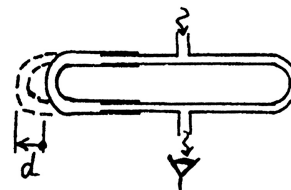


5. Stehende Welle auf Gummiseil

6. Klangfiguren nach Chladni



7. Quincke-Anordnung



8. Pfeife mit Luft, CO und H



9. Ton und Klang auf K.O.

10. Wellentrog

11. Dopplereffekt

12. dB-Meter

Teil II

Wärmelehre

Die Wärmelehre bezieht sich auf Objekte, die aus einer riesigen Zahl einzelner Partikel (Atome, Moleküle) bestehen, welche ihrerseits den Gesetzen der klassischen Mechanik genügen. Es gibt zwei Arten der Betrachtungsweise:

a) Die phänomenologische Thermodynamik

Sie macht keinerlei Voraussetzung über die mikroskopische Struktur der Objekte und arbeitet ausschliesslich mit makroskopischen, messbaren Grössen (wie Temperatur, innere Energie, Wärmemengen, usw.). Sie ist eine **axiomatisch** aufgebaute Wissenschaft, deren Axiome aus **drei Hauptsätzen** bestehen. Ihre Stärke liegt, in der allgemeinen Gültigkeit und Unabhängigkeit von Modellen.

b) Die Methode der statischen Dynamik

Diese arbeitet mit mikroskopischen Modellen, wobei statistische Aussagen über das Verhalten der einzelnen Partikel gemacht werden (z.B. über ihre Energie, Geschwindigkeit, etc.). Basierend auf diesen statistischen Aussagen werden makroskopische, thermodynamische Grössen hergeleitet. Ihr Vorzug liegt in der anschaulichen Interpretation der phänomenologischen Begriffe (wie Temperatur, Entropie, usw.).

Neben den Basisgrössen Länge, Zeit und Masse benötigen wir hier die Basisgrösse der **Stoffmenge**:

Die Basiseinheit **1 Mol** (Symbol: mol) ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 0.012 kg des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind.

Mit der Einheit der Stoffmenge verknüpft ist die **Avogadrozahl**:

Die Avogadrozahl $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ **Moleküle/mol** gibt an, wie viele Moleküle (oder Atome) in einem Mol eines Stoffes vorhanden sind.

Kapitel 1

Ideales Gas

1.1 Kinetische Theorie

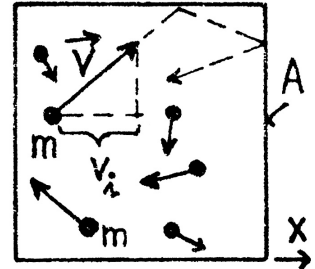
In einem Volumen V sei ein Gas eingeschlossen, welches folgenden Modellvorstellungen genügt:

- Seine Moleküle haben vernachlässigbar kleine Volumina.
- Zwischen den Molekülen wirken keine Kräfte, ausser im Moment ihres Zusammenstosses.
- Stösse zwischen den Molekülen und mit der Gefässwand sind elastisch.
- Es gilt das Prinzip der molekularen Unordnung.

Man bezeichnet ein solches System als **ideales Gas**. In vielen Fällen verhalten sich reale Gase in guter Näherung ideal (z.B. Edelgase unter Normalbedingungen).

Der Gasdruck p :

Wenn sich N Moleküle der Masse m im würfelförmigen Volumen V befinden, ist die Teilchendichte $n = N/V$ (m^{-3}). Nun soll das Einheitsvolumen n_i Teilchen enthalten, deren x -Komponente der Geschwindigkeit den Betrag $|v_x| = v_i$ hat. Die Hälfte davon, $n_i/2$, wird in positiver x -Richtung fliegen. Auf die normal zur x -Achse stehende Würfelwand A treffen dann pro Zeiteinheit $(n_i/2) \cdot A \cdot v_i$ Moleküle auf. Durch Reflexion an der Wand ergibt sich eine zeitliche Impulsänderung oder Kraft



$$2 \cdot (n_i/2) \cdot A \cdot m \cdot v_i^2 = F_i, \quad \text{oder} \quad p_i = m \cdot n_i \cdot v_i^2.$$

Den Gesamtdruck erhalten wir durch Summation über alle n_i mit Geschwindigkeitskomponenten v_i also

$$p = m \cdot \sum_i n_i \cdot v_i^2. \quad \text{Mit dem Mittelwert } \langle v_x^2 \rangle = (\sum_i n_i \cdot v_i^2) / (\sum_i n_i) \\ \text{und } \sum_i n_i = n, \text{ folgt}$$

$$p = m \cdot n \cdot \langle v_x^2 \rangle.$$

Wegen der molekularen Unordnung müssen die Mittelwerte $\langle v_x^2 \rangle$, $\langle v_y^2 \rangle$ und $\langle v_z^2 \rangle$ gleich gross sein, so dass aus

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \quad \text{sich ergibt:} \quad \langle v_x^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3 \quad \text{und}$$

$$p = m \cdot n \cdot \langle v^2 \rangle / 3.$$

Die mittlere kinetische Energie eines Moleküls ist aber $\langle E(kin) \rangle = m \cdot \langle v^2 \rangle / 2$, so dass wir auch schreiben können:

$$(1) \quad p = (2/3) \cdot n \cdot \langle E(kin) \rangle, \quad \text{Grundgleichung der kinetischen Gastheorie.}$$

Das Aequipartitionsprinzip (Gleichverteilungssatz):

Der Gleichverteilungssatz der klassischen Statistik (Boltzmann-Statistik) schlägt die Brücke zur phänomenologischen Thermodynamik. Auf das ideale Gas angewendet lautet er:

$$(2) \quad \langle E(kin) \rangle = 3 \cdot k \cdot T / 2, \quad \text{Aequipartitions-Prinzip.}$$

Absolute Temperatur T in Kelvin (K)
Boltzmann-Konstante $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Wir können (2) als Definition der absoluten Temperatur auffassen.

Die vollkommen ungeordnete thermische Bewegung der Moleküle wird durch die **absolute Temperatur T** charakterisiert. Sie ist ein Mass für die mittlere kinetische Energie pro Molekül und somit eine **intensive Grösse**.

Drücken wir die mittlere kinetische Energie pro Molekül mit (2) durch die Temperatur aus, so erhalten wir aus (1) die Beziehung zwischen Druck p , Teilchendichte n und Temperatur T für das ideale Gas:

$$(3) \quad p = n \cdot k \cdot T$$

Befindet sich im Volumen V die Stoffmenge r mol, so ist die Teilchendichte $n = r \cdot N_A / V$ und (3) geht über in

$$p \cdot V = r \cdot N_A \cdot k \cdot T.$$

Das Produkt $N_A \cdot k$ ist die **absolute Gaskonstante R**. Wir erhalten also

$$(4) \quad p \cdot V = r \cdot R \cdot T, \quad \text{die Zustandsgleichung des idealen Gases.}$$

1.2 Die Maxwell-Boltzmann'sche Energieverteilung

Zur Berechnung des kinetischen Druckes p haben wir den Begriff der mittleren kinetischen Energie $\langle E(kin) \rangle$ verwendet, ohne danach zu fragen, wie die Gesamtenergie auf die einzelnen Moleküle verteilt ist. Der Bewegungszustand eines individuellen Teilchens wird sich ständig durch Stossprozesse ändern, wobei aber die Gesamtenergie des Systems erhalten bleibt (abgeschlossenes System). Wir postulieren, dass bei sehr grosser Teilchenzahl sich eine stationäre Geschwindigkeitsverteilung einstellt, d.h., dass jedes Geschwindigkeitsintervall immer dieselbe Anzahl von Teilchen enthält, dass also Teilchen die ihre Geschwindigkeit ändern, ständig durch andere ersetzt werden. Man nennt einen solchen Zustand ein **thermisches Gleichgewicht**, es ist gemäss dem Aequipartitions-Prinzip durch eine **Temperatur T** charakterisiert.

Über die Art und Weise, wie die Gesamtenergie auf die Einzelteilchen verteilt ist, gibt das **Maxwell-Boltzmann'sche Verteilungsgesetz** Auskunft. Danach ergeben sich die Anzahl Teilchen n_i pro Volumeneinheit mit der Energie E_i durch

$$(5) \quad n_i \sim \exp(-E_i / (kT)), \quad \text{Boltzmann-Verteilung.}$$

Wir verzichten auf die Herleitung von (5), verifizieren aber die Gültigkeit am speziellen Beispiel der Barometerformel (siehe S.82). Sie lautet

$$p(h) = p_0 \cdot \exp(-(\rho_0/p_0) \cdot g \cdot h).$$

Aus $p = n \cdot k \cdot T$ und $\rho = n \cdot m$, folgt $\rho/p = m/(k \cdot T)$ und

$$n(h) = n(0) \cdot \exp(-m \cdot g \cdot h/(k \cdot T)).$$

Mit $E_p = m \cdot g \cdot h$ wird

$$n(h) = n(0) \cdot \exp(-E_p(h)/(k \cdot T)).$$

Der in der Barometerformel auftretende Faktor $\exp(-m \cdot g \cdot h/(k \cdot T))$ ist gerade der **Boltzmannfaktor**.

Angewendet auf die Geschwindigkeitsverteilung im Gas ergibt sich ein Boltzmannfaktor der Form $\exp(-m \cdot v^2/(2 \cdot k \cdot T))$, da sich die Gasteilchen nur in ihrer kinetischen Energie $E(kin) = m \cdot v^2/2$ unterscheiden. Es sei nun $w(v) \cdot dv$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen einen Betrag v der Geschwindigkeit besitzt, der zwischen v und $v + dv$ liegt. Dann muss die Normierung gelten

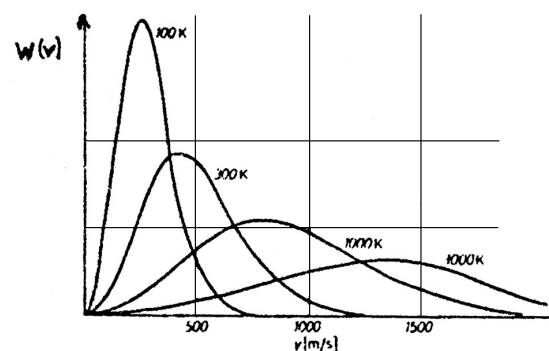
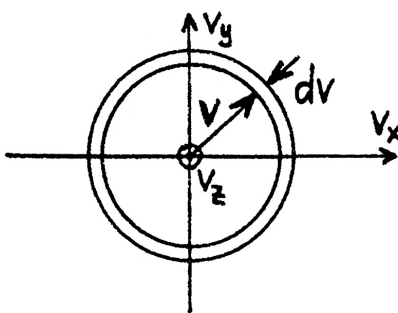
$$(6) \quad \int_0^{\infty} w(v) \cdot dv = 1. \quad w(v) = \text{Wahrscheinlichkeitsdichte.}$$

Im Geschwindigkeitsraum liegen alle zum Intervall zwischen v und $v + dv$ gehörenden Punkte in einer Kugelschale mit dem Volumen $4 \cdot \pi \cdot v^2 \cdot dv$. Neben dem Boltzmannfaktor enthält deshalb $w(v)$ noch den Faktor v^2 . $w(v)$ ist also von der Form

$$w(v) = A \cdot v^2 \cdot \exp(-m \cdot v^2/(2 \cdot k \cdot T)).$$

Mit Hilfe von (6) lässt sich die Konstante A bestimmen. Führen wir noch die Grösse $\alpha^2 = 2 \cdot k \cdot T/m$ ein, so ergibt die Rechnung

$$(7) \quad w(v) = (4/(\sqrt{\pi} \cdot \alpha^3)) \cdot v^2 \cdot \exp(-v^2/\alpha^2), \quad \text{Maxwell-Boltzmann'sche Geschwindigkeitsverteilung.}$$



Das Maximum von $w(v)$ liegt bei $v = \alpha$

$$\alpha = \sqrt{2 \cdot k \cdot T/m} \quad \text{ist die häufigste Geschwindigkeit.}$$

Aus (7) lassen sich sofort folgende Mittelwerte von v berechnen:

$$(8) \quad \langle v \rangle = \int_0^{\infty} v \cdot w(v) \cdot dv, \quad \langle v \rangle = 1.13 \cdot \alpha.$$

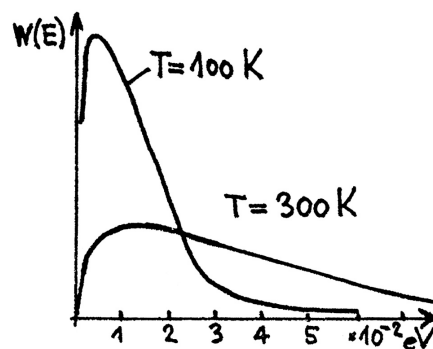
$$(9) \quad \langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 \cdot w(v) \cdot dv, \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 1.22 \cdot \alpha.$$

Drücken wir (7) durch m und T aus, erhalten wir

$$(7a) \quad w(v) = 4 \cdot \pi \cdot (m/(2 \cdot \pi \cdot k \cdot T))^{3/2} \cdot v^2 \cdot \exp(-m \cdot v^2/(2 \cdot k \cdot T)).$$

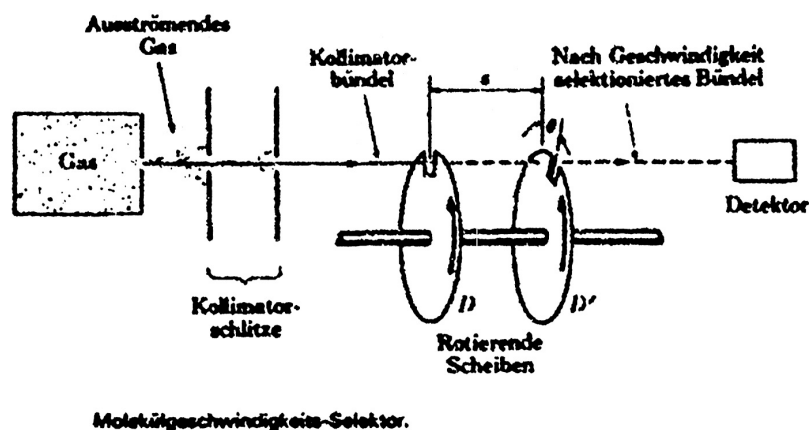
Schliesslich können wir mit $E = m \cdot v^2/2$ auch $w(E) \cdot dE$ als Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Energie-Intervall zwischen E und dE zu finden, bilden. Dies führt auf

$$(10) \quad w(E) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{E/(\pi \cdot k \cdot T)^3} \cdot \exp(-E/k \cdot T), \quad \text{Energieverteilung.}$$



Beachte, dass im Gegensatz zu $w(v)$, $w(E)$ nicht von der Teilchenmasse abhängt.

Die berechnete Geschwindigkeitsverteilung (7) wird durch das Experiment bestätigt. Dies geschieht mittels einer Atomstrahl-Apparatur, wo aus einer Gaszelle durch ein kleines Loch Atome in ein Vakuumssystem entweichen. Zwei rotierende Scheiben mit versetzten Schlitten selektieren Atome mit bestimmten Geschwindigkeiten („grüne Welle“), deren Intensität mit einem Staurohr nachgewiesen und mit der auf (7) basierenden Berechnung verglichen wird.



Kapitel 2

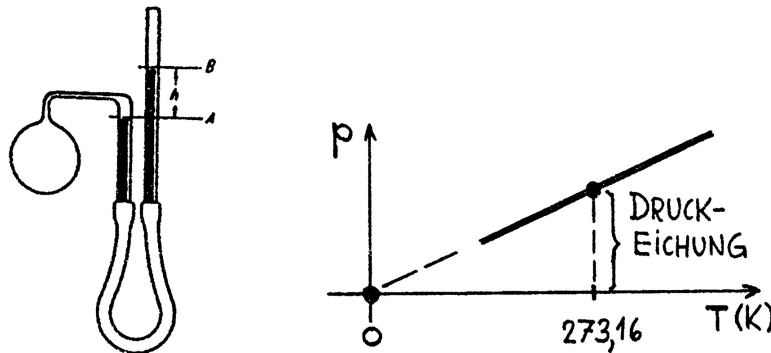
Temperaturmessung

Die Zustandsgleichung (4) des idealen Gases (in Praxis Heliumgas) bildet die Grundlage der thermodynamischen Temperaturmessung, indem der Druck p bei konstant gehaltenem Volumen der Temperatur T proportional ist. T ist eine **Basisgrösse**, ihre Einheit das **Kelvin**.

Definition:

Die Basiseinheit **1 Kelvin (K)** ist der **273.16te Teil** der thermodynamischen Temperatur des **Tripelpunktes von Wasser**.

Der Fixpunkt wird durch eine Tripelpunktzelle mit Wasser realisiert. Dies ist ein abgeschlossenes Volumen, welches gleichzeitig Eis, flüssiges Wasser und Wasserdampf im thermodynamischen Gleichgewicht enthält (s. Kapitel 4).



Zur praktischen Temperaturmessung im Labor und in der Technik verwendet man indirekte Methoden. Es werden temperaturabhängige physikalische Grössen gemessen und anhand des Gas-Thermometers die zugehörigen Eich-Skalen für die Temperatur erstellt. Beispiele:

- Volumenausdehnung (klassisches Quecksilberthermometer).
- Elektrischer Widerstand (Pt-Widerstands-Thermometer).
- Thermoelektrischer Effekt (Cu-Konstantan-Thermoelement).

Kapitel 3

Transportphänomene

Durch unsere mikroskopische Vorstellung können wir eine gewisse Einsicht in Transporteigenschaften gewinnen. Wir wollen hier die Erscheinungen der **Diffusion** und der **Wärmeleitung** ins Auge fassen. Sie sind dadurch charakterisiert, dass Inhomogenitäten in der Verteilung der Teilchendichte beziehungsweise der Temperatur zu Transport von Teilchen oder Wärmeenergie führen.

3.1 Mittlere freie Weglänge

Wir machen die Annahme, dass die Gasteilchen harte Kugeln mit dem Radius r sind. Greifen wir eine Kugel heraus, so wird diese immer dann mit einer anderen stossen, wenn deren Mittelpunkt sich auf die Distanz $2r$ annähert. Wir bezeichnen die Kreisscheibe mit dem Radius $2r$ als Stoss-Wirkungsquerschnitt σ des Gasteilchens.

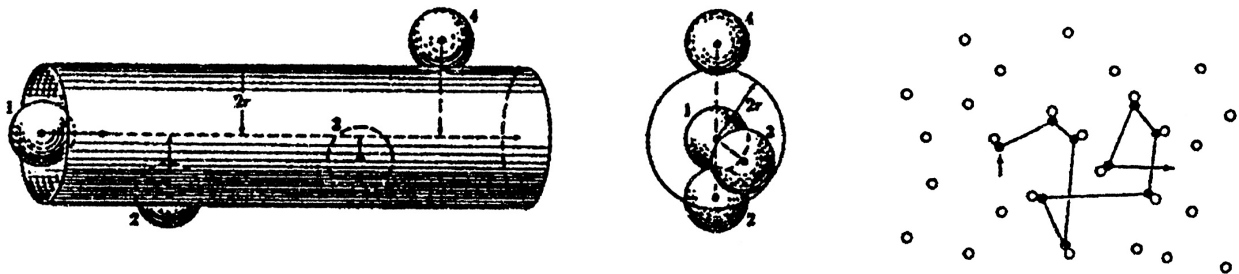
$$(11) \quad \sigma = 4 \cdot \pi \cdot r^2, \quad \text{Stoss-Wirkungsquerschnitt.}$$

Ist die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ so wird pro Zeiteinheit durch σ das Volumen $\sigma \cdot \langle v \rangle$ aufgespannt. Während dieser Zeit finden gerade $\sigma \cdot \langle v \rangle \cdot n$ Stöße statt, denn so viele andere Teilchen liegen mit ihren Mittelpunkten im betreffenden Volumen. Wir erhalten also die

$$(12) \quad \text{Mittlere Stossfrequenz} \quad \nu = n \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle.$$

Der pro Sekunde von einem Teilchen zurückgelegte Weg, dividiert durch die Stossfrequenz, ist aber gerade die mittlere freie Weglänge $\langle L \rangle$. Diese Überlegung ist insofern falsch, dass die Zentren der stossenden Teilchen als ruhend angenommen wurden. Mit Berücksichtigung der Relativbewegung der Stosspartner gibt die genaue Rechnung für $\langle L \rangle$:

$$(13) \quad \langle L \rangle = 1/(n \cdot \sigma \cdot \sqrt{2}), \quad \text{Mittlere freie Weglänge.}$$



3.2 Zufallsweg

Wenn wir den Weg eines bestimmten Gasteilchens verfolgen, so wird es nach der obigen Betrachtung einen Zickzackkurs mit der mittleren Schrittlänge $\langle L \rangle$ einschlagen, wobei jede neue Schritttrichtung unabhängig von der vorangegangenen gleich wahrscheinlich ist. Wie weit wird sich das Teilchen in der Zeit t von seinem Ursprung entfernt haben? Wir wollen diese Frage am einfacheren Beispiel der Bewegung in einer Dimension diskutieren. Ein Teilchen startet vom Nullpunkt und macht total N Schritte der Länge a entlang der x -Achse. Die Wahrscheinlichkeit einen Schritt vorwärts oder rückwärts zu tun sei gleich gross. Die Wahrscheinlichkeits-Rechnung führt uns in diesem Fall auf die Binomialverteilung. Sie lautet:

$$(14) \quad w(\pm n \cdot a) = \binom{N}{\frac{N-n}{2}} \cdot 2^{-N}, \quad \text{Binomialverteilung.}$$

$w(\pm n \cdot a)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach total N Schritten der Länge a , ein Punkt im Abstand $n \cdot a$ vom Startpunkt aus erreicht wird. Wir berechnen den quadratischen Mittelwert $\langle X_N^2 \rangle$, der ein Mass für die Breite der symmetrischen Verteilung ist:

$$X_N^2 = \left(\sum_{i=1}^N a_i \right) \left(\sum_{j=1}^N a_j \right) \quad \text{oder} \quad X_N^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i \cdot a_j.$$

Bei der Bildung des Mittelwertes wird die zweite Summe null, weil die Schritte $a_i = \pm a$ statistisch verteilte Vorzeichen haben. Wir erhalten also

$$(15) \quad \langle X_N^2 \rangle = N \cdot a^2.$$

Für grosse N wird die Binomialverteilung durch die Normalverteilung analytisch approximiert. Ist $w(X) \cdot dX$ die Wahrscheinlichkeit, das Intervall dX an der Stelle X zu erreichen, so gilt

$$(16) \quad w(X) = 1/(\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}) \cdot \exp(-X^2/(2 \cdot \sigma^2)), \quad \text{Normalverteilung}$$

mit $\sigma^2 = \langle X^2 \rangle$.

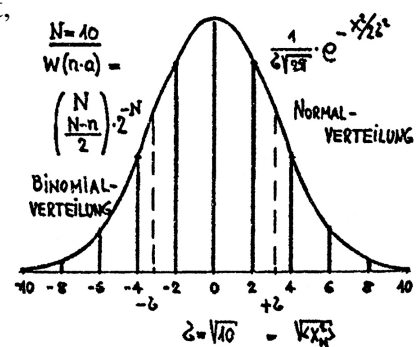
Beachte, dass die Maxwell-Verteilung auch dadurch zustande kommt, dass die kartesischen Komponenten der Geschwindigkeit normalverteilt sind.

Man kann leicht zeigen, dass auch für den Zufallsweg in drei Dimensionen die Gleichung (15) gilt, wobei dann X die Entfernung $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ vom Ursprung bedeutet. Wenden wir dieses Ergebnis auf ein Gasteilchen an, dessen mittlere freie Weglänge $\langle L \rangle$ und dessen Stosszahl N während der Zeit t , $N = \langle v \rangle / (\langle L \rangle) \cdot t$ ist, lautet (15)

$$\langle X_N^2 \rangle = \langle v \rangle / (\langle L \rangle) \cdot \langle L \rangle^2 \cdot t, \quad \text{oder}$$

$$(17) \quad \langle X^2 \rangle = \langle v \rangle \cdot \langle L \rangle \cdot t, \quad \text{somit } \sqrt{\langle X^2 \rangle} \sim \sqrt{t}.$$

Die mittlere Entfernung vom ursprünglichen Ort des Teilchens infolge Diffusion wächst mit der Quadratwurzel aus der Zeit an.



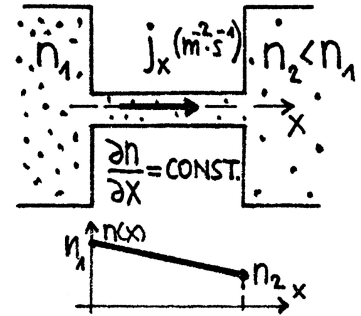
3.3 Diffusion; Fick'sches Gesetz

Als Gedankenexperiment stellen wir uns zwei grosse Kammern vor, die ein Gas der Teilchendichte n_1 bzw. $n_2 < n_1$ enthalten. Nun werden die beiden Volumen durch ein Rohr verbunden. Im stationären Gleichgewicht bewegen sich pro Flächeneinheit durch jeden Rohrquerschnitt gleich viele Teilchen j_x pro Zeiteinheit.

Das Gesetz von Fick besagt, dass die Teilchenstromdichte j_x dem Konzentrationsgefälle $-\partial n/\partial x$ proportional ist.

$$(18) \quad j_x = -D \cdot \partial n / \partial x. \quad \text{Fick'sches Gesetz.}$$

$$D \text{ (m}^2/\text{s)} = \text{Diffusionskoeffizient.}$$



Mit Hilfe von (18) lässt sich eine Differentialgleichung für die orts- und zeitabhängige Teilchendichte $n(x, t)$ herleiten. In das durch die normal zur x-Achse stehenden Flächen A an den Stellen x bzw. $x + dx$ abgegrenzte Volumen fließen in der Zeit dt nach dem Fick'schen Gesetz $A(j_x(x) - j_x(x + dx)) \cdot dt$ Teilchen. Die Kontinuitätsgleichung lautet dann:

$$A(j_x(x) - j_x(x + dx)) \cdot dt = dn \cdot A \cdot dx \quad \text{oder} \quad -\partial j_x / \partial x = \partial n / \partial t.$$

Mit (18) folgt daraus:

$$(19) \quad D \cdot \partial^2 n / \partial x^2 = \partial n / \partial t, \quad \text{Diffusionsgleichung.}$$

3.4 Wärmeleitung

In analoger Weise zum Fall der Diffusion gilt auch ein Fick'sches Gesetz für die Wärmeleitung. Wenn in einem Körper ein Gradient der Temperatur entlang der x-Achse herrscht, so wird pro Flächen- und Zeiteinheit die Wärmeenergie j_Q (W/m^2) transportiert. Hier gilt

$$(20) \quad j_Q = -\Lambda \cdot \partial T / \partial x, \quad \text{Fick'sches Gesetz der Wärmeleitung.}$$

$$\Lambda \text{ (W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}\text{)} = \text{Wärmeleitfähigkeit.}$$

In vollständiger Analogie zur Diffusion folgt dann aus der Energieerhaltung

$$(21) \quad \frac{\Lambda}{\rho c} \cdot \partial^2 T / \partial x^2 = \partial T / \partial t. \quad \text{Diff.-Gleichung der Wärmeleitung.}$$

In (21) bedeutet ρ die Dichte und c die spezifische Wärmekapazität (s. Thermodynamik).

3.5 Brown'sche Molekularbewegung

Bei der Brown'schen Bewegung (Robert Brown, London, 1828) handelt es sich um die Zitterbewegung von in Wasser suspendierten Teilchen (Pollen) von ca. $1 \mu\text{m}$ Durchmesser und 10^{-15}kg Masse. Aus dem Aequipartitionsprinzip (2) ergibt sich:

$$m \cdot \langle v^2 \rangle / 2 = 3 \cdot k \cdot T / 2, \quad \text{und} \quad \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3 \cdot k \cdot T / m} \cong 3 \text{ mm/s.}$$

Unter dem Mikroskop ist die Diffusionsbewegung dieser Teilchen bequem beobachtbar. Welche physikalischen Grössen bestimmen die Diffusionskonstante? Nehmen wir an, die Teilchen seien Kugeln mit dem Radius R und in Wasser suspendiert. Unter dem Einfluss der Schwere sei ihre potentielle Energie $m \cdot g \cdot x$, so dass die Dichteverteilung mit (5) von der Form

$$n(x) = n(0) \cdot \exp(-m \cdot g' \cdot x / (k \cdot T)) \quad \text{und} \quad \partial n / \partial x = -n(x) \cdot m \cdot g' / (k \cdot T) \quad \text{ist.}$$

Mit (18) stellt sich ein nach oben gerichteter Diffusionsstrom

$$j_x = n(x) \cdot m \cdot g' \cdot D / (k \cdot T) \quad \text{ein.}$$

Dieser Diffusionsstrom nach oben wird konkurrenziert durch die Fallbewegung der Teilchen im Schwerfeld. Die Fallgeschwindigkeit v ist durch die Stokes'sche Reibung begrenzt (siehe S.88):

$$m \cdot g' = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R \cdot v; \quad \text{mit} \quad j_{Fall} = -n(x) \cdot v \quad \text{erhalten wir}$$

$$j_{Fall} = -n(x) \cdot m \cdot g' / (6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R).$$

Im stationären Zustand müssen sich j_{Fall} und j_x gerade kompensieren, d.h.

$$\left. \begin{aligned} n(x) \cdot m \cdot g' \cdot D / (k \cdot T) &= n(x) \cdot m \cdot g' / (6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R) \quad \text{und} \\ (22) \quad D &= k \cdot T / (6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R), \end{aligned} \right\}$$

Mit Hilfe der Diffusionsgleichung (19) lässt sich zeigen, dass im eindimensionalen Fall zwischen dem mittleren Verschiebungsquadrat und der Diffusionskonstanten die Beziehung besteht

$$\langle X^2 \rangle = 2 \cdot D \cdot t, \quad \text{siehe auch (17).}$$

Zusammen mit (22) folgt die interessante Beziehung

$$(23) \quad \langle X^2 \rangle = k \cdot T / (3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R) \cdot t, \quad \textbf{Einstein'sche Formel für die Brown'sche Bewegung (1905).}$$

Die Einstein-Formel hat insofern fundamentale Bedeutung, dass sie eine Berechnung der Avogadrozahl aus makroskopischen Beobachtungen zulässt (Perrin 1909) (Für den speziell interessierten Leser: (23) ist das erste Beispiel einer „Fluktuations-Dissipations-Beziehung“).

Kapitel 4

Irreversibler Prozess. Entropie

Es gibt in der Natur Prozesse, die „von selbst“ in einer Richtung ablaufen, aber nie in umgekehrter Richtung beobachtet werden können. Wir betrachten als Beispiel ein Gefäss, dessen Volumen V zunächst durch einen Schieber halbiert wird und dessen linke Hälfte mit einem Mol Gas gefüllt ist. Wird der Schieber geöffnet, so verteilt sich das Gas auf das gesamte Volumen. Die Chance, dass sich per Zufall zu einem späteren Zeitpunkt wieder alle Teilchen in einer Hälfte befinden werden, ist praktisch gleich null, weil die Zahl N der Teilchen so gross ist. Zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten dient uns wieder die Binomialverteilung (14): Ist $w(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich n der N Teilchen in der einen Volumenhälfte befinden, so finden wir

$$w(N/2) = \binom{N}{N/2} \cdot 2^{-N} \quad \text{und} \quad w(N) = \binom{N}{N} \cdot 2^{-N}.$$

Approximation von $N!$ durch $(N/e)^N$ (Stirling'sche Formel) ergibt, dass der tatsächliche Endzustand 2^N mal wahrscheinlicher ist als der Anfangszustand. Wir schliessen daraus, dass das System spontan dem wahrscheinlichsten Zustand zustrebt.

Ist die Wahrscheinlichkeit für einen thermodynamischen Zustand P , so ordnen wir jetzt diesem Zustand eine **Entropie S** zu. Sie ist definiert als

$$(24) \quad S = k \cdot \ln P, \quad \text{Entropie } S \text{ und Boltzmannkonstante } k.$$

Die Entropie S ist eine additive Grösse, denn wenn sich zwei Systeme in Zuständen mit den Wahrscheinlichkeiten P_1 bzw. P_2 befinden, so ist die Gesamtwahrscheinlichkeit $P = P_1 \cdot P_2$ und somit $S = k \cdot \ln(P_1 \cdot P_2)$ oder $S = S_1 + S_2$.

Spontane Prozesse in isolierten Systemen sind offenbar dadurch gekennzeichnet, dass sie nie in Richtung abnehmender Entropie ablaufen.

In unserem speziellen Beispiel ist es so, dass die Wahrscheinlichkeit des Endzustandes

$$P_{End} = 2^N \cdot P_{Anf} \quad \text{und} \quad S_{End} - S_{Anf} = k \cdot N \cdot \ln 2 \quad \text{ist.}$$

Beim spontanen Ausströmen des Gases auf das doppelte Volumen hat die Entropie zugenommen um

$$(25) \quad S = k \cdot N_A \cdot \ln 2 \quad \text{oder} \quad S = R \cdot \ln 2.$$

Demonstrationen:

1. Kugelmodell ideales Gas
2. Volumen ist proportional T
3. Boyle-Mariotte'sches Gesetz
4. Tripelpunktzelle
5. Gasthermometer
6. Platin-Widerstandsthermometer
7. Kupfer-Konstantan-Thermoelement
8. Bimetall-Thermometer
9. Galtonbrett
10. Wärmeleitung von Kupfer und Stahl

Kapitel 5

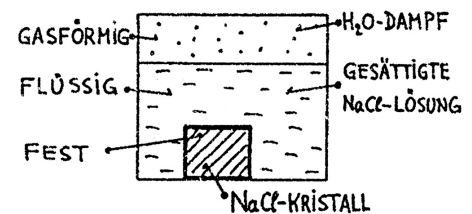
Phänomenologische Thermodynamik

5.1 Das thermodynamische System

Unter einem thermodynamischen System verstehen wir einen Komplex von Körpern, der im Allgemeinen aus mehreren **Phasen** und mehreren **Stoffen** besteht.

Beispiel:

Ein abgeschlossenes Gefäß sei teilweise mit Wasser gefüllt, in welchem sich ein NaCl-Kristall befindet, so dass sich ein Zustand mit den drei Phasen **fest, flüssig und gasförmig** einstellt, der aus zwei Stoffen besteht. Es handelt sich um ein **3-phasiges 2-Stoff-System**. Eine Phase ist ein physikalisch einheitlicher, makroskopischer Teil. Ein Stoff ist durch bestimmte chemische Bausteine (Moleküle) charakterisiert.



Wärmemenge Q :

Treten zwei Systeme in Kontakt, so findet auf mikroskopischer Ebene ein ständiger Energieaustausch zwischen Molekülen statt. Die Summe aller an einem System geleisteten mikroskopischen Arbeiten bezeichnet man als aufgenommene Wärmemenge Q . Unter der Wärmemenge Q versteht man also eine bestimmte Art von Energietransfer, welcher zu einer Änderung der Intensität der ungeordneten molekularen Bewegung führt. Mit der Wärmezufuhr geht eine Temperaturerhöhung einher. Je nach der Art, wie ein System von der Umgebung abgegrenzt ist, unterscheidet man:

Offenes System:

Masse, Wärmemengen und Arbeit können mit der Umgebung ausgetauscht werden.

Abgeschlossenes System:

Es kann keine Energie (auch keine Wärme) und keine Masse mit der Umgebung ausgetauscht werden.

Geschlossenes System:

Es kann keine Masse, wohl aber Energie (inkl. Wärme) mit der Umgebung ausgetauscht werden.

Adiabatisch isoliertes System:

Es kann kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfinden.

5.2 Spezifische Wärmekapazität

Bei Zufuhr der Wärmemenge δQ , erhöht sich die Temperatur T eines Körpers mit der Masse m um dT . Dann ist

$$(26) \quad c = (1/m) \delta Q/dT \quad (\text{J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}), \quad \text{die spezifische Wärmekapazität.}$$

$m \cdot c = \delta Q/dT$ (J/K) ist die Wärmekapazität des Körpers. Die Wärmekapazität C eines Mols eines Stoffes, also

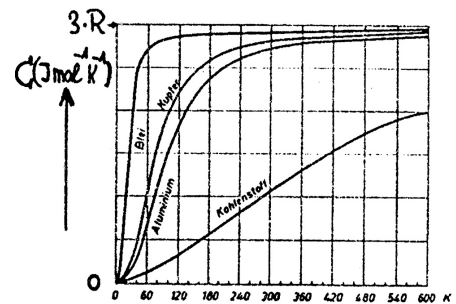
$$(27) \quad C = M_r \cdot c \quad (\text{J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}), \quad \text{ist die molare Wärmekapazität.}$$

$(M_r = \text{relative Molekülmasse oder Masse von 1 mol}).$

Regel von Dulong-Petit (1819):

Die molare Wärmekapazität aller festen Körper ist etwa gleich gross, nämlich $C = 3 \cdot R$ oder $\cong 25 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Diese Aussage ist nur bedingt richtig, denn C ist temperaturabhängig. Für genügend hohe Temperaturen ist sie aber recht gut erfüllt. Mit $T \rightarrow 0$ geht auch $C \rightarrow 0$. Erst die Quantenmechanik konnte diesen Abfall erklären. Nebenstehende Figur zeigt $C(T)$ für einige Stoffe. Sehr grosse Abweichung zeigt Diamant bei Raumtemperatur ($C = 5.9 \text{ J/mol/K}$). Die Regel von Dulong und Petit folgt aus dem klassischen Aequipartitions-Prinzip, wenn man berücksichtigt, dass jedes Atom im Festkörper sechs Freiheitsgrade besitzt, nämlich je drei für potentielle und kinetische Energie, d.h.:



$$\langle E \rangle = 6 \cdot N_A \cdot k \cdot T/2, \quad \text{und} \quad d\langle E \rangle/dT = 3 \cdot N_A \cdot k \quad (= 3 \cdot R).$$

5.3 Zustandsgrößen

Die Gesamtheit der Parameter, welche man zur Beschreibung des physikalischen Verhaltens eines Systems benötigt, nennt man dessen **Zustandsgrößen**. Sie ändern sich unter äusseren Einflüssen und heissen deshalb auch **Zustandsvariablen**. Der Wert einer Zustandsgrösse hängt nur vom augenblicklichen Zustand des Systems ab und nicht von der Art und Weise, auf welche das System in diesen Zustand gebracht wurde. Beispiele von Zustandsgrößen sind:

Druck p , Temperatur T , Volumen V , Masse m , Entropie S , ...

p und T sind Beispiele **intensiver** (volumenunabhängiger) Grössen. V , m und S sind **extensive** oder Quantitätsgrößen. Zustandsgrößen sind nicht voneinander unabhängig. Es besteht für jedes System im thermodynamischen Gleichgewicht eine Verknüpfung der Form

$$(28) \quad f(p, V, T, \dots) = 0, \quad \text{die Zustandsgleichung.}$$

Die Gleichung (28) lässt sich nur in einfachen, idealisierten Fällen explizit angeben. Das wichtigste Beispiel ist für uns die Zustandsgleichung des idealen Gases (4), also

$$p \cdot V - r \cdot R \cdot T = 0.$$

5.4 Nullter und Erster Hauptsatz

Nullter Hauptsatz:

Es existiert eine Zustandsgröße T , die **Temperatur**. Systeme sind im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn sie gleiche Temperatur haben.

Erster Hauptsatz:

Jedes thermodynamische System besitzt als Zustandsgröße eine **innere Energie** U . Diese wächst nach Massgabe der dem System zugeführten Wärmemenge δQ und der am System geleisteten Arbeit δW .

$$(29) \quad dU = \delta Q + \delta W, \quad \text{Erster Hauptsatz.}$$

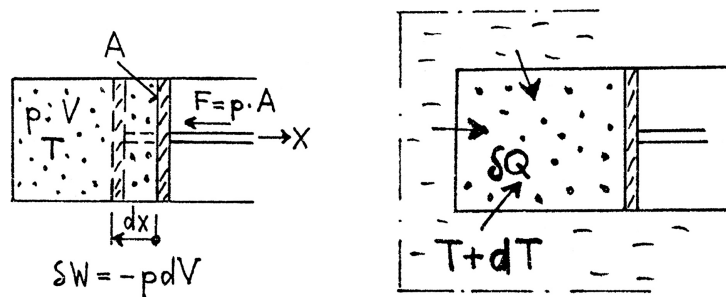
Wichtig:

δQ und δW sind Größen, welche während der Prozessführung auftreten. Q und W sind **keine Zustandsgrößen**. Mathematisch ausgedrückt heisst dies: dU ist ein totales Differential, δQ und δW sind keine totalen Differentiale.

5.5 Anwendung des Ersten Hauptsatzes auf das ideale Gas

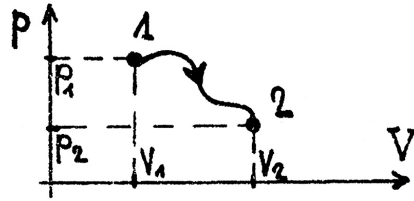
Im Folgenden betrachten wir 1 mol eines idealen Gases, welches sich in einem variablen Volumen (beweglicher Stempel) befindet, also ein **geschlossenes System** bildet. Die **primären Variablen** p , V und T charakterisieren den Zustand, wobei dieser durch ein Variablenpaar bereits festgelegt ist, die dritte Zustandsgröße folgt aus der Zustandsgleichung $p \cdot V - R \cdot T = 0$. Nun können wir den Anfangszustand (p, V, T) ändern durch Verschieben des Stempels der Fläche A um dx , was eine Energiezufuhr $\delta W = -p \cdot A \cdot dx$ oder $\delta W = -p \cdot dV$ bedeutet. Wir können aber auch eine Wärmemenge δQ zuführen. Dies geschieht dadurch, dass das System mit einem **Wärmebad** der Temperatur $T + dT$ umgeben wird. Diese Massnahmen führen auf einen neuen Zustand, dessen innere Energie um dU geändert hat. Nach dem 1. Hauptsatz ist

$$(30) \quad dU = \delta Q - p \cdot dV.$$



Zustandsdiagramm:

Da ein Paar von Variablen den Zustand des Systems festlegt, entspricht jeder Zustand einem Punkt in der (p, V) -, (p, T) - oder (T, V) -Ebene. Wir wollen zunächst eine Zustandsänderung im (p, V) -Diagramm darstellen. Der Anfangszustand 1 sei durch den Punkt (p_1, V_1) , der Endzustand 2 durch (p_2, V_2) repräsentiert. Zu 1 und 2 gehören die Temperaturen $T_1 = p_1 \cdot V_1/R$ bzw. $T_2 = p_2 \cdot V_2/R$.



Reversible Zustandsänderung:

Der Prozess von 1 nach 2 soll aus unendlich vielen, infinitesimalen Schritten im Zustandsdiagramm zusammengesetzt sein, d.h. unendlich langsam über lauter Gleichgewichtszustände ablaufen. In diesem Fall kann der Prozess tatsächlich durch eine Linie von 1 nach 2 dargestellt werden. Diese Art der Prozessführung heisst **reversibel**.

Irreversible Zustandsänderung:

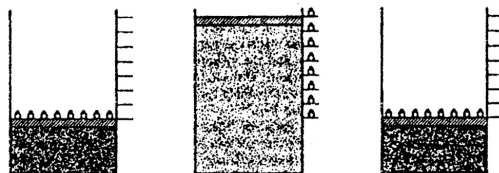
In Wirklichkeit gibt es keine reversiblen Vorgänge im strengen Sinn. Zwischen Anfangs- und Endzustand kann das System nicht im Gleichgewicht sein, weil der Prozess in endlicher Zeit ablaufen muss. Wirkliche Prozesse sind immer **irreversibel**. Das Ausströmen eines Gases in ein grösseres Volumen (s. Kapitel 4) ist ein extremes Beispiel.

Der Begriff des reversiblen Vorgangs kann auch folgendermassen gefasst werden:

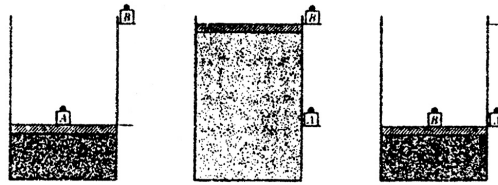
Lässt sich eine Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$ so rückgängig machen ($2 \rightarrow 1$), dass nach Erreichen von 1 in der Natur keine Veränderungen zurückbleiben, dann nennt man den Vorgang einen reversiblen Prozess.

Beispiel:

a) Durch horizontales Wegschieben kleiner Gewichte (unendlich viele), lässt man ein Gas sich von V_1 nach V_2 ausdehnen. In umgekehrter Weise wird es wieder komprimiert. Es bleiben keinerlei Veränderungen zurück, also ist der Vorgang $1 \rightarrow 2$ reversibel.



b) Der Ausgangszustand des Gases ist derselbe, zwei gleiche Gewichte A und B liegen „unten“ bzw. „oben“. Nach Wegschieben von A dehnt sich das Gas rasch aus und pendelt sich auf V_2 ein. Hineinschieben von B bringt das Gas auf das Volumen V_1 zurück. Der Zustand des Gases ist der ursprüngliche, aber die Umgebung ist verändert, indem sich nun A und B „unten“ befinden. Der Vorgang $1 \rightarrow 2$ ist irreversibel.

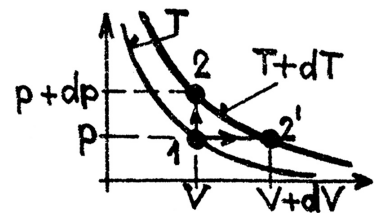


5.5.1 Die molaren Wärmekapazitäten C_V und C_P des idealen Gases

Im Allgemeinen wird die innere Energie U eines Gases von seiner Temperatur und von seinem Volumen abhängen. Im Falle des idealen Gases, wo nach Voraussetzung, ausser beim elastischen Stoss, keine Kräfte zwischen Gasteilchen wirken, besteht U lediglich aus der kinetischen Energie aller Teilchen und hängt somit nur von T ab.

$$(31) \quad U = U(T), \quad \text{für das ideale Gas, (} U \text{ ist nicht V-abhängig).}$$

Im pV -Diagramm sei der Punkt 1 der Anfangszustand (p, V, T) eines Mol idealen Gases. Durch Zufuhr von Wärme **bei konstant gehaltenem Volumen** erreichen wir den benachbarten Punkt 2 des Zustandes $(p + dp, V, T + dT)$. Dieser Prozess erfordert die Wärmemenge



$$(32) \quad \delta Q = C_V \cdot dT, \quad c_v = \text{molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen.}$$

Nach dem ersten Hauptsatz (29) ist dann wegen $dV = 0$ die Zunahme der inneren Energie

$$(33) \quad dU = C_V \cdot dT.$$

Der Punkt 2' soll den Zustand $(p, V + dV, T + dT)$ repräsentieren. Ihn erreichen wir von 1 aus durch Wärmezufuhr bei konstantem Druck. Die erforderliche Wärmemenge ist

$$(34) \quad \delta Q = C_P \cdot dT, \quad c_p = \text{molare Wärmekapazität bei konstantem Druck.}$$

In diesem Fall nimmt die innere Energie zu um

$$(35) \quad dU' = C_P \cdot dT - p \cdot dV.$$

Wegen (31) ist jedoch $dU = dU'$, also

$$C_V \cdot dT = C_P \cdot dT - p \cdot dV.$$

In (35) gilt aber, dass $p \cdot dV = R \cdot dT$ ist (weil $p = \text{const.}$). Somit erhalten wir die Beziehung

$$(36) \quad C_P - C_V = R, \quad \text{für das ideale Gas.}$$

Beachte, dass die Gleichung (33), also $dU = C_V \cdot dT$ für das ideale Gas immer richtig ist, weil U nur von T abhängt.

Die Grösse von C_V für Gase ergibt sich wie schon beim festen Körper aus dem Aequipartitionsprinzip. Die Zahl der Freiheitsgrade ist 3 für atomare Gase, 5 für zweiatomige Moleküle und 6 für Moleküle aus drei und mehr Atomen. Entsprechend ergeben sich nach der klassischen kinetischen Gastheorie die Werte $3R/2$, $5R/2$ und $3R$ für die molaren Wärmekapazitäten bei konstantem Volumen, was bei Raumtemperatur mit den gemessenen Werten ziemlich gut übereinstimmt.

5.5.2 Isotherme Expansion des idealen Gases

Unser Gas sei jetzt ständig in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T . Vergrössern wir in reversibler Weise das Volumen von V_1 auf V_2 , so gibt das System nach aussen Arbeit ab, ohne dass die innere Energie ändert ($T = \text{const.}$). Nach dem ersten Hauptsatz ist dann

$$(37) \quad \delta Q - p \cdot dV = 0.$$

Dies bedeutet, dass die vom System nach aussen abgegebene Arbeit W durch die Wärmezufuhr aus dem Wärmebad kompensiert wird. Mit $p = R \cdot T/V$ bei konstantem T erhalten wir für W :

$$(38) \quad \left. \begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 -p \cdot dV \quad \text{oder} \quad W_{1 \rightarrow 2} = -R \cdot T \int_{V_1}^{V_2} dV/V, \quad \text{somit} \\ W_{1 \rightarrow 2} &= -R \cdot T \cdot \ln(V_2/V_1), \quad \text{Arbeit bei isothermer Expansion.} \end{aligned} \right\}$$

Und wegen (37),

$$(39) \quad \left. Q_{1 \rightarrow 2} = R \cdot T \cdot \ln(V_2/V_1), \quad \text{Wärmezufuhr bei isothermer Expansion.} \right\}$$

5.5.3 Adiabatische Zustandsänderung

Das System sei nun durch Wände abgegrenzt, welche isolieren, also keinerlei Wärmeaustausch mit der Umgebung zulassen ($\delta Q = 0$). Auf welcher Kurve liegen nun die Zustandspunkte im pV -Diagramm, die bei einer adiabatischen und reversiblen Kompression (oder Expansion) durchlaufen werden? Da $\delta Q = 0$ ist, hat der erste Hauptsatz die Form

$$dU = -p \cdot dV.$$

Eliminieren wir p mit Hilfe der Zustandsgleichung und benützen wir (33), so folgt

$$C_V \cdot dT = -R \cdot T \cdot dV/V \quad \text{und} \quad dT/T = -(R/C_V) \cdot dV/V.$$

Integration ergibt

$$\ln(T_2/T_1) = \ln(V_2/V_1)^{-(R/C_V)}. \quad \text{Mit } (R/C_V) = (C_P/C_V) - 1 \text{ aus (36)} \\ \text{und } \gamma = C_P/C_V \text{ haben wir}$$

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \quad \text{oder}$$

$$(40) \quad \left. T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const.}, \quad \text{Adiabate im TV-Diagramm.} \right\}$$

Daraus erhält man mit $T = p \cdot V/R$

$$(41) \quad \left. p \cdot V^\gamma = \text{const.}, \quad \text{Adiabate im pV-Diagramm.} \right\}$$

Da $\gamma = C_P/C_V$ grösser als 1 ist, z.B. $\gamma = 1.40$ für Luft (warum?), bedeutet (41), dass p auf der Adiabate mit wachsendem V schneller abnehmen muss als auf der Isotherme $p = R \cdot T/V$. Die verlaufen also im pV -Diagramm steiler als die Isothermen.

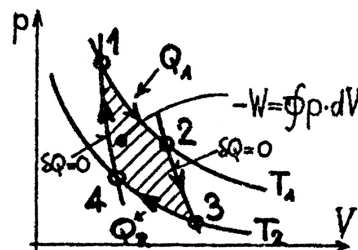
5.5.4 Der Carnot-Kreisprozess mit dem idealen Gas

Der **Carnot-Prozess** ist ein **reversibel geführter Kreisprozess**, dessen Abbild im pV -Diagramm aus zwei **isothermen** und zwei **adiabatischen** Kurvenstücken besteht. Wir wollen als Arbeitssubstanz 1 mol ideales Gas wählen, den Kreisprozess $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ betrachten und die dem System dabei zugeführten Wärmemengen Q_1 und Q_2 sowie die Arbeit $W = \oint -p \cdot dV$ berechnen. Bei der isothermen Expansion $1 \rightarrow 2$ wird dem System nach (39) die Wärmemenge

$$(42) \quad Q_1 = R \cdot T_1 \cdot \ln(V_2/V_1)$$

zugeführt, d.h. dem Wärmereservoir der Temperatur T_1 entnommen. Bei der isothermen Kompression $3 \rightarrow 4$ wird die positive Wärmemenge

$$-Q_2 = R \cdot T_2 \cdot \ln(V_3/V_4)$$



dem Gas entzogen, d.h. ans Wärmebad der Temperatur T_2 abgegeben. Weil die Punktepaare 2 und 3, bzw. 1 und 4 auf Adiabaten liegen und Schnittpunkte mit den Isothermen T_1 und T_2 sind, folgt aus (40) für die Volumenverhältnisse: $V_2/V_3 = V_1/V_4$ oder $V_2/V_1 = V_3/V_4$. Die dem System während eines Zyklus zugeführte Wärmemenge $\oint \delta Q = Q_1 + Q_2$ wird dann

$$(43) \quad Q_1 + Q_2 = R \cdot (T_1 - T_2) \cdot \ln(V_2/V_1).$$

Daraus ergibt sich durch Anwendung des ersten Hauptsatzes sofort die Arbeit $W = \oint -p \cdot dV$, denn $\oint dU = 0$ (die innere Energie U ist eine Zustandsgrösse) bedeutet wegen (29) auch: $W = -\oint \delta Q$, d.h.:

$$(44) \quad W = -(Q_1 + Q_2) \quad \text{oder} \quad W = -R \cdot (T_1 - T_2) \cdot \ln(V_2/V_1).$$

W ist hier negativ, in jedem Zyklus wird die mechanische Arbeit $-W$ nach aussen abgegeben. Der Prozess kann beliebig oft wiederholt werden; wir haben eine **Wärmekraftmaschine**. Das Verhältnis $\eta = -W/Q_1$ von abgegebener Arbeit zu hineingesteckter Wärmemenge bezeichnen wir als Wirkungsgrad. Aus (42) und (44) erhalten wir den **Carnot-Wirkungsgrad**

$$(45) \quad \eta = 1 - T_2/T_1 \quad \text{oder} \quad \eta = 1 + Q_2/Q_1$$

und daraus die Beziehung $T_2/T_1 = -Q_2/Q_1$, also

$$(46) \quad Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0.$$

Aus (45) lesen wir ab, dass $\eta < 1$ umso grösser ist, je grösser die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ der Wärmereservoirs ist. Ferner geht daraus hervor, dass die zugeführte Wärme Q_1 niemals vollständig in mechanische Energie verwandelt werden kann. Wird der Kreisprozess in umgekehrter Richtung durchlaufen, ändern Q_1 , Q_2 und W ihr Vorzeichen (bei gleich bleibenden Beträgen), es liegt eine **Wärmepumpe** oder **Kältemaschine** vor, welche mit W angetrieben wird, $|Q_2|$ einem Reservoir der Temperatur T_2 entzieht und $|Q_1|$ an den Wärmespeicher der höheren Temperatur T_1 abgibt. $|Q_1|/W = 1/\eta$ nennt man die Leistungsziffer der Wärmepumpe ($= T_1/(T_1 - T_2)$).

5.6 Der Zweite Hauptsatz

Der erste Hauptsatz (29) drückt die Tatsache aus, dass die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems erhalten bleibt, d.h. $dU = 0$, wenn $\delta Q = 0$ und $\delta W = 0$. Eine Maschine, welche dem ersten

Hauptsatz widersprüche, wäre ein **Perpetuum Mobile erster Art**.

Der zweite Hauptsatz macht eine Aussage über die Richtung, in welcher Prozesse ablaufen und trägt der Erfahrung Rechnung, dass Vorgänge denkbar sind, die zwar dem ersten Hauptsatz nicht widersprechen würden, aber trotzdem nie beobachtet werden. Zum Beispiel ist noch nie beobachtet worden, dass ein Stab spontan an einem Ende immer heißer wird, am andern Ende dafür immer kälter, auch wenn die Gesamtenergie dabei nicht ändern würde. Wir wollen drei verschiedene, aber äquivalente Formulierungen des zweiten Hauptsatzes geben:

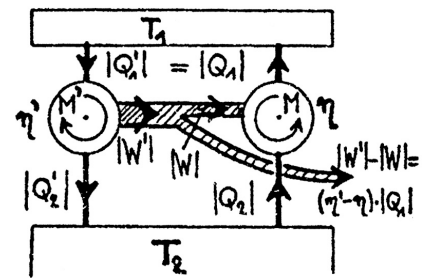
a) Es gibt keine periodische Maschine, die nichts anderes bewirkt, als ein einziges Wärmebad abzukühlen und die entzogene Wärme in Form mechanischer Arbeit nach aussen abzugeben (**Perpetuum Mobile zweiter Art**).

b) Der Carnot-Wirkungsgrad $\eta = 1 - T_2/T_1$ ist der bestmögliche Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine.

c) Es existiert eine Zustandsfunktion S , die Entropie. Sie ist definiert durch: $dS = \delta Q_{REV}/T$. Bei Zustandsänderungen in **abgeschlossenen Systemen** kann die Entropie nicht abnehmen: $dS \geq 0$.

5.6.1 Der Carnot-Prozess mit einer beliebigen Substanz

Der Ausdruck (45) für den Wirkungsgrad η einer reversiblen Carnot-Maschine M gilt zunächst nur, wenn als Arbeitsmittel ein ideales Gas verwendet wird. Es stellt sich nun die Frage nach dem Wirkungsgrad η' einer reversiblen Carnot-Maschine M' , die mit einer beliebigen Substanz arbeitet. Wir nehmen einmal an, es sei $\eta' > \eta = 1 - T_2/T_1$. Jetzt betreiben wir M' als Wärmekraftmaschine zwischen den Wärmereservoirs der Temperaturen T_1 und T_2 . Von der Arbeit $|W'| = \eta' \cdot |Q'_1|$ zweigen wir den Anteil $(\eta/\eta') \cdot |W'| = |W|$ zwecks Antrieb von M als Wärmepumpe ab. Dann wird $|Q_1| = |Q'_1|$, d.h. das Wärmebad der Temperatur T_1 wird nicht abgekühlt.



Die Arbeitsdifferenz $|W'| - |W| = (\eta' - \eta) \cdot |Q_1|$ kann nach aussen abgegeben werden. Nach dem ersten Hauptsatz ist $|W'| - |W| = |Q_2| - |Q'_2|$, also gleich der dem Wärmebad der Temperatur T_2 entzogenen Wärme. Im Widerspruch zur Formulierung a) des zweiten Hauptsatzes, haben wir ein perpetuum mobile zweiter Art erhalten. Die Annahme $\eta' > \eta$ kann also nicht zutreffen. $\eta' < \eta$ führt auf denselben Widerspruch, weil wir dann die Rollen von M und M' nur zu vertauschen brauchen. Daraus folgt zwingend, dass $\eta' = \eta$ sein muss. **Für jeden reversiblen Carnot-Prozess gilt unabhängig von der verwendeten Arbeitssubstanz:**

$$(47) \quad \eta = 1 - T_2/T_1 \quad \text{oder} \quad \eta = 1 + Q_2/Q_1 \quad \text{und folglich auch}$$

$$(48) \quad Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0.$$

5.6.2 Carnot-Prozess und thermodynamische Temperaturskala

Die Gleichungen (47) und (48) lassen eine Temperaturdefinition zu, welche von keinerlei Materialeigenschaften abhängt. Wir legen fest, die Temperatur des Tripelpunktes von Wasser sei $T_0 = 273.16$ K. Jetzt können wir im Prinzip jede andere Temperatur T mit Hilfe einer Carnot-Maschine bestimmen,

indem wir diese zwischen T und T_0 betreiben und den Wirkungsgrad $\eta = -W/Q_1$ messen. Zum Beispiel folgt für $T > T_0$ aus (47):

$$| T = 273.16/(1 - \eta).$$

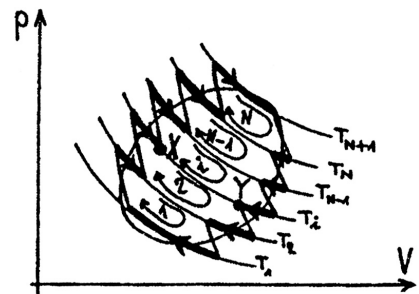
Q_1 könnte etwa so bestimmt werden, dass man das Wärmebad elektrisch derart beheizt, dass T bei arbeitender Carnot-Maschine konstant bleibt (die Konstanz von T kann mit einem ungeeichten Pt-Widerstandsthermometer festgestellt werden). Die notwendige elektrische Energie wäre äquivalent Q_1 . Man nennt die so definierte Temperatur die **thermodynamische Temperatur** (Lord Kelvin, 1848); sie ist identisch mit der in Kelvin gemessenen absoluten Temperatur des fiktiven idealen Gasthermometers (siehe S.113), kommt aber, im Gegensatz zu diesem, ohne Forderung nach speziellen Stoffeigenschaften aus.

5.6.3 Die Entropie S

Die Unmöglichkeit des perpetuum mobile zweiter Art hat verlangt, dass beim reversiblen Carnot-Kreisprozess die Gleichung (48) gilt, also die Summe der „reduzierten Wärmen“ $Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$ ist. Etwas kompakter können wir schreiben:

$$(49) \quad \oint_{\text{Carnot}} \delta Q(\text{rev})/T = 0.$$

Nun lässt sich die Gültigkeit von (49) auch im Falle eines beliebigen reversibel geführten Kreisprozesses beweisen, wenn man diesen in eine Summe von Carnot-Prozessen zerlegt, deren Isothermen zu Temperaturen gehören, welche sich um infinitesimale Werte dT unterscheiden. Auf jeden der N Teilprozesse (C.P.) wenden wir (49) an und bilden die Summe



$$\sum_{i=1}^N \oint_{i\text{-ter C.P.}} \delta Q(\text{rev})/T = 0.$$

Die Integrationsbeiträge entlang den gemeinsamen, isothermen Wegstücken X-Y zweier Teilprozesse heben sich auf, weil sie entgegengesetzte Vorzeichen haben (isotherme Expansion, bzw. Kompression). Es bleiben nur die Beiträge von den in der Figur stark ausgezogenen isothermen Wegstücken übrig. Mit $n \rightarrow \infty$ wird jeder allgemeine reversible Kreisprozess beliebig gut approximiert, so dass gilt:

$$| (50) \quad \oint \delta Q(\text{rev})/T = 0, \quad \text{in jedem reversibel geführten Kreisprozess.}$$

Dieser Ausdruck bedeutet, dass der Integrand $\delta Q(\text{rev})/T$ ein totales Differential ist, oder mit andern Worten: **es existiert eine Zustandsgröße S**, welche definiert ist durch

$$| (51) \quad dS = \delta Q(\text{rev})/T, \quad \text{Definition der Entropie S.}$$

S ist differentiell definiert, daher nur bis auf eine Konstante bestimmt (analog der potentiellen Energie). Diese Unbestimmtheit wird durch den dritten Hauptsatz der Wärmelehre (Wärmethorem von W. Nernst) behoben, auf den wir hier aber nicht eingehen können.

Wichtig:

δQ in (51) bedeutet eine **reversibel** zugeführte Wärmemenge, was durch „(rev)“ zum Ausdruck gebracht wird. In der Natur auftretende Prozesse enthalten immer **irreversible Anteile**, anstelle von (50) tritt dann:

$$(52) \quad \oint_{irrev} \delta Q/T < 0, \quad \text{beim irreversiblen Kreisprozess.}$$

Am speziellen Beispiel der irreversiblen, isothermen Expansion des idealen Gases und anschliessender isothermer, reversibler Kompression zurück zum Anfangszustand, können wir die Richtigkeit von (52) verifizieren. Erfolgt die Ausdehnung von V_1 auf V_2 etwa durch öffnen eines Schiebers (d.h. irreversibel, wie in Kapitel 4, so wird keine Arbeit nach aussen abgegeben und deshalb auch keine Wärme zugeführt. Somit ist $\int_1^2 \delta Q/T = 0$. Die reversible, isotherme Kompression von V_2 auf V_1 verlangt Wärmeabgabe an die Umgebung, nämlich $Q(2 \rightarrow 1) = -R \cdot T \cdot \ln(V_2/V_1) < 0$, damit wird auch $\oint \delta Q/T < 0$. Wenn wir nun einen beliebigen, irreversiblen Prozess vom Zustand 1 zum Zustand 2 auf reversible Weise wieder nach 1 zurückführen, besagt (52):

$$\int_1^2 \delta Q(irrev)/T + \int_2^1 \delta Q(rev)/T < 0.$$

Wegen (51) ist aber $\int_2^1 \delta Q(rev)/T = S_1 - S_2$, so dass wir schreiben können:

$$(53) \quad S_2 - S_1 > \int_1^2 \delta Q(irrev)/T.$$

Liegt speziell ein abgeschlossenes System vor, so ist die rechte Seite von (53) null und wir erhalten für $\Delta S = S_2 - S_1$ die Beziehung

$$(54) \quad \Delta S > 0, \quad \text{für Prozesse im abgeschlossenen System.}$$

Dies ist der Inhalt der Formulierung c) des zweiten Hauptsatzes, wonach sich die Entropie eines abgeschlossenen Systems bei einer Zustandsänderung niemals verkleinert. Gleichwertige Formulierungen sind:

Die Entropie eines abgeschlossenen Systems strebt einem Maximum zu.

Ist ein abgeschlossenes System im thermodynamischen Gleichgewicht, so ist seine Entropie maximal.

Zur Berechnung von Entropieänderungen:

Um die Entropieänderung während eines wirklichen Prozesses zu berechnen, muss man diesen durch einen reversiblen Prozess ersetzen, der zum gleichen Endzustand führt und darauf (51) anwenden.

Beispiel:

Im Kapitel 4 (siehe S.117) haben wir 1 mol ideales Gas durch Öffnen eines Schiebers auf irreversible Weise vom Zustand (p_1, V_1, T) in den Endzustand (p_2, V_2, T) gebracht. Denselben Endzustand können wir reversibel durch isotherme Expansion herbeiführen. Aus (51) und (37) erhalten wir für die Entropieänderung:

$$\int_1^2 \delta Q(\text{rev})/T = \int_1^2 p \cdot dV/T \quad \text{oder} \quad \Delta S = R \cdot \ln(V_2/V_1).$$

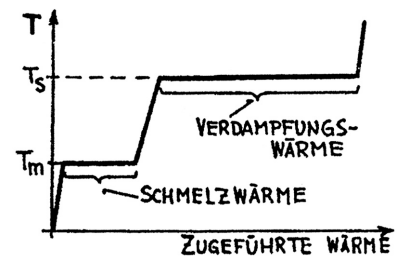
Beachte, dass dieses Resultat für $V_2 = 2 \cdot V_1$ mit (25) übereinstimmt, wo die Entropie statistisch als $S = k \cdot \ln P$ gedeutet wurde.

Übungsaufgabe:

Ein abgeschlossenes System bestehe aus zwei mit je 100 kg Wasser von $T_1 = 330 \text{ K}$ bzw. $T_2 = 290 \text{ K}$ gefüllten Gefäßen. Die Gefäße werden in Wärmekontakt gebracht und es stellt sich eine gemeinsame Endtemperatur ein. Um wie viel hat bei diesem Prozess die Entropie des Systems zugenommen?

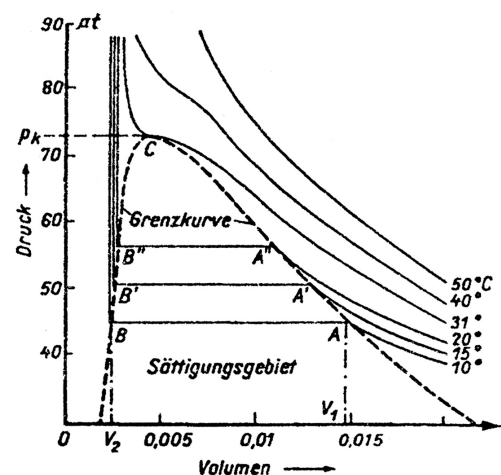
5.7 Aggregatzustände

Führen wir einem einheitlichen, kristallinen Festkörper bei gegebenem Druck p ständig Wärme zu, so steigt seine Temperatur, bis der **Schmelzpunkt** (bzw. **Erstarrungspunkt**) T_m erreicht ist. Dann bleibt $T = T_m$ konstant, bis sich alle feste Substanz in Flüssigkeit umgewandelt hat. Bei T_m stehen **feste Phase** und **flüssige Phase** im Gleichgewicht. Um 1 kg des Stoffes zu schmelzen, muss die **Schmelzwärme** zugeführt werden (Beim Erstarren wird die gleiche Wärmemenge als **Erstarrungswärme** wieder frei.). Weitere Wärmezufuhr lässt die Temperatur bis zum **Siedepunkt** (bzw. **Kondensationspunkt**) T_s ansteigen. Bei $T = T_s$ stehen **flüssige** und **dampfförmige Phase** im Gleichgewicht. Um 1 kg Flüssigkeit zu verdampfen, ist die **Verdampfungswärme** erforderlich (sie wird beim Kondensieren des Dampfes als **Kondensat** wieder frei). Die Siedetemperatur ist **druckabhängig**.



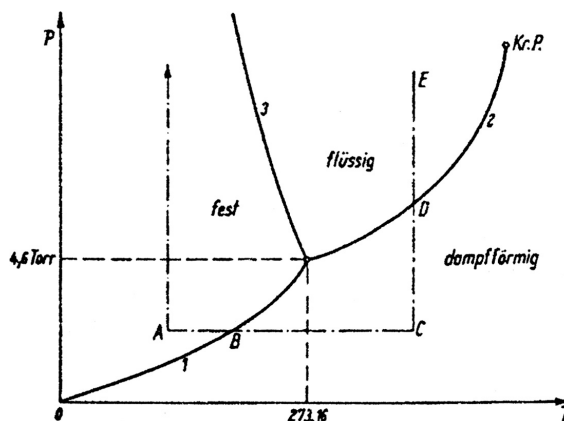
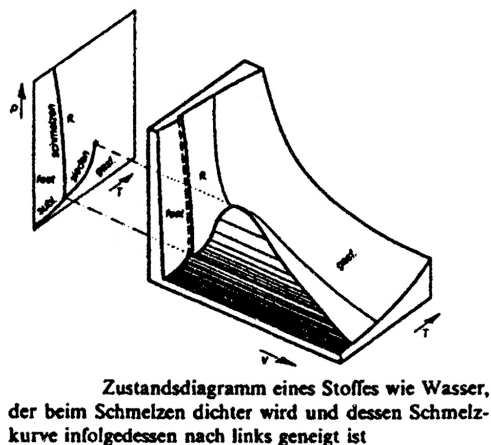
5.7.1 Koexistenz von Flüssigkeit und Dampf

Man denke sich ein variables Volumen mit 1 mol Dampf gefüllt (Zylinder mit Stempel). Verkleinert man das Volumen V bei konstanter Temperatur, so steigt der Druck p bis zum **Sättigungsdruck** oder **Dampfdruck** $p_D(T)$. Nimmt V weiter ab, kondensiert Dampf zu Flüssigkeit, ohne dass $p = p_D$ sich ändert (Koexistenzbereich). Ist aller Dampf kondensiert, steigt der Druck rasch an (geringe Kompressibilität der flüssigen Phase). Die Figur stellt die Isothermen von Kohlendioxyd im pV -Diagramm dar. Mit steigender Temperatur wird der Koexistenzbereich immer schmaler, um schließlich bei der **kritischen Temperatur** T_k zu verschwinden. Oberhalb $T = T_k$ lassen sich Flüssigkeit und Dampf nicht mehr unterscheiden. Nur unterhalb von T_k kann ein Gas durch Erhöhung des Druckes verflüssigt werden. Die Punkte A und B in der Figur geben die Molvolumen von Dampf und Flüssigkeit an. Für $T = T_k$ fallen A und B im **kritischen Punkt** C zusammen. Flüssigkeit und Dampf haben am kritischen Punkt gleiche Dichte. Druck und Volumen am kritischen Punkt bezeichnet man als **kritischen Druck** p_k und **kritisches Volumen** V_k .



5.7.2 Zustandsfläche

Die Zustandsgleichung $f(p, V, T) = 0$ eines Stoffes stellt im p, V, T -Koordinatensystem eine Fläche dar. Neben dem Koexistenzbereich gasförmig-flüssig gibt es auch Bereiche, wo die Phasen fest-flüssig und fest-gasförmig im Gleichgewicht sind. In untenstehender Figur sind die drei Koexistenzbereiche auf der Zustandsfläche schraffiert. Projiziert man die Zustandsfläche auf die p, T -Ebene, so werden die drei Koexistenzbereiche durch die **Sublimationskurve** (fest-gasförmig), die **Schmelzkurve** (fest-flüssig) und die **Siedekurve** (flüssig-gasförmig) dargestellt. Der **Tripelpunkt** ist der Treffpunkt dieser drei Kurven. In ihm sind alle drei Phasen im thermodynamischen Gleichgewicht. Druck und Temperatur sind im Tripelpunkt wohldefinierte, vom Stoff abhängige Größen, z.B. für Wasser: $T = 273.16 \text{ K}$, $p = 613 \text{ Pa}$ ($= 4.6 \text{ mmHg}$).



5.7.3 Die Van der Waals'sche Zustandsgleichung

Die im vorigen Abschnitt angesprochenen Zustandsflächen realer Stoffe lassen keine geschlossene analytische Darstellung der Form $f(p, V, T) = 0$ zu. Immerhin ist es Johannes van der Waals gelungen (Dissertation 1873), eine Zustandsgleichung aufzustellen, welche die Verflüssigung der Gase qualitativ wider gibt und die ideale Gasgleichung quantitativ korrigiert. Sie lautet für 1 mol:

$$(55) \quad (p + a/V^2) \cdot (V - b) = R \cdot T, \quad \text{Van der Waal'sche Gleichung.}$$

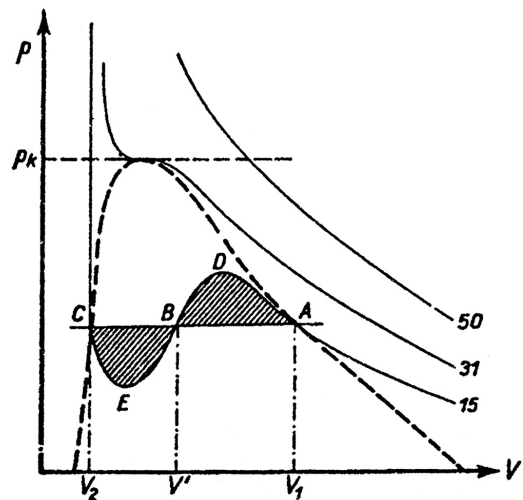
Die Parameter a und b haben folgende physikalische Bedeutung: a ist eine Konsequenz der Anziehungskräfte zwischen Molekülen realer Gase die den **Binnendruck** a/V^2 erzeugen, welcher zum kinetischen Druck p addiert werden muss; b ist das **Kovolumen** oder das Eigenvolumen der Moleküle, welches auch bei noch so grossem Druck p stets vorhanden sein wird. Ausmultipliziert ergibt sich aus (55) bei festem p und T eine Gleichung dritten Grades in V , d.h. jede Isotherme wird durch eine Gerade $p = \text{const.}$ entweder in drei Punkten oder in einem Punkt geschnitten. Zwischen den Punkten A und C in untenstehender Figur verläuft die Isotherme nicht wie im Experiment (siehe S.130) und ist zwischen E und D unphysikalisch (zunehmendes Volumen mit zunehmendem Druck). Maxwell hat gezeigt, dass jene horizontale Gerade A-C dem Dampfdruck entspricht, welche aus den theoretischen Schleifen gleiche Flächen abschneidet.

Für die kritische Temperatur fallen beim kritischen Druck die drei reellen Wurzeln der Gleichung zusammen, für höhere Temperaturen gibt es nur noch ein reelles Volumen. Im kritischen Punkt verschwindet die erste und die zweite Ableitung der Isotherme $T = T_k$ (Wendepunkt und horizontale Tangente). Dadurch lassen sich die van der Waal'schen Konstanten a und b aus den experimentell bestimmten kritischen Daten p , V_k und T_k berechnen:

$$(56) \quad b = V_k/3, \quad a/b = 27 \cdot R \cdot T_k/8, \quad a/b^2 = 27 \cdot p_k.$$

Konstanten a und b einiger Stoffe:

Substanz	a ($\text{m}^6 \cdot \text{bar} \cdot \text{mol}^{-2}$)	b ($\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$)
He	$3.46 \cdot 10^{-8}$	$2.37 \cdot 10^{-5}$
H ₂	$2.56 \cdot 10^{-7}$	$2.70 \cdot 10^{-5}$
O ₂	$1.43 \cdot 10^{-6}$	$3.16 \cdot 10^{-5}$
N ₂	$1.41 \cdot 10^{-6}$	$3.85 \cdot 10^{-5}$
Kr	$2.43 \cdot 10^{-6}$	$3.94 \cdot 10^{-5}$
CH ₄	$2.36 \cdot 10^{-6}$	$4.27 \cdot 10^{-5}$
CO ₂	$3.67 \cdot 10^{-6}$	$4.25 \cdot 10^{-5}$
Cl ₂	$6.81 \cdot 10^{-6}$	$5.60 \cdot 10^{-5}$



Van der Waals-Isothermen eines realen Gases, T in $^{\circ}\text{C}$

5.7.4 Der Joule-Thomson-Prozess

Der Joule-Thomson-Prozess besteht darin, dass ein Gas mit Hilfe eines Stempels 1 vom Anfangsvolumen V_1 bei konstantem Druck p_1 durch eine Drossel (poröse Wand) hindurchgepresst wird und dabei auf den Druck $p_2 < p_1$ und das Endvolumen V_2 entspannt wird. Der Stempel 2 wird derart nach aussen bewegt, dass p_2 konstant bleibt. Das System ist **adiabatisch isoliert**. Nach dem ersten Hauptsatz gilt für diesen Prozess:

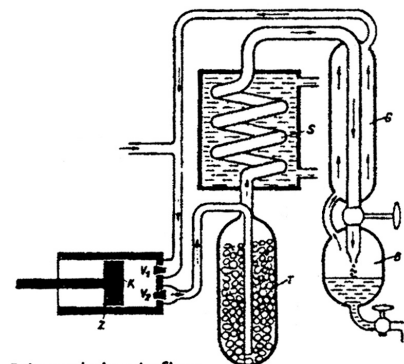
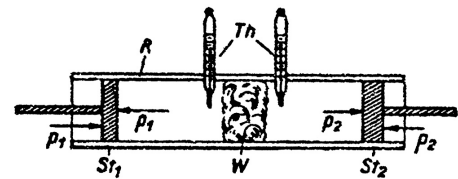
$$(57) \quad U_2 - U_1 = p_1 \cdot V_1 - p_2 \cdot V_2 \quad \text{oder} \quad U_1 + p_1 \cdot V_1 = U_2 + p_2 \cdot V_2.$$

Im Gegensatz zum Gay-Lussac-Versuch (Überströmversuch eines Gases vom Anfangsvolumen V_1 ins evakuierte Volumen V_2 , also zum Endzustand mit Volumen $V_1 + V_2$), handelt es sich hier um ein **nicht abgeschlossenes System**, so dass die innere Energie beim Prozess ändert. Die Grösse, welche konstant bleibt, ist nach (57)

$$(58) \quad H = U + p \cdot V, \quad \text{die Enthalpie } H.$$

Ein reales Gas erfährt beim Joule-Thomson-Prozess eine Temperaturänderung, welche die Grundlage bildet zur technischen Gasverflüssigung und zur Erzeugung tiefer Temperaturen. Mit Hilfe der van der Waals-Gleichung kann die Temperaturänderung berechnet werden. Wir geben das Resultat ohne Beweis:

$$(59) \quad dT = dp/C_p (2 \cdot a/(R \cdot T) - b).$$



Schematischer Aufbau einer Luftverflüssigungsanlage nach Linde

C_p ist die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck. Beachte, dass dp negativ ist und dann Abkühlung eintritt, wenn $2a/(R \cdot T) > b$ ist. Die Grösse a ist ein Mass für die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen, welche bei der Expansion dem Gas kinetische Energie entziehen und somit Abkühlung bewirken. Als Konkurrenz dazu bewirkt das Kovolumen b bei diesem Prozess eine Temperaturerhöhung. Aus (59) ergibt sich

$$(60) \quad T(\text{Inversion}) = 2 \cdot a/(R \cdot b), \quad \text{die Inversionstemperatur.}$$

Damit sich ein Gas beim Joule-Thomson-Prozess abkühlt ist es notwendig, dass seine Anfangstemperatur unter der Inversionstemperatur liegt.

Beispiele für Inversions- und Siedetemperaturen (in K):

	He	H ₂	N ₂
T(Inversion)	23.6	195	621
T(Siedepunkt)	4.5	20.6	77.4

Aus diesen Daten ist ersichtlich, dass Stickstoff (oder Luft), von Zimmertemperatur ausgehend, durch den Joule-Thomson-Effekt verflüssigt werden kann, nicht aber Wasserstoff und Helium.

Wasserstoff muss deshalb mit flüssigem Stickstoff unter seine Inversionstemperatur vorgekühlt werden. Die Siedetemperatur von Wasserstoff liegt wiederum unter der Inversionstemperatur von Helium und erlaubt dessen Verflüssigung.

Demonstrationen:

1. Dampfmaschine
2. Sterling-Maschine (Heissluftmotor)
Als Wärmekraftmaschine und als Wärmepumpe betrieben.
3. Messung der Verdampfungswärme von Wasser
4. Phasenwechsel von Kohlendioxid
Kritische Füllung.
5. Kritische Opaleszenz von Kohlendioxid
Lichtstreuung infolge der Dichtefluktuationen am kritischen Punkt, weil dort $dp/dV = 0$ ist und somit die Kompressibilität $(1/V) \cdot dV/dp$ divergiert.
6. „Kohlensäure-Schnee“
7. Joule-Thomson-Effekt mit Luft und Wasserstoff
Inversionstemperatur.
8. Osmose
Rotes Blutlaugensalz in Kupfersulfatlösung, Ausbildung einer semipermeablen Ferrizyankupfer-Haut.
9. Nachweis der Diffusion von Luft und von Wasserstoff durch einen Tonzylinder